Дискретна математика

проф. д-р Тодорка Глушкова,
Катедра „Компютърни технологии“, ФМИ

11

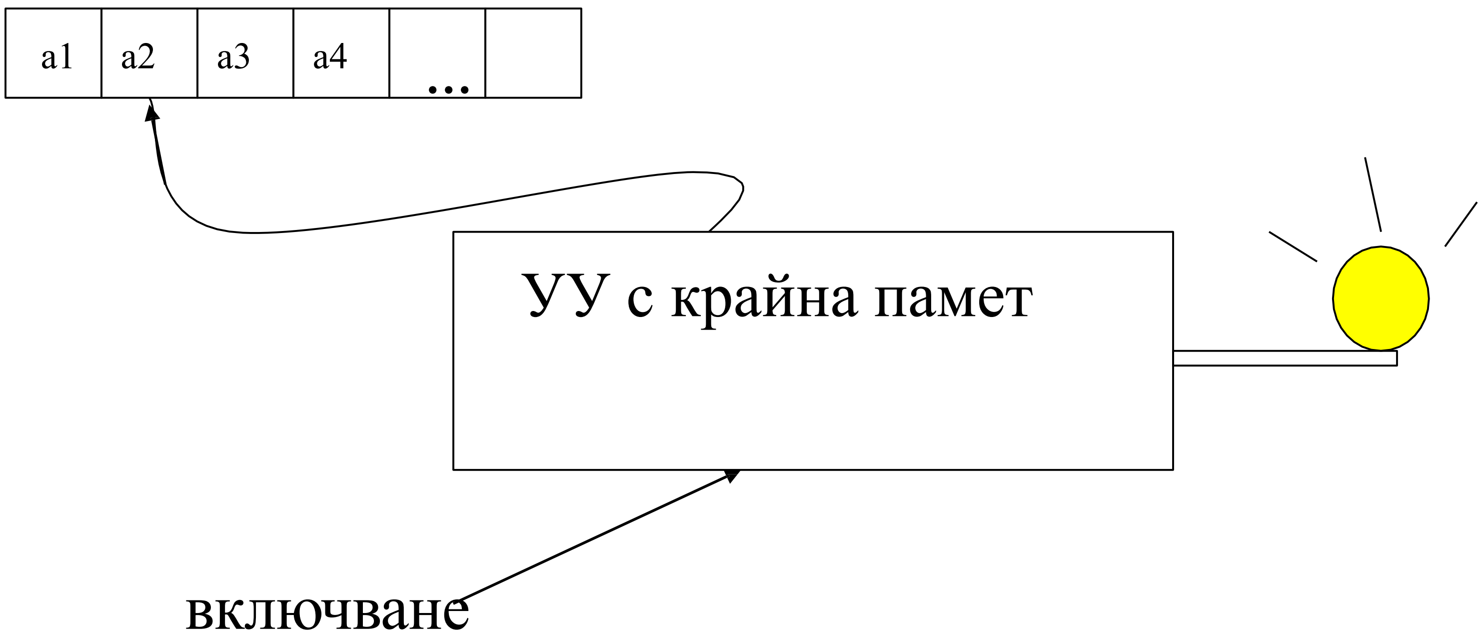
КРАЙНИ АВТОМАТИ

Съдържание

- Детерминиран краен автомат
- Недетерминиран краен автомат
- Примери

Детерминирани крайни автомати (ДКА)

Принципна схема:



Детерминирани крайни автомати (ДКА)

- Ще разгледаме един сравнително прост, но важен вид разпознаватели на формални езици - т.нар. ***детерминирани крайни автомати(ДКА)***.
- Крайните автомати не разпознават всички езици с крайни описания, а само автоматните езици.
- ДКА се състои от входна лента, на която е написана дума от допустимите входни символи, която се чете от крайния автомат отляво надясно и от УУ, което може да се намира в краен брой вътрешни състояния.

