Дискретна математика

проф. д-р Тодорка Глушкова,
Катедра „Компютърни технологии“, ФМИ

10

АЗБУКИ, ДУМИ И ФОРМАЛНИ ЕЗИЦИ

Въведение

Теоретичната информатика се занимава с:

- формални езици,
- теория на автоматите,
- логика,
- разработка и анализ на алгоритми,
- формална семантика и дава основите за компилатори и математическото формализиране на проблеми.

Тя е формалният „гръбнак" на информатиката. Формални системи, автомати, графи и синтактични диаграми се използват за точно описание на вътрешната логика на формални проблеми. Обикновено тази формална стъпка е основна част от решението на същинския проблем.

Формални езици

- В математиката, логиката и компютърните науки, **формален език** е това множество от думи с крайна дължина (тоест буквени низове) извлечено от дадена крайна азбука.
- Научната теория, за която формалните езици са обект на изучаване се нарича теория на формалните езици.

Формални езици

Например:Азбука може да бъде {c,d} и низ към тази азбука може да бъде cddddc. Типичен език на тази азбука, съдържащ стринга cddddc, ще бъде множеството от всички стрингове, които съдържат същият брой c и d символи.

•Празната дума (низ с нулева дължина) е разрешен и често означаван като e, ε или Λ. Докато азбуката е крайно множество и всеки стринг има крайна дължина, то езикът може съвсем спокойно да се състои от безкрайно много стрингове.

Формални езици

- Дефиниция : ***Азбука*** (или речник) се нарича всяко крайно множество от символи. ***Символите*** се наричат букви. Азбуките бележим с главните латински и гръцки букви K,V,W,Σ и др. Символите ще бележим с малките латински букви.
- Дефиниция: Всяка крайна редица от символи на дадена азбука ще наричаме ***дума*** над тази азбука. Думите ще бележим с малките гръцки букви: α,β,χ...

Формални езици

- Броят на символите в думата определя нейната ***дължина***. Думата с дължина 0 е празната дума ε.
- Дефиниция: Две думи са ***равни***, когато имат една и съща дължина и еднакви първи, втори и т.н. букви, т.е. $\alpha=a_1a_2...a_n$; $\beta=b_1b_2...b_n$.
- Тогава $\alpha=\beta \Leftrightarrow a_i=b_i$ за всяко i= 1...n.

Формални езици

- Дефиниция: ***Формален език*** над дадена азбука ще наричаме всяко множество от думи над тази азбука. Бележим с L.

- Пример: Нека V={0,1} и W={if, then, else, for, do, a, b, c} са две азбуки. Тогава ε, 110101 и 00 са думи над V с дължина 0, 6,2.
- If b then for c do if b then a else c, if b then a else c - са думи над W с дължина 12 и 6.

Други примери за формални езици

- множество на всички думи от {a,b}
- множество { a^n : n е естествено число по-голямо от единица} (където a^n означава a повторено n пъти)
- множество от синтактично правилни програми за даден програмен език.

Операции над думи и формални езици

Дефиниция: ***Конкатинация*** (съединение) на думите α и β ще наричаме непосредственото записване на β след α и ще означаваме $\alpha\beta$. Ако $\alpha=a_1...a_n$; $\beta=b_1...b_n$, то $\alpha\beta=a_1...a_nb_1...b_n$.

Очевидно получената дума $\alpha\beta$ е също дума над разглежданата азбука, следователно конкатенацията е вътрешна операция.

- Конкатенацията не е симетрична операция ($\alpha=00;\beta=11\Rightarrow\alpha\beta=0011$, а $\beta\alpha=1100$)
- За всеки три думи α,β,χ е изпълнено: $(\alpha\beta)\chi=\alpha(\beta\chi)$. Следователно тя е асоциативна операция.
- Пример: (аз имам)компютър = аз(имам компютър)

Операции над думи и формални езици

- <u>Дефиниция:</u> Нека α е дума. Определяме ***степените*** на α така:

$$\alpha^0=\varepsilon;\ \alpha^1=\alpha;\alpha^2=\alpha\alpha \text{ и т.н.}$$

- Нека L1 и L2 са формални езици. Тогава:

а) обединението на езиците $L1 \cup L2=\{w: w\in L1 \vee w\in L2\}$, където w е дума

б) сечение на езиците $L1 \cap L2=\{w: w\in L1 \wedge w\in L2\}$;

в) разлика на езици $L1-L2 = \{w: w\in L1 \wedge w\notin L2\}$;

г) произведение на езици $L1.L2=\{\alpha\beta: \alpha\in L1, \beta\in L2\} \Rightarrow$ от всяка конкатенация на думи от L1 и L2.

