

Линейни нехомогенни диференциални
уравнения от n -ти ред.
Метод на Лагранж.
Метод на неопределените коефициенти

доц. д-р Теменужка Пенева

Модели на реални процеси
спец. Информатика

Линейни нехомогенни диференциални уравнения от n -ти ред

► Уравнение от вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (1)$$

където $f(x)$, $a_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) са непрекъснати функции в интервала (α, β) , се нарича линейно нехомогенно диференциално уравнение от n -ти ред.

Да означим с $L[y]$ лявата страна на горното уравнение, т.е.

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y.$$

Тогава уравнението (1) може да се запише във вида

$$L[y] = f. \quad (2)$$

Нека $\eta(x)$ е едно частно решение на това уравнение, т.е.

$$L[\eta] = f. \quad (3)$$

В (2) извършваме смяната

$$y = \eta + z,$$

където $z(x)$ е нова неизвестна функция, и получаваме

$$L[\eta + z] = f,$$

т.е.

$$L[\eta] + L[z] = f.$$

Като вземем предвид (3), получаваме, че

$$L[z] = 0, \quad (4)$$

т.е. новата функция z е решение на съответното на (1) хомогенно уравнение.

Като вземем предвид вида на общото решение на линейното хомогенно диференциално уравнение (4), стигаме до следната теорема.

Теорема 1

Общото решение на (1) се представя във вида

$$y = \eta + \sum_{i=1}^n C_i y_i,$$

където $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ е една фундаментална система от решения за уравнението $L[y] = 0$, а C_1, C_2, \dots, C_n са произволни константи.

Метод на Лагранж

Намирането на едно частно решение $\eta(x)$ на нехомогенното уравнение (1) може да стане с помощта на метода на вариране на произволните константи, известен още като метод на Лагранж. Той се състои в следното: търсим $\eta(x)$ във вида на общото решение на съответното на (1) хомогенно уравнение, като произволните константи C_i заменяме с функции $C_i(x)$, т.е.

$$\eta(x) = C_1(x)y_1 + \cdots + C_n(x)y_n. \quad (5)$$

Върху $C_i(x)$ налагаме условия, така че за първите $n - 1$ производни на $\eta(x)$ да се получат същите изрази, каквито бихме получили, ако $C_i(x)$ бяха константи.

Диференцираме израза (5) за $\eta(x)$. Получаваме

$$\eta' = (C_1 y_1' + \cdots + C_n y_n') + (C_1' y_1 + \cdots + C_n' y_n).$$

Искаме в този израз да гледаме на $C_i(x)$ като на константи.
Следователно, трябва да поставим условието

$$C_1' y_1 + \cdots + C_n' y_n = 0,$$

а изразът за η' приема вида

$$\eta' = C_1 y_1' + \cdots + C_n y_n'.$$

Диференцираме последния израз и поставяме аналогично условие за $C_i(x)$. Тогава

$$\eta'' = C_1 y_1'' + \cdots + C_n y_n'',$$

при условие, че за $C_i(x)$ имаме

$$C_1' y_1' + \cdots + C_n' y_n' = 0.$$

Диференцираме $\eta^{(n-1)}$ и намираме

$$\eta^{(n)} = (C_1 y_1^{(n)} + \cdots + C_n y_n^{(n)}) + (C'_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + C'_n y_n^{(n-1)}).$$

Тъй като искаме η да е решение на (1), заместваме последния израз за $\eta^{(n)}$, а също и изразите (6) в (1). Получаваме

$$L[\eta] = C'_1 y_1^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)} = f(x).$$

Прибавяме тази връзка към (7) и окончателно получаваме, че $C'_i(x)$ трябва да удовлетворяват системата

[illegible]

За всяко x детерминантата от коефициентите пред неизвестните $C'_1(x), \dots, C'_n(x)$ е равна на детерминантата на Вронски $W[y_1, \dots, y_n](x)$, а тя е различна от нула, защото y_1, \dots, y_n са линейно независими по условие. Следователно, горната система има единствено решение

$$C'_i(x) = \phi_i(x), \quad i = 1, \dots, n$$

и тогава

$$C_i(x) = \int \phi_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, n,$$

т.е.

$$\eta(x) = y_1 \int \phi_1(x) dx + \dots + y_n \int \phi_n(x) dx.$$

Задача 1

Да се решат уравненията:

$$1) y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x};$$

$$2) y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

Решение. 1) Първо трябва да решим съответното хомогенно уравнение

$$y'' - 2y' + y = 0. \quad (9)$$

Неговото характеристично уравнение е

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

с корени $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Тогава общото решение на хомогенното уравнение (9) е

$$y_{\text{хом}} = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Сега търсим частно решение на даденото нехомогенно уравнение във вида

$$\eta(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x, \quad (10)$$

където $C_1(x)$ и $C_2(x)$ са решения на системата

$$\begin{cases} C_1'e^x + C_2'xe^x = 0 \\ C_1'(e^x)' + C_2'(xe^x)' = \frac{e^x}{x}. \end{cases}$$