Детерминирани крайни автомати (ДКА)

- ДКА работи последователно в дискретни моменти от време- тактове.
- На всеки такт УУ се намира в едно вътрешно състояние и прочита един символ.
- След като ДКА изчете цялата дума, ако завърши работата в едно от фиксираните му заключителни състояния, казваме че той е разпознал входната дума (лампата светва).
- Във всички останали случаи той не е разпознал входната дума.

Детерминирани крайни автомати (ДКА)

- <u>Дефиниция:</u> Входните думи, които се разпознават от ДКА, образуват ***езика***, разпознаван от автомата.
- <u>Дефиниция:</u> ДКА над азбуката V наричаме наредената петорка: $A=<K,V,\delta,q_0,F>$, където:
  - $K\neq\varnothing$ е множество от вътрешни състояния;
  - V - множество от входни символи (входна азбука)
  - δ - функция на преходите с дефиниционна област $D(\delta)\subseteq K\text{x}V$ и област на стойностите $R(\delta)\subseteq K$.
  - $q_0\in K$ - начално състояние;
  - $F\subseteq K$ - множество от заключителни състояния.

Детерминирани крайни автомати (ДКА)

- ДКА е напълно определен, когато функцията на преходите δ е дефинирана за всяка наредена двойка от KxV, т.е. $D(\delta)$= KxV.
- Автоматът A работи така:

  Нека на A е зададена входна дума $a_{i1},a_{i2},\ldots a_{ik+1} \in V^*$. По текущото състояние и първия входен символ a_{i1} чрез функцията δ се определя следващото вътрешно състояние $p_1 = \delta(p_0, a_{i1})$.

Детерминирани крайни автомати (ДКА)

- По състоянието p_1 и следващия входящ символ a_{i2} чрез δ се определя p_2 и т.н. Накрая по състоянието $p_к$ и входящия символ a_{ik+1} се определя последното вътрешно състояние $p_{к+1} = \delta(p_к, a_{ik+1})$.

- Ако $p_{к+1} \in F \Rightarrow A$ е разпознал думата, в противен случай автомата не разпознава думата.

Детерминирани крайни автомати (ДКА)

- Дефиниция: Множеството T(A) от всички думи на входната азбука V, които ДКА -А разпознава, се нарича ***език, разпознаван от А.***

- Дефиниция: Два ДКА - А1 и А2 са ***еквивалентни***$\Leftrightarrow$ T(A1)=T(A2), т.е. когато разпознават един и същи език.

Детерминирани крайни автомати (ДКА)

- Пример1: Да разгледаме ДКА:

$A1=<\{q_0,q_1,q_2\},\{0,1\}, \delta, q_0,\{q_2\}>$, като

$\delta(q_0,0)=q_0$	$\delta(q_1,1)=q_2$
$\delta(q_0,1)=q_1$	$\delta(q_2,0)=q_0$
$\delta(q_1,0)=q_0$	$\delta(q_2,1)=q_2$

- Забележка: Функцията δ е дефинирана за всяка наредена двойка от KxV. Следователно А е напълно определен.

Детерминирани крайни автомати (ДКА)

- За входната дума 011011 получаваме следната поредица от състояния на А1:

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ q_0 & q_0 & q_1 & q_2 & q_0 & q_1 & q_2 \end{array}$$

-изх. състояние $\Rightarrow$ думата е разпозната.

- За думата 1 1 0 1

$$q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_0 \quad q_1$$

- не е от F $\Rightarrow$ думата не е разпозната.

Детерминирани крайни автомати (ДКА)

Пример2: $A2=<\{q0,q1,q2\},\{a,b\}, \delta, q0, \{q0,q1\}>$, като

$\delta(q0,a)=q1$ $\delta(q2,a)=q1$

$\delta(q1,b)=q2$ $\delta(q2,b)=q2$

$\delta(q1,a)=q1$

A2 не е напълно определен, защото $\delta(q0,b)$не е дефинирана. Следователно A2 не разпознава думи, започващи с b.

За думата: a a b a

q0 q1 q1 q2 q1 - разпознава.

За думата b a b a - не я разпознава.