Примери

Пример: L1 = {0,01}; L2={1,11}

$L1 \cup L2 = \{0,01,1,11\}$

$L1 \cap L2 = \{\varnothing\}$

L1-L2={0,01}

L1.L2={01,011,0111}

Забележка: От факта, че конкатенацията е асоциативна, но не е комутативна следва, че произведението на езици е асоциативна, но не комутативна операция.

Операции над думи и формални езици

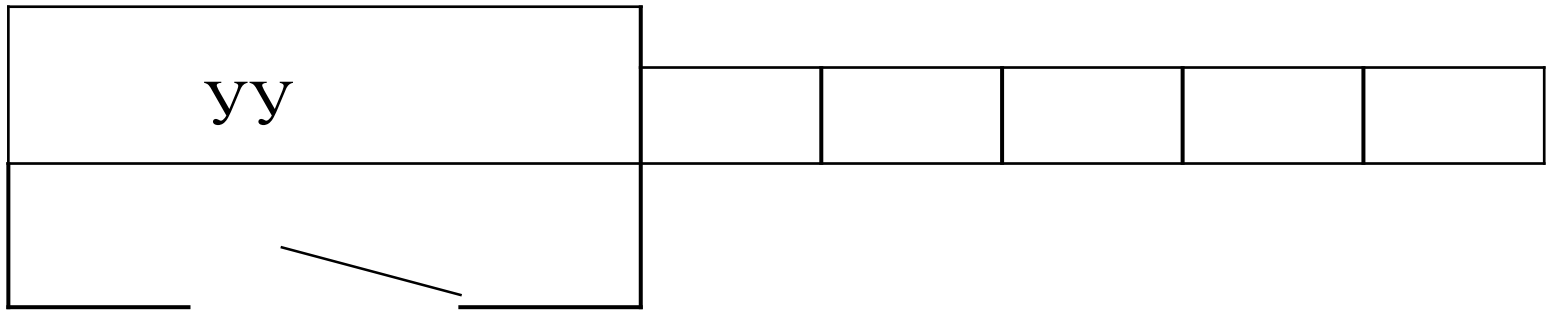
Дефиниция: Нека L е формален език. ***Степените на L*** се определят така: $L^0 = \{\varepsilon\}$; $L^1 = L$; $L^2 = L.L$;... $L^n = L^{n-1}.L$

Дефиниция: ***Итерация L**** на произволен език L ще наричаме обединението на всички степени на L. Т.е $L^* = \cup L^n$, $n \geq 0$.

Итерацията се състои от всички възможни конкатенации на произволен брой думи на L. Ако всички думи са с дължина 1,тогава $L^* = V^*$ - всички думи над V.

Пораждащи граматики и пораждащи езици

Ще разгледаме един основен вид генератори на формални езици - т. нар. ***пораждащи граматики***. Да си представим абстрактно устройство от вида:



Състои се от клетки, във всяка от които има по една буква.

Пораждащи граматики и пораждащи езици

- Управляващото устройство се състои от краен брой вътрешни състояния, като в даден момент се намира само в едно от тях.
- При всяко включване на тока, УУ преминава в едно и също начално състояние.
- След определен брой дискретни тактове на УУ, върху лентата се изписва дума (всеки такт - една буква).
- Машината работи вероятностно (т.е. недетерминирано) и генерира думи.

Пораждащи граматики и пораждащи езици

- За всеки формален език, който може да се опише с крайни средства чрез някакъв автомат, съществува пораждаща го граматика.
- Освен това чрез процеса на пораждане, пораждащите граматики приписват съответна структура на думите от езика, поради което те намират голям брой приложения в математиката и информатиката - от езиците за програмиране и техния автоматичен превод, до моделирането на изчислителните процеси.

