Дискретна математика

проф. д-р Тодорка Глушкова,
Катедра „Компютърни технологии“, ФМИ

9

Въведение

- В теоремите за пълни множества се определят необходимите и достатъчни условия, но не се дава алгоритъм, чрез който да установим дали F е пълно или не.
- Целта ни е да опишем алгоритъм, чрез който да установяваме пълнота на произволно крайно множество от двоични функции.

Затворено множество

Определение: Множеството C е ***затворено***, ако C=[C].

Например множеството P_2 е затворено.

Определение: Ще казваме, че функцията $f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ ***запазва нулата***, ако $f(0,0,0\dots0)=0$.

Множеството на всички функции, запазващи нулата означаваме с T_0.

Определение: Ще казваме, че функцията $f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ ***запазва единицата***, ако $f(1,1,1\dots1)=1$. Множеството на тези функции означаваме с T_1.

Множествата T_0 и T_1

- Ще формулираме критерий за затвореност

Теорема: F е затворено, ако:

1. Идентитетът $x_i \in F$;
2. Ако $f, g_1, g_2, \ldots g_n \in F$, то всяка съставна функция $f(g_1, g_2, g_3, \ldots g_n) \in F$

Теорема: Множествата T_0 и T_1 са затворени

Доказателство за T_0: 1. $x_i \in T_0$, защото $f(0)=0$

2. Нека $f, g_1, g_2, \ldots g_n \in T_0$ =>
$f(g_1(0,0,\ldots 0), g_2(0,0,\ldots 0) \ldots g_n(0,0,\ldots 0)) = f(0,0,\ldots 0) = 0$

Множествата T_0 и T_1

Да проверим кои от елементарните двоични функции са в T_0 и T_1, кои не са в нито едно от тях и кои са едновременно и в двете.

$\{0, 1, x_1, \neg x_1, x_1.x_2, x_1 \vee x_2, x_1+x_2, x_1 \downarrow x_2, x_1|x_2\}$

- $T_0=\{0, x_1, x_1.x_2, x_1 \vee x_2, x_1+x_2\}$
- $T_1=\{1, x_1, x_1.x_2, x_1 \vee x_2\}$
- $T_0 \cap T_1=\{x_1, x_1.x_2, x_1 \vee x_2\}$
- $\neg x_1, x_1 \downarrow x_2 \notin T_0 \cup T_1$
- $x_1|x_2 \in T_0 \cup T_1$

Самодвойнствени функции

Нека $f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ е двоична функция

- **Определение:** Функцията $f^*(x_1,x_2,\ldots x_n)=\overline{f}(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots\overline{x_n})$
- се нарича ***двойнствена*** над f.
- Заб. Отрицанието на f бележим с $\neg f$ или $\overline{f}$
- **Определение:** Ако $f=f^*$, казваме че f е ***самодвойнствена.***
- Множеството на всички самодвойнствени функции бележим с ***S.***

Пример

x1	x2	x3	f1	¬f1	f1*	f2	¬f2	f2*
0	0	0	**0**	1	**1**	**0**	1	**0**
0	0	1	**1**	0	**1**	**1**	0	**1**
0	1	0	**0**	1	**1**	**1**	0	**1**
0	1	1	**0**	1	**0**	**1**	0	**1**
1	0	0	**1**	0	**1**	**0**	1	**0**
1	0	1	**0**	1	**1**	**0**	1	**0**
1	1	0	**0**	1	**0**	**0**	1	**0**
1	1	1	**0**	1	**1**	**1**	0	**1**

Очевидно f1 $\notin$ S, а f2$\in$S

Въпрос

Ако f*=g, дали g*=f?

$f^*(x_1,x_2,\ldots x_n)=g(x_1,x_2,\ldots x_n)$ /*

$(f^*(x_1,x_2,\ldots x_n))^*=g^*(x_1,x_2,\ldots x_n)$

$f(x_1,x_2,\ldots x_n)=g^*(x_1,x_2,\ldots x_n)$

- Да!

Монотонни двоични функции

- Нека $\alpha=<a_1,a_2,a_3,\dots a_n>$ и $\beta=<b_1,b_2,\dots b_n>$ са две произволни n-орки от 0 и 1.
- <u>**Определение:**</u> Казваме, че α ***предхожда*** β $(\alpha\langle\beta)$ ако $a_i \leq b_i$ за всяко i.
- <u>Например:</u> $<0,0,0,0> \langle <0,0,1,1>$. В общия случай нито $\alpha\langle\beta$ нито $\beta\langle\alpha$.
- <u>**Определение:**</u> Функцията f(x1,x2…xn) е ***монотонна***, ако от $\alpha\langle\beta$ следва $f(\alpha) \leq f(\beta)$ за всяко α и β. Множеството на монотонните функции бележим с **M**.

