

# UKBM 1

MTKP 3.1/4.1/1/1-5

## IDENTITAS UKBM

### MATA PELAJARAN

- ✓ Matematika (peminatan)
- ✓ Kelas XII (Semester Ganjil)

### KOMPETENSI DASAR

- ✓ 3.1 Menjelaskan dan menentukan limit fungsi trigonometri
- ✓ 4.1 Menyelesaikan masalah berkaitan dengan limit fungsi trigonometri

## LIMIT FUNGSI

### ■ LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI

a. Indikator Pencapaian Kompetensi : 3.1.1 s.d 3.1.4 dan 4.1.1 s.d 4.1.4

Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi
<b>3.1 Menjelaskan dan menentukan limit fungsi trigonometri</b>	3.1.1 Mencermati gambar yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri. 3.1.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri. 3.1.3 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi aljabar di ketaklingkaan. 3.1.4 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri di ketaklingkaan.
<b>4.1 Menyelesaikan masalah berkaitan dengan limit fungsi trigonometri</b>	4.1.1 Menerapkan limit fungsi trigonometri dalam pemecahan masalah. 4.1.2 Mempresentasikan gambar yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri. 4.1.3 Mempresentasikan pemecahan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri. 4.1.4Mempresentasikan penerapan limit fungsi trigonometri dalam pemecahan masalah.

b. Materi Pokok : Limit Fungsi Trigonometri

c. Alokasi Waktu : 12 JP (12 X 45')

d. Tujuan Pembelajaran :

TUJUAN

Melalui pembelajaran berbasis masalah (*problem based learning*) peserta didik dapat memahami konsep limit fungsi trigonometri serta dapat menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri, sehingga peserta didik dapat menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya, mengembangkan sikap jujur, peduli dan bertanggungjawab, serta dapat mengembangkan kemampuan **berpikir kritis, komunikasi, kolaborasi, kreativitas (tuntutan abad 21:C4)**

e. Materi Pembelajaran :

MATERI

a. **Faktual** :

Percobaan sebuah film tipis ditempatkan tegak lurus (vertikal) terhadap sumbu x dengan arah permukaan menghadap kekanan dan kekiri. Kawat 1 berada disebelah kiri film dan kawat 2 berada disebelah kanan film. Kedua kawat ini digerakan vertikal ke atas dan ke bawah atau horizontal ke kanan dan ke kiri mendekati film.

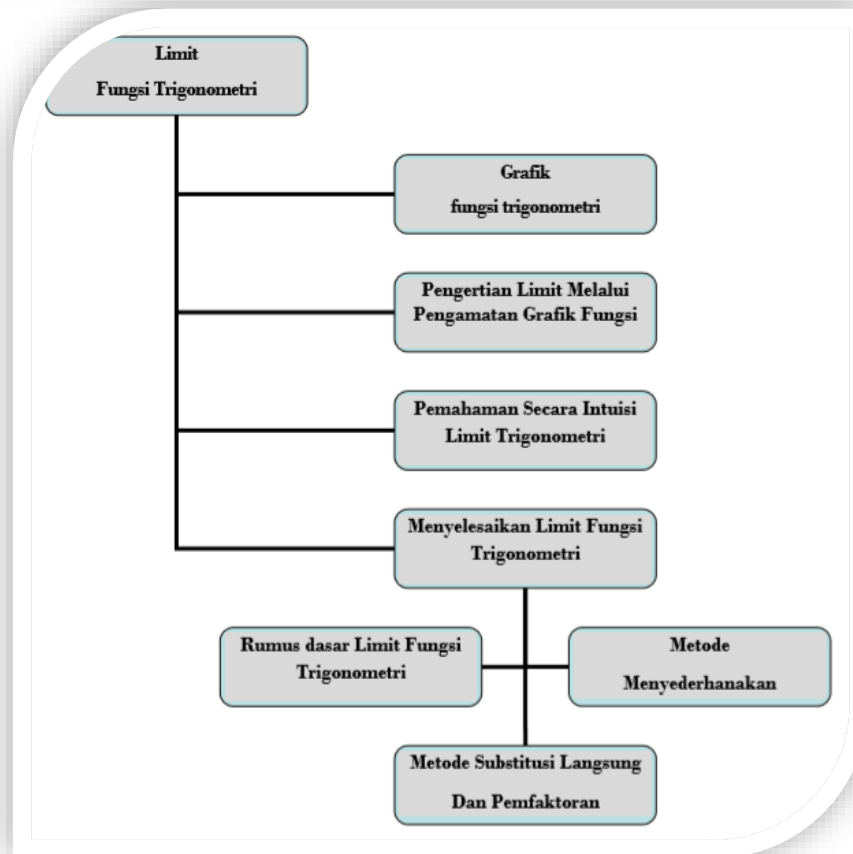
b. **Konseptual** :