Детерминирани крайни автомати (ДКА)

- За нагледност функцията за преходите може да се задава таблично:

	a	b
q0	q1	
q1	q1	q2
q2	q1	q2

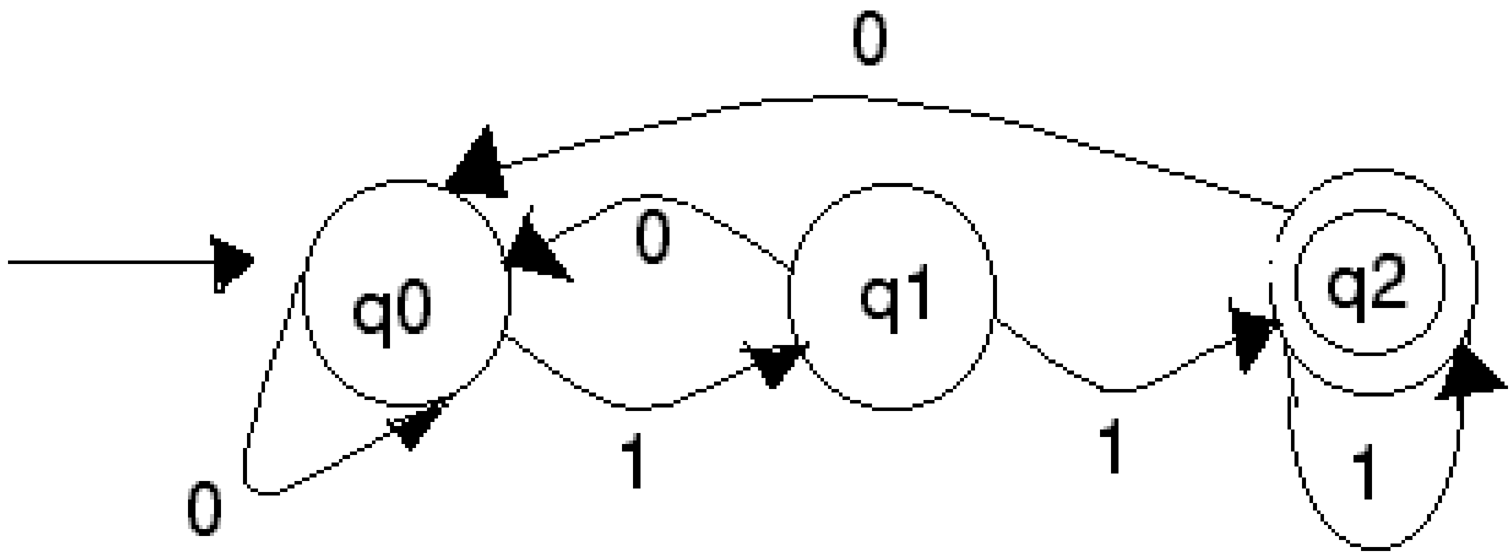
Детерминирани крайни автомати (ДКА)

Графично представяне

- Всеки ДКА може да се представи с диаграма на преходите.
- Дефиниция: Диаграма на преходите на ДКА **A** се нарича ориентирания граф с отбелязани ребра, който се получава като за всяко вътрешно състояние на A поставим по един връх, а два върха **p** и **q** свързваме с ориентирано ребро от **p** към **q**, само когато δ**(p, a)= q** за някое **a** от автомата **A.**
- Началният връх се отбелязва със стрелка.

