Параметрични криви: Обзор

$\forall$ геом. тяло $\leftrightarrow$ части от криви и повърхнини

Една ***параметрична крива*** в евклидовото пространството E^3 се задава чрез изображение,

$$\boldsymbol{C}: u \in [0,1] \rightarrow \boldsymbol{C}(u)\ \big(x(u), y(u), z(u)\big), \quad x(u),\ y(u),\ z(u) - \text{ реални функции}, \ u \in [0,1]$$

Ако вместо E^3 имаме равнина E^2, тогава липсва третата координата $z(u)$.

Примери

- Права $\boldsymbol{C}(u) = \boldsymbol{B} + u.\boldsymbol{d}$, $u \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{B}$ – дадена точка, а $\boldsymbol{d}$ – колинеарен вектор.

  Ако $\boldsymbol{B} = (b_1, b_2, b_3)$, $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, d_3)$, $u \in [0,1]$, то отсечката от $\boldsymbol{B}$ до $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{d}$ е

$$\boldsymbol{C}(u): \quad \begin{aligned} x(u) &= b_1 + ud_1 \\ y(u) &= b_2 + ud_2 \\ z(u) &= b_3 + ud \end{aligned}$$

- Окръжност с център (p,q) и радиус r има следната параметрична форма:

$$x(u) = r\cos(2\pi u) + p$$

$$y(u) = r\sin(2\pi u) + q$$

Да проверим. Следват $x - p = r\cos(2\pi u)$, $y - q = r\sin(2\pi u)$ и тогава получаваме $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$, което е каноничното уравнение на тази окръжност.

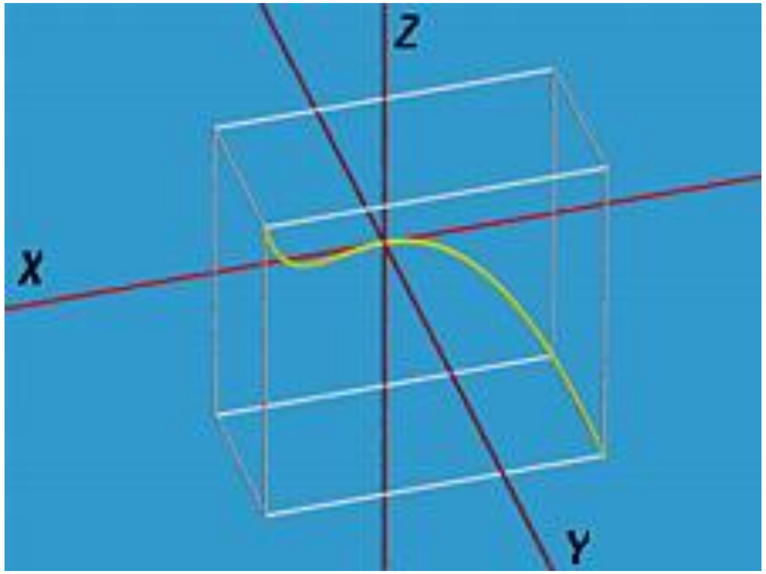
- Една пространствена кубична крива има следния параметричен вид:

$$x(u) = u,$$

$$y(u) = u^2,$$

$$z(u) = u^3.$$

Напр. за $u \in [-1,1]$, $\boldsymbol{C}(u) \subset$ паралелепипед (в бяло на фиг.), деф. чрез върховете му (-1, 0, -1) и (1, 1, 1).

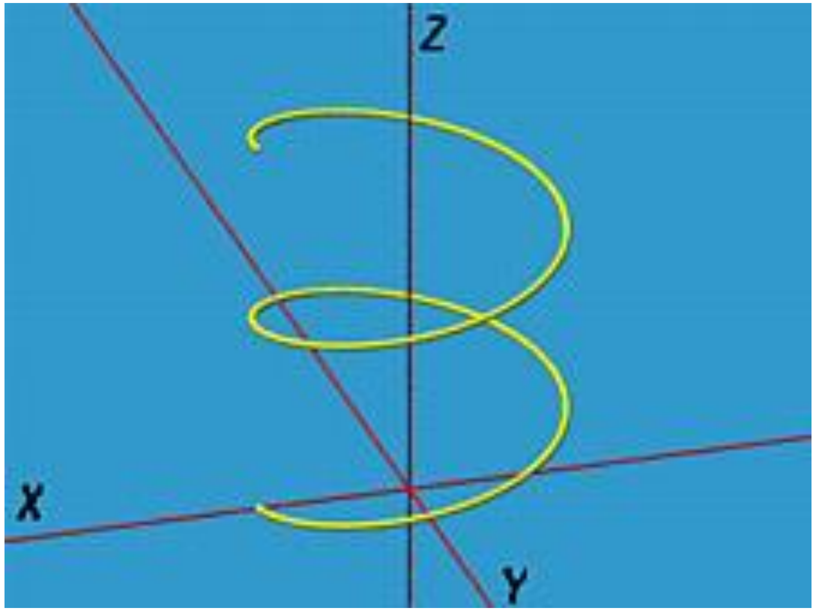


- Кръговата спирала (винтова или витлова линия):

$$\boldsymbol{C}(u) = (a\cos(u),\, a\sin(u),\, bu); \quad a > 0,\ b \neq 0 - \text{const}$$

Напр. за $u \in [0, 4\pi]$, дъгата е м/у т. $(a, 0, 0)$ и $(a, 0, 4\pi b)$.

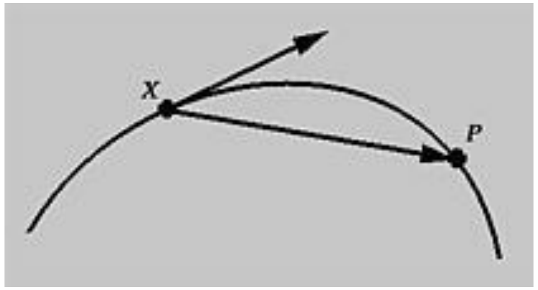
$\boldsymbol{C}(u) \subset$ цилиндъра с радиус a и ос – оста Oz.



Допирателен вектор и допирателна

Нека $\boldsymbol{X}$ – фикс. т., $\boldsymbol{P}$ – движеща се т. $\in \boldsymbol{C}(u)$. Когато $\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{X}$, то векторът от $\boldsymbol{X}$ до $\boldsymbol{P}$ клони към **допирателния вектор** $\boldsymbol{C}'(u)$ на $\boldsymbol{C}(u)$ в $\boldsymbol{X}$.

