

# FISIKA KUANTUM

NURLINA, S.Si., M.Pd

Lembaga Perpustakaan dan Penerbitan Universitas Muhammadiyah Makassar 2017

# FISIKA KUANTUM

Copyright@penulis 2017

Penulis Nurlina, S.Si., M.Pd.

Editor

Muh. Fakhruddin S

Tata Letak Mutmainnah

xii+245 halaman 17 x 23 cm Cetakan I : Oktober 2017

ISBN: 978-602-8187-69-5

Penerbit

LPP Unismuh Makassar

Jl. Sultan Alauddin Km 7 No. 259 Makassar

Telp. 0411-866972/Fax. 0411-865588

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
Dilarang mengutip dana tau memperbanyak tanpa izin tertulis dari
Penerbit sebagian atau seluruhnya dalam bentuk apapun, baik cetak,
footprint, microfilem dan sebagainya.

# **DAFTAR ISI**

PRAKATA	i
DAFTAR ISI	ii
DAFTAR TABEL	vi
DAFTAR GAMBAR	vii
BAB I LAHIRNYA FISIKA KUANTUM	1
1.1 Pendahuluan	
1.2 Konsep Fisika Klasik	
1.3 Radiasi Benda Hitam	
1.4 Batasan Teori Fisika Klasik	
1.5 Prinsip Korespondensi	
BAB II CAHAYA SEBAGAI PARTIKEL	22
2.1 Pendahuluan	
2.2 Efek Fotolistrik.	
2.3 Efek Compton	35
2.4 Foton Sebagai Partikel	
2.5 Spektroskopi Atom Hidrogen	
2.6 Atom Hidrogen Model Bohr	. 46
BAB III GELOMBANG MATERI DAN ASAS KETIDAKPASTIAN HEISENBERG.	55
3.1 Pendahuluan	
3.2 Postulat de Broglie	. 57
3.3 Eksistensi Gelombang Materi	
3.4 Percobaan Davisson dan Germer	
3.5 Persamaan Gelombang (Beiser 91-98)	
3.6 Penafsiran Fungsi Gelombang	
3.7 Prinsip Ketidakpastian	
3.8 Asas Ketidakpastian Heisenberg	. 79
BAB IV METODOLOGI FISIKA KUANTUM	
4.1 Persamaan Gelombang	
4.2 Persamaan Schrodinger	
4.3 Sifat-Sifat suatu Fungsi Gelombang	
4.4 Persamaan Gerak Heisenberg	. 96
BAB V SISTEM DENGAN POTENSIAL SEDERHANA	
5.1 Pendahuluan	
5.2 Potensial Tangga	
5.3 Potensial Tangga Persegi	
5.4 Sumur Potensial Persegi Tak Terhingga	
5.5 Sumur Potensial Persegi Terhingga	
5.6 Sumur Potensial Persegi dengan Dinding	
5.7 Osilator Harmonis Sederhana	113

DAFTAR PUSTAKA	. 207
Apendiks 1 Beberapa Konstanta	208
Apendiks 2 Beberapa Integral	209
Apendiks 3 Transformasi Koordinat Cartesian ke Koordinat Bola	
Apendiks 4 Osilator Fisis	212
GLOSSARY	214

# DAFTAR GAMBAR

No.	Gambar	Halaman
Gambar 1.1	Warna benda yang cukup panas sehingga memancarkan cahaya, maka warnanya akan bergantung pada temperatur seperti	
Gambar 1.2	yang diperlihatkanLubang kecil dipermukaan benda panas berongga menyerap semua radiasi yang mengenainya. Lubang berprilaku sebagai benda	
Gambar 1.3	hitam  Distribusi spektral radiansi benda hitam pada temperatur yang berbeda	7
Gambar 1.4	Kecocokan teori Rayleigh-Jeans dengan data eksperimen hanya pada panjang gelombang tinggi atau frekuensi rendah	
Gambar 2.1	Skema diagram dari peralatan yang digunakan oleh P.Lenard	
Gambar 2.2	arus fotolistrik dan potensial V untuk dua harga intensitas cahaya yang berbeda. Jika $V < -V_0$ tidak akan ada arus	26
Gambar 2.3	Kebergantungan potensial pemerhenti V terhadap frekuensi cahaya v untuk logam Kalium, Cesium dan	
Gambar 2.4	TembagaGrafik ketidakbergantungan energi kinetik foto elektron terhadap intensitas cahaya	
Gambar 2.5 Gambar 2.6	Grafik kuat arus fotoelektrik terhadap waktu, dihitung sejak saat penyinaran pertama	29
Gambar 2.7	cahaya untuk cahaya dengan frekuensi tertentu.  Potensial penghalang dipasang nol	
Gambar 2.8	Hasil eksperimen Compton	36
Gambar 2.9	Model Atom Bohr (Z = 1 bagi hidrogen)	46
Gambar 2.10	Tingkat-tingkat energi atom Hidrogen	49
Gambar 2.11	Sebuah elektron melompat dari keadaan n <sub>1</sub> ke keadaan n <sub>2</sub> , dan memancarkan radiasi elektromagnet (sebuah foton cahaya)	50
Gambar 3.1	Percobaan Davisson dan Gremer. Elektron terhambur pada sudut θ dari sebuah Kristal nikel	
Gambar 3.2	•	02

# BAB I LAHIRNYA FISIKA KUANTUM

Dalam buku ini anda akan mempelajari tentang awal mula lahirnya Fisika Kuantum, konsep fisika klasik, radiasi benda hitam, batasan teori fisika klasik, dan prinsip korespondensi.

Setelah mempelajari buku ini anda diharapkan memiliki kemampuan untuk dapat:

- 1. Menjelaskan awal mula lahirnya fisika kuantum
- 2. Menjelaskan konsep fisika klasik
- 3. Menjelaskan radiasi benda hitam
- 4. Menjelaskan batasan teori fisika klasik
- 5. Menjelaskan prinsip korespondensi

Kemampuan tersebut sangat penting bagi mahasiswa atau sederajat karena materi ini sangat dasar dalam pembelajaran fisika kuantum. Sebagai calon Guru dapat mengembangkan materi ini sesuai dengan kebutuhan atau kemampuan.

#### 1.1 Pendahuluan

Pada akhir abad ke 19, semakin jelas bahwa Fisika (konsep-konsep Fisika) memerlukan revisi atau penyempurnaan. Hal ini disebabkan beberapa hasil eksperimen dan gejala-gejala Fisika yang tidak bisa dijelaskan dengan konsep-konsep Fisika yang telah ada pada saat itu (Fisika klasik). Lahirnya teori kuantum yang disarankan oleh Planck karena teori klasik gagal menjelaskan distribusi energi dalam spektrum yang dipancarkan oleh benda hitam. Teori yang dikemukakan oleh Rayleigh dan Jeans tampak seluruhnya tidak sesuai dengan hasil eksperimen. Dalam mengatasi kesulitan tersebut, Planck pertama kali menyadari kemungkinan adanya pelanggaran atau kesalahan dari hukum equipartisi energi yang merupakan dasar dari teori klasik. Hukum ekuipartisi menganggap bahwa energi total rata-rata mempunyai harga yang sama untuk semua gelombang tegak dalam rongga dan tidak bergantung pada frekuensinya.

Di dalam suatu pertemuan ahli Fisika Jerman pada tanggal 14 Desember 1900, Max Planck mengemukakan karya ilmiahnya yang berjudul "On the Theory of the

$$\nabla \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla x \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{J}}{\varepsilon c^2}$$

Dan

$$\nabla \cdot \vec{R} = 0$$

dengan c adalah kelajuan cahaya,  $\rho$  adalah rapat muatan ruang,  $\varepsilon$  adalah permitivitas ruang hampa, dan  $\vec{j}$  adalah rapat arus. Untuk ruang bebas, persamaan di atas menjadi

$$\nabla \bullet \vec{E} = 0 \quad \text{dan } \nabla x \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Persamaan-persamaan Maxwell dalam ruang bebas memberikan persamaan medan listrik dan medan magnet yang terpisah sebagai

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$
 dan  $\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ 

adalah persamaan gelombang elektromagnet dalam ruang bebas. Penyelesaian persamaan gelombang berbentuk

$$\vec{E}(\vec{r},t) = Re\left[\vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\right]$$
 1.3

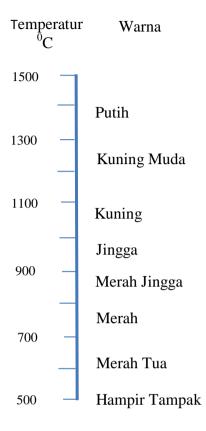
Dan

$$\vec{B}(\vec{r},t) = Re \left[ \vec{B}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \right]$$
 1.4

dengan  $\omega$  adalah frekuensi sudut gelombang, dan k adalah vektor gelombang pada arah rambat gelombang, yang besarnya adalah  $k=\omega/c$ . Dalam Fisika klasik, fenomena alam dapat dispektrumkan dengan Mekanika Newton yang menguasai partikel, dan elektromagnetika yang menguasai medan elektromagnetik atau radiasi. Kedua komponen Fisika klasik tersebut dapat dipandang sebagai terpisah satu dengan yang lain, tetapi terkait melalui persamaan Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{1.5}$$

yang menyatakan gaya yang dialami oleh partikel bermuatan listrik q bergerak dengan kecepatan  $\vec{v}$  dalam medan elektromagnet  $\vec{E} \cdot \vec{B}$ .

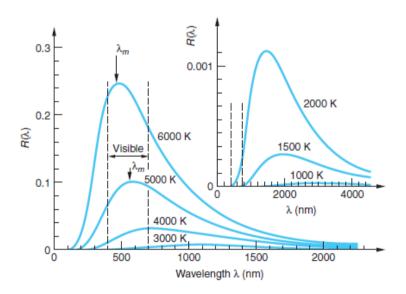


Gambar 1.1 Warna benda yang cukup panas sehingga memancarkan cahaya, maka warnanya akan bergantung pada temperatur

Penelitian tentang radiasi termal dimulai pada tahun 1859 oleh Kirchhoff yang memperlihatkan bahwa untuk panjang gelombang ( $\lambda$ ) tertentu, perbandingan antara daya pancar sebuah benda (E) dengan daya serap benda itu (A) adalah sama untuk semua benda. Daya pancaran sebuah benda (E) didefinisikan sebagai banyaknya energi yang dipancarkan pada panjang gelombang  $\lambda$  persatuan luas. Sedangkan daya serap benda (A) didefenisikan sebagai bagian dari radiasi yang datang yang dapat diserap. Selanjutnya didapatkan bahwa untuk semua benda hitam, yaitu benda yang menyerap semua radiasi yang jatuh padanya (e = 1), fungsi ( $\lambda$ , T) merupakan fungsi yang berlaku umum.

sebagai daya pancar persatuan luas. Keterangan" spektral" pada ungkapan "distribusi radiasi spektral" dimaksudkan untuk menjelaskan bahwa distribusi radiasi tersebut dirumuskan untuk mendeskripsikan radiasi yang disumbangkan oleh masing-masing komponen spektrum. Komponen spektrum dapat dicirikan dengan salah satu dari kedua besaran berikut, yaitu panjang gelombang atau frekuensi. Jika frekuensi yang dipilih, maka distribusi radiasi spektral menyatakan distribusi radiasi (daya pancar persatuan luas permukaan benda-hitam per satuan waktu) yang disumbangkan oleh komponen spektrum yang berfrekuensi tertentu. Karena radiasi pada komponen spektrum juga bergantung pada temperatur benda-hitam maka fungsi distribusi radiasi spektral juga bergantung pada temperatur benda-hitam.

Jika fungsi distribusi radiasi spektral dilambangkan  $R_T(v)$ , maka  $R_T(v)$  dv menyatakan radiasi benda-hitam yang bertemperatur T dan disumbangkan oleh komponen spektrum yang berfrekuensi dari v sampai v+dv. Data eksperimen radiasi benda-hitam, khususnya distribusi radiasi spektralnya, secara kualitatif disajikan pada Gambar 1.3. sebagai berikut



Gambar 1.3. Distribusi spektral radiasi benda hitam pada temperatur yang berbeda

Berdasarkan gambar tersebut tersebut dapat diketahui bahwa spektrum radiasi benda-hitam berupa spektrum kontinu dengan radiasi yang beragam masing-masing komponen spektrum. Komponen spektrum berfrekuensi sangat rendah memiliki radiasi

tinggi pula energi termal yang dipancarkan. Kenaikan energi termal terhadap temperatur tersebut ternyata sangat cepat.