1. Pengertian limit fungsi melalui pengamatan grafik
2. Rumus dasar limit fungsi trigonometri
3. Limit fungsi di ketaklingkaan

c. **Prosedural :**

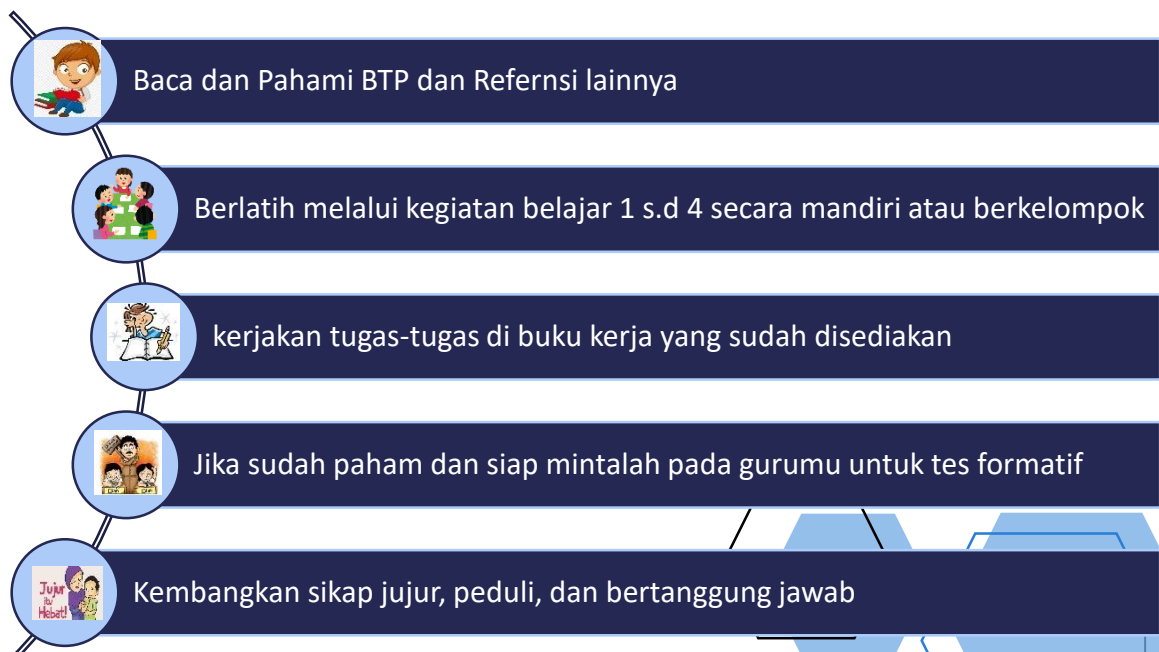
1. Langkah-langkah mendapatkan rumus dasar limit fungsi trigonometri
2. Langkah-langkah penyelesaian limit fungsi trigonometri
3. Langkah-langkah penyelesaian limit fungsi di ketakhinggaan

» PETA KONSEP



» PROSES BELAJAR

a. **Petunjuk Umum Penggunaan UKBM**

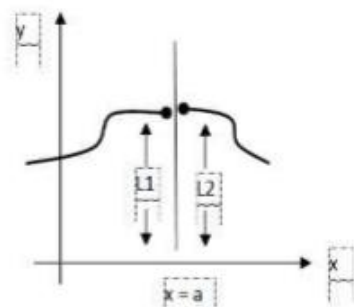


## b. Pendahuluan

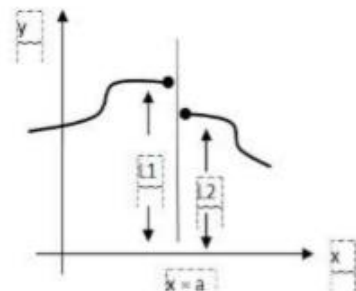
Sebelum masuk pada materi, silahkan kalian membaca dan memahami ilustrasi di bawah ini dengan baik

