Производни на крива на Безие

Разгл. кр. на Безие $\mathbf{C}(u)$ деф. чрез $n+1$ контр. т. $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_n$:

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(u)\mathbf{P}_i, \qquad B_{n,i}(u) = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}u^i(1-u)^{n-i}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}B_{n,i}(u) = B'_{n,i}(u) = n\left(B_{n-1,i-1} - B_{n-1,i}(u)\right)$$

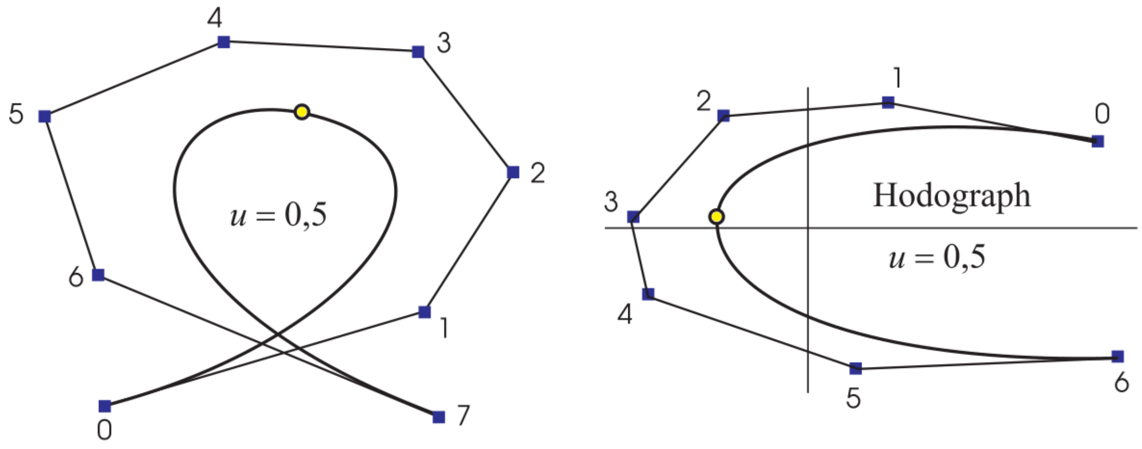
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\mathbf{C}(u) = \mathbf{C}'(u) = \sum_{i=0}^{n} B'_{n,i}(u)\mathbf{P}_i = \sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1,i}(u)\{n(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i)\}$$

Нека пол. $\mathbf{Q}_i = n(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i)$, $i \in \{0,1,\ldots,n\text{-}1\}$ $\Rightarrow$

$$\mathbf{C}'(u) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1,i}(u)\mathbf{Q}_i$$

$\therefore$ $\mathbf{C}'(u)$ е кр. на Безие от ст. $(n-1)$ дефин. чрез n контр. т. $\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_{n-1}$ като $\mathbf{Q}_i = n(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i)$ и се нарича *ходограф* на $\mathbf{C}(u)$.

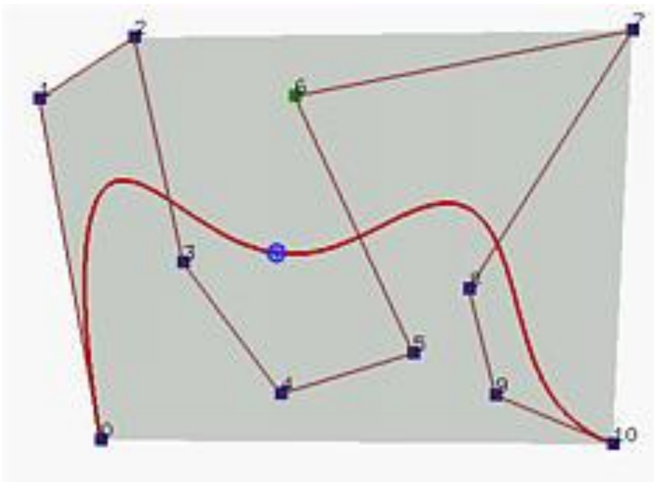
$\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i$ е в-ръt по i-тото рамо $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$ на полигона Π на $\mathbf{C}(u)$.

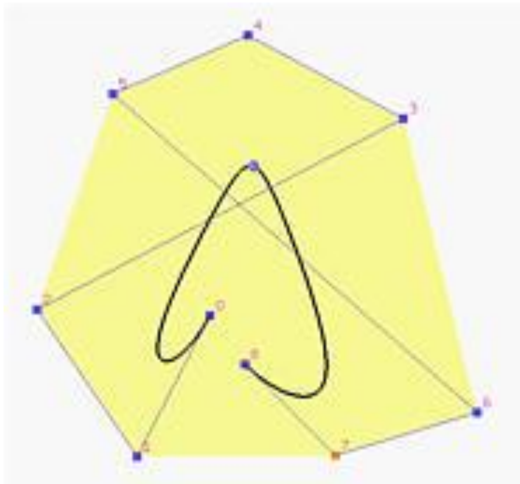


Кривите на Безие се допират до първото и последното рамо на полигона им

От $\mathbf{C}'(u) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1,i}(u)\mathbf{Q}_i$, $\quad B_{n-1,i}(0) = B_{n-1,i}(1) = 0 \quad \Rightarrow$

$\mathbf{C}'(0) = n(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)$, $\mathbf{C}'(1) = n(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1})$ $\qquad \Rightarrow \quad \mathbf{C}'(0) \uparrow\uparrow \overrightarrow{\mathbf{P_0 P_1}}, \quad \mathbf{C}'(1) \uparrow\uparrow \overrightarrow{\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{P}_n}$.





Съединяване на две криви на Безие с C^1-непрекъснатост

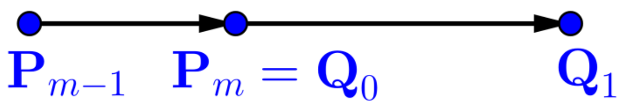
Нека I крива $\mathbf{P}(u)$ се опр. чрез $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_m$ и $\therefore$ ст. ѝ е m.

Нека II крива $\mathbf{Q}(u)$ се опр. чрез $\mathbf{Q}_0$, $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$, ..., $\mathbf{Q}_n$ и $\therefore$ ст. ѝ е n.

Ако съед. $\mathbf{P}(u)$ и $\mathbf{Q}(u)$, то трябва $\mathbf{P}_m \equiv \mathbf{Q}_0$. $\therefore\ \exists\ C^0$-непрек. в т. на съед.

Понеже $\mathbf{P}(u)$ се доп. до $\mathbf{P}_{m-1}\mathbf{P}_m$, а $\mathbf{Q}(u)$ – до $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, то за да $\exists\ G^1$-непрек.,

трябва т. $\mathbf{P}_{m-1}$, $\mathbf{P}_m = \mathbf{Q}_0$ и $\mathbf{Q}_1$ да са колинеарни, както и $\overrightarrow{\mathbf{P}_{m-1}\mathbf{P}_m} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1}$.