Правата: $\boldsymbol{C}'(u)$ – ***допирателна*** на $\boldsymbol{C}(u)$ в тази т. Означаваме с $\boldsymbol{t}$.



Допират. вектор на $\boldsymbol{C}(u)$ е нейната производната отн. u:

$$\boldsymbol{C}'(u) = (x'(u), y'(u), z'(u)), \quad x'(u) = dx/du,\ y'(u) = dy/du \text{ и } z'(u) = dz/du.$$

Производната отн. произволен параметър обикновено се означава с точка над функцията.

Тук за улеснение ще бележим с прим.

В общият случай $|\boldsymbol{C}'(u)| \neq 1$. Единичният допир. вектор $\boldsymbol{t}(u)$ е

$$\boldsymbol{t}(u) = \boldsymbol{C}'(u) \,/\, |\boldsymbol{C}'(u)|.$$

Допирателната в т. $\boldsymbol{C}(u)$ се задава или чрез

$$\boldsymbol{C}(u) + \lambda \boldsymbol{C}'(u),$$

или чрез

$$\boldsymbol{C}(u) + \lambda \boldsymbol{t}(u),$$

където λ е параметъра на правата.

Да отбележим, че в този случай u е фиксирано, за да се получи точката от кривата.

Примери

- Окръжност $\boldsymbol{C}(u) = (r\cos(2\pi u) + p,\ r\sin(2\pi u) + q),\ u \in [0;1]$.

$$\boldsymbol{C}'(u) = (\,-2\pi r\sin(2\pi u),\ 2\pi r\cos(2\pi u)\,),$$

$$\boldsymbol{C}(u) + \lambda\boldsymbol{C}'(u) = (r\cos(2\pi u) + p,\ r\sin(2\pi u) + q) + \lambda(-2\pi r\sin(2\pi u),\ 2\pi r\cos(2\pi u))$$

- Кубична крива $\boldsymbol{C}(u) = (u,\ u^2,\ u^3)$. Тогава $\boldsymbol{C}'(u) = (1,\ 2u,\ 3u^2)$ и

$$\boldsymbol{C}(u) + \lambda\boldsymbol{C}'(u) = (u + \lambda,\ u^2 + 2\lambda u,\ u^3 + 3\lambda u^2).$$

- Кръговата спирала $\boldsymbol{C}(u) = (a\cos(u),\ a\sin(u),\ b\,u)$. Следва $\boldsymbol{C}'(u) = (-a\sin(u),\ a\cos(u),\ b)$

$$\boldsymbol{C}(u) + \lambda\boldsymbol{C}'(u) = (a\,(\cos(u) - \lambda\sin(u)),\ a\,(\sin(u) + \lambda\cos(u)),\ b\,(\lambda + u)\,).$$

Триедър на Френе, кривина и торзия

Върху крива да разгл. фикс. т. $\boldsymbol{C}(u)$ и две движещи се т. $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$. Тези три точки еднозначно определят равнина, ако образуват триъгълник.

Когато $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{C}(u)$, тази равнина $(\boldsymbol{C}(u), \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}) \to$ гранично положение, т. нар. ***оскулачна равнина*** в т. $\boldsymbol{C}(u)$ на кривата.

$\Rightarrow$ оскулачната равнина в т. $\boldsymbol{C}(u)$ съдържа допирателната в $\boldsymbol{C}(u)$

$\Rightarrow$ оскулачната равнина: z$\boldsymbol{C}(u)$, $||\boldsymbol{C}'(u)$, $||\boldsymbol{C}''(u)$, $\boldsymbol{C}(u) + p\,\boldsymbol{C}'(u) + q\,\boldsymbol{C}''(u)$, $p, q \in \mathbb{R}$

Бинормалният вектор $\boldsymbol{b}(u) = (\boldsymbol{C}'(u) \times \boldsymbol{C}''(u)) \,/\, |\,(\boldsymbol{C}'(u) \times \boldsymbol{C}''(u))\,|$.

$\Rightarrow \boldsymbol{b}(u) \perp \boldsymbol{C}'(u), \perp \boldsymbol{C}''(u)$ и $\therefore \perp$ оскул. равн.

Правата $\boldsymbol{C}(u) + \lambda \boldsymbol{b}(u)$ е ***бинормалата*** в т. $\boldsymbol{C}(u)$ на кривата.

Главният нормален вектор е $\mathbf{n}(u) = (\mathbf{b}(u) \times \mathbf{C}'(u)) \,/\, |\mathbf{b}(u) \times \mathbf{C}'(u)|$

$\Rightarrow \mathbf{n}(u) \perp \mathbf{t}(u), \perp \mathbf{b}(u), \mathbf{tnb} > 0, \mathbf{tnb} = 1,$

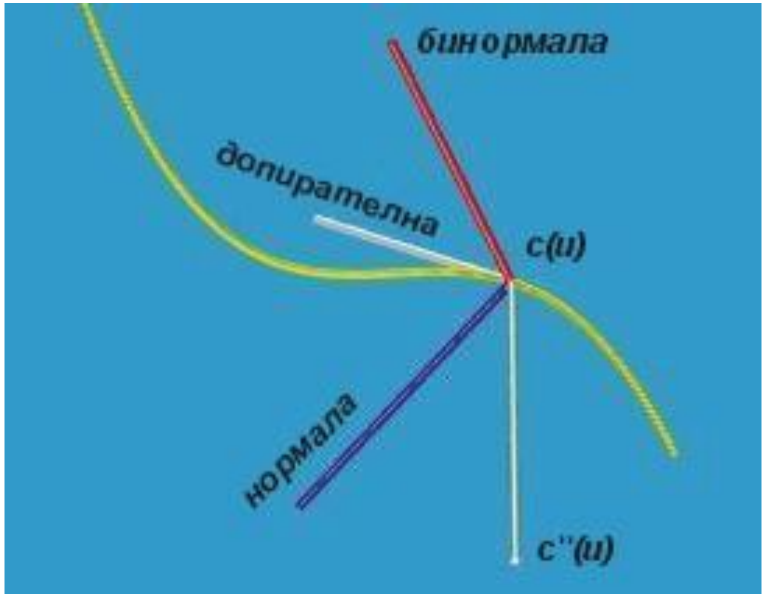
Правата $\mathbf{C}(u) + \lambda\mathbf{n}(u)$ е ***главната нормала*** в т. $\mathbf{C}(u)$ към кривата.