1

Percobaan sebuah film tipis ditempatkan tegak lurus (vertikal) terhadap sumbu  $x$  dengan arah permukaan menghadap kekanan dan kekiri. Kawat 1 berada disebelah kiri film dan kawat 2 berada disebelah kanan film. Kedua kawat ini digerakan vertikal ke atas dan ke bawah atau horizontal ke kanan dan ke kiri mendekati film, seperti gambar berikut ini:



a)  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$  dan  $L_1 = L_2$



b)  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$  &  $L_1 \neq L_2$

Suatu seketika titik ujung kawat menyatukan film, sehingga dapat diperkirakan berapa tinggi titik ujung kawat terhadap sumbu  $x$ . Dapatkah kalian memperkirakan ketinggian titik ujung kawat tersebut?

2

Bagaimanakah cara menyelesaikan soal berikut?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sqrt{4-x}}{\cos x - \cos 3x} = \dots \quad (1/2) \quad (\text{SBMPTN2013})$$

## c. Kegiatan Inti



### Kegiatan Belajar 1

Memahami secara intuisi limit fungsi trigonometri melalui perhitungan

Pengertian limit fungsi trigonometri di suatu titik dapat pula di pahami dengan cara menghitung nilai-nilai fungsi di sekitar titik yang ditinjau. Misal suatu fungsi  $f(x)$ , akan ditentukan nilai limit fungsi  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $a$ . Perhitungan dapat dilakukan dengan cara membuat daftar nilai-nilai fungsi  $f(x)$  untuk nilai-nilai  $x$  mendekati  $a$ . Untuk mendapatkan pemahaman yang lebih baik tentang limit fungsi trigonometri, lengkapi bagian kosong aktivitas di bawah ini.

## AKTIVITAS SISWA

Cari nilai limit fungsi trigonometri berikut.

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

X	1	0,5	0,1	0,01	→	0	←	-0,01	-0,1	-0,5	-1
$\frac{\sin x}{x}$	...	...	...	...	...	?	...	0,99998	0,99833	0,95885	0,84147

Kesimpulan yang diperoleh bahwa :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \dots$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^2 - \frac{\cos x}{10000} \right)$

x	±1	±0,5	±0,1	±0,01	→	0
$\left[ x^2 - \frac{\cos x}{10.000} \right]$	0,99995	0,24991	0,009990	0,000000005	...	?

Kesimpulan yang diperoleh bahwa :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ x^2 - \frac{\cos x}{10.000} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \dots^2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \left( \frac{1}{x} \right)$

x	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{2\pi}$	$\frac{2}{3\pi}$	$\frac{2}{4\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$\frac{2}{6\pi}$	$\frac{2}{7\pi}$	$\frac{2}{8\pi}$	→	0
$\sin \left( \frac{1}{x} \right)$	1	0	-1	0	...	...	...	...	...	?

Berdasarkan tabel menunjukan bahwa nilai selalu berulang antara -1 dan 1 banyak sekali secara tak berhingga. Jelas  $\sin \left( \frac{1}{x} \right)$  tidak berada dekat suatu bilangan unik L bilamana x mendekati 0.

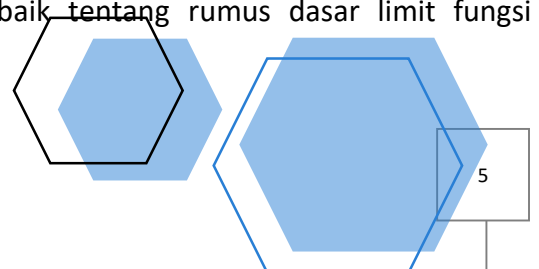
Kesimpulannya  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \left( \frac{1}{x} \right) = \dots$