Energi termal yang dipancarkan per satuan waktu oleh tiap satuan luas permukaan benda-hitam yang bertemperatur T, dilambangkan  $R_t$ , ditemukan secara empiris oleh Stefan dan dirumuskan sebagai berikut:

$$R_{T} = \sigma T^4 \tag{1.7}$$

Dengan  $\sigma=5,67\times10^{-8}~\rm{W.m^{-2}.K^{-4}}$  yang disebut tetapan Stefan-Boltzmann. Persamaan (1.7) dikenal dengan **Hukum Stefan-Boltzmann** 

#### 1.3.3 Rumusan Teoritis

Penjabaran teoretis radiasi benda-hitam pada umumnya dilakukan melalui telaah radiasi didalam rongga, bukan radiasi yang dipancarkan dari lubang di dinding rongga. Hal ini disebabkan karena sudah tersedia teori yang mapan tentang radiasi rongga, yaitu teori gelombang elektromagnetik Maxwell. Selain itu, ada hubungan yang sederhana antara radiasi yang dihasilkan lubang didinding suatu rongga dengan rapat energi (per satuan volume) didalam rongga itu.

Untuk mempelajari spektrum radiasi didalam rongga, didefinisikan suatu fungsi distribusi yang disebut **distribusi rapat energi spektral,** yaitu distribusi energi termal yang terkungkung dalam tiap satuan volume rongga yang disumbangkan oleh komponen spektrum tertentu. Jika fungsi distribusi rapat energi spektral dilambangkan  $\rho_T(v)$  maka  $\rho_T(v)$  dv menyatakan energi termal per satuan volume rongga yang bertemperatur T dan disumbangkan oleh komponen spektrum yang berfrekuensi dari v sampai v + dv. Fungsi distribusi rapat energi spektral  $\rho_T(v)$  secara kualitatif sama dengan fungsi distribusi radiasi spektral  $R_T(v)$ . Hubungan kedua besaran tersebut adalah

$$R_T(v) = \frac{c}{4}\rho_T(v) \tag{1.8}$$

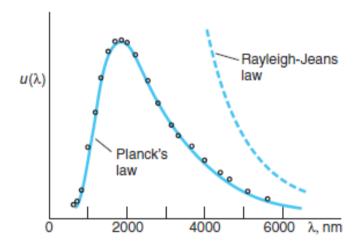
Dengan c menyatakan laju cahaya dalam ruang vakum.

Untuk menjelaskan secara teoritis ketiga data eksperimen sebagaimana disebutkan didepan, langkah yang paling stategis adalah menjabarkan rumusan distribusi

Penghitungan yang dilakukan Rayleigh dan Jeans menghasilkan nilai  $<\epsilon>=k_BT$ , dengan  $k_B$ **tetapan Boltzman** yang nilainya 1,38x10<sup>-23</sup> J.K<sup>-1</sup>. Subtitusi Persamaan (1.9) dan  $<\epsilon>=k_BT$  ke dalam Persamaan (1.10) menghasilkan

$$\rho_T(v)dv = \frac{8\pi k_B T}{c^3} v^2 dv \tag{1.11}$$

Jelaslah bahwa hasil ini tidak cocok dengan data eksperimen. Data eksperimen menunjukkan bahwa untuk frekuensi sangat tinggi  $\rho_T$  (v) bernilai nol; sementara itu menurut teori Rayleigh dan Jeans,  $\rho_T$ (v) bernilai tak hingga besar. Perhatikan Gambar 1.4 sebagai berikut



Gambar 1.4. Kecocokan teori Rayleigh-Jeans dengan data eksperimen hanya pada panjang gelombang tinggi atau frekuensi rendah

Penghitungan yang dilakukan Planck menghasilkan

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{hv}{\rho^{\left(\frac{hv}{k_BT}\right)} - 1}$$

dengan h tetapan Planck yang nilainya sebesar  $6,63 \times 10^{-34}$  J.s. Substitusi Persamaan (1.12) dan (1.9) ke dalam (1.10) menghasilkan

$$\rho_T(v)dv = \frac{8\pi v^2}{c^3} \frac{hv}{e^{\left(\frac{hv}{k_BT}\right)} - 1} dv$$
1.13

$$\langle \varepsilon \rangle = k_B T^2 \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dT}} k_B T}{k_B T} = \frac{k_B^2 T^2}{k_B T} = k_B T$$
 1.16

Begitulah proses perhitungan energi rata-rata tiap ragam menurut teori Rayleigh dan Jeans.

Sebagaimana telah dinyatakan di depan, hasil perhitungan ini menyebabkan rumusan distribusi rapat energi spektral yang dihasilkan tidak cocok dengan eksperimen, khususnya pada frekuensi tinggi (daerah ultraviolet). Perlu dicatat bahwa langkahlangkah yang dilakukan Rayleigh dan Jeans sepenuhnya tidak bertentangan dengan teori yang ada saat itu. Oleh karena itu, kegagalan Rayleigh-Jeans sekaligus merupakan kegagalan fisika yang telah dikembangkan sampai saat itu. Peristiwa itu, dalam sejarah fisika, dikenal sebagai **bencana ultraviolet**.

#### 1.3.3.2 Teori Planck

Persamaan (1.10) memberi petunjuk bahwa kunci utama untuk mendapat teori radiasi benda-hitam yang benar adalah ketepatan dalam merumuskan energi rata-rata tiap ragam. Berdasarkan persamaan itu, dan kenyataan bahwa teori Rayleigh-Jeans cocok untuk frekuensi rendah, maka *energi rata-rata tiap ragam harus bergantung pada frekuensi. Tegasnya: pada frekuensi tinggi bernilai nol dan frekuensi rendah bernilai k<sub>B</sub> T. Pemikiran seperti inilah yang mengantarkan Planck berhasil merumuskan teori yang benar. Berikut diuraikan secara singkat bagaimana Planck merumuskan teorinya.* 

Karena langkah yang ditempuh Rayleigh dan Jeans sudah konsisten dengan teoriteori yang ada saat itu, maka Planck mencoba mengajukan hipotesis yang benar-benar baru pada saat itu. Planck mengajukan hipotesi bahwa energi tiap ragam tidaklah berupa sebarang nilai dari nol sampai tak berhingga, melainkan harus merupakan salah satu dari sederetan nilai diskret yang terpisah secara seragam dengan interval  $\Delta \varepsilon$ . Jadi energi tiap ragam haruslah salah satu dari nol,  $\Delta \varepsilon$ ,  $2\Delta \varepsilon$ ,  $3\Delta \varepsilon$ , ...  $n\Delta \varepsilon$ , dengan n = 1,2,3,...

Untuk menghasilkan energi rata-rata yang bergantung pada frekuensi, maka energi tiap ragam juga harus bergantung pada frekuensi. Ini berarti bahwa  $\Delta \varepsilon$  harus berbanding lurus terhadap v. Kesebandingan ini dapat diubah menjadi kesamaan dengan mengajukan suatu besaran yang berdimensikan energi kali waktu (yaitu aksi) sebagai

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\alpha k_B T}{e^{\alpha} - 1}$$
 1.22

Karena  $\alpha = hv/K_BT$ , maka

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{hv}{e^{hv/k_B T} - 1}$$
 1.23

Begitulah cara Planck merumuskan energi rata-rata tiap ragam gelombang tegak dalam rongga yang bertemperatur T.

Apakah rumusan tadi telah memenuhi harapan Planck, yaitu: pada frekuensi rendah bernilai  $K_BT$  dan pada frekuensi tinggi bernilai nol? Pertanyaan itu dapat dijawab dengan mengamati nilai limit  $< \varepsilon >$  pada  $v \rightarrow \infty$  dan pada  $v \rightarrow 0$ . Kedua nilai limit tersebut dapat dihitung dengan kaidah **L'Hospital** sebagai berikut.

$$\lim_{v \to 0} \langle \varepsilon \rangle = \lim_{v \to 0} \frac{hv}{e^{hv/k_B T} - 1} = \lim_{v \to 0} \frac{hv}{(h/k_B T)e^{hv/k_B T}} = k_B T$$

Dan

$$\lim_{v \to \infty} \langle \varepsilon \rangle = \lim_{v \to \infty} \frac{hv}{e^{hv/k_B T} - 1} = \lim_{v \to \infty} \frac{hv}{(h/k_B T)e^{hv/k_B T}} = \frac{k_B T}{\sim} = 0$$

Jelaslah bahwa rumusan nilai energi rata-rata tiap ragam gelombang tadi telah memenuhi harapan Planck, yaitu: pada frekuensi rendah bernilai  $K_BT$  dan pada frekuensi tinggi bernilai nol.

Akhirnya, dengan memasukkan persamaan (1.23) ke dalam persamaan (1.10) diperoleh rapat energi persatuan volume rongga pada temperatur T yang dihasilkan oleh ragam gelombang yang berfrekuensi antara v dan v+dv sebagai berikut.

$$\rho_T(v)dv = \frac{8\pi}{c^3} v^2 \frac{hv}{e^{hv/k_B T} - 1} dv$$
1.24

Persamaan itu menunjukkan bahwa pada temperatur T tertentu, rapat energi radiasi menuju nol jika frekuensinya menuju tak hingga. Ini sesuai dengan data eksperimen. Pencocokan dengan seluruh data eksperimen dilakukan dengan memilih nilai h. Hasil terbaik dari nilai tersebut adalah

Daya yang dipancar

$$P = R(5500)A \Delta \lambda = 9,60 \times 10^{13} \times 7,85 \times 10^{-9} \times 10 \times 10^{-9}$$
 milliwatt  
= 0,00075 milliwatt = 0,75 watt

2. Cahaya matahari tiba dipermukaan bumi dengan laju sekitar 1,4 kW/m²ketika matahari berada di atas kepala. Jari-jari rata-rata orbit bumi adalah 1,5 x 10¹¹ m dan jari-jari matahari adalah 7,0 x 10² m. Dari angka-angka tersebut, carilah temperatur permukaan matahari dengan anggapan bahwa matahari memancarkan cahaya seperti benda hitam sempurna.

#### Jawab

Kita mulai dengan mencari daya total P yang dipancarkan matahari. Luas bola yang berjari-jari R yang sama dengan jari-jari orbit bumi adalah  $4\pi R^2$ . Karena radiasi matahari jatuh bumi (berbentuk bola) dengan laju P/A 1,4 kW/m², maka

$$P = \left(\frac{P}{A}\right)(4\pi R^2) = (1.4x10^3 W/m^2)(4\pi)(1.5x10^{11}m)^2$$

$$P = 3.96x10^{26} W$$

Kemudian, kita cari laju radiasi matahari R. Jika r adalah jari-jari matahari, maka luas permukaannya adalah  $4\pi r^2$  dan

$$R = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{3,96x10^{26} W}{(4\pi)(7,0 x 10^8 m)^2} = 6,43 x 10^7 W/m^2$$

Emisivitas benda hitam sempurna, e = 1, maka

$$T = \left(\frac{R}{e\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{6,43 \times 10^7 W/m^2}{(1)(5,67 \times 10^{-8} W/m^2 K^4)}\right)^{1/4} = 5,8 \times 10^3 K$$

#### 1.4 Batasan Teori Fisika Klasik

Dalam teori relativitas, terdapat suatu tetapan yang digunakan sebagai kriterium, kapan suatu masalah hendaknya dipecahkan dengan cara relativistik atau nonrelativistik.

melanggar hukum fisika klasik, yang mengatakan bahwa sebuah partikel bermuatan meradiasikan energi elektromagnet bila mengalami percepatan. Perhatikan bahwa di sini kita melakukan suatu hal yang sangat berbeda dari yang kita lakukan dalam kajian mengenai teori relativitas khusus. Teori relativitas khusus menyatakan bahwa energi kinetik dalam bentuk  $K = E - E_o$ , sedangkan fisika klasik memberi bentuk yang berbeda K = ½ m v  $^2$  ; tetapi telah ditunjukkan bahwa E –  $E_o$  tersederhanakan menjadi ½ m v  $^2$ apabila v<<c. Jadi, kedua pernyataan ini sebenarnya tidaklah terlalu berbeda – yang satu merupakan hal khusus dari yang lainnya. Dilema yang berkaitan dengan elektron yang dipercepat bukanlah semata-mata persoalan fisika atom (sebagai satu contoh dari fisika kuantum) sebagai suatu hal khusus dari fisika klasik, melainkan apakah elektron yang dipercepat meradiasikan energi elektromagnet atau tidak !!! Dilema ini dipecahkan oleh Bohr dengan mengajukan azas persesuaian (Correspondence - Principle), yang mengatakan bahwa hukum fisika klasik hanya berlaku dalam ranah klasik, sedangkan hukum fisika kuantum berlaku dalam ranah atom ; pada ranah di mana keduanya bertumpang tindih, kedua himpunan hukum fisika itu harus memberikan hasil yang sama.