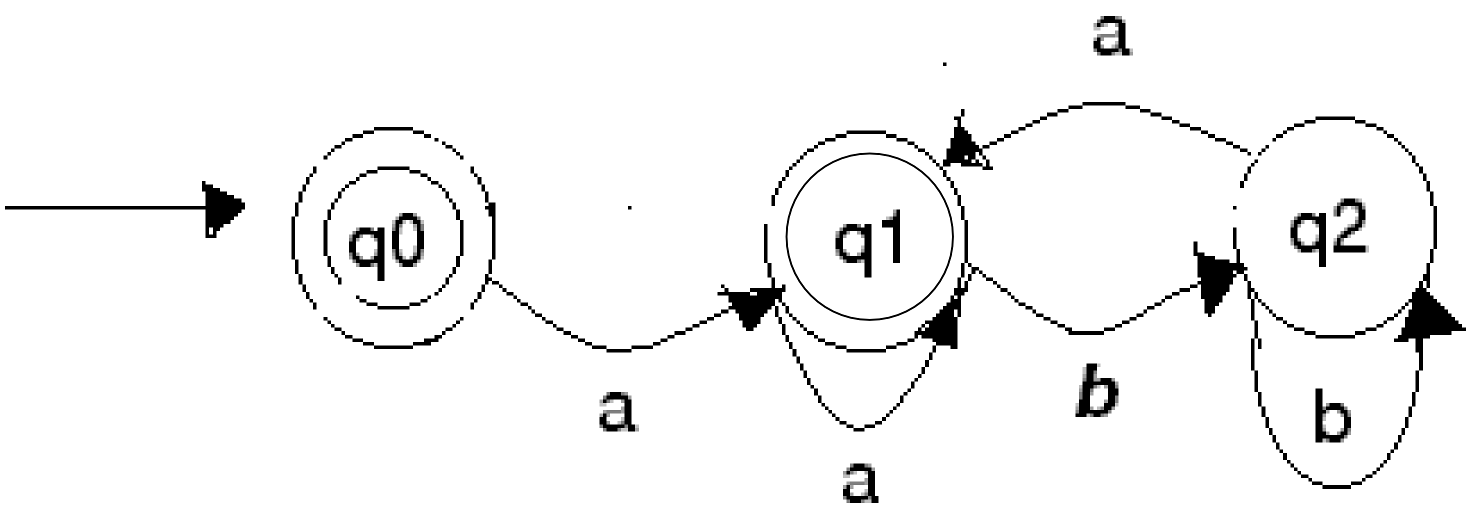
Примери

- За пример 1:



Примери

За пример 2:



Детерминирани крайни автомати (ДКА)

Пример 3: За A2, който не е напълно определен получаваме следния еквивалентен на него напълно определен краен автомат:

- $B2=\langle\{q0,q1,q2,s\},\{a, b\},\delta, q0, \{q0,q1\}\rangle$, в който
- $\delta(q0,a)=q1$
- $\delta(q0,b)=s$
- $\delta(q1,a)=q1$
- $\delta(q1,b)=q2$

$\delta(q2,a)=q1$

$\delta(q2,b)=q2$

$\delta(s, a)=s$

$\delta(s, b)=s$

Детерминирани крайни автомати (ДКА)

- **Лема:** Нека $A = \langle K,V,\delta,q_0,F \rangle$ е произволен ненапълно определен ДКА. Тогава съществува еквивалентен ва него, който е напълно определен.
- **Теорема: (uvw-теорема)** Нека L е формален език, разпознаван от ДКА. Тогава съществува константа n, така че ако α е дума от L с дължина $\geq$ n, то α може да се представи като конкатенация на три думи u,v,w така: α= uvw, като $d(uv) \leq n$, $d(v) \geq 1$ и за всяко i =1,2… думите uv^iw също са от езика L.

Детерминирани крайни автомати (ДКА)

- **Следствие:** Нека L е език, разпознаван от ДКА A с n-състояния. L не е празен език $\Leftrightarrow$A разпознава думи с дължина <n.
- **Следствие:** Съществува алгоритъм, който определя дали един език, разпознаван от ДКА, е празен или не.
- **Следствие:** Съществува безконтекстен език, който не се разпознава от ДКА.

Недетерминирани крайни автомати

- За разлика от ДКА от всеки връх може да се премине в 0,1,2 или повече нови ребра, означени с един и същ входен символ, като всяко от тях представлява възможен преход.
- Както при ДКА една входна дума се разпознава, ако в диаграмата на преходите има поне един път от насочени ребра, водещи от началното към заключителното състояние.