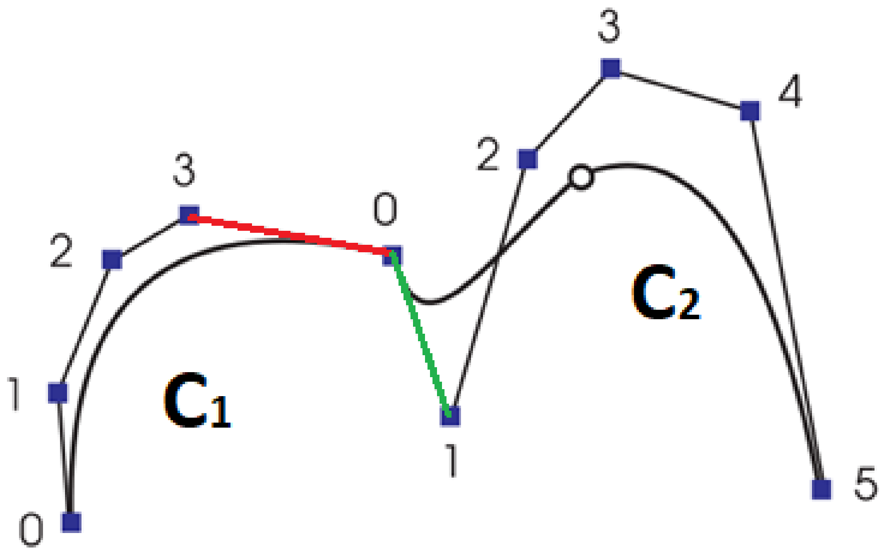


За да $\exists\ C^1$-непрек., трябва $\mathbf{P}'(1) = \mathbf{Q}'(0)$ $\Leftrightarrow$

$$m(\mathbf{P}_m - \mathbf{P}_{m-1}) = n(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0).$$

$\Rightarrow\ \ |\mathbf{P}_m - \mathbf{P}_{m-1}|\ /\ |\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0| = n/m.$

Отляво е кр. на Безие от ст. 4, а отдясно е кр. на Безие от ст. 5.



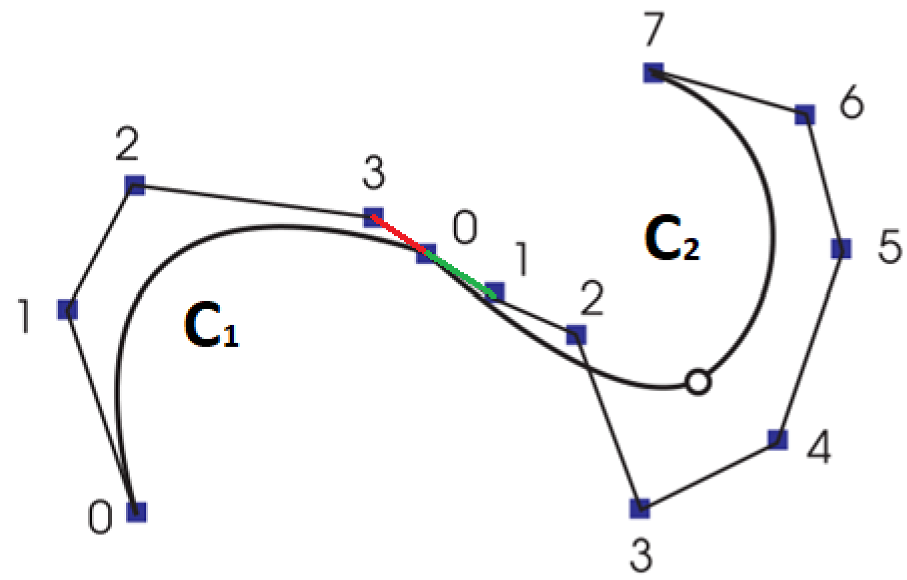
Тъй като посл. рамо **3-0** на $\mathbf{C}_1$ и първ. рамо **0-1** на $\mathbf{C}_2$ не са колинеарни,

то $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ не се съединяват с C^1-непрек. в т. на съед. 0.

Следв. съставна крива е G^1-непрек., но не е C^1-непрек.

Лявата дъга е от степен 4 , а дясната – от степен 7.

Отнош. на посл. рамо на лявата към първ. рамо на дясната е $\approx 1 \neq 7/4 = 1.75$.

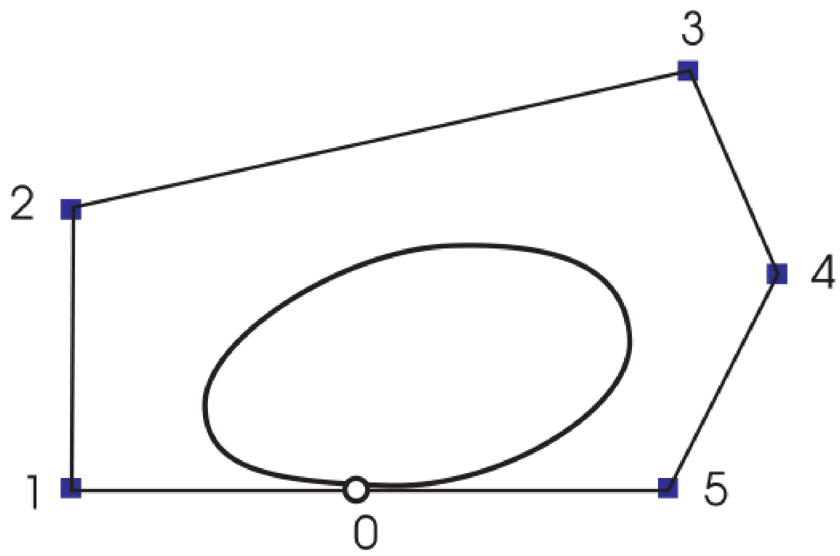


За да $\exists$ C^1-непр., трябва

да увеличим посл. рамо **3-0** на $\mathbf{C}_1$ и да намалим първ. рамо **0-1** на $\mathbf{C}_2$.

Тогава $\Rightarrow$ G^1-непр. $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ в т. на съед. 0.

Ако $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_n$ и още $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_{n-1}$ са колинеарни, то кр. на Безие ще бъде затворена и G^1-непр. в т. на съед.:



Това не е елипса, а полиномна крива от ст. 6.

Кр. на Безие като полиномни не могат да задават трансцендентни криви, такива като експоненциални и логаритмични криви, хиперболи, елипси или в частност окръжности.