Mari kita lihat bagaimana azas ini dapat diterapkan pada atom Bohr. Menurut fisika klasik, sebuah partikel bermuatan listrik yang bergerak sepanjang sebuah lingkaran meradiasikan gelombang elektromagnet dengan frekuensi yang sama dengan frekuensi gerak melingkarnya. Untuk gerak edar elektron dalam atom, periode gerak melingkar adalah jarak tempuh satu gerak edar,  $2 \pi r$ , dibagi dengan laju edar  $v = \sqrt{\frac{2 K}{m}}$ , dengan K adalah energi kinetik. Jadi, dengan menggunakan pernyataan (1.31) bagi energi kinetik, periode T diberikan oleh

$$T = \frac{2\pi r}{\sqrt{2K/m}} = \frac{(\pi r)(\sqrt{2m})(\sqrt{8\pi \varepsilon_o r})}{e}$$
(1.47)

Karena frekuensi v adalah kebalikan dari periode T, maka

$$\upsilon = \frac{1}{T} = \frac{e}{\sqrt{16 \ \pi^3 \ \varepsilon_0 \, m \, r^3}} \tag{1.48}$$

kemudian ke orbit (n-2), dan seterusnya, meradiasi dengan frekuensi yang diberikan oleh Persamaan (1.51).

#### Latihan

- 1. Jelaskan mengapa Fisika kuantum ada?
- 2. Jika bintang merah dan bintang putih memancarkan energi dengan laju yang sama, dapatkah kedua bintang itu berukuran sama? Jika tidak, mana yang lebih besar? Mengapa?
- 3. Suatu cavity radiator bersuhu 400K mempunyai lubang berdiameter 0,20 mm di dindingnya. Hitunglah daya pancaran melalui lubang ini dalam selang panjang gelombang 6600 A<sup>0</sup> sampai dengan 6620 A<sup>0</sup>!
- 4. Bintik surya terlihat gelap, walaupun temperaturnya sekitar 5000 K karena permukaan surya yang lain lebih panas yaitu 5800 K. Bandingkan laju radiasi dari permukaan dengan emisivitas yang sama dengan temperatur 5000 dan 5800 K
- 5. Berapakah banyaknya modus gelombang berdiri yang bebas dengan panjang gelombang antara 9,5 dan 10,5 nm yang dapat timbul pada rongga berbentuk kubus bersisi 1 m? Berapakah banyak panjang gelombang antara 99,5 dan 100 mm (Petunjuk /; Buktikan dahulu bahwa  $g(\lambda)$   $d\lambda = 8\pi L^3 d\lambda/\lambda^4$ )
- 6. Andaikan bahwa permukaan matahari bersuhu 8600k. Diameter dan massa dari matahari berturut-turut  $1.4 \times 10^9$  m dan  $2.0 \times 10^{30}$  kg.
  - a. Gunakan hukum Stefan-Boltzman untuk menghitung daya radiasi termal yang dipancarkan matahari.
  - b. Berapa banyakkah matahari kehilangan massa per detik karena pemancaran ini?
- 7. Suatu benda bertemperatur 400<sup>o</sup>C. Pada temperatur berapakah radiasi energinya menjadi dua kali lipat?
- 8. Sebuah benda hitam memancarkan 1 kW pada temperatur 500°C. Pada laju berapah benda tersebut akan memancarkan energi bila temperaturnya menjadi 750°C?

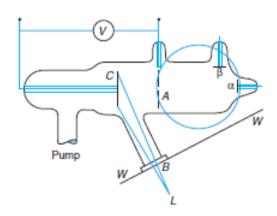
memikirkan bahwa cahaya terdiri dari partikel-partikel yang tidak mempunyai massa diam dan tidak dapat dipercepat.

Sebaliknya, gejala-gejala interferensi dan difraksi pada cahaya mendukung teori undulasi Huygens yang menganggap bahwa cahaya sebagai gejala gelombang. Namun akhirnya gagal menjelaskan gejala-gejala lain, seperti efek fotolistrik dan efek Compton. Oleh karena itu sangat sulit untuk menyatakan apa sesungguhnya cahaya itu. Apakah cahaya itu berupa partikel atau gejala gelombang. Beberapa gejala fisik hanya dapat diterangkan dengan menganggap cahaya sebagai gelombang, tetapi terdapat jugagejala-gejala lainnya yang hanya dapat dijelaskan dengan menganggap cahaya sebagai partikel. Untuk menjawab pertanyaan itu akhirnya kedua pandangan disatukan dalam prinsip komplementaris yang menganggap bahwa cahaya bersifat dua, pada suatu keadaan bersifat sebagai gelombang tetapi pada keadaan lain bersifat sebagai partikel. Yang jelas bahwa kedua sifat tersebut tidak diperlihatkan secara serentak atau bersama-sama. Pandangan ini akhirnya diperluas, tidak hanya mengenai foton tetapi juga partikel-partikel elementer lainnya seperti elektron, neutron, dan sebagainya. Semua partikel ini mempunyai hakekat yang sama dalam artian bahwa semuanya memiliki sifat partikel dan gelombang.

Dalam serangkaian eksperimen, J.J. Thomson berhasil meyakinkan bahwa sinar katoda adalah berkas yang terdiri dari partikel-partikel bermuatan, ukurannya lebih kecil dan kurang padat dibandingkan dengan atom. Partikel ini sekarang dikenal sebagai elektron. Salah satu besaran elektronik yang penting adalah perbandingan antara muatan elektron dengan massanya. Dengan mempercepatnya melalui sebuah beda potensial yang diketahui, kemudian membelokkannya dalam sebuah medan magnet, besaran ini dapat dihitung. Muatan elektron pertama kali ditetapkan oleh R.A. Milikan pada tahun 1913 melalui sebuah percobaan yang dikenal sekarang sebagai percobaan tetes minyak Milikan. Setelah melakukan berbagai macam pengukuran, Milikan membuktikan bahwa muatan listrik terkuantisasi.

Salah satu isyarat yang penting dalam teori kuantum adalah penemuan spektrum garis. Biasanya, cahaya yang dipancarkan oleh materi didistribusikan secara nalar dalam suatu daerah spektrum tetapi terdiri dari serangkaian panjang gelombang yang diskrit.

magnet. Dari percobaan tersebut, dia mendapatkan perbandingan antara muatan dan massa partikel tersebut yang sama dengan yang diperoleh Thomson dalam percobaan mengukur e/m dari elektron. Skema peralatan dasar untuk melakukan percobaan Lenard dapat dilihat pada gambar 2.1 berikut

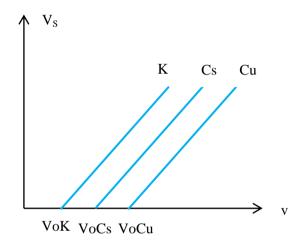


Gambar 2.1 Skema diagram dari peralatan yang digunakan olehP.Lenard untuk menunjukkan efek fotolistrik dan untuk menunjukkan bahwa partike lyang dipancarkan dalam proses adalah elektron. Cahaya dari sumber L membentur katoda C. Fotoelektron akan terpancar keluar melalui lubang dianoda A dan dicatat oleh elektrometer yang terhubung ke  $\alpha$ . sebuah medan magnet, ditandai dengan potongan tiang melingkar, bisa membelokkan fotoelektron ke elektrometer kedua yang terhubung ke  $\beta$  yang memungkinkan pengukuran perbandingan e/m (Sumber, P. Lenard, Annalender Physik dalam Tipler & Llwellyn, 2008)

Jika cahaya dijatuhkan pada sebuah permukaan logam (katoda C) maka elektronelektron akan terpancar keluar. Jika beberapa dari elektron tersebut tertangkap oleh anoda A maka akan ada arus pada rangkaian luar. Banyaknya elektron yang tertangkap di A dapat diperbanyak atau dikurangi dengan membuat beda potensial antara C dan A positif atau negatif.

Misalnya beda potensial antara katoda dan anoda adalah V. Gambar 2.2 memperlihatkan diagram antara arus dan beda potensial V untuk dua macam intensitas cahaya yang dijatuhkan pada katoda. Jika V positif, elektron akan tertarik ke anoda. Pada harga V yang cukup besar, semua pancaran elektron mencapai anoda dan arus mencapai harga maksimum.

Gambar 2.3 menyajikan data eksperimen tentang kebergantungan potensial penghenti terhadap frekuensi cahaya yang digunakan untuk beberapa logam, yaitu potasium (kalium K), cesium (Cs) dan tembaga (Copper, Cu). Grafik tersebut menunjukkan bahwa untuk logam tertentu, jika frekuensi cahaya yang digunakan kurang dari  $v_0$  maka tidak diperlukan potensial penghenti. Tidak diperlukannya potensial penghenti menunjukkan bahwa tidak ada foto elektron yang terlepas. Dengan demikina dapat disimpulkan bahwa untuk menghasilkan efek fotolistrik diperlukan cahaya dengan frekuensi lebih dari  $v_0$ . Frekuensi ini selanjutnya disebut **frekuensi ambang**.



Gambar 2.3. Kebergantungan potensial pemerhenti V terhadap frekuensi cahaya v untuk logam Kalium, Cesium dan Tembaga

Grafik tersebut juga menunjukkan bahwa logam yang berbeda memiliki frekuensi ambang *Vo* yang berbeda pula. Untuk memperoleh foto elektron dari masing-masing logam harus digunakan cahaya yang frekuensinya lebih besar daripada frekuensi ambang untuk logam tersebut. Pada sebagian besar logam, frekuensi ambang ini terletak pada daerah ultraviolet.

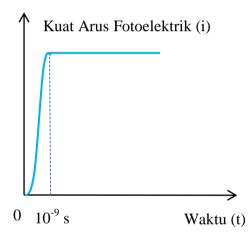
Berdasarkan Gambar 2.3 tersebut diperoleh hubungan  $V_s \sim (v-v_0)$ . Kesebandingan ini dapat diubah menjadi kesamaan dengan menggunakan kesebandingan h/e dengan e menyatakan muatan elektron dan h suatu tetapan yang berdimensikan energi kali waktu.

$$eV_s = hv - hv_0 2.2$$

foto elektron yang sangat energik yang mampu mencapai plat tersebut. Pada saat potensial penghalang sama dengan potensial penghenti sama dengan potensial penghenti, tidak ada foto elektron yang mampu mencapai plat A. Akibatnya, arus fotoelektrik terhenti.

Mengingat percobaan dilakukan dengan cahaya yang frekuensinya tertentu maka dapat disimpulkan bahwa untuk cahaya dengan frekuensinya tertentu, intensitas cahaya tidak mempengaruhi besarnya potensial penghenti. Dengan kata lain energi kinetik fotoelektron tidak bergantung pada intensitas cahaya yang digunakan.

#### Tidak ada waktu tunda antara penyinaran sampai terjadinya arus fotoelektrik



Gambar 2.5. Grafik kuat arus fotoelektrik terhadap waktu, dihitung sejak saat penyinaran pertama

Grafik tersebut menunjukkan bahwa arus fotoelektrik muncul secara spontan begitu cahaya menyinari permukaan logam. Selang waktu antara saat penyinaran pertama sampai terjadinya arus ajeg (*steady*) dapat dianggap sama dengan selang waktu antara penyinaran pertama sampai lepasnya foto elektron. Besaran ini selanjutnya disebut waktu tunda. Meskipun intensitas cahaya yang digunakan sangat rendah sehinga mencapai  $10^{-10}$  W/m² waktu tunda tersebut tidak lebih dari 1 ns ( $10^{-9}$  s). Sebagai pembanding, intensitas  $10^{-10}$  W/m² kira-kira sama dengan intensitas cahaya pada jarak 360 km dari lampu 100 W.