Недетерминирани крайни автомати

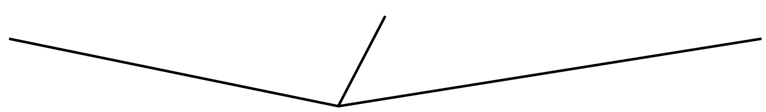
- <u>Дефиниция:</u> **НДКА А над азбука V** наричаме петорката $A=\langle K,V,\delta,q_0,F\rangle$, където:
  - $K\neq\emptyset$ е множество от вътрешни състояния;
  - V - крайно множество от входни символи (входна азбука)
  - δ - функция на преходите с дефиниционна област $D(\delta)$: $D(\delta)\subseteq KxV$ и област на стойностите $R(\delta)$:$R(\delta)\subseteq P(K)$, където P(K) е множеството от всички подмножества на K.
  - $q_0\in K$ - начално състояние;
  - $F\subseteq K$ - множество от заключителни състояния.

Недетерминирани крайни автомати

- Да отбележим, че докато при ДКА $\delta(q, a)=p$ е вътрешно състояние, при НДКА $\delta(q, a)=\{p_1,\dots p_e\}$ е крайно множество от вътрешни състояния.
- Графично НДКА се представя като ДКА
- <u>Пример 4:</u> Нека $\alpha= a_1a_2\dots a_k \in V^*$.

$$\delta(q_0,a_1)=\{p'_1,\dots p'_e\}$$

$$\delta(p'_1,a_2),\ \delta(p'_2,a_2),\dots\ \delta(p'_e,a_2)$$



a1

Недетерминирани крайни автомати

- Работа на НДКА: Нека $\omega = a_{i1}a_{i2}\ldots a_{ik+1}$ е входна дума. По текущото състояние q на първия символ a_{i1} чрез $\delta(q, a_{i1})=\{p_1\ldots p_i\}$ определяме множеството от възможни следващи състояния. По всяко от тях и по следващия входен символ a_{i2} чрез δ се определят множествата от възможни следващи състояния и т.н. до последната буква. Ако в множеството от състоянията след нея има някое заключително състояние, казваме, че думата е разпозната.

Недетерминирани крайни автомати

- С други думи, казваме, че думата е прочетена, ако се е получило множество от вътрешни състояния, които имат с F непразно сечение.
- Дефиниция: ***T(A) е езика*** на автомата A, т.е. $T(A)=\{\alpha \in V^*: \delta(q_0,\alpha) \cap F \neq \emptyset\}$
- Дефиниция: Два НДКА автомата са ***еквивалентни***, ако T(A1)=T(A2).

Пример 4: Нека $A=<\{q_0,q_1,q_2\},\{0,1\}, \delta, q_0,\{q_2\}>$, като

$\delta(q_0,0)=\{q_1,q_2\}$

$\delta(q_0,1)=\{q_0\}$

$\delta(q_1,0)=\{q_0,q_1\}$

$\delta(q_1,1)=\varnothing$

$\delta(q_2,0)=\{q_0,q_2\}$

$\delta(q_2,1)=\{q_1\}$

- А)Нека пуснем думата α = 01000 през НДКА:
- $\delta(q_0,0)=\{q_1,q_2\}$
- $\delta(q_0,01)= \delta(q_1,1) \cup \delta(q_2,1)= \varnothing \cup\{q_1\}= \{q_1\}$
- $\delta(q_0,010)= \delta(q_1,0) = \{q_0 ,q_1\}$
- $\delta(q_0,0100)= \delta(q_0,0) \cup \delta(q_1,0)= \{q_1,q_2,q_0\}$
- $\delta(q_0,01000)= \delta(q_0,0) \cup \delta(q_1,0)\cup \delta(q_2,0) = \{q_1,q_2,q_0\} \cap \{q_2\} \neq \varnothing$, следователно думата е разпозната от НДКА.