Зависимост между производната и алгоритъма на дьо Кастелжо

$$\mathbf{C}'(u) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1,i}(u)\{n(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i)\}$$

$$= n\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} B_{n,i}(u)\mathbf{P}_{i+1}\right) - \left(\sum_{i=0}^{n-1} B_{n,i}(u)\mathbf{P}_i\right)\right]$$

$$= n[\mathbf{C}_1(u) - \mathbf{C}_2(u)],$$

$$\mathbf{C}_1(u) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{n,i}(u)\mathbf{P}_{i+1} \qquad\qquad \mathbf{C}_2(u) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{n,i}(u)\mathbf{P}_i$$

$\mathbf{C}_1(u)$: $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_n$; $\mathbf{C}_2(u)$: $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, ..., $\mathbf{P}_{n\text{-}1}$

$$\mathbf{C}'(u) = n[\mathbf{C}_1(u) - \mathbf{C}_2(u)]$$

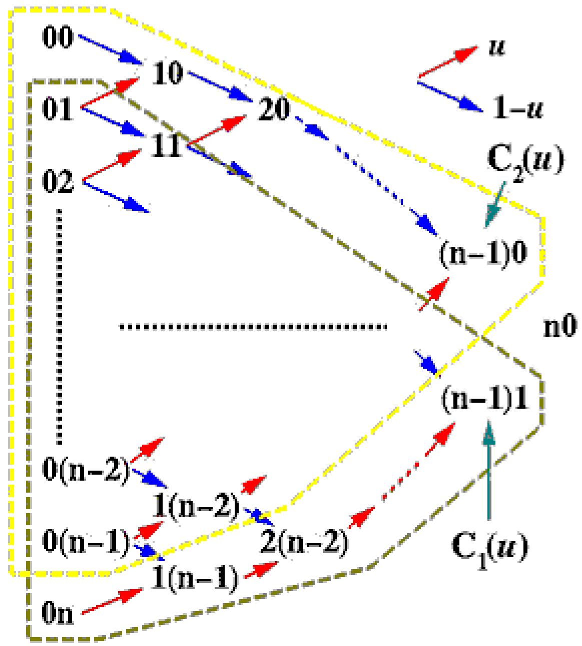
Прилагаме алг. дК:

Отсечката м/у **(n-1)0** и **(n-1)1** е посл. отс.

от мреж. на дК.

Т. **n0** лежи на тази отс., така че

d(**(n-1)0**,**n0**) / d(**(n-1)0**,**(n-1)1**) = u.



т. **(n-1)1** = $\mathbf{C}_1(u)$, т. **(n-1)0** = $\mathbf{C}_2(u)$

$\Rightarrow$ $\mathbf{C}_1(u)$ - $\mathbf{C}_2(u)$ = в-рът от т. **(n-1)0** до т. **(n-1)1**,

а $\mathbf{C}'(u) = n\,(\mathbf{C}_1(u)-\mathbf{C}_2(u))$.

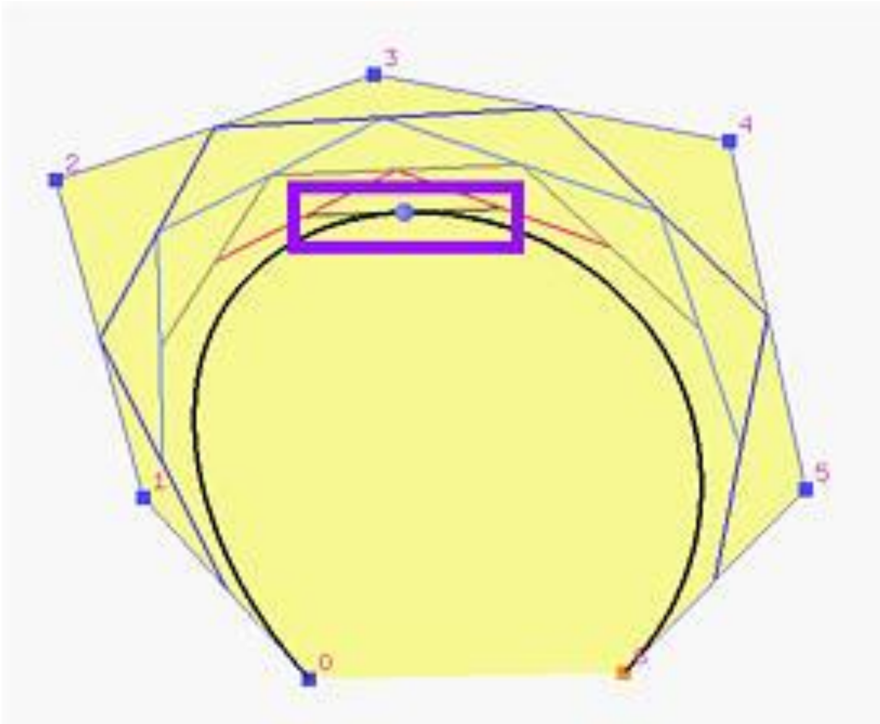
Последният полигон (който е отсечка) от мрежата

на дьо Кастелжо се допира до кривата на Безие в т. C(*u*).

Напр. от алг. дК за $u = 0{,}5 \Rightarrow$

$\boxed{\text{посл. отсечка}}$ от мрежата на дК

се допира до кривата в т. **C**(0,5).



Производни от по-висок ред

Ако $\mathbf{Q}_i = n(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i)$, то $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\mathbf{C}(u)$ е:

$$\mathbf{C}'(u) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1,i}(u)\mathbf{Q}_i$$

$$\mathbf{C}''(u) = \sum_{i=0}^{n-2} B_{n-2,i}(u)\{(n-1)(\mathbf{Q}_{i+1} - \mathbf{Q}_i)\}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} B_{n-2,i}(u)\{n(n-1)(\mathbf{P}_{i+2} - 2\mathbf{P}_{i+1} + \mathbf{P}_i)\}$$

$\Rightarrow$ подв. триедър и $\varkappa$ в т. **C**(u) за някое u.