#### Kuat arus fotoelektrik berbanding lurus terhadap intensitas cahaya

selang waktu  $10^{-9}$  sekon belum ada elektron yang dapat keluar. Untuk intensitas sekecil itu dibutuhkan waktu sekurang-kurangnya beberapa jam agar elektron dapat terlepas

- (ii) Menurut teori klasik, makin tinggi intensitas cahaya makin banyak pula energi yang diserap oleh elektron pada permukaan logam. Oleh karena itu, diharapkan arus elektron semakin tinggi sesuai kenaikan intensitas. Dalam batasan-batasan tertentu anggapan ini sesuai dengan hasil eksperimen. Tetapi jika frekuensi cahaya lebih kecil dari frekuensi ambang,  $v_o$  tidak ada arus elektron, berapapun besarnya intensitas cahaya
- (iii) Seperti halnya dengan butir (i) di atas, besarnya energi yang diterima elektron secara klasik ditentukan oleh intensitas cahaya dan bukan oleh frekuensinya. Sebab itu adanya potensial henti yang berbeda untuk setiap logam, benar-benar di luar dugaan teori klasik.
- (iv)Adanya energi kinetik maksimum baagi foto elektron untuk setiap frekuensi, sama sekali tidak dapat dijelaskan oleh teori klasik. Hal ini disebabkan karena menurut teori klasik, energi elektron seharusnya tidak bergantung pada frekuensi.

Dari interpretasi di atas dapat ditarik kesimpulan bahwa berdasarkan teori elektromagnetik klasik, peristiwa efek fotolistrik sama sekali tidak dapat diterangkan dengan baik.

#### 2.2.2.2 Teori Kuantum

Dengan teori kuantum cahaya, kenyataan-kenyataan dalam eksperimen dapat dijelaskan sebagai berikut:

(i) Menurut teori kuantum, energi sebuah foton hanya ditentukan oleh frekuensinya. Dapat tidaknya sebuah elektron terpental keluar dari permukaan logam tidak ditentukan oleh intensitas cahaya. Bentuk elektron tertumbuk dan energi foton cukup untuk mengatasi energi ikat elektron, begitu foton menyerahkan energinya. Energi yang diterima elektron bukan ekumulasi dari energi berbagai foton.

sesungguhnya belum ada bukti tentang adanya kaitan antara tetapan Planck dengan tetapan h pada efekfotolistrik. Begitu juga belum ada bukti kebergantungan potensial henti Vo terhadap frekuensi, nanti pada tahun 1916 Milikan setelah melakukan percobaan melaporkan bahwa persamaan 2.6 sesuai dengan eksperimen dan pengukuran h benar-benar sesuai dengan tetapan Planck.

Pada persamaan 2.6, untuk Vo = 0, maka pada frekuensi ambang,  $v_o$  dan panjang gelombang ambang  $\lambda o$  dapat dituliskan

$$eV_0 = hv - \varphi$$

$$\varphi = hv_0 = hc/\lambda_0$$
2.7

Biasanya panjang gelombang dinyatakan dengan Angstrom  $(A^0)$  dan energi dalam elektronvolt (eV). Sebab itu satuan hc dalam satuan-satuan tersebut adalah:

hc = 
$$(4.14 \times 10^{-15} \text{ eV-s}) (3 \times 10^8 \text{ m/s})$$
  
=1,24 x 10<sup>-6</sup> eV.m  
=12.400 eV.Å

#### Contoh 2.1

Frekuensi ambang potassium 5,376 x 10<sup>14</sup> Hz. Berapa besar fungsi kerja potassium itu? Berapa besar potensial henti bila cahaya yang digunakan 400 nm?

$$\varphi = h v_o = (4.14 \times 10^{-15} \text{ eV-s}) (5.376 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}) = 2.23 \text{ eV}$$

Energi sebuah foton dengan panjang gelombang 400 nm adalah:

$$E = h c/\lambda$$
 = (1240 eV-nm)/400nm = 3,10 eV

Energi kinetik maksimum elektron yang dipancarkan adalah:

$$(1/2m v^2)_{maks}$$
= h v -  $\phi$  = 3,10 eV-2,23 eV = 0,87 eV.

Jadi potensial henti = 0.87 volt

Untuk melepaskan elektron diperlukan energi sebesar 13,6 eV. Energi yang tersisa 3105 ev -13,6 eV = 3091,4 eV. Energi ini akan dijadikan energi kinetik oleh elektron. Oleh karena enargi kinetik elektron jauh lebih kecil daripada energi diamnya ( $E_0 = 5,11 \times 10^5 \ eV$ ) maka efek relativitas tidak perlu dimasukkan. Momentum elektron:

$$P_f = (2 m E_k)^{1/2} = 1/c (2E \cdot E_k)^{1/2}$$
$$= (2 \times 5.11 \times 10^5 eV \times 3091.4 eV)^{1/2}/c$$
$$= 5.62 \times 10^4 eV/c$$

Jika momentum proton P<sub>P</sub>, maka dengan hukum kekekalan momentum dapat ditulis:

$$P_f = P_\rho + P_e$$
  
3105 eV/c = Pp + 5,62 x 10<sup>4</sup> eV/c  
Pp= -5,31 x 10<sup>4</sup> eV/c

ini berarti bahwa sesudah terjadi efek fotolistrik proton bergerak kearah yang berlawanan denagan arah foton.

$$E_k proton = P_p^2 / 2m_p = (pc)^2 / 2E_0$$
  
=  $(5.31 \times 10^4 \text{eV})^2 / (2 \times 9.38 \times 10^8 \text{ eV}) = 0.283 \text{ eV}$ 

#### 2.3 Efek Compton

Cara lain radiasi berinteraksi dengan atom adalah melalui efek Compton, di mana radiasi dihamburkan oleh elektron hampir bebas yang terikat lemah pada atomnya. Sebagian energi radiasi diberikan kepada elektron, sehingga terlepas dari atom; energi radiasi yang tersisa diradiasikan kembali sebagai radiasi elektromagnet. Menurut gambaran gelombang, energi radiasi yang dipancarkan itu lebih kecil daripada energi radiasi yang datang (selisihnya berubah menjadi energi kinetik elektron), namun panjang gelombang keduanya tetap sama. Kelak akan kita lihat bahwa konsep foton meramalkan hal yang berbeda bagi radiasi yang dihamburkan.

Proses hamburan ini dianalisis sebagai suatu interaksi ("tumbukan", dalam pengertian partikel secara klasik) antara sebuah foton dengan sebuah elektron, yang kita anggap diam. Gambar 2.7 menunjukkan peristiwa tumbukan ini.

mencakup pula foton datang berenergi tinggi yang memberikan energi sangat besar pada elektron yang dihamburkan maka kita membuat kinematika relativistik bagi elektron). Dalam interaksi ini berlaku persyaratan kekekalan energi dan momentum, yaitu:

$$E_{awal} = E_{akhir}$$

$$E + m_e c^2 = E' + E_e$$

$$(p_x)_{awal} = (p_x)_{akhir}$$

$$p = p_e \cos \phi + p' \cos \theta$$

$$(p_y)_{awal} = (p_y)_{akhir}$$

$$0 = p_e \sin \phi - p' \sin \theta$$
2.11c

Kita mempunyai tiga persamaan dengan empat besaran tidak diketahui, ( $\theta$ ,  $\phi$ ,  $E_e$ , E';  $p_e$  dan p' saling bergantungan) yang tidak dapat dipecahkan untuk memperoleh jawaban tunggal, tetapi kita dapat menghilangkan (eliminasikan) dua dari keempat besaran ini dengan memecahkan persamaannya secara serentak. Jika kita memilih untuk mengukur energi dan arah foton hambur, maka kita menghilangkan  $E_e$  dan  $\phi$ . Sudut  $\phi$  dihilangkan dengan menggabungkan persamaan – persamaan momentum:

$$p_e \cos \phi = p + p' \cos \theta$$
  
 $p_e \sin \varphi = p' \sin \theta$ 

Kuadratkan dan kemudian jumlahkan, memberikan:

$$p_e^2 = p^2 - 2pp'\cos\theta + p'^2$$
 2.12

Dengan menggunakan hubungan relativistik antara energi dan momentum :

$$E_e^2 = c^2 p_e^2 + m_e^2 c^4$$

maka dengan menyisipkan  $E_e$  dan  $p_e$ , kita peroleh

sehingga berperilaku seperti elektron hampir "bebas". Energi kinetik elektron ini dalam atom sangatlah kecil dibandingkan terhadap energi kinetik  $K_e$  yang diperoleh elektron dalam proses hamburan ini. Energi dari sinar-X yang terhambur diukur dengan sebuah detektor yang dapat berputar pada berbagai sudut  $\theta$ .

#### Contoh 2.4

Sinar–X dengan panjang gelombang 0,2400 nm dihamburkan secara Compton dan berkas hamburnya diamati pada sudut  $60,0^0$  relatif terhadap arah berkas datang. Carilah: (a) panjang gelombang sinar – X hambur, (b) energi foton sinar – X hambur, (c) energi kinetik elektron hambur, dan (d) arah gerak elektron hambur.

#### Penyelesaian:

(a)  $\lambda$ ' dapat dicari secara langsung dari Persamaan (2.15):

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

$$= 0.2400 \ nm + (0.00243 \ nm) (1 - \cos 60^\circ)$$

$$= 0.2412 \ nm$$

(b) Energi E 'dapat diperoleh langsung dari  $\lambda$  ':

$$E' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{1240 \ eV \cdot nm}{0.2412 \ nm} = 5141 \ eV$$

(c) Dari Persamaan (2.11a) bagi kekekalan energi, diperoleh

$$E_e = (E - E') + m_e c^2 = K_e + m_e c^2$$

$$K_e = E - E'$$

Energi E dari foton awal adalah :  $\frac{hc}{\lambda} = 5167 \ eV$ , jadi

Dengan P sebagai momentum dan E sebagai energi. Sekalipun hubungan ini ditemukan dalam teori elektromagnetik klasik, namun dapat pula diberlakukan untuk kuanta elektromagnetik.

Untuk memperlihatkan hal ini, kita misalkan foton menjalar kearah sumbu X positif di dalam suatu kerangka acuan. Dengan menganggap foton sebagi partikel maka energi yang dibawa oleh foton tersebut adalah  $E = \hbar \ v$  dan momentumnya adalah P yang belum diketahui. Kita misalkan pula bahwa pada suatu kerangka yang lain berlaku hal yang serupa dan kerangka yang kedua ini bergerak dengan kecepatan v terhadap kerangka yang pertama kearah sumbu X positif. Seorang pengamat pada kerangka kedua akan melihat sebuah foton yang frekuensinya v' membawa energi  $E' = \hbar \ v$ ' dengan momentum p'. Oleh karena c > v, maka foton pada kerangka kedua akan menjalar kearah sumbu X' positif.