$\Rightarrow$ ортонормирана коорд. с-ма с начало т. $\mathbf{C}(u)$ и единични вектори

$\mathbf{t}(u), \mathbf{n}(u), \mathbf{b}(u)$ – ***подвижен триедър (репер) на Френе*** в т. $\mathbf{C}(u)$.

Допирателната, бинормалата и главната нормала – координатните оси с полож. посоки, определени от съответните вектори.

Да отбележим, че векторите $\boldsymbol{t}(u)$, $\boldsymbol{n}(u)$ и $\boldsymbol{C}''(u)$ са в оскулачната равнина.



Пример

Да се определят $\mathbf{t}(u)$, $\mathbf{n}(u)$, $\mathbf{b}(u)$ на винтова линия с постоянни параметри a и b:

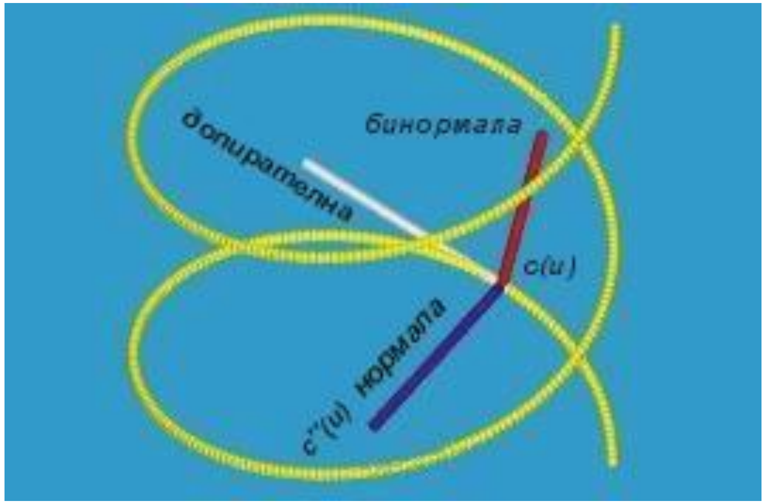
$$\mathbf{C}(u) = (a\cos(u), a\sin(u), bu).$$

$$\mathbf{C}'(u) = (-a\sin(u), a\cos(u), b)$$

$$\mathbf{C}''(u) = (-a\cos(u), -a\sin(u), 0)$$

$$\mathbf{b}(u) \,||\, (\mathbf{C}'(u) \times \mathbf{C}''(u)) = (ab\sin(u), -ab\cos(u), a^2)$$

$$\mathbf{n}(u) \,||\, (\mathbf{b}(u) \times \mathbf{C}'(u)) = (-a(a^2+b^2)\cos(u), -a(a^2+b^2)\sin(u), 0).$$

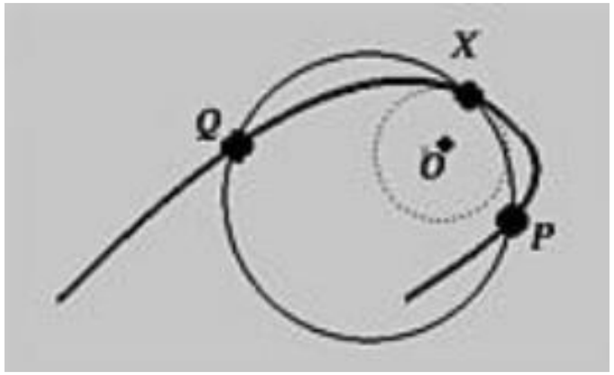


Кривина и торзия

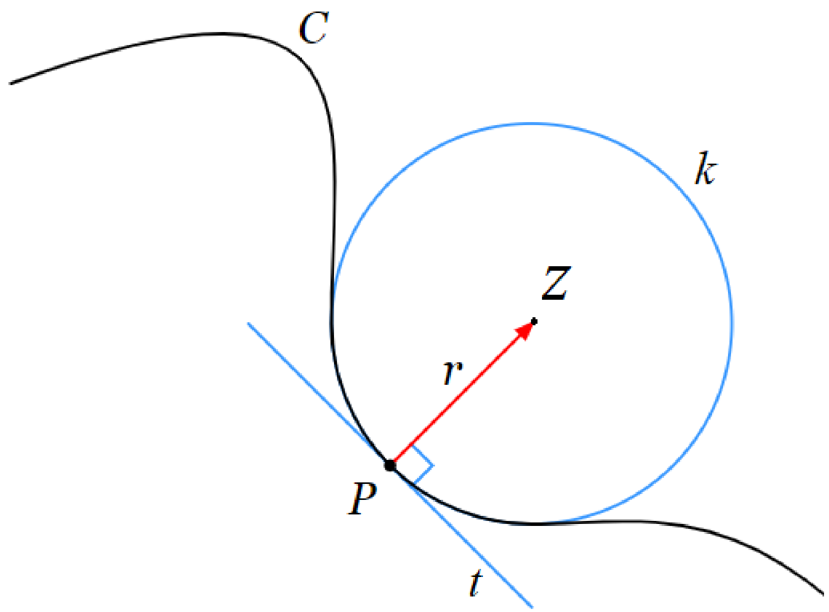
Ако $\boldsymbol{C}(u)$ е траекторията на движеща се т., то $\boldsymbol{C}'(u)$ е скоростта ѝ, а $\boldsymbol{C}''(u)$ е ускорението ѝ.

Нека $\boldsymbol{X}$ е фикс. т., а $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ са движещи се т. Ако не са колинеарни, те еднозначно определят окръжност k.

Ако $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{X}$, то $k \to$ граничното положение (точковата окръжност на фиг.).



Граничната окръжност се нарича ***оскулачна окръжност*** в $\boldsymbol{P}$ и нейният център $\boldsymbol{Z}$ и радиус r са съответно ***център*** и ***радиус на кривината***.



Числото *1/r* – ***кривината*** на ***C***(*u*) в т. ***X***. Означава се чрез $\varkappa$ (капа).

$\therefore$ колкото е по-голяма оскулачната окръжност, толкова е по-малка $\varkappa$ и обратно.

$\Rightarrow$ оскулачната окръжност лежи в оскулачната равнина.

Тъй като *k* се допира до ***C***, центърът на кривината ***Z*** лежи върху главната нормала.