Граматика-генератор (Пораждаща граматика)

Дефиниция: ***Граматика-генератор*** е наредена четворка от вида: Г=<V,W,S,P>, където:

- V е азбука на терминалните символи(азбука на пораждащия език)
- W е вътрешна нетерминална азбука от вътрешни състояния на УУ(синтактични категории в езика), като $V \cap W = \varnothing$. Нетерминалните символи играят роля на синтактични категории в езика
- $S \in W$ е начално състояние

Граматика-генератор (Пораждаща граматика)

- P е крайно множество от правила на пораждащата граматика, които представляват наредени двойки от думи, съставени от терминални и нетерминални символи $<\alpha,\beta>$ над $V \cup W$, като в α има поне един нетерминален символ (за β не е задължително).

Правилата на пораждащата граматика описват всеки процес на пораждане на изходната терминална дума от началния символ.

Граматика-генератор

Прието е правилата да се записват във вида $\alpha \to \beta$.

Дефиниция: Думата μ ***се извежда непосредствено*** от думата γ в Г=<V,W,S,P>, ако съществуват думи γ_1 и $\gamma_2 \in (V \cup W)$, такива че $\gamma_1\alpha\gamma_2$, $\gamma_1\beta\gamma_2$ и съществува правило $\alpha \to \beta$.

Пишем: $\gamma \vdash \mu$.

- Когато $\gamma \vdash \gamma 1 \vdash \gamma 2 \ldots \vdash \mu$., пишем $\gamma \models \mu$.

Граматика-генератор

- Дефиниция: Казваме, че думата α ***се поражда*** от граматиката Г, ако съществува извод $s \models \alpha$. Множеството думи, които Г генерира се наричат ***неин език.***

$$L(Г)=\{ \alpha \in V^*: \exists \text{ извод } s \models \alpha\}$$

- Дефиниция: Две граматики са ***еквивалентни***, ако L(Г1)=L(Г2).

Граматика-генератор

- Пример: $\Gamma=<\{0,1\},\{s\},s,\{s \to 01, s \to 0s1\}>$

Очевидно Г е граматика и $s \vdash 01$, като $01 \in L(\Gamma)$;

$$s \vdash 0s1 \vdash 0^2s1^2 \vdash 0^31^3$$
$$0^2s1^2 \vdash 0^2 1^2$$
$$0^2s1^2 \vdash 0^3 s1^3$$

Т.е. $L(\Gamma)=\{0^n1^n;\ n=1,2..\}$

Пример

Г=<{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9},{S},S,{S →S0, S →S1, S →S2, S →S3, S →S4, S →S5, S →S6, S →S7, S →S8, S →S9, S →1, S →2, S →3, S →4, S →5, S →6, S →7, S →8, S →9}>

Тази граматика поражда десетичните записвания на естествените числа.

Например числото 8797 се извежда така:

S $\vdash$ S7 $\vdash$ S97 $\vdash$ S797 $\vdash$ 8797

Видове граматики и формални езици

От общ (нулев)тип- Пораждащи граматики върху правилата, на които не се налагат никакви допълнителни условия, т.е. имат вида $\alpha A\beta \rightarrow w$ (като α,β,w са думи от терминални и нетерминални символи, а A е нетерминален символ).

- В този случай A се замества с w.

Видове граматики и формални езици

- **<u>От контекстен тип</u>** - Пораждаща граматика Г=<V,W,S,P>, всички правила на която имат вида: $\alpha A\beta=\alpha w\beta$, като $\alpha,\beta,w\in(V\cup W)^*$ $w\neq\varepsilon$, $A\in$ W се нарича контекстна граматика <u>(или от клас 1),</u> т.е. А се замества с w само в даден контекст $\alpha\rightarrow\beta$.

Видове граматики и формални езици

- **<u>От безконтекстен тип</u>-** Пораждаща граматика $Г=<V,W,S,P>$, всички правила на която имат вида $A \rightarrow w$ е от тип 2, като A е от W, $w \in (V \cup W)^*$.

Видове граматики и формални езици

- **<u>Автоматна граматика</u>** - Пораждаща граматика Г=<V,W,S,P>, чиито правила са от вида : A $\rightarrow$aB, A$\rightarrow$a, като (A,B $\in$W, a $\in$V) е автоматна или граматика от тип 3.