Dari mekanika dasar diketahui bahwa hubungan antar *v* dan *v*' dapat di tulis sebagai berikut.

$$v' = v \left[ (c - v) / (c + v) \right]^{1/2}$$
 2.17

Hubungan kedua ialah hukum transformasi relativitas untuk energi dan momentum sebuah partikel yang diberikan oleh:

$$E' = \frac{\text{E-vp}}{\left[1 - \left(\frac{\text{v}}{\text{c}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$
 2.18

digunakan  $E = \hbar v$  dan  $E' = \hbar v'$  untuk menghapuskan E dan E' dari persamaan 2.18, maka diperoleh :

$$\hbar v' = \frac{\hbar v - \mathrm{vp}}{\left[1 - \left(\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$
 2.19

Untuk meniadakan v' dari persamaan (2.19) digunakan (2.17) yang menghasilkan :

$$\hbar v [(c-v)/(c+v)]^{1/2} = (\hbar v - vp)/(1 - (v/c)^2)^{1/2}$$
 2.20

dengan menyelesaikan persamaan (2.20) akhirnya didapat :

$$P = W 2.24$$

Dengan W sebagai rapat energi medan pancaran disekitar permukaan cermin

Misalkan  $\Phi$  adalah fluks energi yang menyatakan banyaknya energi yang mengalir menuju cermin persatuan waktu melalui satu satuan luas tegak lurus tehadap arah pancaran. Jika  $\Phi$ ' menyatakan fluks energi pantulan maka:  $\Phi = \Phi$ '. Rapat energi medan pancaran W dapat dinyatakan:

$$W = \Phi/c + \Phi' / c = 2/c$$
 2.25

Akhirnya, fluks energi dan tekanan pancaran dihubungkan oleh persamaan:

$$P = 2 \Phi/c$$
 2.26

Yang didapat dengan menggabungkan (2.24) dan (2.25)

Sekarang mari kita tinjau situasi di atas dari sudut pandang teori kuantum. Misalkan ada N foton persatuan waktu melalui satu satuan luas menuju cermin. Tiap foton membawa energi  $E = \hbar v$  dan momentum  $p = \hbar v/c$ . Sesudah bertumbukan dengan cermin, atau momentum tiap foton menjadi sebaliknya, sehingga momentum sebesar 2p diberikan kepada cermin oleh masing-masing foton.

Tekanan P besarnya sama dengan momentum yang diberikan persatuan waktu kepada setiap satu satuan luas cermin dan menyatakan dengan

$$P = 2N \hbar v/c$$
 2.27

Fluks energi dinyatakan dengan :  $\Phi = N \hbar v$  2.28

Oleh karena tiap foton bergerak dengan kecepatan c maka rapat energi dapat ditulis:

$$W = 2N \hbar w/c$$
 2.29

Dari persamaan (2.27), (2.28), dan (2.29), dapat diturunkan persamaan (2.24), dan (2.26). Ini menunjukan bahwa sifat partikel foton konsisten dengan teori elektromagnetika klasik.

Tinjau sebuah sumber cahaya di dalam labolatorium yang memancarkan cahaya foton dengan frekuensi w. Foton ini dijatuhkan tegak lurus pada sebuah cermin yang

melihat cahaya yang di pantulkan oleh cermin tersebut seolah-olah berasal dari sebuah sumber di belakang cermin, yakni bayangan sumber cahaya itu. Bayangan cermin ini bergerak dengan kecepatan v terhadap pengamat. Oleh kerena v cukup kecil, penjumlahannya tidak perlu menggunakan teori relativitas sehingga bayangan sumber cahaya akan bergerak menjauhi pengamat dengan kecepatan 2 v (Gambar 2.11). Berdasarkan efek Doppler, frekuensi cahaya yang terpantul adalah:

$$v' = v (1-2 \text{ v/c})$$

yang sesuai dengan persamaan (2.36). Sekali lagi terlihat bahwa hasil yang diperoleh dari penjabaran menurut teori kuantum sesuai dengan penjabaran melalui teori elektromagnetika klasik.

#### 2.5 Spektroskopi Atom Hidrogen

#### Johann Balmer (1885):

Eksperimen menunjukkan bahwa panjang gelombang semua garis spektrum atom hidrogen bisa diungkapkan dengan rumus empiris:

$$\frac{1}{\lambda_n} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

dengan  $R = 1.097 \times 107$  m<sup>-1</sup> disebut konstanta Rydberg.

Balmer dan Ritz: mengemukakan rumus yang lebih umum,

$$\frac{1}{\lambda_n} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right); \quad n > m$$

Dengan rumusan empiris ini, Lyman menemukan deret ultraviolet untuk m=1, n= 2, 3, ...

Kemudian Paschen menemukan deret inframerah untuk m=3, n=4, 5, 6, ...

#### **Ernest Rutherford (1911):**

Berdasarkan percobaan hamburan partikel- $\alpha$ , menyarankan struktur atom terdiri dari inti bermuatan positif dan elektron- elektron yang mengitarinya. Sayangnya, teori fisika pada masa itu tak mampu menjelaskan hasil penemuan Rutherford dalam kaitannya dengan rumusan Balmer-Ritz di atas.

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{8\pi \varepsilon_a} = \frac{e^2}{r}$$
 2.38

Energi potensial sistem elektron-inti adalah energi potensial Coulomb:

$$V = -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \,\frac{e^2}{r} \tag{2.39}$$

Dengan demikian, energi total sistem adalah:

$$E = K + V = \frac{1}{8\pi \,\varepsilon_0} \, \frac{e^2}{r} - \frac{1}{4\pi \,\varepsilon_0} \, \frac{e^2}{r}$$

$$E = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r}$$
 2.40

Sejauh ini kita telah mengabaikan salah satu kesulitan utama yang berhubungan dengan model ini. Fisika klasik meramalkan bahwa sebuah muatan listrik yang mengalami percepatan, seperti elektron yang mengorbit dalam model ini, harus meradiasikan energi elektromagnetik secara kontinu. Ketika energi ini dipancarkan, energi totalnya menurun, dan elektron akan berspiral menuju inti atom sehingga inti atom akhirnya runtuh. Untuk mengatasi kesulitan ini, Bohr mengusulkan gagasan keadaan "mantap stasioner" yaitu keadaan gerak tertentu dalam mana elektron tidak meradiasi-kan energi elektromagnet. Dari sini Bohr menyimpulkan bahwa dalam keadaan ini momentum sudut orbital elektron bernilai kelipatan bulat dari ħ.

Vektor momentum sudut dalam fisika klasik didefinisikan sebagai  $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ . Untuk momentum sudut elektron yang beredar mengelilingi inti atom,  $\mathbf{r}$  tegak lurus  $\mathbf{p}$ , sehingga kita dapat menyederhanakannya menjadi : l = r p = m v r. Jadi postulat Bohr adalah

$$m v r = n \hbar$$
 2.41

di mana n adalah sebuah bilangan bulat (n = 1, 2, 3, ...). Dengan menggunakan pernyataan ini dan hubungan (1.31) bagi energi kinetik,

$$n = \infty$$
 $n = 4$ 
 $E = 0$ 
 $E = -0.8 \text{ eV}$ 
 $E = -1.5 \text{ eV}$ 
 $E = -3.4 \text{ eV}$ 

$$n = 1$$
  $E = -13,6$ 

Gambar 2.10. Tingkat-tingkat energi atom

Semua tingkat energi ini ditunjukkan secara skematis pada Gambar 2.10. Jadi energi elektron terkuantisasikan artinya, hanya nilai-nilai energi tertentu yang diperkenankan, seperti yang diperlihatkan pada Gambar 2.10.

Pada tingkat terendahnya, dengan n=1, elektron memiliki energi  $E_1=-13.6$  eV dan beredar dengan jari-jari edar sebesar 0,0529 nm. Ini adalah keadaan dasar. Semua keadaan yang lebih tinggi (n=2 dengan  $E_2=-3.4$  eV, n=3 dengan  $E_3=-1.5$  eV, dan seterusnya) adalah keadaan eksitasi.

Apabila elektron dan inti atom terpisah jauh sekali, yaitu untuk  $n = \infty$ , maka kita peroleh E = 0. Jadi kita dapat memulai dengan elektron dan inti atom yang berjarak pisah takhingga dan kemudian elektronnya kita dekatkan ke inti hingga ia berada pada garis edar dalam suatu keadaan tertentu n. Karena keadaan ini memiliki energi yang lebih kecil daripada energi awal E = 0, maka kita "peroleh" tambahan jumlah energi sebesar  $E_n$ . Sebaliknya, jika memiliki sebuah elektron dalam keadaan n, maka elektronnya dapat kita bebaskan dari "intinya" dengan memasok energi sebesar  $E_n$ . Energi ini dikenal sebagai energi ikat keadaan n. jika energi yang kita pasok pada elektron itu melebihi  $E_n$ , maka kelebihan energi ini akan muncul sebagai energi kinetik elektron yang kini bebas.

$$hv = E_{n1} - E_{n2} 2.47$$

atau

$$\upsilon = \frac{me^4}{64 \ \pi^3 \ \varepsilon_o^2 \ \hbar^3} \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$
 2.48

Jadi panjang gelombang radiasi yang dipancarkan adalah

$$\lambda = \frac{c}{\upsilon} = \frac{64 \ \pi^3 \ \varepsilon_o^2 \ \hbar^3 \ c}{m e^4} \left( \frac{n_1^2 \ n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \right)$$

$$=\frac{1}{R_{\infty}} \left( \frac{n_1^2 \ n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \right) \tag{2.49}$$

Tetapan  $R_{\infty}$ , yang dikenal sebagai *tetapan Rydberg*, bernilai 1,0973731 x 10<sup>-7</sup> m<sup>-1</sup>.

## Contoh 2.6

Carilah panjang gelombang transisi dari  $n_1 = 3$  ke  $n_2 = 2$  dan dari  $n_1 = 4$  ke  $n_2 = 2$ .

#### Penyelesaian:

$$\lambda = \frac{1}{1,0973731 \times 10^{-7}} \left( \frac{3^2 \ 2^2}{3^2 - 2^2} \right) = 656,1 \ nm$$

dan

$$\lambda = \frac{1}{1,0973731 \times 10^{-7}} \left( \frac{4^2 \ 2^2}{4^2 - 2^2} \right) = 486,0 \ nm$$

Hasil dari kedua contoh di atas dekat sekali dengan kedua panjang gelombang terpanjang deret Balmer. Jika kita menghitung panjang gelombang untuk berbagai transisi dari  $n_1$  ke  $n_2 = 2$ , diperoleh

$$\lambda = \left(364,5 \ nm\right) \left(\frac{n_1^2}{n_1^2 - 4}\right)$$

dengan demikian

$$\begin{split} \upsilon_{n3 \to n2} + \upsilon_{n2 \to n1} &= c \, R_{\infty} \left( \frac{1}{n_3^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) + \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \\ &= c \, R_{\infty} \left( \frac{1}{n_3^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \end{split}$$

Tetapi ini tidak lain daripada frekuensi sebuah foton yang dipancarkan dalam transisi langsung dari  $n_3$  ke  $n_1$ , jadi

$$U_{n3 \to n2} + U_{n2 \to n1} = U_{n3 \to n1}$$

Dengan demikian, model Bohr taat azas kepada azas gabung Ritz (karena frekuensi sebuah foton yang dipancarkan berhubungan dengan energinya melalui hubungan  $E = h \upsilon$ , maka penjumlahan frekuensi di atas sama dengan penjumlahan energi. Dengan demikian, kita dapat menyatakan kembali azas gabung Ritz dalam ungkapan energi. Energi sebuah foton yang dipancarkan dalam transisi dari suatu tingkat ke tingkat lain dengan melewati satu atau beberapa tingkat antara adalah sama dengan jumlah energi transisi bertahap dari masing-masing tingkat berurutan).

Dengan meninjau ulang penurunan teori Bohr, kita dapatkan bahwa muatan inti atom hanya muncul pada satu tempat yaitu dalam pernyataan bagi gaya elektrostatik antara inti atom dan elektron, Persamaan (1.30). Jika muatan inti atom adalah Ze, gaya Coulomb yang bekerja pada elektron adalah

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Ze^2}{r^2}$$
 2.51

Jadi, faktor  $e^2$  semula, kini diganti dengan  $Ze^2$ . Dengan melakukan penyisipan ini pada hasil akhir, diperoleh bahwa jari-jari edar yang diperkenankan adalah:

$$r_n = \frac{4\pi \varepsilon_o \hbar^2}{Z m e^2} n^2 = \frac{a_o n^2}{Z}$$
 2.52

dan energinya menjadi

## BAB III GELOMBANG MATERI DAN ASAS KETIDAKPASTIAN HEISENBERG

Setelah mempelajari buku ini anda diharapkan memiliki kemampuan untuk dapat:

- 1. Menjelaskan Postulat de Broglie
- 2. Menjelaskan eksistensi gelombang materi
- 3. Menjelaskan Percobaan Davisson & Germer
- 4. Menjelaskan Persamaan Gelombang (Beiser 91 98)
- 5. Menjelaskan penafsiran fungsi gelombang
- 6. Menjelaskan prinsip ketidakpastian
- 7. Menjelaskan Asas Ketidakpastian Heisenberg

#### 3.1 Pendahuluan

Jika gelombang elektromagnetik memiliki sifat partikel seperti yang telah diperlihatkan dalam berbagai gejala, seperti efek fotolistrik dan efek Compton maka mungkinkah sebuah partikel atau materi yang memiliki massa diam juga memiliki sifat gelombang? Pertanyaan ini telah dijawab oleh de Broglie dalam disertasinya tahun 1924 pada "Fakulty of science, University of Paris". Menurut de Broglie materi yang memiliki sifat gelombang, seperti halnya foton yang diasosiasikan dengan gelombang elektromagnetik, karena alam semesta ini seluruhnya terdiri dari materi dan radiasi, maka alam ini simetris sifatnya.