Монотонни двоични функции

- **Теорема:** Множеството на монотонните двоични функции М е затворено.
- Пример: Монотонна ли е f1, f2, f3:

x1	x2	x3	f1	f2	f3
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	**1**
0	1	0	**1**	0	0
0	1	1	**0**	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	**0**
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

f1 - не
f2 - да
f3- не

Линейни двоични функции

- **Дефиниция:** Една функция е ***линейна***, ако нейния Полином на Жигалкин е линеен. Т.е. $f(x_1,x_2,\ldots x_n)= a_1.x_1+a_2.x_2+\ldots+a_n.x_n$
- Множеството на всички линейни функции бележим с L.
- **Теорема:** Множеството L е затворено.
- Например: 0, 1, x1, x1+x2 са линейни функции.
- **Твърдение:** $f\in L\cap S \Leftrightarrow a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=1$

Пример

- Линейна ли е функцията f?

x1	x2	x3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Изчисляваме коефицентите в ПЖ и получаваме, че $b_1=1$, т.е. $f=x_1.x_3+\ldots$

Следователно f не е линейна.

Теорема на Post

<u>Теорема:</u> Множеството F е пълно, тогава и само тогава, когато $F \not\subset T_0, T_1, S, M, L$

Пример

- Пълно ли е F1={f1,f2,f3}, където:

x1	x2	x3	f1	f2	f3
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1

Пример

- $f1 \in T0$; $f2 \notin T0$; $f3 \in T0 \Rightarrow F1 \not\subset T0$
- $f1 \in T1$; $f2 \notin T1$; $f3 \in T1 \Rightarrow F1 \not\subset T1$
- $f1 \in S$; $f2 \in S$; $f3 \notin S \Rightarrow F1 \not\subset S$
- $f1 \in M$; $f2 \notin M$; $f3 \in M \Rightarrow F1 \not\subset M$
- $f3 \notin L$ … $\Rightarrow F1 \not\subset L$

Тогава от Теоремата на Post F1 е пълно.

Шеферова функция

- **Определение:** Една функция е ***Шеферова***, ако сама образува пълно множество, т.е. {f} е пълно.
- Например: {|} и {↓} са Шеферови
- **Теорема:** Функцията f е Шеферова тогава и само тогава, когато $f \notin T0 \cup T1 \cup S$

Теорема

- <u>Доказателство:</u> Ако f е Шеферова, то {f} е пълно и $f \notin T0 \cup T1 \cup S$.
- Обратно, нека $f \notin T0 \cup T1 \cup S$.Тогава $f \notin T0 \Rightarrow f(0,0..0)=1$ и $f \notin T1 \Rightarrow f(1,1..1)=0$. Следователно $f \notin M$. Остава да докажем, че $f \notin L$. Допускаме противното. Тогава $f=a_1.x_1+a_2.x_2+\dots a_n.x_n+a_0$. От $f \notin T0$ получаваме $a_0=1$. От $f \notin T1$ получаваме, че $f(1,1\dots1)=(a_1+a_2+\dots+a_n)+1=0$ или $a_1+a_2+\dots a_n=1 \Rightarrow f \in L \cap S$. Но това противоречи с факта, че $f \notin S$. Следователно $f \notin L$ и теоремата е доказана.

Използвана литература в курса

- D. W. Hoffmann, Theoretische Informatik, Hansen Verlag, 2009
- H. P. Gumm, M. Sommer, Einfuehrung in die Informatik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2004
- J. W. Grossman, Discrete Mathematics, Macmillan Pub. Co., 1990
- К. Манев, Увод в дискретната математика, КЛМН, 2005
- Й. Денев, Р. Павлов, Я. Демирович. Дискретна математика. Наука и изкуство, София, 1984.

Използвана литература в курса

- Д. Байнов, С. Костадинов, Р. Павлов, Л. Луканова. Ръководство за решаване на задачи по дискретна математика. Университетско издателство “Паисий Хилендарски”, Пловдив, 1990.
- В.А. Успенский, Машина Поста, Москва, Наука, 1988, ISBN 5-02-013735-9.
- L. Lovasz, J. Pelikan, K. Vesztergombi, Discrete Mathematics – Elementary and Beyond, Springer Verlag, New York, 2003, ISBN 0-387-95584-4.

Използвана литература в курса

- E. Bender, S. Williamson, A Short Course in Discrete Mathematics, Dover, 2006, ISBN 0-486-43946-1.
- P. Linz, An Introduction to Formal Languages and Automata, Jones and Bartlett Publishers, 6-th edition, Jones & Bartlett Publishers, ISBN-13: 9781284077247, 2016
- Kenneth H. Rosen, Kamala Krithivasan, Discrete mathematics and its application, McGraw-Hill Companies, 7-th edition, ISBN 978-0-07-338309-5, 2012

Използвана литература в курса

- Owen D. Byer, Deirdre L. Smeltzer, Kenneth L. Wantz, Journey into Discrete Mathematics, AMS, MAA Press, Providence Rhode Island, ISBN 9781470446963, 2018
- Christopher Rhoades, Introductory Discrete Mathematics, Willford Press, ISBN 1682854922, 9781682854921, 2018
- David Liben-Nowell, Discrete Mathematics for Computer Science, Wiley, 2017, ISBN 1119397197, 9781119397199, 2017.
- [http://www.jflap.org/ -](http://www.jflap.org/) софтуерна среда