Крайна разлика от 0. ниво е $\mathbf{D}_i^0 = \mathbf{P}_{\boldsymbol{i}},\ 0 \le i \le n$

Крайна разлика от 1. ниво е

$$\mathbf{D}_i^1 = \mathbf{D}_{i+1}^0 - \mathbf{D}_i^0 = \mathbf{P}_{\boldsymbol{i+1}} - \mathbf{P}_{\boldsymbol{i}}, \quad 0 \le i \le n-1$$

Крайна разлика от 2. ниво е

$$\mathbf{D}_i^2 = \mathbf{D}_{i+1}^1 - \mathbf{D}_i^1, \quad 0 \le i \le n-2$$

Крайна разлика от k. ниво е

$$\mathbf{D}_i^k = \mathbf{D}_{i+1}^{k-1} - \mathbf{D}_i^{k-1}, \qquad 0 \le i \le n-k$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{C}'(u) = n\sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1,i}(u)(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i) = n\sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1,i}(u)\left(\mathbf{D}_{i+1}^0 - \mathbf{D}_i^0\right)$$

$$= n\sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1,i}(u)\mathbf{D}_i^1$$

$$\mathbf{C}''(u) = n(n-1)\sum_{i=0}^{n-2} B_{n-2,i}(u)\left(\mathbf{D}_{i+1}^1 - \mathbf{D}_i^1\right) = n(n-1)\sum_{i=0}^{n-2} B_{n-2,i}(u)\mathbf{D}_i^2$$

Продълж. този процес и изчисл. k-тата производна $\mathbf{C}^{(k)}(u)$ чрез $\mathbf{D}_i^k$:

$$\mathbf{C}^{(k)}(u) = n(n-1)\dots(n-k+1)\sum_{i=0}^{n-k} B_{n-k,i}(u)\left(\mathbf{D}_{i+1}^{k-1} - \mathbf{D}_{i}^{k-1}\right)$$

$$= n(n-1)\dots(n-k+1)\sum_{i=0}^{n-k} B_{n-k,i}(u)\mathbf{D}_{i}^{k}$$

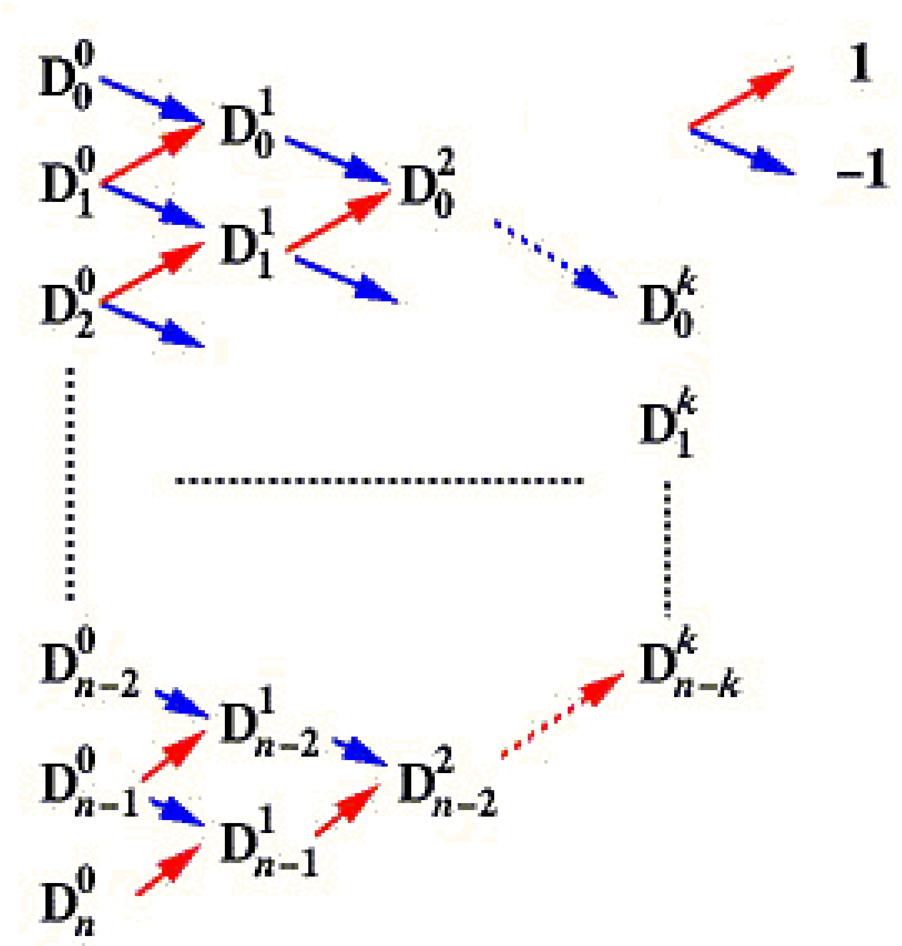
$$= \frac{n!}{(n-k)!}\sum_{i=0}^{n-k} B_{n-k,i}(u)\mathbf{D}_{i}^{k}$$

За да изч. $\mathbf{C}^{(k)}(u)$ за някое u:

1) изч. $\mathbf{D}_i^k$ и

2) прил. алг. дК за нам. на т., съотв. на u в/у кр. на Безие, опр. чрез $\mathbf{D}_i^k$.

За изч. на $\mathbf{D}_i^k$ изп. схемата:



Накрая прил. алг. дК за точките от кол. k за фикс. u и получ. $\mathbf{C}^{(k)}(u)$.

Подразделяне на крива на Безие

Подразделяне на дадена кр. на Безие $\mathbf{C}$ е задаването ѝ като $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 \cup \mathbf{C}_2$;

$\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ – криви от същия вид, съед. в избр. т. на $\mathbf{C}$:

Дадена е Безие кр. на $\mathbf{C}(u)$, $u \in [0;1]$ от ст. n чрез $\Pi = \{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n\}$ и $u_0 \in [0;1]$.

Да се нам. *две* Безие кр. $\mathbf{C}_1(u)$ и $\mathbf{C}_2(u)$ от ст. n,

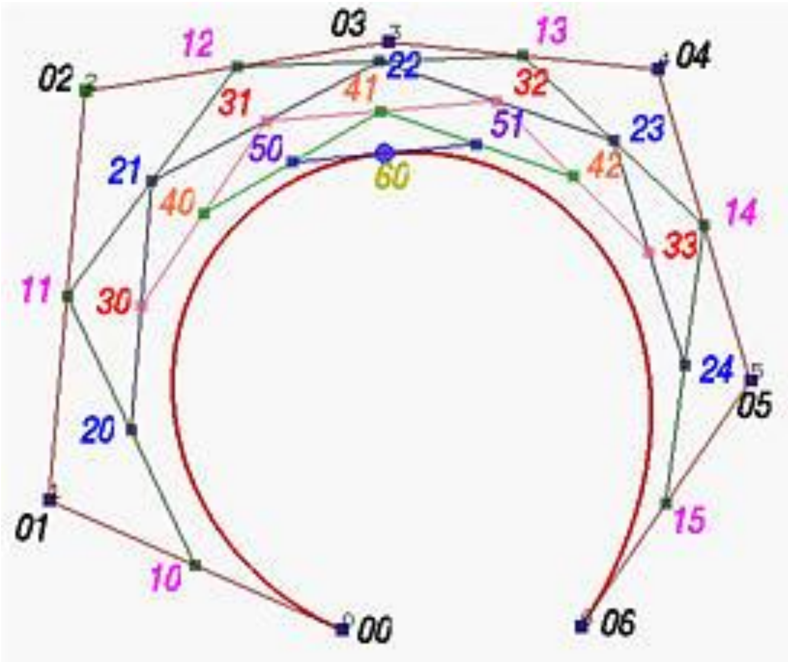
като $\mathbf{C}_1(u)$ е опр. чрез $\Pi_1 = \{\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_n\}$ за $u \in [0, u_0]$,