Pada tahun 1926 Elsasser menunjukkan bahwa sifat-sifat gelombang materi sesungguhnya dapat diteliti seperti halnya pada waktu menyelidiki sifat gelombang sinar X. Pekerjaan ini dapat dilakukan dengan menjatuhkan berkas elektron pada sebuah kristal. Atom-atom kristal berlaku sebagai kisi bagi gelombang elektron, sehingga elektron akan terhambur ke arah tertentu seperti halnya dengan terjadinya difraksi sinar X. Ide ini kemudian dilaksanakan oleh Davisson dan Germer melalui sebuah eksperimennya pada tahun 1927.

Selanjutnya untuk mempelajari gelombang materi, sifat gelombang klasik lebih dahulu perlu ditelaah. Pengertian tentang fungsi gelombang, persamaan gelombang,

## 3.2 Postulat de Broglie

Keseluruhan entitas fisis di alam semesta ini dapat dikelompokkan dalam dua golongan besar, yaitu partikel dan gelombang. Kedua golongan entitas itu dapat dikenal secara mudah berdasarkan kehadirannya: partikel bersifat terlokalisir sedangkan gelombang bersifat menyebar. Perbedaan kedua golongan entitas itu juga dapat dikenali dari gejala interferensi. Sebagaimana diketahui, gejala interferensi hanya dapat ditunjukkan oleh gelombang. Jadi, jika suatu entitas dapat menunjukkan gejala interferensi maka dapat dipastikan bahwa entitas tersebut tergolong gelombang. Sebaliknya, jika satu entitas tidak dapat menunjukkan gejala interferensi maka entitas tersebut tergolong partikel.

Sebelum teori efek fotolistrik berhasil dirumuskan, orang berkeyakinan bahwa sekali suatu entitas dikenali sebagai gelombang, selamanya ia tetap sebagai gelombang. Sebaliknya, sekali suatu entitas dikenali sebagai partikel selamanya ia tetap sebagai partikel. Keyakinan itu tidak lagi dapat dipertahankan sejak berhasilnya perumusan teoritis efek fotolistrik. Sebagaimana telah kita pelajari, bahwa cahaya yang semula diyakini sebagai gelombang ternyata pada saat tertentu juga dapat berperilaku sebagai partikel. Kenyataan itu mengisyaratkan perlunya meninjau kembali penggolongan secara diketomis"partikel lawan gelombang". Sebab, tampaknya alam tidak secara tegas membagi penghuninya ke dalam dua golongan besar itu.

Jika benar bahwa alam tidak terbagi atas partikel dan gelombang yang menjadi pertanyaan berikutnya adalah apakah partikel itu sebenarnya hanyalah salah satu sifat yang sedang ditonjolkan oleh suatu entitas pada saat tertentu saja, artinya pada saat yang lain sebanarnya ia juga menunjukkan sifat gelombang (tetapi kita dapat mengenalinya)? Untuk foton, pertanyaan ini telah kita temukan jawabannya; yaitu ya. Bagaimana dengan partikel lainya?

Pada tahun 1924, Louis de Broglie, seorang filsof Perancis, mengajukan hipotesis bahwa sifat ganda yang dimiliki cahaya (gelombang elektromagnet pada umumnya) juga dimiliki oleh partikel material. Artinya partikel material jug adapt menunjukkan sifat gelombang sebagaimana ditunjukkan oleh foton. Menurut de Broglie, terhadap setiap partikel yang berenergi E dan bergerak dengan momentum linear p terdapat gelombang

seperti ini pulalah yang menuntun Young (1801) dalam menyelidiki apakah cahaya sebagai gelombang atau bukan.

Efek difraksi hanya dapat diamati jika peralatan yang digunakan memiliki ukuran karakteristik (aperatur) seorde atau kurang dari panjang gelombang. Sebagai contoh bagi aperture adalah luas lensa, lebar celah, dan tetapan kisi sebagaimana telah dikenal dalam optika.

Jika a dan berurutan menyatakan ukuran aperatur dan panjang gelombang, maka efek difraksi hanya dapat diamati jika. Jikasangat kecil ( $\ll$  1) maka efek difraksi tidak dapat diamati. Dalam optika, jika maka kita berada pada wilayah optika fisik. Sebaliknya jika kita berada pada wilayah optika geometri. Sebagaimana kita ketahui dalam optika geometri cahaya cukup digambarkan sebagai sinar yang arahnya sama dengan arah rambat cahaya. Dalam hal ini kita tidak perlu mengetahui secara persis apa demikian, dalam optiak geometri sebenarnya kita telah mengindentikkan cahaya sebagai partikel: arah sinar identik dengan trayektori partikel. Jika sinar menjumpai bidang pantul maka akan dipantulakan pada arah tertentu persis seperti trayektori bola tenis yang dipantulkan lantai.

Mengingat kecilnya nilai tetapan Planck (*pada orde* 10<sup>-34</sup>) maka panjang gelombang de Broglie pada umumnya juga sangat pendek. Oleh karena itu diperlukan aperture yang sangat kecil untuk menyelidiki munculnya sifat gelombang materi tersebut. Apertur terkecil yang dapat dibuat dewasa ini memiliki ukuran sekitar 1Å (yaitu jarak rata-rata antar bidang atom pada Kristal).

Marilah kita hitung berapa orde panjang gelombang de Broglie untuk beberapa partikel tertentu. Sebelumnya perlu kita ingat bahwa untuk menghasilkan panjang gelombang yang cukup besar maka momentum linear partikel yang bersangkutan haruslah kecil. Jadi, baik massa maupun kecepatannya harus cukup kecil.

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{3 \ m \ K_b T}}$$

$$\lambda = \frac{6.6 \times 10^{-34}}{\sqrt{3 \times 1.67 \times 10^{-27} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300}} \approx 1.4 \text{ Å}.$$

Ternyata panjang gelombangnya seorde dengan ukuran aperture terkecil teoritik, yaitu jarak antar bidang atom dalam Kristal. Dengan demikian, neutron termal tersebut memiliki kemungkinan untuk menunjukkan sifat gelombangnya.

#### Contoh 3.3

Hitunglah gelombang de Broglie untuk elektron yang memiliki energi kinetik 100 eV. Massa elektron  $9.1 \times 10^{-31}$ kg.

#### **Analisis**

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 m E_K}}$$

$$\lambda = \frac{6.6 \times 10^{-34} J. s}{\sqrt{2 \times 9.1 \times 10^{-31} kg \times 100 \ ev \times 1.6 \times 10^{-19} J/eV}} \approx 1.2 \text{Å}$$

Ternyata panjang gelombangnya lebih dari ukuran apertur terkecil teoretik, yaitu jarak antar bidang atom kristal. Dengan demikian, elektron yang berenergi 100 eV tersebut sangat mungkin untuk dapat menunjukkan sifatnya sebagai gelombang.

## 3.4 Percobaan Davisson & Germer

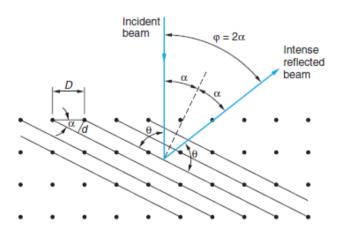
Pengukuran panjang gelombang elektron pertama kali dilakukan oleh Davisson dan Germer pada tahun 1927. Gambar 3.1 memperlihatkan skema eksperimen yang dilakukan mereka.

-----

Adanya intensitas maksimum pada hamburan elektron ini memperlihatkan kebenaran postulat de Broglie karena kejadian tersebut hanya dapat diterangkan dengan menganggap bahwa terjadi suatu interferensi gelombang—gelombang yang dihamburkan oleh atom-atom dalam kristal. Interferensi semacam ini telah dicobakan oleh Bragg dengan menggunakan sinar X. Interferensi yang terjadi bukan antara gelombang yang diasosiasikan dengan sebuah elektron dan gelombang yang diasosiasikan dengan elektron lainnya, melainkan interferensi antara bagian-bagian gelombang yang berbeda yang diasosiasikan dengan sebuah elektron yang telah dihamburkan dari berbagai tempat dalam kristal. Hal ini dapat diamati dengan jalan menggunakan berkas elektron yang intensitasnya rendah sehingga elektron-elektron yang masuk ke dalam peralatan eksperimen ini masuknya tidak bersamaaan melainkan satu demi satu.

Menurut Bragg, untuk terjadinya interferensi harus dipenuhi syarat (Gambar 3.3):

$$n\lambda = 2 d\sin \varphi 3.3$$



Gambar 3.3. Hamburan Bragg

Menurut persamaan 3.3. Panjang gelombang dapat dihitung dengan mengambil n = 1 (hamburan dengan intensitas yang paling besar).

$$\lambda = 2 \text{ d sin} \varphi = 2 \times 0.91 \text{ Å x sin } 65^{\circ} = 1.65 \text{ Å}$$

Panjang gelombang de Broglie untuk V=54 volt dihitung dengan persamaan  $\lambda=h$  / p yaitu sebagai berikut

Fisika Kuantum, 2014

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$
 3.5

Untuk mendapatkan frekuensinya, kita menyamakan pernyataan Kuantum, E = hv dengan rumus relativistik untuk energi total  $E = mc^2$  untuk mendapatkan

$$hv = mc^2$$

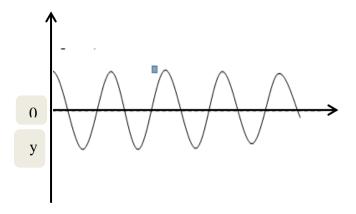
$$v = \frac{mc^2}{h}$$
3.7

Sehingga kecepatan gelombang de Broglie

$$w = v\lambda = \frac{mc^2}{h} \cdot \frac{h}{mv} = \frac{c^2}{v}$$
 3.8

Karena kecepatan partikel v harus lebih kecil dari kecepatan cahaya c, maka kecepatan gelombang de Broglie w selalu lebih besar dari c! Supaya kita bisa mengerti hasil yang tidak terduga ini, kita harus membedakan antara kecepatan fase dan kecepatan kelompok (group) (kecepatan fase kadang-kadang disebut kecepatan gelombang).

Mari kita mulai dengan meninjau kembali bagaimana gelombang secara matematis. Untuk jelasnya kita tinjau tali yang direntangkan sepanjang sumbu x yang getarannya terjadi dalam arah y seperti pada gambar 3.4 dan sifat harmonik (selaras) sederhana.



Gambar 3.4 Sifat harmonik (selaras) sederhana

energi radiasi ini kita telah berhasil memadukan dualisme gelombang partikel untuk radiasi.

Kesimpulan tersebut selanjutnya dipostulatkan dan berlaku untuk gelombang materi. Jika gelombang materi diungkapkan sebagi fungsi gelombang  $\Psi$  (r,t) yang dapat berupa fungsi kompleks variabel real r dan t, maka .

 $\Psi$  (r, t) adalah suatu fungsi yang kuadrat modulusnya,  $|\Psi(r, t)|^2$ , sebanding dengan rapat peluang (per satuan volume) untuk mendapatkan partikel di titik r pada saat t

Penafsiran probabilistik terhadap fungsi gelombang seperti itu pertama kali diajukan oleh Max Born pada tahun 1926. Oleh sebab itu, ungkapan tersebut dikenal sebagai penafsiran Born tentang fungsi gelombang.

Selanjutnya,  $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$  didefinisikan sebagai rapat peluang kehadiran partikel pada saat dititik t, dan biasanya dilambangkan  $\xi(\mathbf{r}, t)$ . Artinya.

$$\xi(r, t)d^{3}r \equiv |\Psi(r, t)|^{2}d^{3}r = \Psi^{*}(r, t) \Psi(r, t)d^{3}r,$$
 3.12

Menyatakan besarnya peluang pada saat t partikel berada di dalam unsur volume  $d^2r \equiv dx$  dy dz disekitar titik r.

