Рафи Христов Цигаров   Фукултетен номер: № 2201261077

Зз. а) мн. $N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y-z=0; x-y=0\}$

$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y=0 \Rightarrow x=y \end{cases}$ $\begin{cases} y+y-z=0 \Rightarrow 2y=z \\ x=y \end{cases}$

$\Rightarrow (x,y,z) = (y,y,2y)$

1) Нека $f_1 = (y_1, y_1, 2y_1)$; $y_1 \in \mathbb{R}$; $f_2 = (y_2, y_2, 2y_2)$; $y_2 \in \mathbb{R}$

2) $f_1 + f_2 = (y_1, y_1, 2y_1) + (y_2, y_2, 2y_2) = y_1 + y_2 + y_1 + y_2 + 2(y_1 + y_2)$

$= (y_1 + y_2; y_1 + y_2; 2(y_1 + y_2)) \Rightarrow f_1 + f_2 \in N$

3) Нека $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda f_1 = \lambda(y_1, y_1, 2y_1) = (\lambda y_1, \lambda y_1, 2\lambda y_1) \Rightarrow \lambda f_1 \in N$

от 1,2,3 ⇒ множеството N е векторно пространство

$(y, y, 2y) = y\underbrace{(1,1,2)}_{\vec{e}_1}$

$\lambda \vec{e}_1 = 0 \Rightarrow \lambda(1,1,2) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{e}_1$ е линейно независима

$\dim N = 1$

б) мн. $\begin{pmatrix} 2a & d \\ b & a+c \end{pmatrix}$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

1) Нека $A = \begin{pmatrix} 2a_1 & d_1 \\ b_1 & c_1 + a_1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2a_2 & d_2 \\ b_2 & c_2 + a_2 \end{pmatrix}$; $a_1, b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{R}$; $a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{R}$

2) $A+B = \begin{pmatrix} 2(a_1+a_2) & d_1+d_2 \\ b_1+b_2 & a_1+c_1+a_2+c_2 \end{pmatrix}$;

$A+B$ е на множеството от вида $\begin{pmatrix} 2a & d \\ b & c+a \end{pmatrix}$

3) Нека $\lambda \in R$

$\lambda \begin{pmatrix} 2a & d \\ b & c+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\lambda a & \lambda d \\ \lambda b & \lambda(c+a) \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda A \in$ на множеството

от 1, 2 и 3 $\Rightarrow$ множеството от вида $\begin{pmatrix} 2a & d \\ b & c+a \end{pmatrix}$ е векторно пространство

$\begin{pmatrix} 2a & d \\ b & c+a \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{e_2} + d \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_3} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_4}$

$\lambda e_1 + \lambda e_2 + \lambda e_3 + \lambda e_4 = \{0\}$

$2\lambda_1 = 0$

$\lambda_3 = 0$ $\Rightarrow \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ – образува се линейно независима

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 0$

$\lambda_4 = 0$ $\quad \dim A = 4$

2з. а) $\vec{a_1}(1,1,-1)$; $\vec{a_2}=(0,1,1)$; $\vec{a_3}=(1,2,0)$;

$$\lambda_1\vec{a_1}+\lambda_2\vec{a_2}+\lambda_3\vec{a_3}=\vec{0}$$
$$\lambda_1(1,1,-1)+\lambda_2(0,1,1)+\lambda_3(1,2,0)=\vec{0}$$

$$\begin{cases}\lambda_1+0\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=0\\ -\lambda_1+\lambda_2+0\lambda_3=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2\end{cases}\qquad \begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=0\\ 2(\lambda_1+\lambda_3)=0\\ \lambda_1=\lambda_2\end{cases}$$

$\{\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{a_4}\}$ е линейно зависима

б) $\vec{a_1}(1,1,-1)$; $\vec{a_2}(0,2,1)$; $\vec{a_3}(0,0,5)$

$$\lambda_1\vec{a_1}+\lambda_2\vec{a_2}+\lambda_3\vec{a_3}=\vec{0}$$

$$\begin{cases}\lambda_1+0\lambda_2+0\lambda_3=0\\ \lambda_1+2\lambda_2+0\lambda_3=0\\ -\lambda_1+\lambda_2+5\lambda_3=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\lambda_1=0\\ 2\lambda_2=0\\ \lambda_2+5\lambda_3=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=0\end{cases}$$

$\{a_1,a_2,a_3\}$ - линейно зависима