а $\mathbf{C}_2(u)$ – чрез $\Pi_2 = \{\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_n\}$ за $u \in [u_0, 1]$,

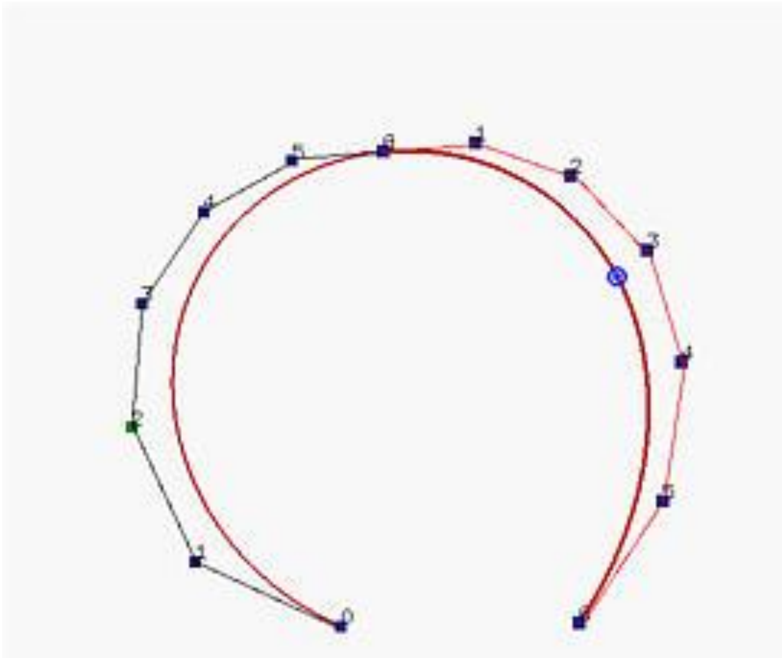
така че $\mathbf{C}_1(u)$ и $\mathbf{C}_2(u)$ да са двете части на $\mathbf{C}(u)$ разделена от т. $\mathbf{C}(u_0)$.

1) Нам. се т. **C**(u_0) в/у **C**(u) чрез алг. дК.

2) **C**$_1$(u) и **C**$_2$(u) се деф. като отделни Безие кр.



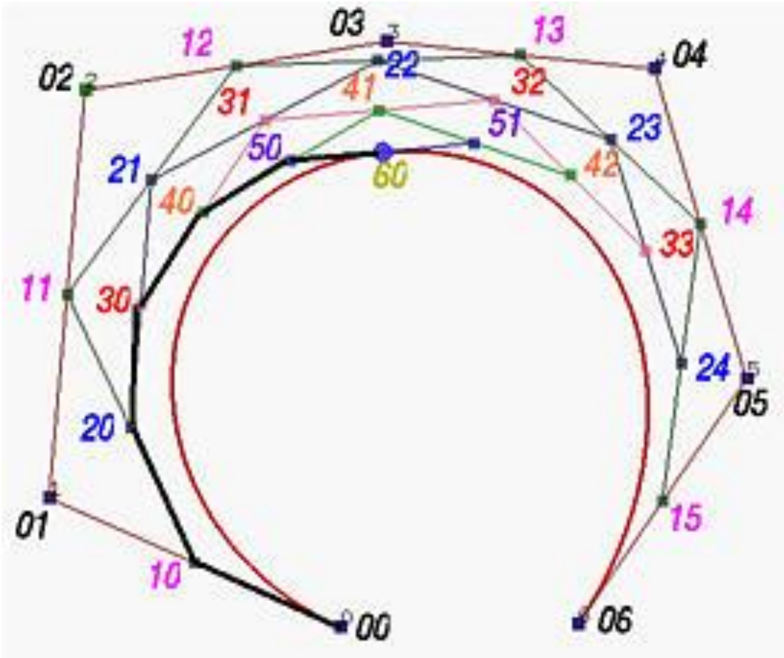
1)

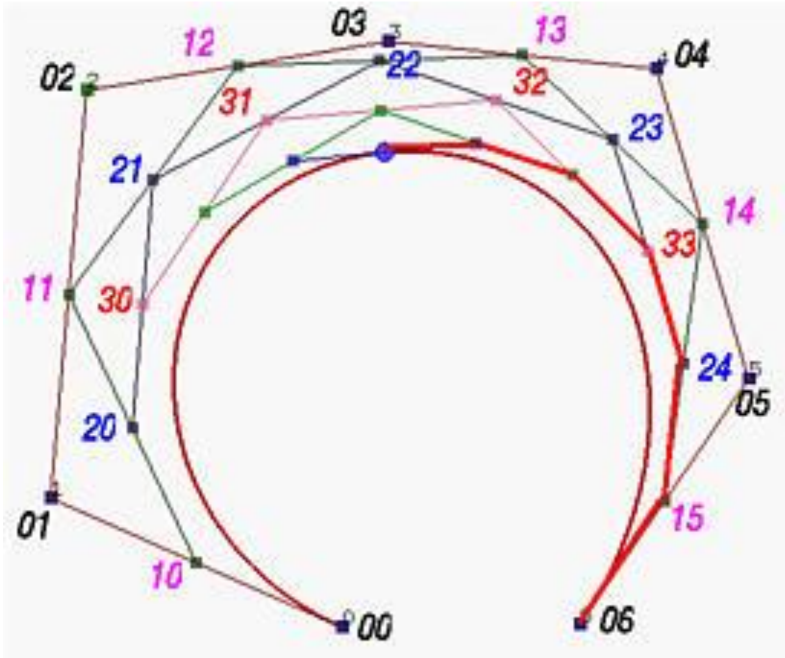


2)

$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_{00} = \mathbf{P}_0$, $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{P}_{10}$, $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{P}_{20}$, $\mathbf{Q}_3 = \mathbf{P}_{30}$, $\mathbf{Q}_4 = \mathbf{P}_{40}$, $\mathbf{Q}_5 = \mathbf{P}_{50}$ и $\mathbf{Q}_6 = \mathbf{P}_{60} = \mathbf{P}(u_0)$