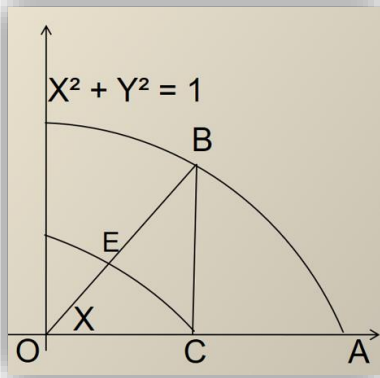
### Kegiatan Belajar 2

Mendapatkan rumus dasar limit fungsi trigonometri

Untuk menyelesaikan limit fungsi trigonometri seperti yang diilustrasikan pada masalah kedua bagian pendahuluan, diperlukan *rumus dasar* limit fungsi trigonometri. Penggunaan rumus dasar limit fungsi trigonometri ini akan sangat membantu dalam menyelesaikan limit fungsi trigonometri yang lebih kompleks. Untuk mendapatkan pemahaman yang lebih baik tentang rumus dasar limit fungsi trigonometri ini, lengkapi aktivitas siswa di bawah ini.



## AKTIVITAS SISWA KE-1



Gambar di samping merupakan lingkaran satuan berpusat di  $O(0,0)$  dan berjari-jari 1.

$$OB = OA = \dots\dots\dots$$

Perhatikan segitiga OCB siku-siku di C.

$$\sin x = \frac{BC}{OB} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} \Rightarrow BC = \dots\dots$$

$$\cos x = \frac{OC}{OB} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} \Rightarrow OC = \dots\dots$$

Luas juring OCE < luas segitiga OCB < luas juring OAB

$$\frac{x}{2\pi} \pi (OC)^2 < \frac{1}{2} OC x (\dots\dots\dots) < \frac{x}{2\pi} \pi (OB)^2$$

$$\frac{x}{2\pi} \pi (\dots\dots\dots)^2 < \frac{1}{2} (\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots) < \frac{x}{2\pi} \pi (\dots\dots\dots)^2$$

$$\frac{x}{2} (\dots\dots\dots) < \frac{1}{2} (\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots) < \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$x \cos^2 x < \sin x \cos x < x \quad (\text{dibagi oleh } x \cos x)$$

$$\dots\dots\dots < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\dots\dots\dots}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \dots\dots\dots < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\dots\dots\dots}$$

$$\dots\dots\dots < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\dots\dots\dots}$$

$$\dots\dots\dots < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} < \dots\dots\dots$$

$$\text{Jadi } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \dots\dots\dots$$

(Rumus ke-1)

## AKTIVITAS SISWA KE-2

Rumus ke-2

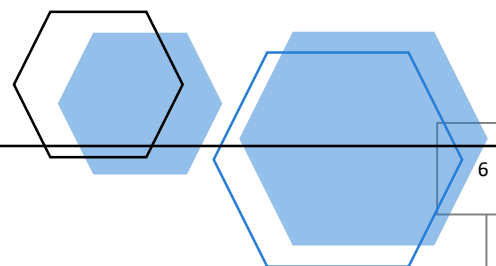
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\dots\dots\dots}{x}} = \dots\dots\dots$$

Rumus ke-3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$$

Rumus ke-4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\dots\dots\dots}{x}} = \dots\dots\dots$$



Setelah melengkapi aktivitas di atas, sebagai hasilnya silakan kalian tuliskan kembali rumus dasar limit fungsi trigonometri.



## Rumus Bantu

1

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

2

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 1 - 2 \sin^2 x \\ &= 2 \cos^2 x - 1\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}\tan 2x &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \\ \tan(x + y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}\end{aligned}$$

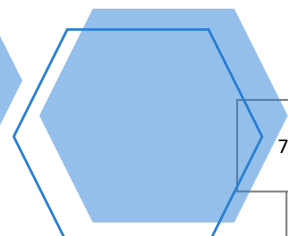


Rumus dasar limit fungsi trigonometri di atas sangat membantu dalam menyelesaikan limit fungsi trigonometri yang lebih kompleks. Untuk memahaminya silakan kalian cermati contoh-contoh di bawah ini.

