Дискретна математика

проф. д-р Тодорка Глушкова,
Катедра „Компютърни технологии“, ФМИ

3

Теория на графите

Съдържание:

- Дефиниции
- Видове графи
- Движение през граф
- Представяне на графи и изоморфизъм

Въведение

- През 19 век графите се използват при построяването на схеми на електрични вериги и сложни молекули.
- Постепенно тази теория навлиза в психологията, статистическата механика, теорията на вероятностите, математическата логика, генетиката, социологията и т.н.
- Днес тя е основа в развитието на всички тези дисциплини и най-вече на информатиката.

Основни дефиниции

- <u>Дефиниция:</u> ***Граф*** G=(V,E), където

  - $V \neq \varnothing$ множество на възлите;

  -E – множество на връзките между възлите, наречени ребра. Ребрата са неподредена двойка от по два възела e={u, v}. Казваме, че

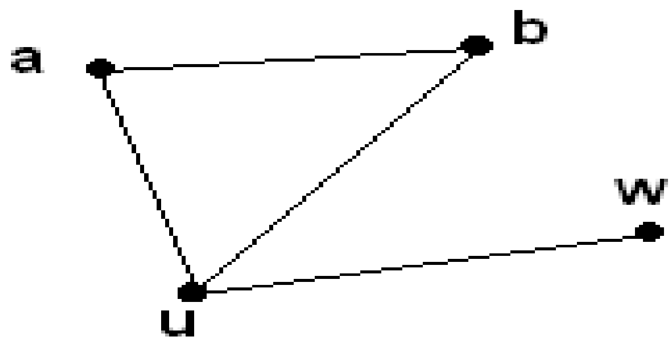
    1) "е свързва u и v"

    2)" u , v-крайни точки на е " или

    3)" u , v-са съседни възли "

Основни дефиниции

- Пример: V={a,b,u,w}, E={au,uw,bu,ab}



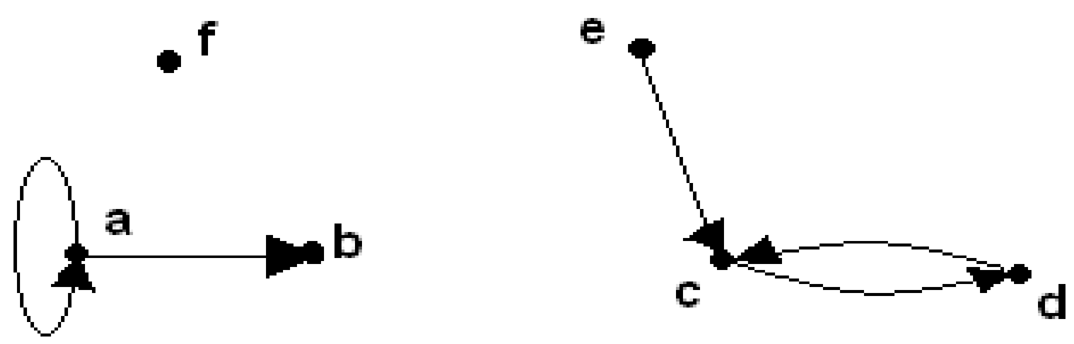
- Когато ребрата са ненасочени, т.е. няма значение кой е първия и кой – втория възел, казваме че графите са ***прости или ненасочени.***

Насочен граф

- <u>Дефиниция:</u> ***G***=(V,E) е ***насочен граф***, ако:
  - G е граф;
  -E – множество от <u>наредени</u> двойки върху V.
  Ребрата в насочения граф се наричат "клони".
- Ако e=(u,v), тогава:
  1) "e свързва u към v";
  2) " u -опашка, v-глава ";
  3)" e излиза от u и влиза във v"

Насочен граф

- <u>Пример:</u> V = {a,b,c,d,e,f}, E={aa,ab,cd,dc,ec}



- Когато u=v (aa), получаваме ***цикъл***.

Видове графи

- Дефиниция:G=(V,E,i) е ***псевдограф***, ако:
  - $V \neq \varnothing$ е крайно множество на възлите;
  - E е крайно множество на ребрата;
  - $i:E \to \{P \subseteq V \text{ , } |P|=1 \text{ или } 2\}$ е инсидентна функция.
- Ако **r** е ребро **i(r)** са крайните му точки.
- Ако |**i(r)**| =1, то реброто свързва една точка със себе си (цикъл).
- Ако за **r** и **q**, **i(r)=i(q),** казваме че **r** и **q** са паралелни ребра.