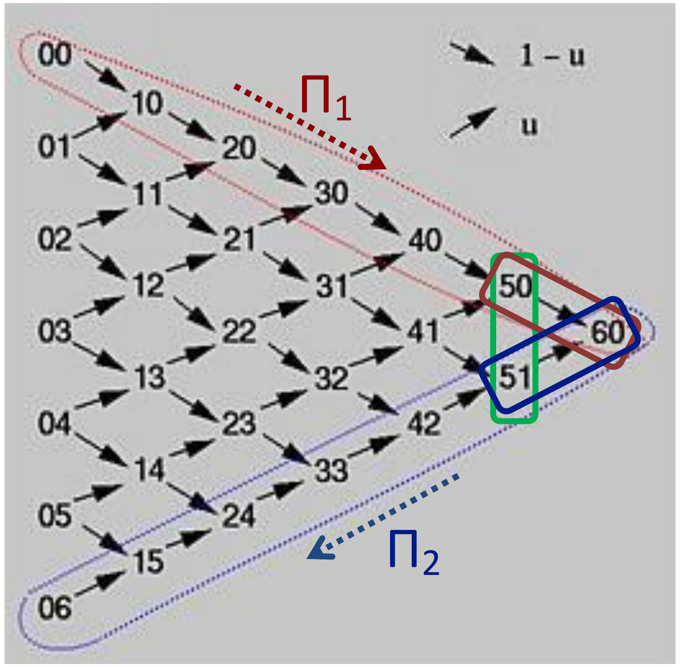
$\mathbf{R}_0 = \mathbf{P}_{60} = \mathbf{P}(u_0)$, $\mathbf{R}_1 = \mathbf{P}_{51}$, $\mathbf{R}_2 = \mathbf{P}_{42}$, $\mathbf{R}_3 = \mathbf{P}_{33}$, $\mathbf{R}_4 = \mathbf{P}_{24}$, $\mathbf{R}_5 = \mathbf{P}_{15}$ и $\mathbf{R}_6 = \mathbf{P}_{06} = \mathbf{P}_6$





На Δ схема на алг. дК, П$_1$ на **C**$_1$(*u*) са по горния ръб на Π_1 в посоката на $\rightarrow$,

а П$_2$ на **C**$_2$(*u*) са по долния ръб на Π_2 в посока *обратна* на $\rightarrow$.



Отс. $\boxed{\textbf{50-51}}$ се допира до **C**(*u*) в т. **60** $\Rightarrow$ посл. рамо $\boxed{\textbf{50-60}}$ на **C**$_1$(*u*) се доп. до **C**$_1$(*u*),

а първ. рамо $\boxed{\textbf{60-51}}$ на **C**$_2$(*u*) се доп. до **C**$_2$(*u*).

Защо е необходимо подразделяне на крива?

Приложения на подразделянето на крива **C**:

- за изч. на прес. т. на $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$
- за интерпр. на **C**
- за улесняване дизайна на **C**
- за редакт. дизайна на **C** – подразд. **C** на $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ в подх. т. на задовол. и незадовол. част; запазваме задовол. част и изменяме незадовол.

Можем да прил. многократно подразделяне, но за да запазим гладкото C^1-съед. на частите на **C**, трябва да запазваме колинеарността на т. на съед. и 2-те съседни контр. точки.

Коректност на алгоритъма за подразделяне

Нека

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(u)\mathbf{P}_i$$

Съгл. Δ схема на алг. дК, т. $\mathbf{P}_{k0}$ се изч. от контр. т. $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, ..., $\mathbf{P}_k$ при фикс. u_0 за u:

$$\mathbf{P}_{k0} = \sum_{i=0}^{k} B_{k,i}(u)\mathbf{P}_i$$

Безие кр. от ст. n, деф. чрез $\mathbf{P}_{00}=\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_{10}$, $\mathbf{P}_{20}$, ..., $\mathbf{P}_{n0}$ за $t \in [0,1]$ е

$$\mathbf{C}_1(t) = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t)\mathbf{P}_{k0}.$$

Дефин. интервал е $[0,u_0]$, а не $[0,1]$. Затова сменяме параметъра.

Заместваме $\mathbf{P}_{k0}$ в $\mathbf{C}_1(t)$ и $\Rightarrow$

$$\mathbf{C}_1(t) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ B_{n,k}(t) \left[\sum_{i=0}^{k} B_{k,i}(u_0)\mathbf{P}_i \right] \right\}$$

$\therefore$ $\mathbf{C}_1(t)$ е деф. чрез дадените контр. точки $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, ..., $\mathbf{P}_n$.

Да изч. коеф. на $\forall$ т. $\mathbf{P}_i$.

Разгл. т. $\mathbf{P}_h$. Когато $k \geq h$, членът $B_{k,h}(u_0)$ е коеф. на $\mathbf{P}_h$. $\therefore$ коеф. на $\mathbf{P}_h$ в $\mathbf{C}_1(t)$ е:

$$= B_{n,h}(t)B_{h,h}(u_0) + B_{n,h+1}(t)B_{h+1,h}(u_0) + \cdots + B_{n,n}(t)B_{n,h}(u_0)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-h} B_{n,h+j}(t)B_{h+j,h}(u_0)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-h} \left[\binom{n}{h+j} t^{h+j}(1-t)^{n-(h+j)}\right]\left[\binom{h+j}{h} u_0{}^h(1-u_0)^j\right]$$

Членовете $(tu_0)^h$, както и $n!$ и $h!$ от биномните коеф. могат да се изнесат пред Σ и

$$= \frac{n!}{h!}(tu_0)^h \sum_{j=0}^{n-h} \left\{\frac{1}{\big((n-h)-j\big)!\, j!}[t(1-u_0)]^j(1-t)^{(n-h)-j}\right\}$$

Умножаваме и разделяме с (n-h)! и $\therefore$

$$= \frac{n!}{h!\,(n-h)!}(tu_0)^h \sum_{j=0}^{n-h}\left\{\frac{(n-h)!}{\big((n-h)-j\big)!\,j!}[t(1-u_0)]^j(1-t)^{(n-h)-j}\right\}$$

Използваме формулата за биномното развитие:

$$(a+b)^m = \sum_{s=0}^{m}\left\{\frac{m!}{s!\,(m-s)!}a^s b^{m-s}\right\}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{j=0}^{n-h}\left\{\frac{(n-h)!}{\big((n-h)-j\big)!\,j!}[t(1-u_0)]^j(1-t)^{(n-h)-j}\right\} = [t(1-u_0)+(1-t)]^{n-h}$$

$$= (1-tu_0)^{n-h}$$

Оттук коефициентът на $\mathbf{P}_h$ е:

$$\binom{n}{h}(tu_0)^h(1-tu_0)^{n-h} = B_{n,h}(tu_0)$$

Зависимостта м/у $\mathbf{C}(u)$ и частта ѝ върху $[0,u]$ е:

$$\mathbf{C}_1(t) = \sum_{h=0}^{n} B_{n,h}(tu_0)\mathbf{P}_h = \mathbf{C}(tu_0)$$

$\therefore$ t се изменя в $[0,1]$ и се описва $\mathbf{C}_1(t) \Leftrightarrow tu_0$ се мени в $[0,u_0]$ и се описва $\mathbf{C}(u)$ от $\mathbf{C}(0)$ до т. $\mathbf{C}(u_0)$.