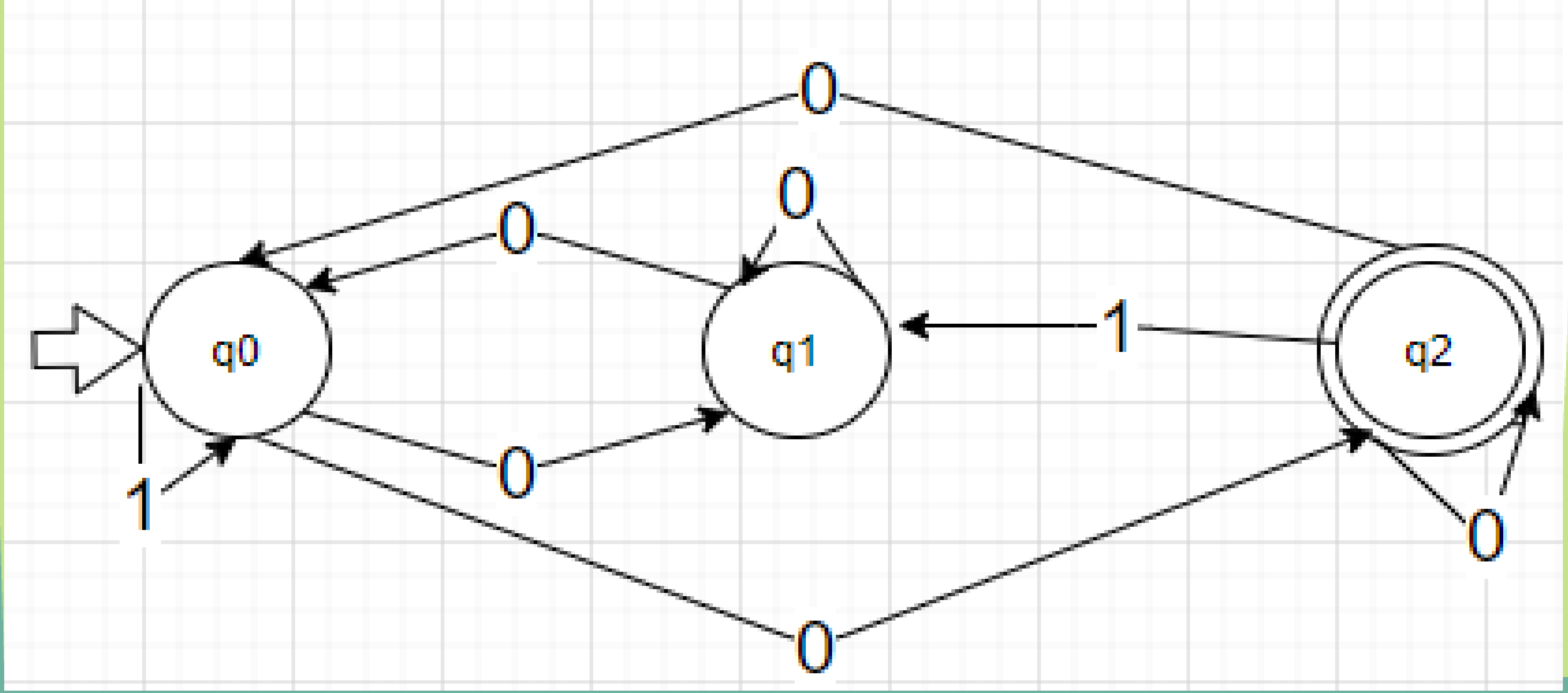
Примери

Б) Нека пуснем думата α = 101 през НДКА:

- $\delta(q_0,1)=\{q_0\}$
- $\delta(q_0,10)= \delta(q_0,0) = \{q_1, q_2\}$
- $\delta(q_0,101)= \delta(q_1,1) \cup \delta(q_2,1) = \emptyset \cup \{q_1\} = \{q_1\} \cap \{q_2\}= \emptyset$, следователно думата не е разпозната от НДКА.