Стойността на кривината $\varkappa(u)$ може да се изчисли както следва:

$$\varkappa(u) = |\boldsymbol{C}'(u) \times \boldsymbol{C}''(u)| \ / \ |\boldsymbol{C}'(u)|^3$$

За винтова линия $\Rightarrow$

$$\boldsymbol{C}'(u) = (-a \sin(u), a \cos(u), b),$$

$$\boldsymbol{C}'(u) \times \boldsymbol{C}''(u) = (ab \sin(u), -ab \cos(u), a^2),$$

$$|\boldsymbol{C}'(u)| = (a^2 + b^2)^{1/2},$$

$$|\boldsymbol{C}'(u) \times \boldsymbol{C}''(u)| = a\,(a^2 + b^2)^{1/2},$$

$$\varkappa(u) = a \ / \ (a^2 + b^2) = \mathrm{const}.$$

$r = 1/\varkappa \quad \Rightarrow \quad Z = \boldsymbol{C}(u) + ((a^2 + b^2)/a)\, \boldsymbol{n}(u).$

Други примери

- Права $\boldsymbol{C}(u) = (a + up, b + uq, c + ur)$. Тогава

$\boldsymbol{C}'(u) = (p, q, r) \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{C}'(u)| = (p^2 + q^2 + r^2)^{1/2}$

$\boldsymbol{C}''(u) = (0, 0, 0) \Rightarrow$ няма $\boldsymbol{n}(u)$ и $\boldsymbol{b}(u)$

$\boldsymbol{C}'(u) \times \boldsymbol{C}''(u) = (0, 0, 0) \quad \Rightarrow \quad \varkappa(u) = 0, \forall u$

- Окръжност в равн. Oxy:

$\boldsymbol{C}(u) = (r\cos(u) + p, r\sin(u) + q, 0) \quad \Rightarrow$

$\boldsymbol{C}'(u) = (-r\sin(u), r\cos(u), 0) \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{C}'(u)| = r,$

$\boldsymbol{C}''(u) = (-r\cos(u), -r\sin(u), 0),$

$\boldsymbol{C}'(u) \times \boldsymbol{C}''(u) = (0, 0, r^2) \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{C}'(u) \times \boldsymbol{C}''(u)| = r^2,$

$\boldsymbol{b}(u) = (\boldsymbol{C}'(u) \times \boldsymbol{C}''(u)) \,/\, |\boldsymbol{C}'(u) \times \boldsymbol{C}''(u)| = (0, 0, 1),$

$\boldsymbol{n}(u) = (\boldsymbol{b}(u) \times \boldsymbol{C}'(u)) \,/\, |\boldsymbol{b}(u) \times \boldsymbol{C}'(u)| = (-\cos(u), -\sin(u), 0),$

$\varkappa(u) = 1/r = \mathrm{const}$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{t}(u) = (-\sin(u), \cos(u), 0), \qquad \boldsymbol{b}(u) = (0, 0, 1), \qquad \boldsymbol{n}(u) = (-\cos(u), \sin(u), 0).$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{b}(u) \perp Oxy, \qquad \boldsymbol{t}(u) \,||\, Oxy, \quad \boldsymbol{n}(u) \,||\, Oxy$

Оскулачната окръжност съвпада с дадената окръжност.

- Нека пространствената кубична крива:

$\boldsymbol{C}(u) = (u, u^2, u^3).$

$\boldsymbol{C}'(u) = (1, 2u, 3u^2) \Rightarrow \quad |\boldsymbol{C}'(u)| = (1 + 4u + 9u^4)^{1/2}$

$\boldsymbol{C}''(u) = (0, 2, 6u)$

$\boldsymbol{C}'(u) \times \boldsymbol{C}''(u) = (6u^2, -6u, 2) \Rightarrow \quad |\boldsymbol{C}'(u) \times \boldsymbol{C}''(u)| = 2(1 + 9u^2 + 9u^4)^{1/2}$

$\varkappa(u) = 2(1 + 9u^2 + 9u^4)^{1/2} / (1 + 4u^2 + 9u^4)^{3/2}$

Степента на усукване на една пространствена крива се изчислява чрез нейната ***торзия***.

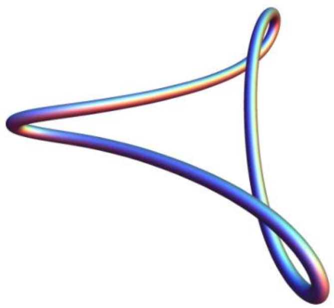
Бележи се с τ (тау) и се изчислява чрез смесеното произведение $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}''\boldsymbol{C}'''$ така

$\tau(u) = \boldsymbol{C}'(u)\boldsymbol{C}''(u)\boldsymbol{C}'''(u) / (\boldsymbol{C}'(u) \times \boldsymbol{C}''(u))^2$.

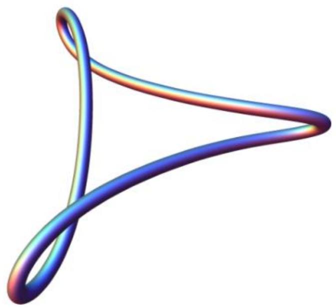
Една равнинна крива не се усуква и $\therefore$ нейната торзия е 0. Обратното твърдение също е вярно.

Докато $\varkappa(u) \geq 0$, $\forall u$, то $\tau(u)$ може да бъде >0, =0, <0.

Знакът на $\tau(u)$ показва в каква посока е усукана кривата.



$\tau = \text{const} > 0$



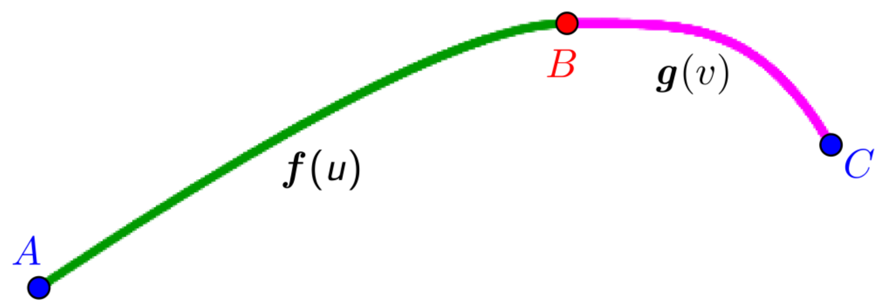
$\tau = \text{const} < 0$

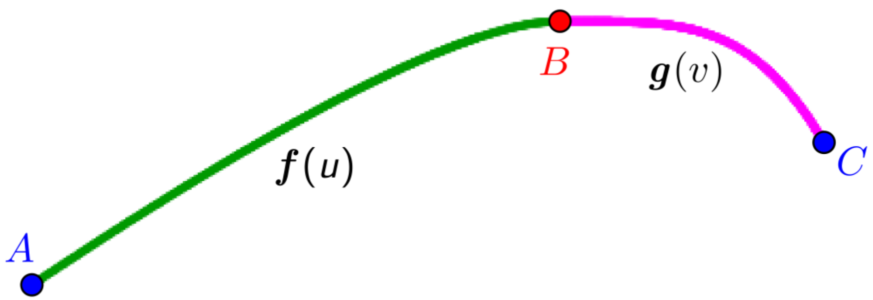
Непрекъснатост на съставна крива

Нека $\boldsymbol{f}(u)$, $u \in [a,b]$ и $\boldsymbol{g}(v)$, $v \in [m,n]$ – криволинейни дъги с точка на съединяване $\boldsymbol{B}$,

т.е. $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{f}(u) \cap \boldsymbol{g}(v)$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{f}(b) = \boldsymbol{g}(m)$.