Освен това, $\mathbf{C}_1(t) = \mathbf{C}(tu_0)$ и $\therefore$ $\mathbf{C}_1(t)$ за $t \in [0,1]$ е частта на $\mathbf{C}(u)$ за $u \in [0,u_0]$.

Това доказва, че **алгоритъмът за подразделяне на крива на Безие е коректен.**

Повишаване степента на Безие крива

Необходимост от повишаване ст. на Безие крива ***без*** да се променя формата ѝ:

- Изравняване на ст. на 2 криви с цел по-лесно съед. с гладкост.
- По-голяма гъвкавост при правенето на дизайн на сложни форми.

Нека $\mathbf{C}(u)$ е Безие кр. от ст. n, деф. чрез $\Pi=\{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n\}$

и искаме да увеличим ст. ѝ до $n + 1$ ***без*** промяна на формата ѝ.

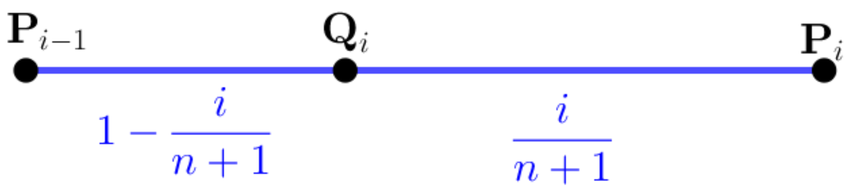
$\Rightarrow$ трябва да нам. нов Π' от $n+2$ контр. точки.

Очевидно $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_n$ трябва да се запазят $\therefore$ трябват n нови контр. точки.

Нека $\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_{n+1}$ – новите контр. точки и $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_0$ и $\mathbf{Q}_{n+1} = \mathbf{P}_n$. Другите са:

$$\mathbf{Q}_i = \frac{i}{n+1}\mathbf{P}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)\mathbf{P}_i, \quad 1 \le i \le n$$

$\Rightarrow$ различава се от алг. дК



$$\frac{\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{Q}_i}{\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i} = 1 - \frac{i}{n+1} \neq \mathrm{const}$$

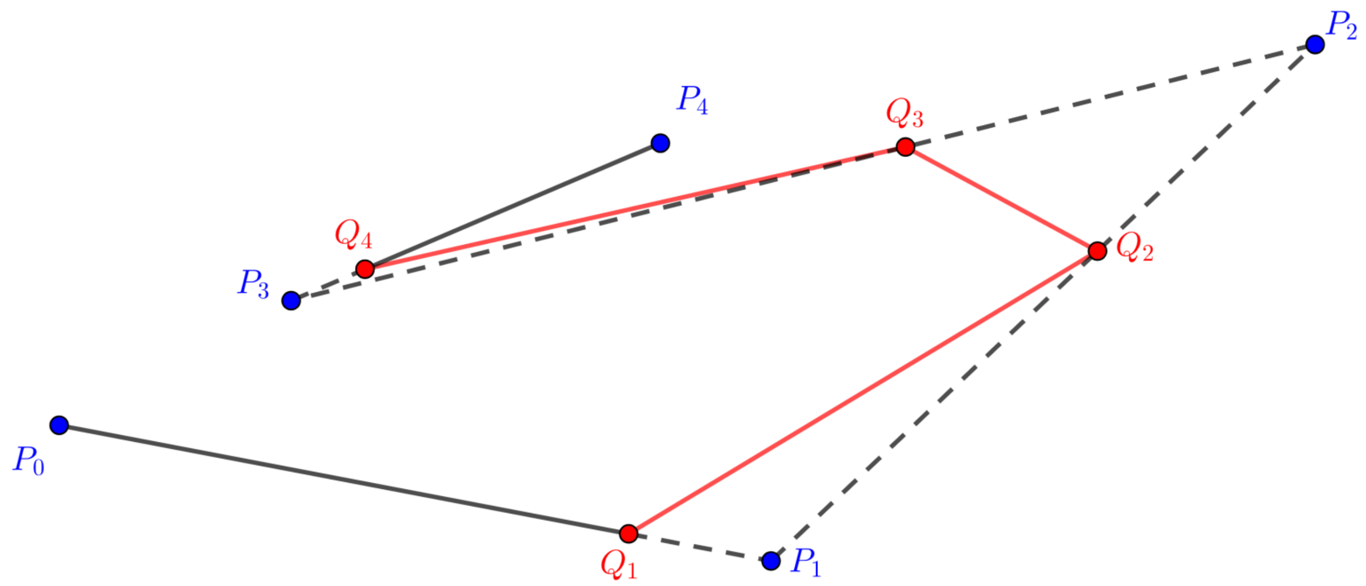
Ефект на ***отрязване на ъглите*** при дадените контролни точки:

Напр. $n = 4$ и $\Pi = P_0 – P_1 – P_2 – P_3 – P_4$ – дадения контр. полигон

↗ $n + 1 = 5$ и Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 – новите контр. т., а $Q_1 – Q_2 – Q_3 – Q_4$ – корекцията на Π

– пунктираните отсечки се махат (т.е. отрязват се ъглите)

$\Pi' = P_0 – Q_1 – Q_2 – Q_3 – Q_4 – P_4$ – новия контр. полигон за ст. 5.