- **<u>Дефиниция</u>**: Един формален език е автоматен (тип 3), безконтекстен (тип 2), контекстен (тип 1) или от общ тип (тип 0) $\Leftrightarrow$ пораждащата го граматика е съответно от тип 3,тип 2, тип 1 или тип 0.

Примери:

- Граматика с терминални символи {a, b}, нетерминални символи {S, A, B}, правила:

$$S \to ABS$$
$$S \to \varepsilon \text{ (където } \varepsilon \text{ обозначава празната дума)}$$
$$BA \to AB$$
$$BS \to b$$
$$Bb \to bb$$
$$Ab \to ab$$
$$Aa \to aa$$

  и аксиома S, дефинира генеративно езика на всички думи от вида $a^n \circ b^n$ (т.е. n пъти a, последвани от m пъти b).
- Следната по-проста граматика дефинира генеративно същия език:

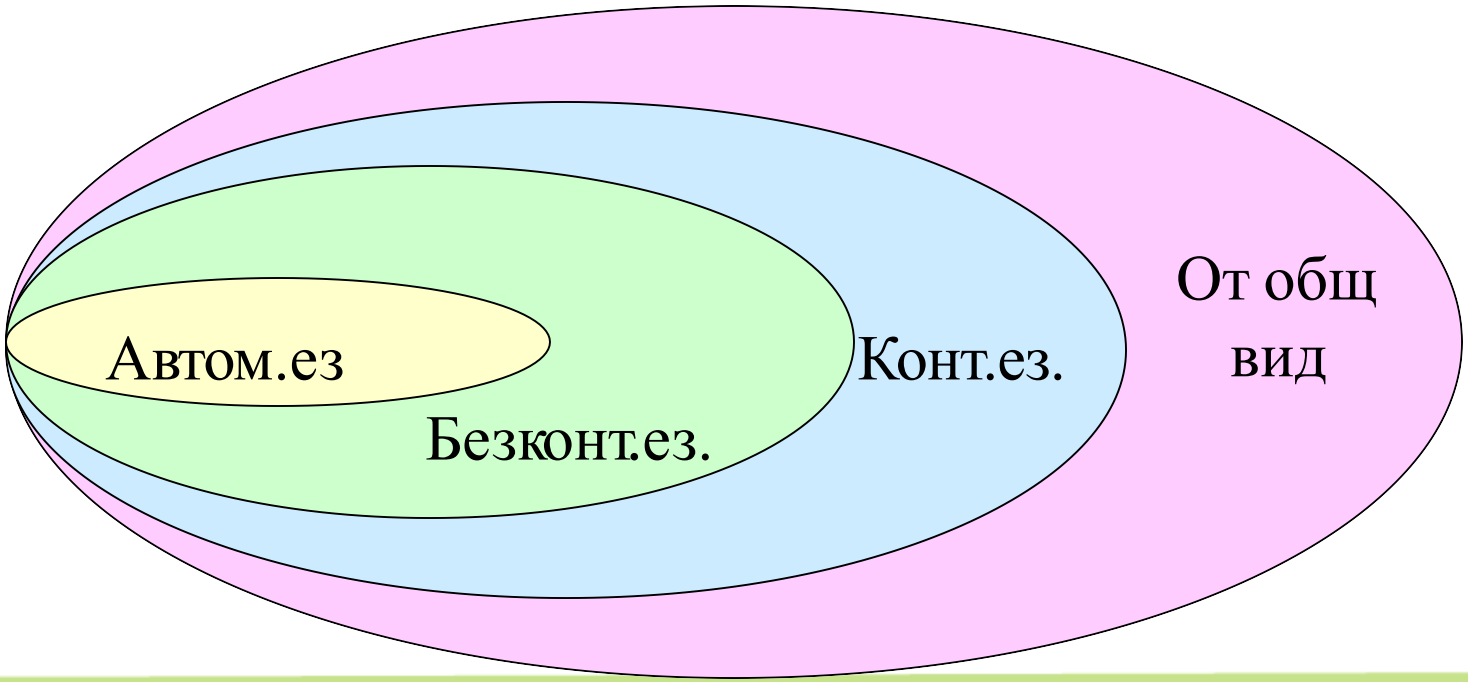
  Терминални символи {a, b}, нетерминални {S}, аксиома S, правила: $S \to aSb$
  $S \to \varepsilon$