Имаме

$$\begin{cases} C_1'e^x + C_2'xe^x = 0 \\ C_1'e^x + C_2'(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{x}, \end{cases}$$

и като извадим първото уравнение от второто и разделим на e^x , получаваме $C_2' = \frac{1}{x}$, откъдето $C_1' = -1$. След интегриране

$$C_1(x) = \int (-1)dx = -x, \quad C_2(x) = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x|.$$

Следователно, като заместим в (10), получаваме

$$\eta(x) = -xe^x + (\ln |x|)xe^x.$$

Накрая, общото решение на нехомогенното уравнение се получава по формулата

$$y_{\text{нехом}} = y_{\text{хом}} + \eta = C_1 e^x + C_2 x e^x - x e^x + (\ln |x|) x e^x.$$

2) Характеристичното уравнение е

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

с корени $\lambda_{1,2} = \pm i$. От

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

следва, че

$$y_{\text{хом}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Търсим частно решение $\eta(x)$ на даденото нехомогенно уравнение във вида

$$\eta(x) = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x,$$

където $C_1(x)$ и $C_2(x)$ са решения на системата

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ C_1' (\cos x)' + C_2' (\sin x)' = \frac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Имаме

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \frac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Умножаваме първото уравнение по $\sin x$, а второто – по $\cos x$ и ги събираме. Като вземем предвид, че

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

намираме $C_2' = \frac{\cos x}{\sin x}$. Сега умножаваме първото уравнение по $\cos x$, а второто – по $(-\sin x)$ и отново ги събираме. Тогава $C_1' = -1$. След интегриране получаваме

$$C_1(x) = -x, \quad C_2(x) = \ln |\sin x|,$$

откъдето

$$\eta(x) = -x \cos x + (\ln |\sin x|) \sin x$$

и

$$y_{\text{нехом}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x + (\ln |\sin x|) \sin x.$$

Метод на неопределените коефициенти

Ако линейното нехомогенно уравнение (1) е с постоянни коефициенти, т.е. $a_i \in \mathbb{R}$, то понякога е удобно да използваме и метода на неопределените коефициенти за намиране на частно решение.

► Нека е дадено уравнение от вида

$$L[y] = q(x)e^{\alpha x}, \quad (11)$$

където $q(x)$ е полином, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогава това уравнение допуска частно решение от вида

$$\eta(x) = x^k r(x)e^{\alpha x}, \quad (12)$$

където k е кратността на α като характеристичен корен ($k = 0$, ако α не е характеристичен корен); $r(x)$ е полином от степен, равна на степента на $q(x)$.

► Нека е дадено уравнение от вида

$$L[y] = e^{\alpha x}(q_1(x) \cos \beta x + q_2(x) \sin \beta x), \quad (13)$$

където $q_1(x)$, $q_2(x)$ са полиноми, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогава това уравнение допуска частно решение от вида

$$\eta(x) = x^k e^{\alpha x}(Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x), \quad (14)$$

където k е кратността на $\alpha + i\beta$ като характеристичен корен ($k = 0$, ако $\alpha + i\beta$ не е характеристичен корен); $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ са полиноми от степен $m = \max(\deg q_1(x), \deg q_2(x))$.

Задача 2

Да се решат уравненията:

$$1) y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x;$$

$$2) y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2;$$

$$3) y'' + y' - 2y = e^x(\cos x - 7 \sin x);$$

$$4) y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x.$$

Решение. 1) Характеристичното уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

има за корени $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Тогава общото решение на съответното хомогенно уравнение е

$$y_{\text{хом}} = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x.$$

Даденото нехомогенно уравнение е от вида (11), като $q(x) = 1$, $\alpha = 1$, затова частното решение ще търсим във вида (12). Тъй като полиномът $q(x)$ е степен 0, то полиномът $r(x)$ също трябва да бъде от степен 0, т.е. $r(x) = a$. Освен това, $\alpha = 1$ е трикратен характеристичен корен, откъдето $k = 3$. Тогава

$$\eta(x) = ax^3e^x.$$

Последователно намираме

$$\eta' = ae^x(x^3 + 3x^2), \quad \eta'' = ae^x(x^3 + 6x^2 + 6x),$$

$$\eta''' = ae^x(x^3 + 9x^2 + 18x + 6).$$

Заместваме с изразите за η''' , η'' , η' и η в уравнението

$$\eta''' - 3\eta'' + 3\eta' - \eta = e^x$$

и получаваме

$$6ae^x = e^x,$$

откъдето следва, че

$$a = \frac{1}{6},$$
$$\eta(x) = \frac{1}{6}x^3e^x.$$

Накрая,

$$y_{\text{нехом}} = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x + \frac{1}{6}x^3e^x.$$