### CONTOH 1

Limit trigonometri

Hitunglah  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \tan x}{3x}$



Jawab

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \tan x}{3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{3x} \\&= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \\&= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

### CONTOH 2

Limit Trigonometri

Hitunglah  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}$

Jawab

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1}{1 + \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

### CONTOH 3

Limit Trigonometri

Hitunglah  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{2x \sin x}$

Jawab

Jika kita substitusikan  $x = 0$  diperoleh bentuk  $0/0$ . Maka perlu mengubahnya lewat identitas trigonometri.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x \sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos^2 \frac{1}{2}x - \sin^2 \frac{1}{2}x)}{\dots} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 \frac{1}{2}x + \sin^2 \frac{1}{2}x}{\dots} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}x + \sin^2 \frac{1}{2}x}{\dots} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\dots}{\dots} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (\frac{1}{2}x) \cdot (\sin \frac{1}{2}x) (\frac{1}{2}x) \cdot (\sin \frac{1}{2}x) \cdot 3x}{2x \cdot (\frac{1}{2}x) \cdot (\frac{1}{2}x) \cdot (\sin 3x) (3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\dots}{\dots} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (\frac{1}{2}) \cdot (\sin \frac{1}{2}x) (\frac{1}{2}x) \cdot (\sin \frac{1}{2}x) \cdot 3x}{2 \cdot (\frac{1}{2}x) \cdot (\frac{1}{2}x) \cdot (\sin 3x) (3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\dots}{\dots} \\&= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$



**CONTOH 4**

## Limit Trigonometri

Hitunglah  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x - \cos x \sin x}$

Jawab

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x - \cos x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x(\cos x - \sin x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x(\cos x - \sin x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x + \sin x)}{\cos x} \\
 &= \frac{\cos 45^\circ + \sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 2
 \end{aligned}$$

Supaya pemahamanmu tentang identitas trigonometri meningkat dengan baik, ayo kerjakan latihan soal berikut.

Ayo Berlatih

**Bagian 1**

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\tan x} = \dots$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\tan 14x} = \dots$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x + \sin 2x}{6x} = \dots$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \sin x + \sin 2x + \tan 2x}{6x - 2 \sin x - 3 \tan x} = \dots$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{6x \sin x} = \dots$

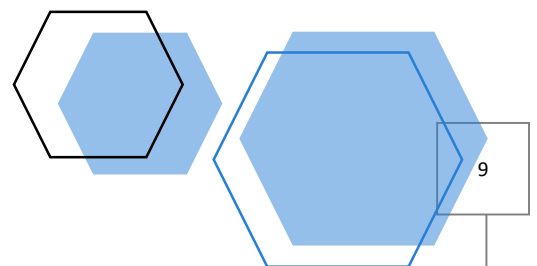
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{x^2 + (\sin 3x)^2} = \dots$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3} = \dots$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos 2x - \sin x}{x^2 \tan x} = \dots$

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \dots$

10.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{\sin(x - a) + 2a - 2x} = \dots$





## Bagian 2

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos^3 2x}{4x \cdot \tan x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan 2x + \tan 4x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 3x \cdot \cos^2 x}{4x \tan^2 x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan 4x - \tan 8x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \cos(x-3)}{(x^2 - 2x - 3) \tan(4x - 12)}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\cos(3x+6) - 1}{\sin(x+2) \cdot \tan(2x+4)}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^2 2x}{\cos x - \cos x \cdot \sin x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x - \cos x \cdot \sin x}$$

Apabila kalian telah selesai, mintalah gurumu untuk menilai ketepatan hasil kerjamu. Kemudian diskusikan jawaban yang tepat.

## Kunci Jawaban

## Bagian 1

- |         |        |
|---------|--------|
| 1. 5    | 6. 1/5 |
| 2. 0,5  | 7. 1/2 |
| 3. -1/6 | 8. -2  |
| 4. 1    | 9. 3/2 |
| 5. ¾    | 10. -1 |

## Bagian 2

2. ¾  
4. -9/4  
6. 2  
8. -1/2

Apabila kalian merasa sudah dapat memahami pembelajaran ini, kalian boleh melanjutkan ke kegiatan belajar pada UKBM selanjutnya.

**PENGAYAAN** Untuk memperdalam pemahaman kalian limit fungsi trigonometri, kalian dapat mengakses beberapa alamat berikut.