Jika partikel yang dibicarakan benar-benar ada, maka pelacakan partikel keseluruh ruang pasti dapat menemukannya. Ini berarti bahwa peluang total mendapatkan partikel haruslah 1. Jadi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(r,t)d^3r = 1 \tag{3.13}$$

Persamaan (3.13) membawa konsekuensi bahwa integral  $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$  ke seluruh ruang harus berhingga. Dengan kata lain,  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  harus merupakan fungsi yang kuadrat modulusnya dapat diintegralkan dalam arti :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{t})|^2 d^3 \mathbf{r} = N < \infty \text{ (Berhingga)}$$
 3.14

Fungsi-fungsi seperti itu dikatakan bersifat *square integrable* (SI). Jika N=1, dikatakan fungsi gelombang tersebut ternormalkan (ternormalisasi).

$$\Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a} \sin \frac{2\pi x}{a}}; & 0 \le x \le a \\ 0 & ; x < 0 \text{ at au } x \ge a \end{cases}$$

- (a) Dapatkan fungsi rapat peluang posisi partikel pada t = 0!
- (b) Di mana partikel paling mungkin berada?
- (c) Berapa peluang partikel berada di  $x \le 0$ ?
- (d) Berapa peluang partikel berada di  $x \ge a$ ?
- (e) Berapa peluang partikel berada dalam interval [0,a]?
- (f) Berapa peluang partikel berada di  $x \le a$ ?

#### **Analisis**

(a) 
$$\xi(x) = \Psi^*(x)\Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}\sin\frac{2\pi x}{a}}; & 0 \le x \le a \\ 0 & ; x < 0 \text{ at au } x \ge a \end{cases}$$

- (b) Berdasarkan jawaban (a),  $\xi$  (x) paling besar di x =1/4 a dan x =  $\frac{3}{4}$ . Jadi partikel paling mungkin di x =  $\frac{1}{4}$  a dan di x =  $\frac{3}{4}$  a.
- (c) Peluang partikel berada di  $x \le 0$  adalah nol, sebab menurut hasil (a), untuk  $x \le a$  maka  $\xi(x \le 0) = 0$ .
- (d) Peluang partikel berada di  $x \ge a$  adalah nol, sebab menurut hasil (a), untuk  $x \ge a$  maka  $\xi(x \ge a) = 0$ .
- (e) Fungsi gelombang tersebut telah ternomalkan, sebab;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(x) dx = \int_{-\infty}^{0} \xi(x) dx + \int_{0}^{a} \frac{2}{a} \sin^{2} \frac{2\pi x}{a^{2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0 dx + \int_{0}^{a} \frac{2}{a} \sin^{2} \frac{2\pi x}{a^{2}} dx + \int_{a}^{\infty} 0 dx$$

$$= 0 + \frac{2}{a} \int_{0}^{a} \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{4\pi x}{a} \right) dx + 0 = \frac{2}{a} \times \frac{a}{2} = 1$$

Dengan demikian, untuk menghitung peluang ini kita gunakan persamaan (3. 17) tanpa perlu membagi dengan integral  $\rho(x)$ ke seluruh ruang. Berdasarkan persamaan (3. 17), peluang partikel berada dalam interval [0,a] adalah

$$\xi(0 \le x \le a) = \int_0^a \rho(x) dx \int_0^a \frac{2}{a} \sin^2 \frac{2\pi x}{a^2} dx$$

dan

$$\tilde{\psi}(p,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(p,0) e^{i px/\hbar} dx.$$
(3.22)

Kedua persamaan tadi diperoleh dengan analogi persamaan (3.19) dan (3.20) serta menggunakan rumusan de Broglie p= ħ k.

Karena kedua fungsi  $\psi$  (x,0) dan  $\tilde{\psi}(p,0)$  tersebut merupakan pasangan Fourier maka keduanya secara fisik sama.  $\Psi$  (x,0) adalah wujud fungsi gelombang jika disajikan dalam ruang koordinat, sedangkan  $\tilde{\psi}(p,0)$  adalah wujud fungsi gelombang jika disajikan dalam ruang momentum.

Selaras dengan penafsiran Born untuk  $\psi(x,t)$ , maka penafsiran Born untuk  $\tilde{\psi}(p,0)$  dirumuskan sebagai berikut.

• Rapat peluang pada saat t partikel memiliki momentum p:

$$\tilde{\xi}(p,t) = |\tilde{\psi}(p,t)|^2 \equiv \tilde{\psi} * (p,t)\tilde{\psi}(p,t). \tag{3.23}$$

Peluang pada saat t partikel memiliki momentum antara p sampai p + dp:

$$\tilde{\xi}(p,t)dp = |\tilde{\psi}(p,t)|^2 \equiv \tilde{\psi} * (p,t)\tilde{\psi}(p,t)dp$$
(3.24)

Peluang pada saat t partikel memiliki momentum antara p<sub>1</sub> dan p<sub>2</sub>:

$$\int_{p_2}^{p_1} \tilde{\xi}(p,t) dp = \int_{p_2}^{p_1} \tilde{\psi}^*(p,t) \tilde{\psi}(p,t) dp.$$
 (3.25)

 Peluang pada saat t partikel memiliki sebarang momentum dari -∞ sampai +∞ sebesar 1, jadi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}(p,t) dp = \tilde{\psi}^*(p,t) \tilde{\psi}(p,t) dp = 1$$
 (3.26)

Rumusan (3.23) sampai (3.26) didasarkan atas asumsi bahwa fungsi gelombang  $\tilde{\psi}(p,t)$ ternormalkan. Jika  $\tilde{\psi}(p,t)$  belum ternormalkan, maka persamaan tersebut harus dibagi dengan  $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(p,t) dp$ .

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda k r^2} e^{ikrx} e^{ikox} dk'$$

$$\psi(x) = e^{ikox} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda k r^2} e^{ikrx} dk'$$

$$\psi(x) = e^{ikox} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda(k' - (ix/2))^2} e^{-(\lambda^2/4a)} dk'$$

Misalkan q = k' - ix/2a

$$: da = dk'$$

$$\psi(x) = e^{ikox}e^{-\lambda^2/4a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda q^2} dq$$

Dalam matematika :  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\Pi/\lambda}$  (Integral probabilitas Gauss). Dengan demikian maka

$$\psi(x) = \sqrt{\Pi/\lambda}e^{ikox}e^{-\lambda^2/4a}$$
3.29

 $e^{ikox}$  disebut sebagai faktor fase. Karena  $(e^{ikox})^2 = 1$ 

$$|\psi(x)|^2 = \frac{\Pi}{\lambda} e^{-\lambda^2/2a}$$
3.30

Apabila  $\lambda$  sangat kecil, maka fungsi ini akan memperlihatkan adanya sebuah puncak yang sangat tajam pada x=0, dengan lebar  $\Delta X=2\sqrt{2}$   $\lambda$ , sebab apabila  $x=+-\sqrt{2}\lambda$ , fungsinya turun sampai 1/e dari harga maksimum. Bila fungsi g(k) dikuadratkan maka diperoleh sebuah fungsi dengan puncak pada k=00 dengan lebar  $\Delta k=0$ 1. Perkalian antara kedua lebar ini menghasilkan :

$$\Delta X. \, \Delta K = \frac{2}{\sqrt{2\lambda}} \, x \, 2\sqrt{2\lambda} = 4$$
 3.31

Bilangan tetapan 4 pada persamaan 3.31 sebanarnya tidak penting, yang jelas bahwa  $\Delta X.\Delta K$  tidak bergantung pada  $\lambda$ . Persamaan ini dapat dinyatakan sebagai

$$\Delta X.\Delta K > 1$$
 3.32

dimana  $\Delta x.\Delta k$  adalah lebar dari dua distribusi. Bilangan 1 tetap berarti sebuahangka yang sebenarnya bergantung pada fungsi yang ditinjau akan tetapi tidak boleh lebih kecil

$$\Delta x = \lambda / \sin \theta \qquad 3.34$$

dimana  $\lambda$  menyatakan panjang gelombang foton. Menurut teori kuantum, foton yang bertumbukan dengan elektron akan dihamburkan. Momentumnya berubah, oleh karena sebagian diberikan kepada elektron sedemikian sehingga hukum kekekalan momentum tidak dilanggar. Akan tetapi sudut masuk foton tidak diketahui sehingga ketidakpastian momentum elektron adalah:

$$\Delta P_x = 2 \text{ h f/c sin } \theta \qquad 3.35$$

Jika (3.34) dikalikan dengan (3.35) maka:

$$\Delta P_x \ \Delta_x \approx 2 \ h \ f/c \sin \theta \ (\lambda \sin \theta) \approx 4 \ \text{Th}$$
 3.36

Persamaan (3.36) memenuhi relasi Heisenberg (3.33). Jika kita mencoba mengukur momentum foton dan tentunya juga elektron demgan teliti, yakni dengan jalan mengamati arah masuk foton, frekuensi yang di gunakan sebaiknya kecil. Tetapi apabila cahaya yang digunakan frekuensinya kecil atau panjang gelombangnya panjang, kita akan mengalami kesulitan dalam menentukan lokasi elektron. Pada persamaan (3.34) terlihat bahwa makin panjang  $\lambda$ ,  $\Delta$ x makin besar. Supaya  $\Delta$ x kecil,  $\lambda$  harus pendek, dengan kata lain foton yang digunakan energinya harus cukup besar. akan tetapi apabila energi foton besar, impulsnya juga besar, sehingga efek Chompton banyak berpengaruh.

### (2) Hubungan ketidakpastian energi-waktu

Tinjau persamaan (3.33) :  $\Delta p \Delta x \ge \hbar$ 

Persamaan ini dapat ditulis:

$$(\rho \Delta \rho/m) (\Delta x m/\rho) \geq \hbar$$

$$(\rho \Delta \rho/m) = v \Delta m v = \Delta E$$

$$(\Delta x m/\rho) = \Delta x/v = \Delta t$$

Dari ketiga hubungan di atas diperoleh:

menganggap bahwa percobaan tersebut tetap mengikuti hukum-hukum fisika yang ada. Menurut Bohr:

- (i) Dalam melakukan penimbangan, seseorang harus membaca penunjuk skala yang semestinya memiliki ketelitian  $\Delta x$ . Hal ini akan menimbulkan ketidakpastian dalam momentum  $\Delta \rho \geq \hbar \Delta x$ .
- (ii) Dalam mengukur perubahan massa Δm, penimbangan memerlukan waktu T. Waktu yang digunakan cukup lama sehingga impuls yang berkenaan dengan perubahan massa tersebut, yakni gT Δm di mana g menyatakan percepatan gravitasi, lebih besar dari Δρ, jadi :

g T 
$$\Delta$$
m  $\gg\hbar/\Delta$ x 3.38

(iii) Berdasarkan prinsip ekivalensi perubahan dalam posisi vertikal Δx didalam nedan grativasi menyebabkan terjadinya perubahan dalam waktu, yang diberikan oleh persamaan:

$$\Delta T/T = g \, \Delta x/c^2 \tag{3.39}$$

Jika persamaan (3.37) dan (3.38) dipadukan, maka diperoleh :

$$\Delta T/T \gg (g/c^2) (\hbar/gT \Delta m)$$
 3.40

$$\Delta m c^2 \Delta T/T \gg \hbar$$

Oleh karena 
$$\Delta m c^2 = \Delta E$$
, maka :  $\Delta m c^2 \Delta T = \Delta E \Delta T \gg \hbar$  3.41

Ternyata bahwa Relasi Heisenberg – waktu yang tidak dilanggar.

## Catatan:

Dalam beberapa buku, prinsip ketidakpastian Heisenberg dinyatakan dengan:

$$\Delta x \ \Delta p \ge \frac{1}{2} \ \hbar$$

Ini berdasarkan kepada asumsi bahwa  $\Delta x$  dan  $\Delta p$  merupakan standar deviasi dari pengurangan x dan p. Dari teori gelombang diketahui bahwa jika  $\sigma x$  adalah standar deviasi pengukuran dan jarak dan  $\sigma k$  adalah standar deviasi pengukuran bilangan

elektron  $\Delta x$  sebesar 0,33 cm mempunyai orde sekitar  $10^7$  kali diameter sebuah atom sehingga relasi ini memang memegang peranan yang penting.