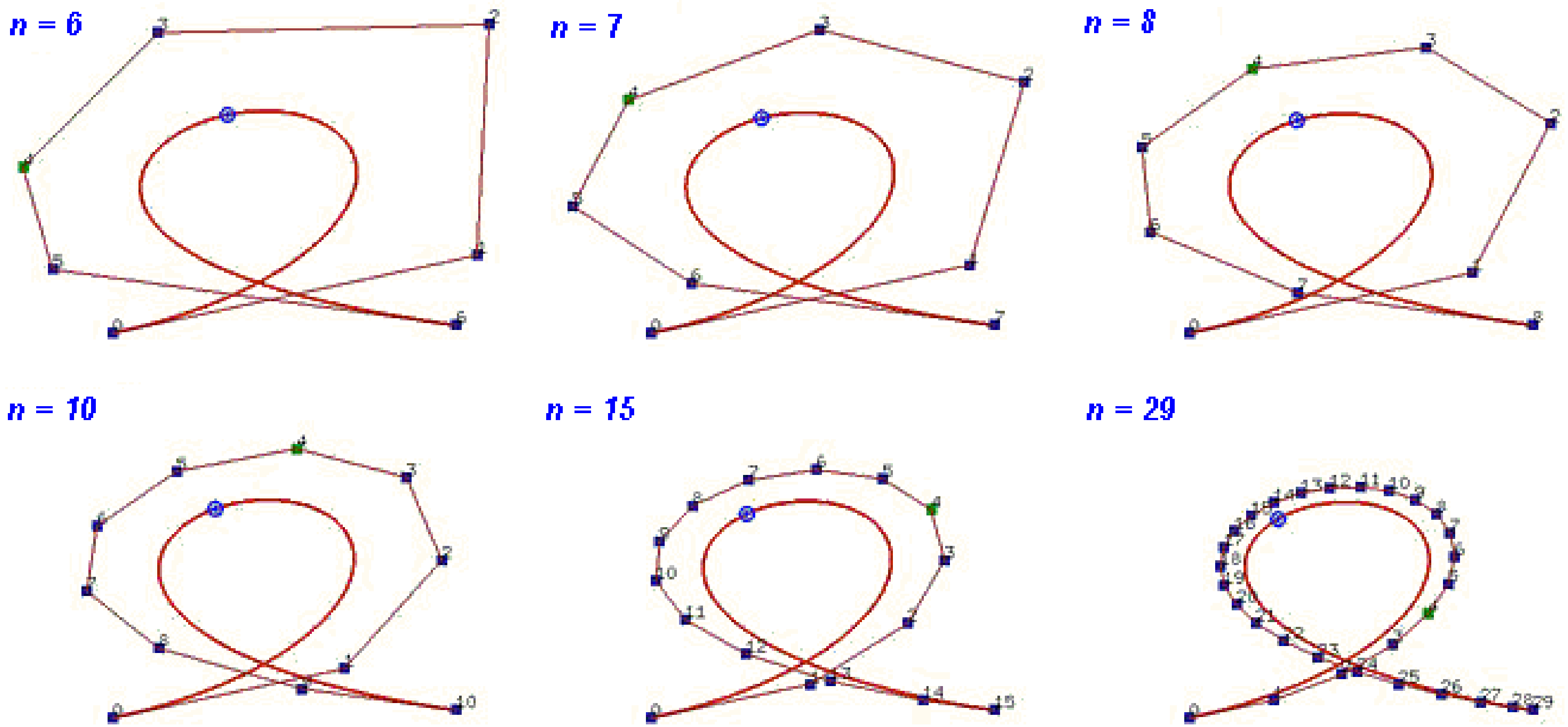


i	**1 - *i*/(*n*+1)**
1	0.8
2	0.6
3	0.4
4	0.2

Ст. повишение – *k* пъти

$\Rightarrow \Pi$ се увеличава с *k* нови контр. т. и Π' се премества по-близо до **C**;

$n \to \infty \Rightarrow \Pi^{(\infty)} \to$ **C**



Коректност на алгоритъма за повишаване на степента

Нека $\mathbf{C}(u)$ от ст. n чрез $\Pi=\{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n\}$, а $\mathbf{D}(u)$ от ст. $n+1$ е деф. чрез $\Pi'=\{\mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_n, \mathbf{Q}_{n+1} = \mathbf{P}_n\}$. Ще нам. неизв. n контр. т. $\mathbf{Q}_i$.

$$\mathbf{C}(u) = \mathbf{D}(u) \;\Rightarrow\; \mathbf{C}^{(k)}(u) = \mathbf{D}^{(k)}(u),\ k = 1,2,3,\dots,n \;\Rightarrow\; \mathbf{C}^{(k)}(0) = \mathbf{D}^{(k)}(0) \;\Rightarrow\; \mathbf{Q}_i$$

1) Нам. $\mathbf{Q}_1$ от $\mathbf{C}'(0) = \mathbf{D}'(0)$.

2) Доп., че $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_{k-1}$ са нам. и

3) Изп. тези резултати, за да нам. $\mathbf{Q}_k$.

Повт. процеса n пъти и пресм. всички нови контр. т.

Основният случай

1) Първ. произв. на **C**(u) е

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\mathbf{C}(u) = \mathbf{C}'(u) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1,i}(u)\{n(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i)\}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{C}'(0) = n(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)$. Аналог. $\mathbf{D}'(0) = (n+1)(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0) = (n+1)(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}_0)$.

$\mathbf{C}'(0) = \mathbf{D}'(0) \Rightarrow$

$$n(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) = (n+1)(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}_0)$$

$$\mathbf{Q}_1 = \frac{1}{n+1}\mathbf{P}_0 + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\mathbf{P}_1$$

Индукционната стъпка

2) Да доп., че $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_{k\text{-}1}$ са коректно изч.

3) Трябва да се покаже, че $\mathbf{Q}_k$ е също коректно намерена.

Това се прави чрез $\mathbf{C}^{(k)}(u) = \mathbf{D}^{(k)}(u)$.

$\mathbf{C}(u) = \mathbf{D}(u) \Rightarrow \mathbf{C}^{(k)}(0) = \mathbf{D}^{(k)}(0)$.

От тази връзка и известните $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_{k\text{-}1}$ ще пресм. $\mathbf{Q}_k$.

$$\mathbf{C}^{(k)}(u) = \frac{n!}{(n-k)!}\sum_{i=0}^{n-k} B_{n-k,i}(u)\mathbf{D}_i^k$$

$$\mathbf{D}_i^k = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\mathbf{P}_{i+j}$$

$$\mathbf{C}^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \mathbf{P}_j$$

Аналог. за **D**(u) от ст. n +1

$$\mathbf{D}^{(k)}(0) = \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \mathbf{Q}_j$$

$\mathbf{C}^{(k)}(0) = \mathbf{D}^{(k)}(0) \Rightarrow \ldots \Rightarrow$

$$(n+1)\mathbf{Q}_k = (n-k+1)\mathbf{P}_k - (-1)^k k\mathbf{P}_0$$
$$+ \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \left[(n-k+1)\mathbf{P}_j - (n+1)\mathbf{Q}_j\right]$$

По индукц. хипотеза, за j от 0 до k - 1, $\mathbf{Q}_j$ е изв. и се изч. чрез:

$$\mathbf{Q}_j = \frac{j}{n+1}\mathbf{P}_{j-1} + \left(1 - \frac{j}{n+1}\right)\mathbf{P}_j$$

Зам. го в израза за $(n+1)\mathbf{Q}_k \Rightarrow \ldots \Rightarrow$

$$(n+1)\mathbf{Q}_k = k\mathbf{P}_{k-1} + (n-k+1)\mathbf{P}_k$$

$$\mathbf{Q}_k = \frac{k}{n+1}\mathbf{P}_{k-1} + \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\mathbf{P}_k$$

$\therefore$ съгл. метода на матем. индукция окончателно установяваме, че

алгоритъмът за повишаване на степента е коректен.

⌘