Йерархията на Чомски

- Това е йерархия от класове формални граматики, образуващи формални езици.
- Въведена е през 1956 г. от американския лингвист Ноам Чомски.
- Освен в лингвистиката, моделът на граматиките на Чомски намира широко приложение и в други науки, като информатиката (тясно свързано със съответствията с концепти от теорията на автоматите) и биологията (Нилс К. Йерне озаглавява нобеловата си лекция „Генеративната граматика на имунната система“ и разглежда протеиновия строеж в такъв контекст).

Йерархия на формалните езици

- Автоматните, безконтекстните, контекстните и езиците от общ вид образуват йерархията на Чомски за формалните езици



Регулярни езици

- Множеството на регулярните езици е равно на множеството на езиците, разпознавани от крайни автомати, т.е. всеки език, разпознаван от краен автомат, е регулярен (теорема на Клини (Kleene)). Това означава, че всеки регулярен израз може да се представи като краен автомат и обратното.

Абстрактни машини

Типовете в йерархията съответстват на езиците, разпознавани от различни видове абстрактни машини:

Грама-тика	Език	Автомат
Тип 0	рекурсивно изброим	Машина на Тюринг
Тип 1	контекстен	линейно ограничена недетерминирана машина на Тюринг
Тип 2	Безконтекстен	Магазинен автомат
Тип 3	регулярен	Краен автомат

Твърдения

- **Лема:** Нека L е формален език от тип I (I=0..3). Тогава L$\cup$ {ε} и L -{ε} са формални езици от същия тип.
- **Теорема:** Нека L1 и L2 са произволни автоматни езици. Тогава L1$\cup$ L2 е също автоматен език.
- **Теорема:** Нека L1 и L2 са произволни автоматни езици. Тогава L1.L2 е също автоматен език.
- **Теорема:** Всеки краен език е автоматен. (например-българския език.)

Използвана литература в курса

- D. W. Hoffmann, Theoretische Informatik, Hansen Verlag, 2009
- H. P. Gumm, M. Sommer, Einfuehrung in die Informatik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2004
- J. W. Grossman, Discrete Mathematics, Macmillan Pub. Co., 1990
- К. Манев, Увод в дискретната математика, КЛМН, 2005
- Й. Денев, Р. Павлов, Я. Демирович. Дискретна математика. Наука и изкуство, София, 1984.

Използвана литература в курса

- Д. Байнов, С. Костадинов, Р. Павлов, Л. Луканова. Ръководство за решаване на задачи по дискретна математика. Университетско издателство "Паисий Хилендарски", Пловдив, 1990.
- В.А. Успенский, Машина Поста, Москва, Наука, 1988, ISBN 5-02-013735-9.
- L. Lovasz, J. Pelikan, K. Vesztergombi, Discrete Mathematics – Elementary and Beyond, Springer Verlag, New York, 2003, ISBN 0-387-95584-4.

Използвана литература в курса

- E. Bender, S. Williamson, A Short Course in Discrete Mathematics, Dover, 2006, ISBN 0-486-43946-1.
- P. Linz, An Introduction to Formal Languages and Automata, Jones and Bartlett Publishers, 6-th edition, Jones & Bartlett Publishers, ISBN-13: 9781284077247, 2016
- Kenneth H. Rosen, Kamala Krithivasan, Discrete mathematics and its application, McGraw-Hill Companies, 7-th edition, ISBN 978-0-07-338309-5, 2012

Използвана литература в курса

- Owen D. Byer, Deirdre L. Smeltzer, Kenneth L. Wantz, Journey into Discrete Mathematics, AMS, MAA Press, Providence Rhode Island, ISBN 9781470446963, 2018
- Christopher Rhoades, Introductory Discrete Mathematics, Willford Press, ISBN 1682854922, 9781682854921, 2018
- David Liben-Nowell, Discrete Mathematics for Computer Science, Wiley, 2017, ISBN 1119397197, 9781119397199, 2017.
- ***http://www.jflap.org/ -*** софтуерна среда