Видове графи

- <u>Дефниция: </u>Ако графът G има изображение в равнината, при което ребрата се пресичат само във върховете, казваме, че той е ***планарен*** (равнинен), в противен случай е неравнинен или ***пространствен.***

Движение през един граф

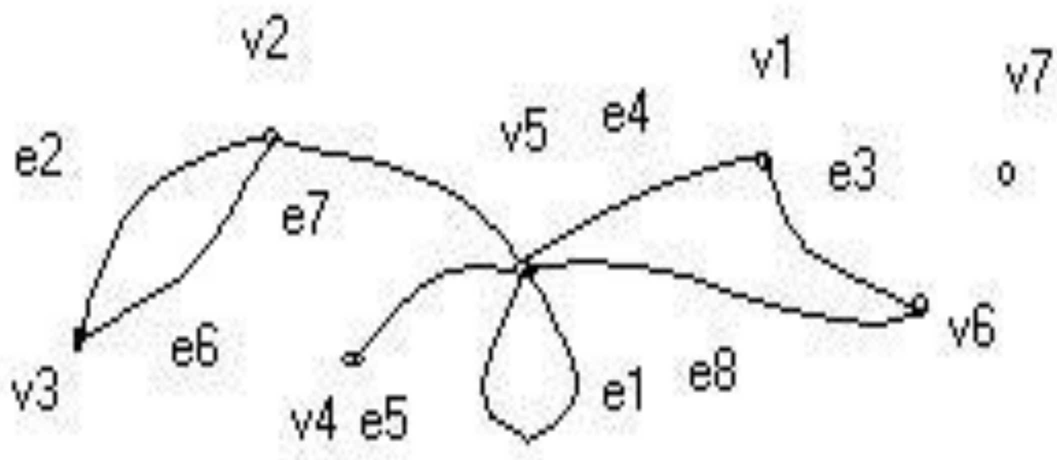
- Дефиниция: Нека G=(V,E) е граф. Тогава един ***маршрут (walk)*** W с дължина n>0 в G е редицата:

  $v_0,e_1,v_1,e_2,v_2,\ldots,v_{n-1},e_n,v_n$, така че $v_k \in V$, а $e_k \in E$ за всяко k=1..n, като e_k свързва v_{k-1} и v_k. W свързва v_0 и v_n от v_0 към v_n .
- Всяко ребро може да се разглежда като маршрут с дължина 1.
- Когато за W са изпълнени и други допълнителни условия, то получава различни наименования:
- Ако $v_0 = v_n$ и $n \geq 1$,то казваме че маршрута W е ***затворен.*** В противен случай е незатворен.

Пример

$m = [v_2, e_7, v_5, e_1, v_5, e_8, v_6, e_3, v_1, e_4, v_5, e_5, v_4]$ е незатворен маршрут, съединяващ v_2 и v_4 с дължина 6.

Заменяйки e_5 с e_7 в m, получаваме затворен маршрут с дължина 6.



Движение през един граф

1. Ако всички ребра в W са различни- се нарича ***верига (trail), (***ако не е затворен)***.***

2. Ако всички възли му са различни се нарича ***елементарен маршрут*** или ***път.***

3. Ако W е затворен и е верига като всичките му възли са различни, казваме че W е ***цикъл.***

4. Забелязваме, че в геометрична реализация елементарната верига образува проста незатворена линия, а елементарния цикъл - проста затворена линия.

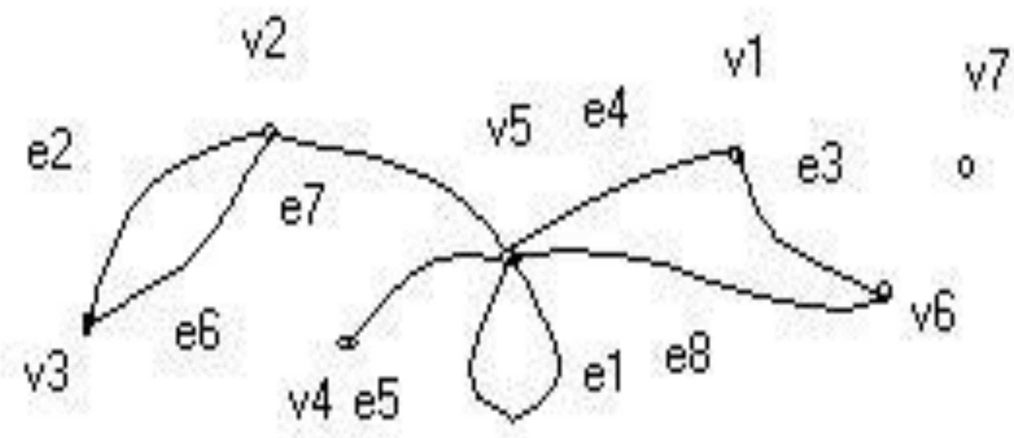
Задача

Определете всички върхове на графа по-горе, до които съществува верига от v_5:

а) с дължина 1

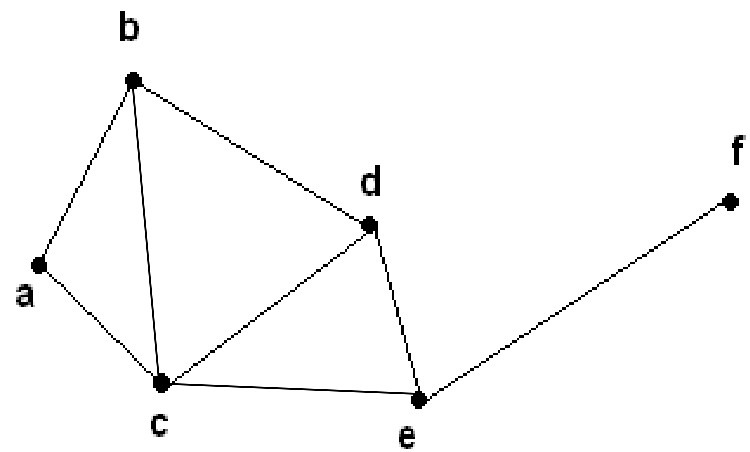
б) с дължина 2

в) с дължина 4



Примери

- a,b,e,d не е маршрут, защото be не е ребро
- b,d,e,d - W е маршрут с дължина 3 от b към d, но не е верига.
- f,e,f – затворен W с дължина 2, но не е верига.
- a,b,d,c – път с дължина 3.
- a,b,c,e,d,c,a –затворена верига с дължина 5, но не е цикъл
- b,c,d,b – цикъл с дължина 3.



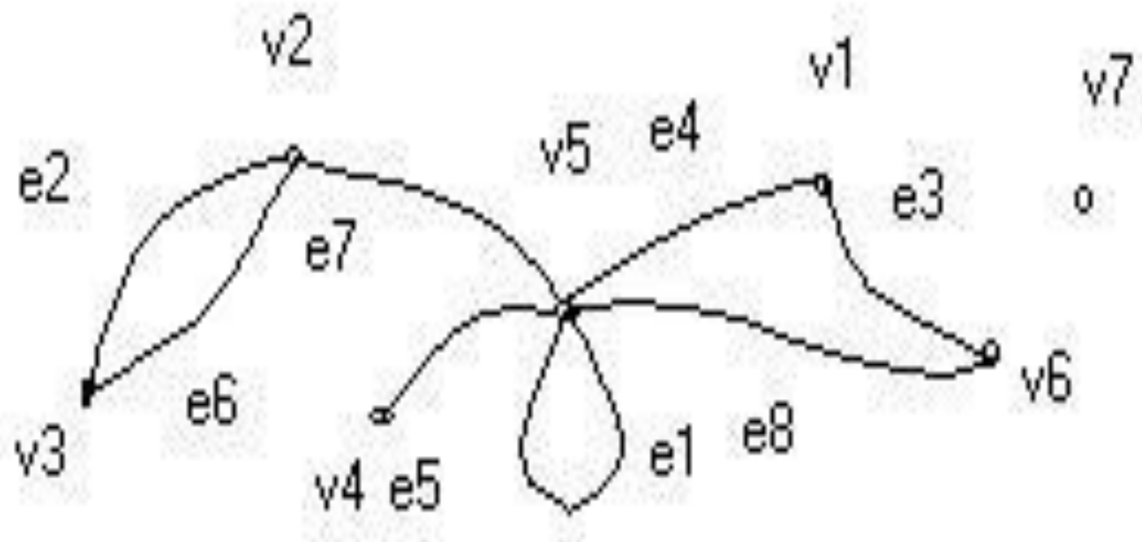
Движение през един граф

- Да отбележем, че ако съществува в G маршрут с дължина n между върховете x и y, то той може да бъде продължена до нов маршрут с дължина n+2

- Тогава между два различни върха x и y на граф G или не съществува никакъв маршрут, или съществуват безброй много. Интересуваме се от маршрута с най-малка дължина. Такава верига винаги съществува. Дължината на ***минималната верига*** означаваме с r(x, y).