Дали тези криви $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ се съединяват гладко в съставна крива $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} \cup \boldsymbol{g}$?





$\boldsymbol{f}(u),\ u \in [a,b]$ $\boldsymbol{g}(v),\ v \in [m,n]$

Разглеждаме:

„десния край“ $\boldsymbol{f}(b)$ на лявата крива $\boldsymbol{f}(u)$ и „левия край“ $\boldsymbol{g}(m)$ на дясната крива $\boldsymbol{g}(v)$.

Ако $\boldsymbol{f}(b) = \boldsymbol{g}(m)$, то $\boldsymbol{h}$ е $\boldsymbol{C^0}$***-непрекъсната*** в т. на съединяване $\boldsymbol{f}(b) = \boldsymbol{g}(m)$, озн. $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{C^0}$.

Ако $\boldsymbol{f}^{(i)}(b) = \boldsymbol{g}^{(i)}(m),\ \forall i \le k \in \{1,2,\ldots\}$ в $\boldsymbol{B}$, то $\boldsymbol{h}$ е $\boldsymbol{C^k}$***-непрекъсната*** в т. на съединяване $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{f}(b) = \boldsymbol{g}(m)$, озн. $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{C^k},\ k \in \{1,2,\ldots\}$.

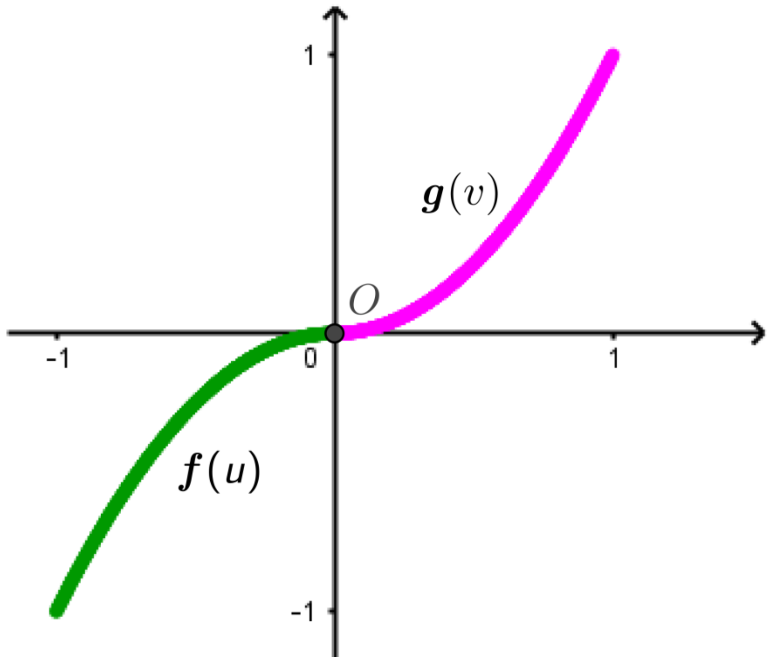
C^k*-непрекъснатост* $\Rightarrow C^i$*-непрекъснатост*, $\forall i \le k$.

Ако $\boldsymbol{f}^{(k)}(b) \ne \boldsymbol{g}^{(k)}(m) \Rightarrow$ няма C^i*-непрекъснатост* за никое $i \ge k$.

Пример. Нека една крива $\boldsymbol{h}$ се състои от дъги на две параболи:

$\boldsymbol{f}(u) = (u, -u^2, 0)$, $u \in [-1;0]$; $\boldsymbol{g}(v) = (v, v^2, 0)$, $v \in [0;1]$.

$\Rightarrow \boldsymbol{f}(0) = \boldsymbol{g}(0) = O$ – т. на съед. Дали кривата е C^2-*непрекъсната* в т. O?



$\boldsymbol{f}(u) = (u, -u^2, 0)$ $\boldsymbol{g}(v) = (v, v^2, 0)$

$\boldsymbol{f}\,'(u) = (1, -2u, 0)$ $\boldsymbol{g}'(u) = (1, 2v, 0)$

$\boldsymbol{f}\,''(u) = (0, -2, 0)$ $\boldsymbol{g}''(v) = (0, 2, 0)$

$\boldsymbol{f}\,'(0) = \boldsymbol{g}'(0) = (1, 0, 0) \Rightarrow$ <u>$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} \cup \boldsymbol{g}$ е C^1-*непрекъсната*</u> в т. на съед. O.

$\boldsymbol{f}\,''(0) = (0, -2, 0) \neq \boldsymbol{g}''(0) = (0, 2, 0) \Rightarrow$ <u>$\boldsymbol{h} \notin C^2$</u> в O.

$\varkappa(\boldsymbol{f}(u)) = 2/(1 + 4u^2)^{3/2}$ $\varkappa(\boldsymbol{g}(v)) = 2/(1 + 4v^2)^{3/2}$

$\varkappa(\boldsymbol{f}(0)) = \varkappa(\boldsymbol{g}(0)) = 2 \Rightarrow$ <u>$\boldsymbol{h}$ е ***ϰ-непрекъсната***</u> в т. на съед. $O = \boldsymbol{f}(0) = \boldsymbol{g}(0)$.

$\therefore$ $\boldsymbol{h} \in C^1$ и $\boldsymbol{h}$ е $\varkappa$-непрекъсната, обаче не е C^2-непрекъсната.

Проблеми с параметричното представяне

Чрез C^k-*непрекъснатостта* се установява гладко съединяване на крива.

Да разгледаме следните две отсечки определени от колинеарни точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$:

$\boldsymbol{f}(u) = \boldsymbol{A} + u\,(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}),\ u \in [0;1]$ и $\boldsymbol{g}(v) = \boldsymbol{B} + v\,(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{B}),\ v \in [0;1]$.