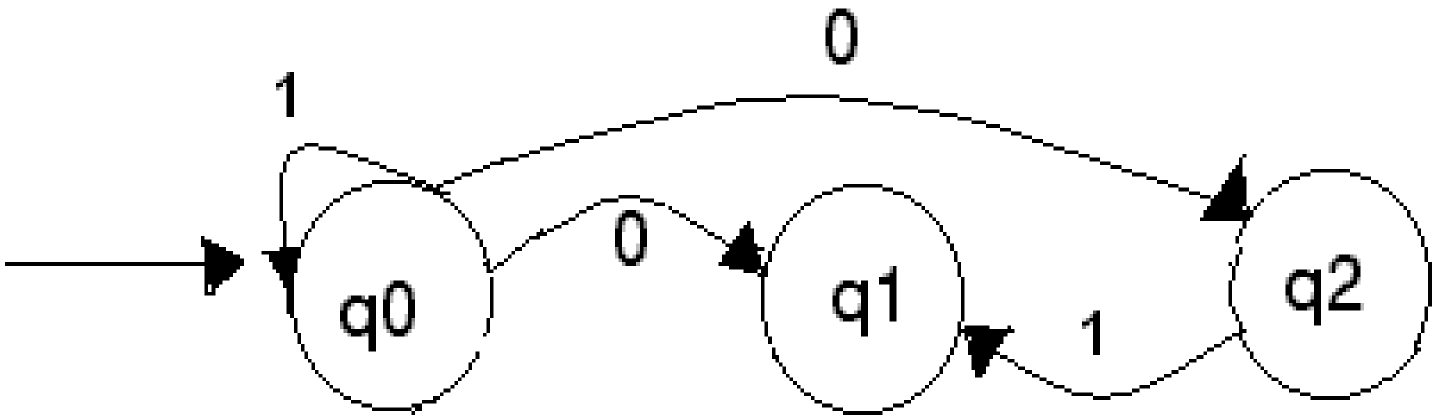
Примери

- Схема на А)



Примери

- Схема на Б)



Недетерминирани крайни автомати

- **Теорема:** За всеки НДКА съществува еквивалентен на него ДКА
- Така ДКА и НДКА са взаимозаменяеми.
- ДКА са по-лесни за употреба, макар че понякога от технически съображения се предпочитат НДКА.

Използвана литература в курса

- D. W. Hoffmann, Theoretische Informatik, Hansen Verlag, 2009
- H. P. Gumm, M. Sommer, Einfuehrung in die Informatik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2004
- J. W. Grossman, Discrete Mathematics, Macmillan Pub. Co., 1990
- К. Манев, Увод в дискретната математика, КЛМН, 2005
- Й. Денев, Р. Павлов, Я. Демирович. Дискретна математика. Наука и изкуство, София, 1984.

Използвана литература в курса

- Д. Байнов, С. Костадинов, Р. Павлов, Л. Луканова. Ръководство за решаване на задачи по дискретна математика. Университетско издателство “Паисий Хилендарски”, Пловдив, 1990.
- В.А. Успенский, Машина Поста, Москва, Наука, 1988, ISBN 5-02-013735-9.
- L. Lovasz, J. Pelikan, K. Vesztergombi, Discrete Mathematics – Elementary and Beyond, Springer Verlag, New York, 2003, ISBN 0-387-95584-4.

Използвана литература в курса

- E. Bender, S. Williamson, A Short Course in Discrete Mathematics, Dover, 2006, ISBN 0-486-43946-1.
- P. Linz, An Introduction to Formal Languages and Automata, Jones and Bartlett Publishers, 6-th edition, Jones & Bartlett Publishers, ISBN-13: 9781284077247, 2016
- Kenneth H. Rosen, Kamala Krithivasan, Discrete mathematics and its application, McGraw-Hill Companies, 7-th edition, ISBN 978-0-07-338309-5, 2012

Използвана литература в курса

- Owen D. Byer, Deirdre L. Smeltzer, Kenneth L. Wantz, Journey into Discrete Mathematics, AMS, MAA Press, Providence Rhode Island, ISBN 9781470446963, 2018
- Christopher Rhoades, Introductory Discrete Mathematics, Willford Press, ISBN 1682854922, 9781682854921, 2018
- David Liben-Nowell, Discrete Mathematics for Computer Science, Wiley, 2017, ISBN 1119397197, 9781119397199, 2017.
- ***http://www.jflap.org/*** - софтуерна среда