Задача

- Определете $r(v_1, v_3)$ за графа от по-горния пример. Колко вериги с тази дължина



Твърдения

- Ако между два различни върха съществува верига, то числото r е еднозначно определено, но може няколко вериги между тези върхове да са с дължина r.
- **Теорема.** Ако в графа съществува верига между върховете x и y, то съществува и поне една елементарна верига между x и y.
- **<u>Теорема:</u>** Ако G съдържа един маршрут от **u** към **v**, то G съдържа път от **u** към **v**.
- **<u>Теорема:</u>** Ако G съдържа една затворена верига, започваща и завършваща във **v**, тогава G съдържа един цикъл с начало и край във **v**.

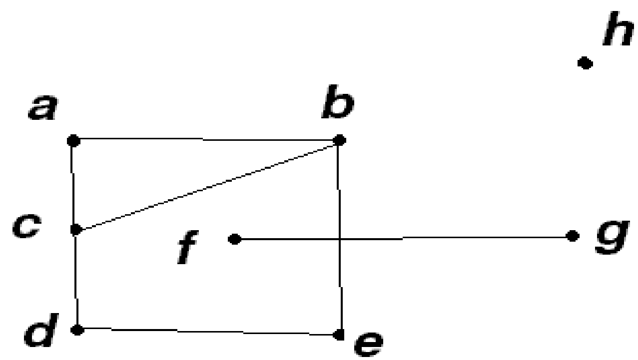
Свързани графи

- <u>Свързани графи</u> – За едно приложение в комуникационната мрежа, например, е важно да се знае дали всеки обект от мрежата има връзка с всеки друг, било директно, било през някои междинни възли.
- <u>Дефиниция:</u> G е ***свързан граф***, ако за всеки два възела съществува маршрут от единия към втория.
- **Компонент на G** е един максимален свързан подграф на G, (т.е. един свързан подграф на G), който не е подграф на никой друг свързан подграф на G.

Пример

Графът не е свързан и има 3 компонента:

- h;
- f, g и реброто, което ги свързва;
- петте останали възли и ребрата, които ги свързват



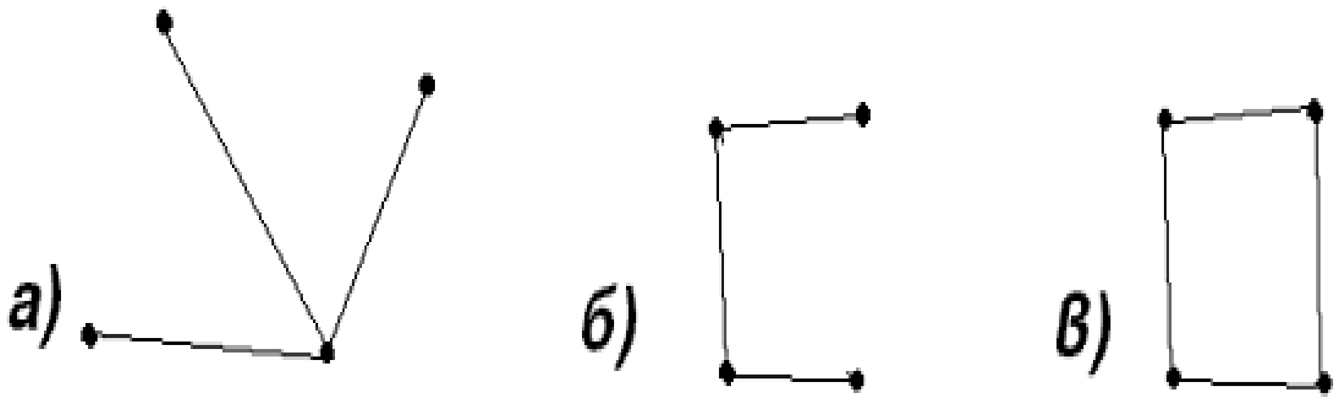
Ойлерови цикли (или турове)

- Дефиниция***: Цикъл(или тур) на Ойлер*** в G е затворена верига, която съдържа всяко ребро само веднъж.
- **Теорема:** Един свързан граф G с най-малко едно ребро има един тур на Ойлер, тогава и само тогава, когато степента на всеки възел в G е четна, т.е. всеки възел участвува четен брой пъти.
- Забележка:Ойлеровите цикли или турове решават прословутата задача за Кьонингсбергските мостове, според която всеки мост трябва да се премине само веднъж.
- Всеки граф, който притежава Ойлеров цикъл се нарича ***Ойлеров граф***.