т. $\boldsymbol{f}(u) \in$ отс. $\boldsymbol{AB}$, т. $\boldsymbol{g}(v) \in$ отс. $\boldsymbol{BC}$

$\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{BC} \in C^0$ в т. на съед. $\boldsymbol{B}$. Дали отс. $\boldsymbol{AC} \in C^1$ в т. $\boldsymbol{B}$?

$\boldsymbol{f}'(u) = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{g}'(v) = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{B}$

$\Rightarrow \boldsymbol{f}'(u) \neq \boldsymbol{g}'(v)\ \therefore\ \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{AB} \cup \boldsymbol{BC} \notin C^1$ в т. $\boldsymbol{B}$?! $\therefore$ Проблем на параметризацията

Нормираме колинеарните вектори $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}$ и променяме дефин. интервали на u и v.

$$\boldsymbol{F}(u) = \boldsymbol{A} + u\,(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\,/\,|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}| \qquad \boldsymbol{G}(v) = \boldsymbol{B} + v\,(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})\,/\,|\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}|$$

$$u \in [0;|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|] \qquad v \in [0;|\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}|]$$

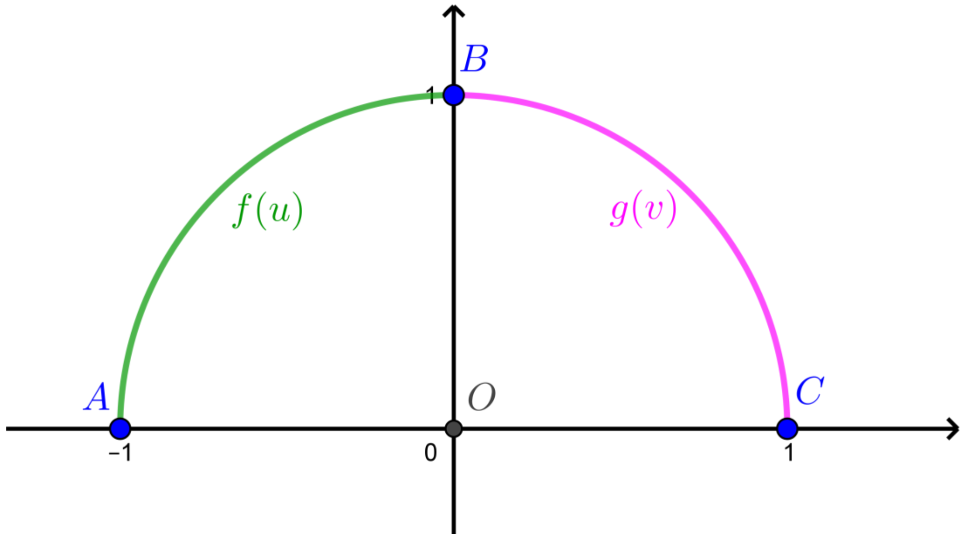
$$\boldsymbol{F}'(u) = (\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\,/\,|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}| \qquad \boldsymbol{G}'(v) = (\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})\,/\,|\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}|$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{F}'(u) = \boldsymbol{G}'(v)$ = един. вектор по $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} \Rightarrow \boldsymbol{AC} \in C^1$ в т. $\boldsymbol{B}$

$\therefore$ смяната на параметризацията на дъгите може да преодолее проблема.

Пример. Нека $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f}(u) \cup \boldsymbol{g}(v)$, $u, v \in [0;1]$

$$\boldsymbol{f}(u) = (-\cos(u^2\pi/2), \sin(u^2\pi/2), 0) \qquad \boldsymbol{g}(v) = (\sin(v^2\pi/2), \cos(v^2\pi/2), 0)$$



$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{f}(u) \cap \boldsymbol{g}(v), \qquad \boldsymbol{B}(0,1,0) = \boldsymbol{f}(1) = \boldsymbol{g}(0)$$

$\boldsymbol{f}(u) = (-\cos(u^2\pi/2), \sin(u^2\pi/2), 0\ )$

$\boldsymbol{f}'(u) = (\pi u.\sin(u^2\pi/2), \pi u.\cos(u^2\pi/2), 0) \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{f}'(u)| = \pi u$

$\boldsymbol{f}''(u) = (\pi^2u^2.\cos(u^2\pi/2), -\pi^2u^2.\sin(u^2\pi/2), 0)$

$\boldsymbol{f}'(u) \times \boldsymbol{f}''(u) = (0, 0, -\pi^3u^3) \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{f}'(u) \times \boldsymbol{f}''(u)| = \pi^3u^3$

$\varkappa(u) = \pi^3u^3 / (\pi u)^3 = 1$

$\boldsymbol{g}(v) = (\sin(v^2\pi/2), \cos(v^2\pi/2), 0)$

$\boldsymbol{g}'(v) = (\pi v.\cos(v^2\pi/2), -\pi v.\sin(v^2\pi/2), 0) \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{g}'(v)| = \pi v$

$\boldsymbol{g}''(v) = (-\pi^2v^2.\cos(v^2\pi/2), -\pi^2v^2.\cos(v^2\pi/2), 0)$

$\boldsymbol{g}'(v) \times \boldsymbol{g}''(v) = (0, 0, -\pi^3u^3) \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{g}'(v) \times \boldsymbol{g}''(v)| = \pi^3v^3$

$\varkappa(v) = \pi^3v^3 / (\pi v)^3 = 1$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{g}'(0) = \boldsymbol{g}''(0) = (0,0,0)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{g}(v)$ не е добре дефинирана в т. ***B***.

Като резултат не можем да говорим за непрекъснатост в т. на съед. изобщо.

Обаче от фигурата изглежда сякаш ***h*** има някаква непрекъснатост, понеже най-малкото ***f*** и ***g*** имат обща допирателна в т. ***B***.

Нека да репараметризираме тези криви.