- ① <https://www.symbolab.com/solver/limit-calculator>
- ① [https://youtu.be/\\_nrLpuoZAg0?t=317](https://youtu.be/_nrLpuoZAg0?t=317)

## PENUTUP

Setelah kalian belajar bertahap dan berlanjut melalui kegiatan belajar 1 dan 2 isilah tabel berikut untuk mengukur diri kalian terhadap materi yang telah kalian pelajari. Jawablah sejujurnya terkait dengan penguasaan materi pada UKBM ini.

**Tabel Refleksi Diri Pemahaman Materi**

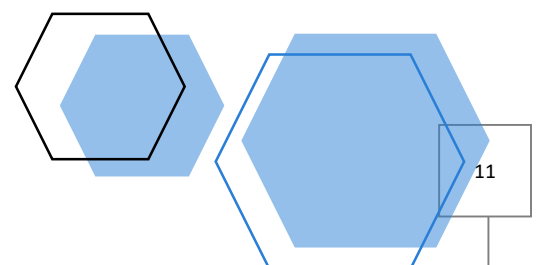
No	Pernyataan	Ya	Tidak
1	Apakah kalian sudah memahami konsep limit fungsi di satu titik?		
2	Apakah kalian memahami pengertian limit fungsi trigonometri secara intuisi melalui perhitungan?		
3	Apakah kalian memahami rumus dasar limit fungsi trigonometri?		
4	Apakah kalian mengetahui banyak rumus-rumus trigonometri yang diperlukan pada perhitungan limit fungsi trigonometri?		
5	Apakah kalian dapat menentukan nilai limit fungsi trigonometri yang sederhana?		
6	Apakah kalian dapat menentukan nilai limit fungsi trigonometri yang lebih kompleks?		

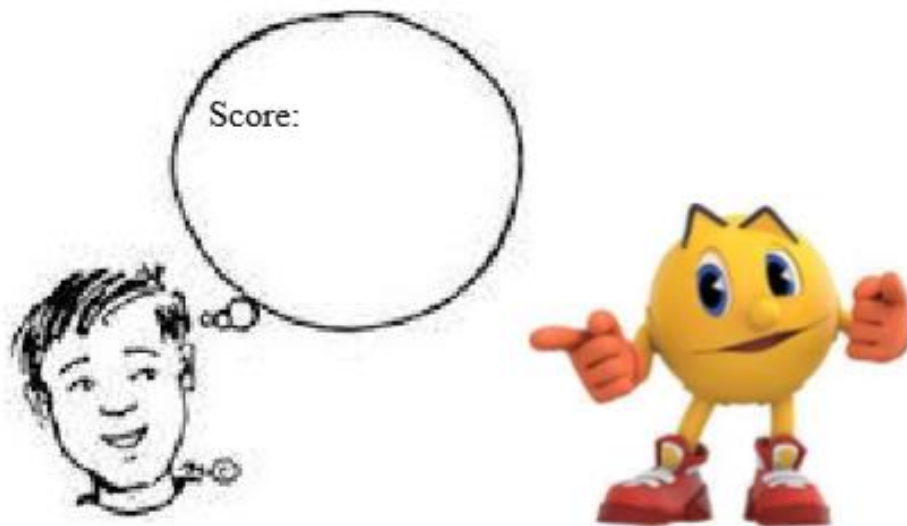
Jika menjawab **“TIDAK”** pada salah satu pertanyaan di atas, maka pelajailah kembali materi tersebut dan pelajari ulang kegiatan belajar 1 dan 2 yang sekiranya perlu kalian ulang dengan bimbingan Guru atau teman sejawat. **Jangan putus asa untuk mengulang lagi!**. Dan apabila kalian menjawab **“YA”** pada semua pertanyaan, maka lanjut ke berikut.

## Dimana posisimu?

Ukurlah diri kalian dalam menguasai materi mengembangkan pendapat dalam teks eksposisi dalam rentang **0-100**, tuliskan ke dalam kotak yang tersedia.

Jika kalian menjawab .... Ya dari ...., pertanyaan maka skor nilai anda adalah ....dengan Rumus Jumlah Ya/ Jumlah pertanyaan x 100=....





*Tuliskan Refleksi penguasaan kamu terhadap materi di atas dalam bentuk deskripsi.*

.....

.....

.....

.....

.....

.....