2) Характеристичното уравнение

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

има за корени $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Тогава общото решение на съответното хомогенно уравнение е

$$y_{\text{хом}} = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}.$$

Даденото нехомогенно уравнение е от вида (11), като $q(x) = 6x^2 - 10x + 2$, $\alpha = 0$, затова частното решение ще търсим във вида (12). Тъй като полиномът $q(x)$ е втора степен, то полиномът $r(x)$ също трябва да бъде от втора степен, т.е. $r(x) = ax^2 + bx + c$. Освен това, $\alpha = 0$ не е характеристичен корен, откъдето $k = 0$. Тогава

$$\eta(x) = x^0(ax^2 + bx + c)e^{0 \cdot x} = ax^2 + bx + c.$$

Последователно намираме

$$\eta' = 2ax + b, \quad \eta'' = 2a.$$

Заместваме с изразите за η'' , η' и η в уравнението

$$\eta'' - 5\eta' + 6\eta = 6x^2 - 10x + 2$$

и получаваме

$$2a - 5(2ax + b) + 6(ax^2 + bx + c) = 6x^2 - 10x + 2.$$

Следователно

$$(6a - 6)x^2 + (6b - 10a + 10)x + (2a - 5b + 6c - 2) = 0$$

е изпълнено за всяко x . Това е възможно тогава и само тогава, когато всички коефициенти на полинома са равни на нула, т.е.

$$\begin{cases} 6a - 6 = 0 \\ 6b - 10a + 10 = 0 \\ 2a - 5b + 6c - 2 = 0. \end{cases}$$

Решаваме тази система и намираме $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$. Тогава $\eta(x) = x^2$ и

$$y_{\text{нехом}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + x^2.$$

3) Характеристичното уравнение

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

има за корени $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Тогава общото решение на съответното хомогенно уравнение е

$$y_{\text{хом}} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Даденото нехомогенно уравнение е от вида (13), като $q_1(x) = 1$, $q_2(x) = -7$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Затова частното решение ще търсим във вида (14). Тъй като полиномите $q_1(x)$ и $q_2(x)$ са от нулева степен, то полиномите $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ също трябва да бъдат от нулева степен, т.е. $Q_1(x) = a$, $Q_2(x) = b$. Освен това, $\alpha + i\beta = 1 + i$ не е характеристичен корен, откъдето $k = 0$. Тогава

$$\eta(x) = x^0 e^x (a \cos x + b \sin x) = e^x (a \cos x + b \sin x).$$

Последователно намираме

$$\eta' = e^x(a \cos x + b \sin x - a \sin x + b \cos x),$$

$$\eta'' = e^x(-2a \sin x + 2b \cos x).$$

Заместваме с изразите за η'' , η' и η в уравнението

$$\eta'' + \eta' - 2\eta = e^x(\cos x - 7 \sin x)$$

и получаваме

$$\begin{aligned} e^x(-2a \sin x + 2b \cos x) + e^x(a \cos x + b \sin x - a \sin x + b \cos x) \\ - 2e^x(a \cos x + b \sin x) = e^x(\cos x - 7 \sin x). \end{aligned}$$

Следователно

$$(-3a - b + 7) \sin x + (-a + 3b - 1) \cos x = 0$$

е изпълнено за всяко x . Това е възможно тогава и само тогава, когато коефициентите пред функциите $\sin x$ и $\cos x$ са равни на нула, т.е.

$$\begin{cases} -3a - b + 7 = 0 \\ -a + 3b - 1 = 0. \end{cases}$$

Решаваме тази система и намираме $a = 2$, $b = 1$. Тогава

$$\eta(x) = e^x(2 \cos x + \sin x),$$

$$y_{\text{нехом}} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + e^x(2 \cos x + \sin x).$$

4) Характеристичното уравнение

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$$

има за корени $\lambda_{1,2} = 2 \pm 2i$. От

$$e^{(2+2i)x} = e^{2x}(\cos 2x + i \sin 2x) = e^{2x} \cos 2x + i e^{2x} \sin 2x$$

следва, че

$$y_{\text{хом}} = C_1 e^{2x} \cos 2x + C_2 e^{2x} \sin 2x.$$

Дясната част на даденото нехомогенно уравнение не е нито от вида в (11), нито от вида в (13), но представлява сума на две функции, от които първата е от вида в (11), а втората е от вида в (13). В този случай ще използваме следната

Лема. Ако η_1 е частно решение на уравнението $L[y] = f_1$, а η_2 е частно решение на уравнението $L[y] = f_2$, то $\eta = \eta_1 + \eta_2$ е частно решение на уравнението $L[y] = f_1 + f_2$.

Това означава, че трябва да разгледаме две уравнения:

$$y'' - 4y' + 8y = e^{2x},$$

$$y'' - 4y' + 8y = \sin 2x.$$

За първото търсим частно решение $\eta_1 = ae^{2x}$, а за второто – частно решение $\eta_2 = A \cos 2x + B \sin 2x$. Сумата $\eta_1 + \eta_2$ е частното решение на даденото нехомогенно уравнение. Така намираме

$$y_{\text{нехом}} = C_1 e^{2x} \cos 2x + C_2 e^{2x} \sin 2x + \eta_1 + \eta_2.$$