Нека $u^2 = p$ в $\boldsymbol{f}(u)$ и нека $v^2 = q$ в $\boldsymbol{g}(v)$. Новите уравнения са:

$$\boldsymbol{f}(p) = (-\cos(\tfrac{\pi}{2}p), \sin(\tfrac{\pi}{2}p), 0) \qquad \boldsymbol{g}(q) = (\sin(\tfrac{\pi}{2}q), \cos(\tfrac{\pi}{2}q), 0)$$

$$\boldsymbol{f}'(p) = (\tfrac{\pi}{2}\sin(\tfrac{\pi}{2}p), \tfrac{\pi}{2}\cos(\tfrac{\pi}{2}p), 0) \qquad \boldsymbol{g}'(q) = (\tfrac{\pi}{2}\cos(\tfrac{\pi}{2}q), -\tfrac{\pi}{2}\sin(\tfrac{\pi}{2}q), 0)$$

$$\boldsymbol{f}''(p) = (\tfrac{\pi^2}{4}\cos(\tfrac{\pi}{2}p), -\tfrac{\pi^2}{4}\sin(\tfrac{\pi}{2}p), 0) \qquad \boldsymbol{g}''(q) = (-\tfrac{\pi^2}{4}\sin(\tfrac{\pi}{2}q), -\tfrac{\pi^2}{4}\cos(\tfrac{\pi}{2}q), 0)$$

$$\boldsymbol{f}'(p) \times \boldsymbol{f}''(p) = \boldsymbol{g}'(q) \times \boldsymbol{g}''(q) = (0, 0, -(\pi/2)^3)$$

$|\boldsymbol{f}'(p) \times \boldsymbol{f}''(p)| = |\boldsymbol{g}'(q) \times \boldsymbol{g}''(q)| = (\pi/2)^3$

$|\boldsymbol{f}'(p)| = |\boldsymbol{g}'(q)| = \pi/2$

$\varkappa(p) = \varkappa(q) = 1$

$\therefore\ \boldsymbol{f}'(1) = \boldsymbol{g}'(0) = (\pi/2, 0, 0) \ \Rightarrow$ ***h*** *е C^1-непрекъсната* в $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{f}(1) = \boldsymbol{g}(0)$

$\boldsymbol{f}''(1) = \boldsymbol{g}''(0) = (0, -(\pi/2)^2, 0) \ \Rightarrow$ ***h*** *е C^2-непрекъсната* в $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{f}(1) = \boldsymbol{g}(0)$

$\varkappa(p) = \varkappa(q) = 1 \ \Rightarrow\ \varkappa(1) = \varkappa(0) \ \Rightarrow$ ***h*** е $\varkappa$-непрекъсната

Естествен параметър

Има ли параметризация, която да е надеждна при изследване на непрекъснатостта?

Отговорът е „да“, като се използва ***дължината на дъгата*** като параметър.

Нека $\boldsymbol{f}(u)$, $u \in [a,b]$ има дължина s_0. Сменяме u с параметър s, който е дължината на дъгата от началото ѝ. $\therefore$ $s = 0 \Leftrightarrow u = a$, $s = s_0 \Leftrightarrow u = b$.

$\Rightarrow \boldsymbol{f}(s)$, $s \in [0,s_0] \Rightarrow \boldsymbol{f}\,'(s) = \mathrm{d}\boldsymbol{f}(s) / \mathrm{d}s = 1$

Поради това $\boldsymbol{f}(s)$ се нарича ***естествена параметризация*** на кривата.

Формулата за смяна на параметъра е

$$s = \int_a^u |\boldsymbol{f}'(u)|\, \mathrm{d}u = F(u) - F(a), \ \ u \in [a,b]$$

ако $\exists F^{-1} \Rightarrow u = F^{-1}(s + F(a)),\ F(a) = \text{const} \qquad \Rightarrow$

$\boldsymbol{f}(u),\ u \in [a,b] \qquad \to \qquad \boldsymbol{f}(F^{-1}(s + F(a))),\ s \in [0, s_0]$ – естеств. параметризация

Геометрична непрекъснатост

$\exists$ C^1-непрек. и $\varkappa$-непрек. криви, но не са C^2-непрек. или дори не са двукратно диференцируеми.

Тези криви изглеждат гладки в т. на съед.

След смяна на параметъра някои от тях могат да станат C^2-непрек., но смяната може трудно да се намери.

Съставна естествено-параметризирана крива $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f}(s_1) \cup \boldsymbol{g}(s_2)$, $s_1 \in [0, s_{01}]$, $s_2 \in [0, s_{02}]$ се нарича ***геометрично-непрекъсната от степен k*** (т.е. ***G^k-непрекъсната***) в т. на съед. $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{f}(s_{01}) = \boldsymbol{g}(0) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f}^{(i)}(s_{01}) = \boldsymbol{g}^{(i)}(0),\ \forall i \leq k \in \{1,2,\dots\}$.

Естественият параметър не е задължителен:

Съставна крива $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f}(u) \cup \boldsymbol{g}(v)$, $u \in [a,b]$, $v \in [m,n]$ се нарича ***геометрично-непрекъсната от степен k*** (т.е. ***G^k-непрекъсната***) в $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{f}(b) = \boldsymbol{g}(m)$

$\Leftrightarrow \quad \exists\, \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(u),\ \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(v):\ \ \boldsymbol{f}^{(i)}(b) = \boldsymbol{g}^{(i)}(m),\ \forall i \leq k \in \{1,2,\ldots\}$.

Как да намерим такива параметризации?

Случаите $k = 1$ и $k = 2$ са доста прости.

<u>Случай $k = 1$.</u>

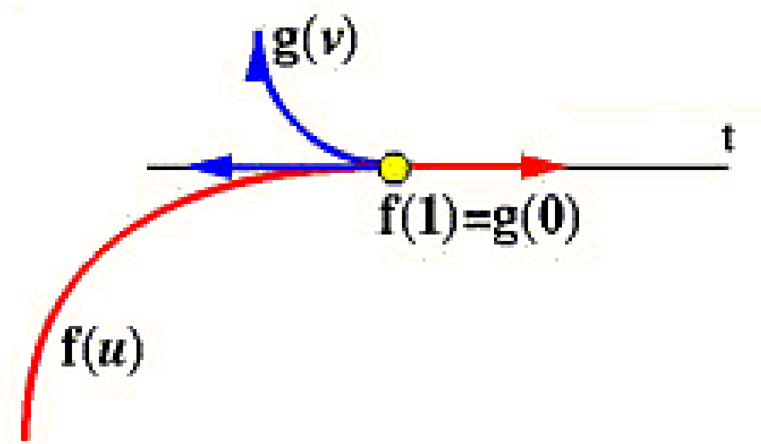
Съставна крива $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f}(u) \cup \boldsymbol{g}(v)$, $u \in [a,b]$, $v \in [m,n]$, като $\boldsymbol{f}(u), \boldsymbol{g}(v) \in C^0$, се нарича **$G^1$-непрекъсната** в т. на съед. $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{f}(b) = \boldsymbol{g}(m) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f}'(b) \uparrow\uparrow \boldsymbol{g}'(m)$ в $\boldsymbol{B}$, т.е. $\boldsymbol{f}'(b) = a.\boldsymbol{g}'(m)$, $a > 0$.