Цикли на Хамилтън

- **Дефиниция:** Нека G е граф. ***Цикъл на Хамилтън*** в G е цикъл, който съдържа всеки възел на графа. Граф, притежаващ Хамилтънов цикъл се нарича ***Хамилтънов граф.***
- С други думи - Хамилтънов цикъл в G е свързан подграф на G, съдържащ всичките му възли, в който всеки възел има степен 2.
- Всяка проста верига, съдържаща всички възли на един граф G е ***Хамилтънова верига***. Ако един граф е Хамилтънова верига, но не е Хамилтънов цикъл, то той е ***полухамилтънов граф***.

Пример



а) нито Хамилтънов, нито полухамилтънов.

б) полухамилтънов

в)Хамилтънов граф.

Забележка

- Типичен пример за Хамилтънов граф е задачата: “Може ли да се обходят всички полета на шахматната дъска с шахматен кон, като на всяко поле се стъпи само веднъж?”
- Трудността на задачата не е в намирането на желания път на коня, а в намирането на всички възможни пътища с разглежданото свойство и определянето на техния брой.
- Крайчик е доказал, че задачата има повече от 30 млн. решения.

Представяне на графи и изоморфизъм

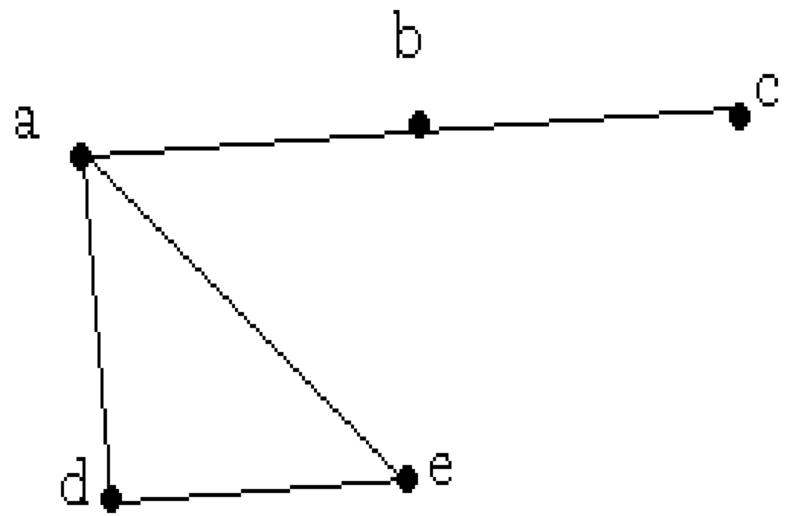
- Ние дефинирахме графите като абстрактен математически обект. Въпросът ни е как да ги представим така, че хората и компютрите да могат да работят с тях?

Матрица за съседство.

- Нека G(V,E) е граф. Тогава матрицата за съседство за G Ag е матрица с размерност (n x n), така че:
- aij = 1,ако $v_i v_j \in E$ или
- aij = 0,ako vivj $\notin$E,
- т.е. 1, ако има ребро между възлите v_i и v_j и 0, ако няма такова ребро.

Пример

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

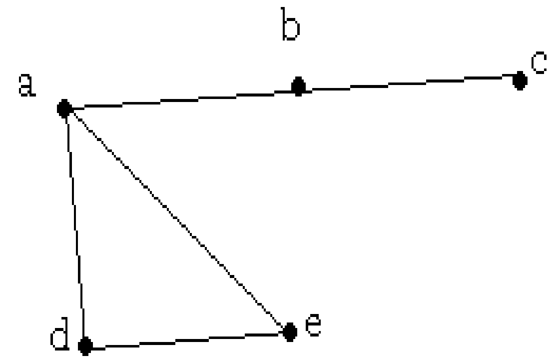


<u>Забележка:</u> Матрицата е симетрична, т.е. съвпада с транспонираната й матрица, тъй като графът е ненасочен.

