Точни диференциални уравнения. Интегриращ множител

доц. д-р Теменужка Пенева

Модели на реални процеси
спец. Информатика

Точни диференциални уравнения

- Нека е дадено уравнението

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \tag{1}$$

където $M(x,y)$ и $N(x,y)$ са непрекъснати функции в област D. То се нарича точно диференциално уравнение, ако лявата му страна е пълен диференциал на някаква функция $F(x,y)$, т.е.

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = d\,F(x,y). \tag{2}$$

Като заместим (2) в (1) имаме

$$d\,F(x,y) = 0,$$

откъдето след интегриране получаваме

$$F(x,y) = C,$$

което представлява общото решение на (1).

Теорема 1

Нека частните производни $\frac{\partial M}{\partial y}$ *и* $\frac{\partial N}{\partial x}$ *са непрекъснати функции в дефиниционната област* D *на* M *и* N. *Тогава уравнението* (1) *е точно диференциално уравнение тогава и само тогава, когато за всяко* $(x,y) \in D$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

- Нека (1) е точно диференциално уравнение. Търсим функция $F(x, y)$, за която

$$d\,F(x, y) = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy.$$

Тъй като

$$d\,F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy,$$

след сравняване на горните две равенства получаваме, че F е решение на следната система от частни диференциални уравнения:

$$\left|\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= M(x, y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= N(x, y). \end{aligned}\right.$$

Решаването на тази система ще илюстрираме с пример.

Задача 1

Да се решат уравненията:

1) $2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$;

2) $e^{-y}\,dx - (2y + xe^{-y})\,dy = 0$;

3) $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = 0.$

Решение. 1) Имаме

$$M(x,y) = 2xy, \quad N(x,y) = x^2 - y^2,$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x.$$

Тъй като $\dfrac{\partial M}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial N}{\partial x}$, то даденото уравнение е точно.

Търсим функция $F(x, y)$, за която

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) = 2xy \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) = x^2 - y^2. \end{array} \right.$$

Избираме по-лесното за интегриране уравнение в системата, в случая да вземем първото. От него получаваме

$$F(x, y) = \int 2xy \, dx + C(y) = y \int 2x \, dx + C(y) = yx^2 + C(y).$$

Следователно, за да намерим $F(x, y)$, трябва да намерим $C(y)$. Дотук получихме

$$F(x, y) = yx^2 + C(y). \tag{3}$$

Диференцираме това равенство по y и намираме

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + C'(y).$$

Сега в лявата страна както на последното уравнение, така и на второто уравнение в системата (което още не сме използвали), се намира $\dfrac{\partial F}{\partial y}$. Тогава след приравняване,

$$x^2 + C'(y) = x^2 - y^2,$$

$$C'(y) = -y^2,$$

$$C(y) = \int (-y^2)\,dy = -\frac{y^3}{3} + C.$$

Заместваме в (3) и получаваме

$$F(x, y) = yx^2 - \frac{y^3}{3} + C.$$

Тогава общото решение на даденото уравнение е

$$yx^2 - \frac{y^3}{3} = C.$$

2) Отг. $xe^{-y} - y^2 = C$.

3) Упътване. Представете уравнението във вида (1) и докажете, че то е точно диференциално уравнение.

Отг. $\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = C$.

Интегриращ множител

Нека е дадено уравнението (1), където $M(x,y)$ и $N(x,y)$ са непрекъснати функции в област D. Да предположим, че то не е точно диференциално уравнение, т.е. съгласно Теорема 1,

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

- Нека функцията $\mu(x,y)$ е дефинирана и различна от 0 във всяка точка $(x,y) \in D$, а частните ѝ производни $\frac{\partial \mu}{\partial x}$ и $\frac{\partial \mu}{\partial y}$ са непрекъснати в D. Тогава $\mu(x,y)$ се нарича интегриращ множител на (1), ако уравнението

$$\mu(x,y)M(x,y)\,dx + \mu(x,y)N(x,y)\,dy = 0$$

е точно диференциално уравнение, т.е.

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

- Като разпишем последното уравнение получаваме

$$\mu'_y M + \mu M'_y = \mu'_x N + \mu N'_x,$$

откъдето

$$\mu\left(M'_y - N'_x\right) = \mu'_x N - \mu'_y M. \tag{4}$$

Оказва се, че интегриращият множител μ е решение на частното диференциално уравнение (4), което в общия случай се решава по-трудно, отколкото изходното уравнение (1).

- Уравнението (4) се превръща в обикновено диференциално уравнение, ако μ е функция на един аргумент u, който от своя страна е функция на x и y, т.е.

$$\mu = \mu(u), \quad u = u(x, y).$$

В този случай

$$\mu'_x = \mu'_u.u'_x = \mu'.u'_x, \quad \mu'_y = \mu'_u.u'_y = \mu'.u'_y$$

и като заместим в (4) получаваме

$$\mu\left(M'_y - N'_x\right) = \mu'\left(u'_x N - u'_y M\right).$$

Тогава от $\mu' = \frac{d\mu}{du}$ следва, че

$$\frac{M'_y - N'_x}{u'_x N - u'_y M}\, du = \frac{d\mu}{\mu}.$$

- Последното равенство ни дава

Теорема 2 (Достатъчно условие за съществуване на интегриращ множител)