Ако $a = 1$, то $\boldsymbol{f}'(b) = \boldsymbol{g}'(m) \Leftrightarrow \boldsymbol{f}(u), \boldsymbol{g}(v) \in C^1$ в $\boldsymbol{B}$.

$\therefore$ от $\boxed{C^1\text{-непрекъснатост} \quad \Rightarrow \quad G^1\text{-непрекъснатост}}$, но не и обратното.

От G^1-непрек., т.е $\boldsymbol{f}'(b) \uparrow\uparrow \boldsymbol{g}'(m) \quad \Rightarrow$ допирателните им съвпадат в ***B***.

Обратното не е вярно, т.е. ако допирателните на ***f*** и ***g*** съвпадат в ***B***, *не* следва, че $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in G^1$ в ***B***. Например:



Случай $k = 2$.

Критерий на Нийлсон за G^2-непрекъснатост:

Съставна крива $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f}(u) \cup \boldsymbol{g}(v)$, $u \in [a,b]$, $v \in [m,n]$, като $\boldsymbol{f}(u), \boldsymbol{g}(v) \in C^1$, се нарича **$G^2$-непрекъсната** в $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{f}(b) = \boldsymbol{g}(m)$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{f}''(b) - \boldsymbol{g}''(m) \parallel \boldsymbol{f}'(b) = \boldsymbol{g}'(m)$, т.е.

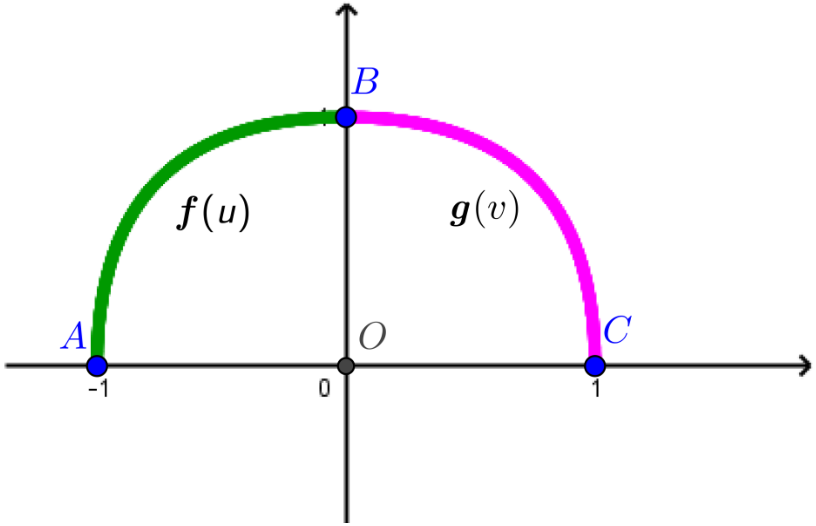
$\boldsymbol{f}''(b) - \boldsymbol{g}''(m) = a.\,\boldsymbol{f}'(b) = a.\boldsymbol{g}'(m)$, $a = \text{const}$.

Ако $a = 0$ в критерия на Нийлсон, то $\boldsymbol{f}''(b) = \boldsymbol{g}''(m)$ $\therefore$ $\boldsymbol{f}(u), \boldsymbol{g}(v) \in C^2$ в $\boldsymbol{B}$.

$\Rightarrow$ от $\boxed{C^2\text{-непрекъснатост} \Rightarrow G^2\text{-непрекъснатост}}$, но не и обратното.

Пример. Нека $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f}(u) \cup \boldsymbol{g}(v)$ от параболични дъги с т. на съед. $\boldsymbol{B}(0, 1, 0)$:

$$\boldsymbol{f}(u) = (-1 + u^2, 2u - u^2, 0), \quad u \in [0,1]; \qquad \boldsymbol{g}(v) = (2v - v^2, 1 - v^2, 0), \quad v \in [0,1]$$



Т. на съед. е $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{f}(1) = \boldsymbol{g}(0) = (0, 1, 0)$.

$$\boldsymbol{f}'(u) = (2u, 2 - 2u, 0) \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{f}'(u)| = 2(1 - 2u + 2u^2)^{1/2}$$

$$\boldsymbol{f}''(u) = (2, -2, 0)$$

$$\boldsymbol{f}'(u) \times \boldsymbol{f}''(u) = (0, 0, -4) \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{f}'(u) \times \boldsymbol{f}''(u)| = 4 \quad \Rightarrow \varkappa(u) = 1/[2(1 - 2u + 2u^2)^{3/2}]$$

$\boldsymbol{g}'(v) = (2 - 2v, -2v, 0) \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{g}'(v)| = 2(1 - 2v + 2v^2)^{1/2}$

$\boldsymbol{g}''(v) = (-2, -2, 0)$

$\boldsymbol{g}'(v) \times \boldsymbol{g}''(v) = (0, 0, -4) \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{g}'(v) \times \boldsymbol{g}''(v)| = 4 \quad \Rightarrow \quad \varkappa(v) = 1/[2(1 - 2v + 2v^2)^{3/2}]$

$\boldsymbol{f}'(1) = \boldsymbol{g}'(0) = (2, 0, 0) \quad \Rightarrow$ $\underline{\boldsymbol{h} \in C^1}$ в т. на съед. $\boldsymbol{B}$) $\quad \Rightarrow$ $\underline{\boldsymbol{h} \in G^1}$ в $\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{f}''(1) = (2, -2, 0) \neq \boldsymbol{g}''(0) = (-2, -2, 0) \Rightarrow$ $\underline{\boldsymbol{h}\text{ не е }C^2\text{-непрекъсната в }\boldsymbol{B}}$

За $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ имаме $\varkappa = 1/2$ в т. на съед. $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{f}(1) = \boldsymbol{g}(0) \Rightarrow$ $\underline{\boldsymbol{h}\text{ е }\varkappa\text{-непрекъсната}}$ в $\boldsymbol{B}$

Понеже $\boldsymbol{h} \in C^1$ в т. $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{f}''(1) - \boldsymbol{g}''(0) = (4,0,0) = 2(2,0,0) = 2\boldsymbol{f}'(1) = 2\boldsymbol{g}'(0) \Rightarrow$ (съгл. крит. Нийлсон) $\underline{\boldsymbol{h}\text{ е }G^2\text{-непрекъсната}}$ в т. на съед. $\boldsymbol{B}(0,1,0)$.

⌘