Представяне на графи и изоморфизъм

<u>Списъци за съседство.</u>

- Това са списъци на възлите, с които всеки възел е свързан.
- Например за горния граф:
  - a: b,d,e;
  - b: a,c;
  - d: a,e;
  - e: a,d



Представяне на графи и изоморфизъм

Изоморфизъм

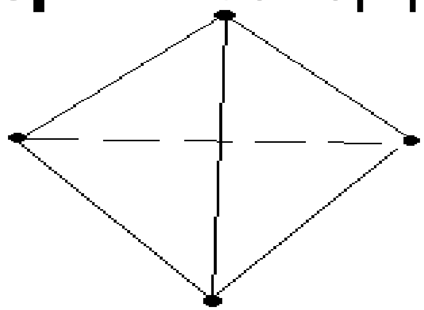
- Да отбележим, че един и същи граф можем да изобразяваме различно.
- Ребрата може да са отсечки или дъги;
- върховете може да са разположени произволно върху равнината или пространството.
- Понякога чрез разместване на върховете един граф може да бъде трансформиран в друг.

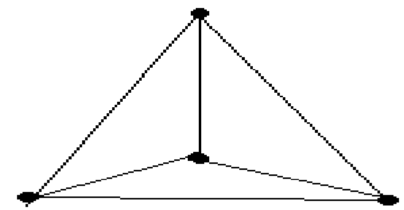
Представяне на графи и изоморфизъм

- Дефиниция: Нека $G=(V,E)$ и $H=(W,F)$ са графи. Казваме, че са ***изоморфни***, ако съществува биекция $\varphi: V \to W$, така че за всяко u , v от V:$(uv \in E \leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in F)$. Тази биекция φ наричаме изоморфизъм между двата графа.
- Ако два графа са изоморфни, свойствата на единия могат да се пренесат и върху другия, което е мощен метод за обработка на графи.

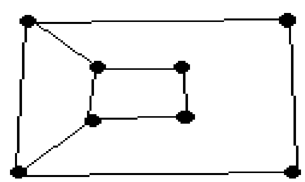
Примери

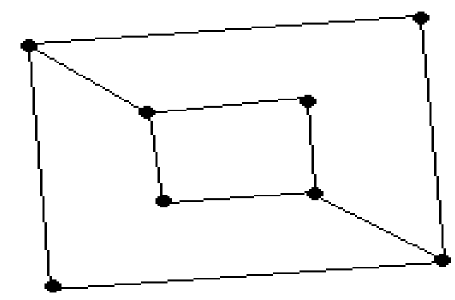
Пример 1: Изоморфни графи





Пример 2: Не изоморфни графи





Използвана литература в курса

- D. W. Hoffmann, Theoretische Informatik, Hansen Verlag, 2009
- H. P. Gumm, M. Sommer, Einfuehrung in die Informatik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2004
- J. W. Grossman, Discrete Mathematics, Macmillan Pub. Co., 1990
- К. Манев, Увод в дискретната математика, КЛМН, 2005
- Й. Денев, Р. Павлов, Я. Демирович. Дискретна математика. Наука и изкуство, София, 1984.

Използвана литература в курса

- Д. Байнов, С. Костадинов, Р. Павлов, Л. Луканова. Ръководство за решаване на задачи по дискретна математика. Университетско издателство "Паисий Хилендарски", Пловдив, 1990.
- В.А. Успенский, Машина Поста, Москва, Наука, 1988, ISBN 5-02-013735-9.
- L. Lovasz, J. Pelikan, K. Vesztergombi, Discrete Mathematics – Elementary and Beyond, Springer Verlag, New York, 2003, ISBN 0-387-95584-4.

Използвана литература в курса

- E. Bender, S. Williamson, A Short Course in Discrete Mathematics, Dover, 2006, ISBN 0-486-43946-1.
- P. Linz, An Introduction to Formal Languages and Automata, Jones and Bartlett Publishers, 6-th edition, Jones & Bartlett Publishers, ISBN-13: 9781284077247, 2016
- Kenneth H. Rosen, Kamala Krithivasan, Discrete mathematics and its application, McGraw-Hill Companies, 7-th edition, ISBN 978-0-07-338309-5, 2012

Използвана литература в курса

- Owen D. Byer, Deirdre L. Smeltzer, Kenneth L. Wantz, Journey into Discrete Mathematics, AMS, MAA Press, Providence Rhode Island, ISBN 9781470446963, 2018
- Christopher Rhoades, Introductory Discrete Mathematics, Willford Press, ISBN 1682854922, 9781682854921, 2018
- David Liben-Nowell, Discrete Mathematics for Computer Science, Wiley, 2017, ISBN 1119397197, 9781119397199, 2017.
- [http://www.jflap.org/ -](http://www.jflap.org/) софтуерна среда