Ако отношението

$$\frac{M'_y - N'_x}{u'_x N - u'_y M} = \psi(u),$$

т.е. е функция само на u, то съществува интегриращ множител от вида $\mu(u)$ и той е решение на уравнението с разделящи се променливи

$$\frac{d\mu}{\mu} = \psi(u)\, du.$$

▶Частни случаи:

$$\mu(x): \qquad \frac{M'_y - N'_x}{N} = \psi(x);$$

$$\mu(y): \qquad \frac{M'_y - N'_x}{-M} = \psi(y);$$

$$\mu(xy): \qquad \frac{M'_y - N'_x}{yN - xM} = \psi(xy);$$

$$\mu(x+y): \qquad \frac{M'_y - N'_x}{N - M} = \psi(x+y);$$

$$\mu(x^2 - y^2): \qquad \frac{M'_y - N'_x}{2xN + 2yM} = \psi(x^2 + y^2).$$

Задача 2

Да се решат уравненията:

1) $y(x+y)\,dx + (xy-1)\,dy = 0$;

2) $(y+\sin y+xy)\,dx + (x+\cos y)\,dy = 0$;

3) $(x^2+y^2+1)\,dx - 2xy\,dy = 0$;

4) $(x^2y^3+y)\,dx + (x^3y^2-x)\,dy = 0$.

Решение. 1) Първо намираме

$$M'_y = x+2y, \quad N'_x = y.$$

От $M'_y \not\equiv N'_x$ следва, че уравнението не е точно диференциално уравнение. Преминаваме към търсене на интегриращ множител.

(а) Проверяваме дали уравнението допуска интегриращ множител от вида $\mu(x)$. От достатъчното условие за съществуване на интегриращ множител следва, че трябва да разгледаме функцията

$$\frac{M'_y - N'_x}{N} = \frac{x+y}{xy-1},$$

но тъй като тя не се явява функция само на x, то уравнението не допуска интегриращ множител от вида $\mu(x)$.
(б) Проверяваме дали изходното уравнение допуска интегриращ множител от вида $\mu(y)$. В този случай

$$\frac{M'_y - N'_x}{-M} = -\frac{x+y}{y(x+y)} = -\frac{1}{y} = \psi(y)$$

и следователно уравнението допуска интегриращ множител от вида $\mu(y)$ и той е решение на диференциалното уравнение с разделящи се променливи

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{1}{y}\,dy.$$

Общото решение на това уравнение е

$$\mu = \frac{C}{y}, \quad C \neq 0,$$

но тъй като на нас ни е необходима само една функция, достатъчно е да изберем

$$\mu = \frac{1}{y}.$$

Сега умножаваме изходното уравнение с μ и получаваме

$$(x+y)\,dx + \frac{xy-1}{y}\,dy = 0,$$

което вече е точно диференциално уравнение. Търсим функция $F(x,y)$, за която

$$\left| \begin{aligned} F'_x &= x+y \\ F'_y &= \frac{xy-1}{y}. \end{aligned} \right.$$

Като интегрираме първото равенство в системата получаваме, че

$$F(x,y) = \int (x+y)\,dx + C(y) = \frac{x^2}{2} + yx + C(y).$$

Сега диференцираме спрямо y и намираме

$$F'_y = x + C'(y).$$

Тогава от равенството за F'_y в системата и последното равенство имаме

$$\frac{xy-1}{y} = x + C'(y),$$

$$C'(y) = -\frac{1}{y},$$

$$C(y) = -\int \frac{1}{y}\, dy = -\ln|y| + C.$$

Окончателно за функцията $F(x, y)$ получаваме

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2} + yx - \ln|y| + C,$$

откъдето общото решение на изходното уравнение е

$$\frac{x^2}{2} + yx - \ln|y| = C.$$

2) Намираме

$$M'_y = 1 + \cos y + x, \quad N'_x = 1.$$

Проверяваме за интегриращ множител от вида $\mu(x)$. От Теорема 2 имаме

$$\frac{M'_y - N'_x}{N} = \frac{\cos y + x}{x + \cos y} = 1 = \psi(x),$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = 1.dx,$$

$$\mu = Ce^x, \quad C \neq 0.$$

Избираме $\mu = e^x$ и след умножаване на изходното уравнение с μ получаваме точното диференциално уравнение

$$e^x(y + \sin y + xy)\,dx + e^x(x + \cos y)\,dy = 0.$$

Отг. $e^x(xy+\sin y)=C$.

3) Уравнението допуска интегриращ множител от вида $\mu(x)$, защото

$$\frac{M_y'-N_x'}{N}=\frac{4y}{-2xy}=-\frac{2}{x}=\psi(x).$$

Интегриращият множител получаваме като решение на уравнението

$$\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{2}{x}\,dx.$$

Отг. $\mu=\frac{1}{x^2}$; $\quad x^2-y^2-1=Cx$.

4) Пресмятаме

$$M_y'=3x^2y^2+1,\quad N_x'=3x^2y^2-1.$$

Даденото уравнение допуска интегриращ множител от вида $\mu(xy)$, защото ако означим $u=xy$, то

$$\frac{M'_y - N'_x}{u'_x N - u'_y M} = \frac{2}{y(x^3y^2 - x) - x(x^2y^3 + y)} = -\frac{1}{xy} = -\frac{1}{u}.$$

Оттук

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{du}{u},$$

$$\mu = \frac{C}{u}, \quad C \neq 0.$$

Избираме $\mu = \frac{1}{u} = \frac{1}{xy}$. Като умножим двете страни на даденото уравнение с $\frac{1}{xy}$ стигаме до точното диференциално уравнение

$$\frac{x^2y^3 + y}{xy}\,dx + \frac{x^3y^2 - x}{xy}\,dy = 0.$$

Отг. $xy(C - x^2 - y^2) = -1;\ x = 0,\ y = 0.$