Дискретна математика

проф. д-р Тодорка Глушкова,
Катедра „Компютърни технологии“, ФМИ

7

Двоични функции

Съдържание

- Основни понятия
- Свойства на функциите
- Пълно множество
- Теорема на Бул

Двоични функции

- Съвременните дигитални устройства използват двоична логика, тъй като на входа и изхода се подават само два различими сигнала – 0 и 1.
- Важна част от работата на дигиталните устройства е свързана с пресмятането на двоични функции
- Задачите за описване, минимизиране и използване на двоични функции са свързани с етапите на проектиране и реализиране на изчислителните процеси.

Основни понятия

- Нека B ={0,1}. Знаем, че B^n=B x B x B x…x B е Декартовото произведение.
- Очевидно B^n се състои от всички наредени n-орки от 0 и 1-ци, чийто брой е 2 на степен 2^n
- Ако променливата е една, съществуват 4 функции:

x1	**f1**	**f2**	**f3**	**f4**
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

- Забелязваме, че f1=0; f2=x1; f3=¬x1; f4=1

Основни понятия

- Ако променливите са 2, получаваме 16 функции:

x1	x2	f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9	f10	f11	f12	f13	f14	f15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

- Забелязваме, че f0=0; f15=1; f1=x1.x2 (конюнкция); f3=x1; f5=x2; f6=x1+x2 (изключващо или); f7=x1$\vee$x2 (дисюнкция); f8=x1$\downarrow$x2 (стрелка на Пиърс); f9=x1$\leftrightarrow$x2 (еквивалентност); f13=x1$\rightarrow$x2 (импликация); f14=x1|x2 (черта на Шефер)

Свойства на функциите

1. x1.x1=x1; x1$\vee$x1=x1; x1+x1=0 –идемпотентност
2. x1.x2=x2.x1; x1$\vee$x2=x2$\vee$x1; x1+x2=x2+x1- комутативни закони
3. x1.(x2.x3)=(x1.x2).x3; x1$\vee$(x2$\vee$x3)=(x1$\vee$x2)$\vee$x3; x1+(x2+x3)=(x1+x2)+x3 – асоциативни закони
4. x1(x2$\vee$x3)=x1.x2 $\vee$ x1.x3; x1$\vee$(x2.x3)=x1$\vee$x2.x1$\vee$x3; x1(x2+x3)=x1.x2+x1.x3 – дистрибутивни закони

Свойства на функциите

5. $x1.0=0$; $x1 \vee 0=x1$; $x1+0=x1$

6. $x1.1=x1$; $x1 \vee 1=1$; $x1+1=\neg x1$

7. $x1. \neg x1=0$; $x1 \vee \neg x1=1$; $x1+\neg x1=1$

8. $\neg(x1.x2)=\neg x1 \vee \neg x2$; $\neg(x1 \vee x2)= (\neg x1). (\neg x2)$ – Закони на Де Морган.

x1	**x2**	**x1.x2**	**$\neg$x1**	**$\neg$x2**	**$\neg$(x1.x2)**	**$\neg$x1$\vee\neg$x2**
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Приоритет на операциите

- Подизрази в скоби
- Отрицания
- Конюнкция
- Дисюнкция и “+”
- Всички останали функции

Представянето на функциите с таблица е много сложно и дълго, затова ги представяме аналитично чрез формула.

Формули и суперпозиция

- Нека F е множество от функции.

Опр.1. Ако една функция f се представя с една формула над F, казваме че f е ***суперпозиция*** над F.

Опр.2. Множеството на всички суперпозиции над F ще наричаме ***обвивка*** на F и ще означаваме с [F]

Т.е. Обвивката се състои от всички функции, които можем да реализираме чрез формула над F.

Пълно множество

Да означим с P_2 множеството на всички двоични функции.

Опр. Ще казваме, че множеството от двоични функции F е ***пълно***, ако $[F]=P_2$, т.е. Ако всяка двоична функция се реализира с формула над F.

Заб. Множеството $\{\neg x\}$ е непълно, а множеството P_2 е пълно. Да потърсим други пълни множества, различни от P_2.

Теорема на Бул

Теорема на Бул: Множеството от двоични функции $\{\neg x_1, x_1.x_2, x_1 \vee x_2\}$ е пълно.

Теорема: Нека $F=\{f_1,f_2,f_3 \ldots f_n\}$ е пълно. Множеството $G=\{g_1,g_2,g_3,\ldots g_k\}$ е пълно, тогава и само тогава, когато за всяко $f_i \in F$: $f_i \in [G]$, т.е. когато може да се представи като формула над G.

Използвана литература в курса

- D. W. Hoffmann, Theoretische Informatik, Hansen Verlag, 2009
- H. P. Gumm, M. Sommer, Einfuehrung in die Informatik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2004
- J. W. Grossman, Discrete Mathematics, Macmillan Pub. Co., 1990
- К. Манев, Увод в дискретната математика, КЛМН, 2005
- Й. Денев, Р. Павлов, Я. Демирович. Дискретна математика. Наука и изкуство, София, 1984.

Използвана литература в курса

- Д. Байнов, С. Костадинов, Р. Павлов, Л. Луканова. Ръководство за решаване на задачи по дискретна математика. Университетско издателство “Паисий Хилендарски”, Пловдив, 1990.
- В.А. Успенский, Машина Поста, Москва, Наука, 1988, ISBN 5-02-013735-9.
- L. Lovasz, J. Pelikan, K. Vesztergombi, Discrete Mathematics – Elementary and Beyond, Springer Verlag, New York, 2003, ISBN 0-387-95584-4.

Използвана литература в курса

- E. Bender, S. Williamson, A Short Course in Discrete Mathematics, Dover, 2006, ISBN 0-486-43946-1.
- P. Linz, An Introduction to Formal Languages and Automata, Jones and Bartlett Publishers, 6-th edition, Jones & Bartlett Publishers, ISBN-13: 9781284077247, 2016
- Kenneth H. Rosen, Kamala Krithivasan, Discrete mathematics and its application, McGraw-Hill Companies, 7-th edition, ISBN 978-0-07-338309-5, 2012

Използвана литература в курса

- Owen D. Byer, Deirdre L. Smeltzer, Kenneth L. Wantz, Journey into Discrete Mathematics, AMS, MAA Press, Providence Rhode Island, ISBN 9781470446963, 2018
- Christopher Rhoades, Introductory Discrete Mathematics, Willford Press, ISBN 1682854922, 9781682854921, 2018
- David Liben-Nowell, Discrete Mathematics for Computer Science, Wiley, 2017, ISBN 1119397197, 9781119397199, 2017.
- ***http://www.jflap.org/*** - софтуерна среда