## 3.8 Asas Ketidakpastian Heisenberg

Salah satu asas yang dihasilkan fisika kuantum adalah asas ketakpastian Heisenberg. Asas ini menyatakan bahwa pengukuran serempak terhadap posisi dan momentum linear tidak mungkin dapat dilakukan dengan ketelitian mutlak. Ketelitian terbaik yang mungkin dicapai adalah  $\Delta x \Delta p = \hbar/2$  dengan  $\Delta x \, dan \, \Delta p$  berurutan menyatakan ketakpastian posisi dan ketakpastian momentum linear. Asas ketakpastian ini biasanya dinyatakan dengan ungkapan  $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ .

Pada bagian ini kita akan menelaah munculnya asas tersebut berdasarkan prinsip penafsiran Bohr tentang fungsi gelombang sebagaimana telah kita bicarakan sebelumnya. Melalui cara ini kita juga dapat menguji kecocokan (kesesuaian) antara penafsiran Born dan Asas Ketakpastian Heisenberg.

Berdasarkan penafsiran Born, dari fungsi gelombang (x, t) dapat didefinisikan fungsi rapat peluang kehadiran (posisi) partikel  $\Psi(x, t)$  dan dari fungsi gelombang (p, t) dapat didefiniskan fungsi rapat peluang momentum linear partikel (p, t). Dengan demikian, dari kedua fungsi rapat peluang tersebut dapat dihitung nilai harap  $(expectation\ value)$  posisi dan momentum linear beserta ketidakpastiannya. Prosedur perhitungannya dilakukan sebagai berikut.

Dari fungsi rapat peluang posisi, (x), dapat dihitung nilai harap posisi, dilambangkan <x>, dan variani posisi, dilambangkan  $\sigma_{x^2}$ , sebagai berikut.

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \, \xi(x) \, dx$$
 3.42

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x (x - \langle x \rangle)^2 \xi(x) dx$$
 3.43

Persamaan 3.43 dapat diubah menjadi

$$\sigma_{x^2} = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \,, \tag{3.44}$$

dengan

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \xi(x) dx$$
 3.45

Fungsi rapat peluang posisi partikel adalah

$$\xi(x) = \Psi^*(x). \Psi(x) = C^* C = konstan$$

Dengan fungsi rapat peluang tersebut diperoleh

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x C^* C \ dx}{\int_{-\infty}^{\infty} x C^* C \ dx} = 0$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 C^* C \ dx}{\int_{-\infty}^{\infty} x C^* C \ dx} = \infty,$$

Sehingga diperoleh ketakpastian posisi sebesar

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \infty$$

Fungsi gelombang dalam ruang momentum diperoleh sebagai berikut:

$$\widetilde{\Psi}(\rho) = \frac{C}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip_0x/\hbar} \, e^{-ipx/\hbar} dx = \frac{C}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p_0-p)x/\hbar} \, dx = C\delta(p-p_0).$$

Karena fungsi gelombang  $\widetilde{\Psi}(p)$  berupa "fungsi" delta Dirac maka  $\widetilde{\rho}(\rho)$  juga merupakan "fungsi" delta Dirac. Akibatnya, berdasarkan sifat delta Dirac, diperoleh  $=p_0$ dan  $<p^2>=p_0$ . Dengan demikian diperoleh nilai  $\Delta p=0$ .

Hasil perhitungan tadi menunjukan bahwa jika momentum partikel dapat ditemukan secara pasti (ditunjukkan dengan  $\Delta p=0$ ) maka ketidakpastian posisi partikel menjadi tak berhongga besar.

## Contoh 3.7

Dapatkan nilai  $\Delta x \Delta p$  bagi osilator harmonis yang memiliki energi sebesar  $\frac{1}{2} \hbar \omega$ . Fungsi gelombang untuk menyajikan keadaan tersebut adalah  $\Psi(x) = C e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2}$  dengan  $\beta = \sqrt{m\omega/h}$  (ketergantungan ungsi gelombang terhadap waktu tidak diperhatikan)

#### Analisis

Dengan demikian fungsi rapat peluang momentum linear partikel adalah

$$\tilde{\xi}(\rho) = |C'|^2 e^{-p^2/(\beta^2 h^2)}$$
.

Dengan fungsi rapat peluang tersebut di peroleh

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |C'|^2 p e^{-p^2/\beta^2 h^2} dp}{\int_{-\infty}^{\infty} |C'|^2 e^{-p^2/\beta^2 h^2} dp} = 0,$$

dan

$$< p^{2} > = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |C'|^{2} p^{2} e^{\frac{-p^{2}}{\beta^{2} \hbar^{2}}} dp}{\int_{-\infty}^{\infty} |C'|^{2} e^{\frac{-p^{2}}{\beta^{2} \hbar^{2}}} dp} = \frac{\Gamma^{\frac{3}{2}}}{2 (\frac{1}{(\beta \hbar)})^{3}} : \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{2}{(\beta \hbar)}} = \frac{\beta^{2} \hbar^{2}}{2}$$

Sehingga diperoleh ketakpastian momentum linear sebesar

$$\Delta p = \sqrt{\langle p2 \rangle - \langle p \rangle 2} = \hbar \beta \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Berdasarkan nilsi $\Delta x$  dan $\Delta p$  tersebut diperolehnilai  $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$ .

Perhitungan tersebut menunjukan bahwa pengukuran serempak momentum linear dan posisi partikel yang berperilaku sebagai osilator harmonis yang berenergi  $\frac{1}{2}$  h $\omega$  akan menghasilkan kepastian sebesar  $\frac{h}{2}$ . Merujuk pada asas ketakpastian Heisenberg, maka nilai ketakpastian tersebut adalah yang terkecil.

Marilah kita cermati bentuk fungsi gelombang yang menghasilkan ketakpastian minimum ini, yaitu  $\Psi$  ( x ) = C  $e^{-\frac{1}{2}\beta x^2}$ . Fungsi gelombang ini merupakan salah satu contoh , atau anggota, dari kelompok fungsi yang disebut fungsi Gaussan. Bentuk umum fungsi Gaussan adalah f ( x ) =  $C e^{-a x^2}$  dengan mengambil sebarang bilangan positif.

Jika prosedur pada contoh 3.6 tadi diterapkan pada sebarang fungsi Gaussan maka akan didapatkan nilai  $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$ , berapa pun nilai tetapan a. Dengan demikian

dengan B suatu tetapan baru yang nilainya  $\frac{-i\,2\,A\,\beta}{\sqrt{2\pi\hbar}}$  . Dengan menggunakan rumus integral

$$\int_0^x ee^{-ax}\cos bx \ dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{-b^2}{4a}}$$

Integrasi tadi dapat kita selesaikan sebagai berikut.

$$\tilde{\psi}(P) = B\hbar \frac{d}{dp} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x^2} \cos(px/\hbar) dx$$

$$\tilde{\psi}(P) = B\hbar \frac{d}{dp} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-p^2/2\beta^2 \hbar^2} \right) = Cpe^{-p^2/2\beta^2 \hbar^2}$$

Dengan C sebagai suatu tetapan baru

Dengan demikian fungsi rapat peluang momentum partikel adalah

$$\tilde{\psi}(P) = C^2 p^2 e^{-p^2/2\beta^2 \hbar^2}$$

Dengan fungsi rapat peluang tersebut diperoleh

$$< p^{2} > = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |C'|^{2} p^{4} e^{\frac{-p^{2}}{\beta^{2}h^{2}}} dp}{\int_{-\infty}^{\infty} |C'|^{2} p^{2} e^{\frac{-p^{2}}{\beta^{2}h^{2}}} dp} = \frac{\Gamma \frac{5}{2}}{2 (\frac{1}{(\beta h)}))^{5}} : \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{(\beta h)^{3}} = \frac{3\beta^{2} h^{2}}{2}$$

Sehingga diperoleh ketakpastian momentum linear sebesar

$$\Delta p = \sqrt{\langle p2 \rangle - \langle p \rangle 2} = \hbar \beta \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Berdasarkan nilsi  $\Delta x$  dan  $\Delta p$  tersebut diperoleh nilai  $\Delta x \Delta p = 3\frac{\hbar}{2}$ 

Untuk konstanta C dan D diperlukan syarat batas, misalnya untuk fungsi di atas, pada x=0, dan x=L dengan L adalah panjang kawat. Andaikan, untuk x=0,  $\psi(0)=0$  maka D=0,

$$\psi(x) = C \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

Selanjutnya jika di x = L,  $\psi(L) = C \sin(2\pi L/\lambda) = 0$  maka  $\sin(2\pi L/\lambda) = 0$ , sehingga:

$$\frac{2L}{\lambda} = n; \quad n = 1, 2, \dots$$

n disebut nomor modus normal.

maka:

$$\psi_n(x) = C \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Akhirnya:

$$\psi_n(x,t) = B \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin(\omega t + \delta)$$

# 4.2 Persamaan Schrödinger

Schrodinger merumuskan teori gelombangnya (1925) dalam upaya untuk mendapat suatu teori komprehensip (menyatu) tentang mekanika tingkat atom. Sampai waktu itu teori mengenai fisika tingkat atom masih tersebar dalam berbagai hipotesa.

Persamaan gelombang Schrodinger merupakan seperangkat postulat tentang gerak partikel pada tingkat atom. Persamaan tersebut dikemukakan sebagai postulat, sehingga kebenarannya sebagai persamaan dasar mekanika tingkat atom masih harus ditunjukkan melalui pengamatan. Postulat Schrodinger sangat abstrak, dan karena itu memerlukan waktu untuk dapat diterapkan dalam kerangka berpikir seseorang yang mulai mempelajarinya.

Tinjaulah sebuah partikel yang memiliki massa m, bergerak dengan momentum p di dalam suatu medan konservatif. Menurut mekanika klasik, energi total partikel adalah jumlah energi kinetik dan potensial:

Persamaan Schrödinger di atas dapat dituliskan sebagai berikut

$$\widehat{H}\psi(x) = E\psi(x) \qquad (*)$$

Dengan

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$$

disebut hamiltonian partikel, yakni operator energi total dari partikel.

Dalam bahasa matematik, E adalah harga eigen dari operator H dengan fungsi eigen  $\psi(x)$ . Persamaan (\*) disebut persamaan harga eigen.

Turunan pertama terhadap waktu untuk fungsi gelombang  $\psi(x,t)$  adalah:

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -i\omega\psi(x,t)$$

Karena  $E = \hbar \omega$  maka diperoleh

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = E\psi(x,t) \longrightarrow \widehat{H}\psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$$

Ini disebut persamaan Schrödinger yang bergantung waktu bagi sebuah partikel .

Andaikan bahwa suatu partikel bergerak memenuhi  $\psi(x,t)=Ae^{i(kx-\omega t)}$ , maka momentum dan energi partikel itu dapat ditentukan:

$$P \psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \left( A e^{i(kx - \omega t)} \right)$$

$$= \hbar k A e^{i(kx - \omega t)}$$

$$= \hbar k \Psi(x,t)$$

$$E \psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left( A e^{i(kx - \omega t)} \right)$$

$$= \hbar k \Psi(x,t)$$

$$H_{op} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right]$$

Sehingga persamaan \* dapat dinyatakan dengan persamaan:

$$\phi(t) = e^{\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)}$$

Dengan demikian persamaan \*\* dapat dinyatakan sebagai:

$$H_{op}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

Dalam hal ini:  $E = \text{nilai eigen dengan operator } H_{op}$ 

 $\psi(\vec{r})$  = fungsi eigen dari operator  $H_{op}$ 

## 4.2.2 Persamaan Schrodinger Bergantung Waktu

Dalam mekanika kuantum fungsi gelombang  $\psi$  bersesuaian dengan variabel gelombang y dalam gerak gelombang umumnya. Namun  $\psi$  tidak seperti y, bukanlah suatu kuantitas yang dapat diukur, sehingga dapat berupa kuantitas kompleks. Karena itulah kita akan menganggap  $\psi$  dalam arah x dinyatakan oleh:

$$\psi = Ae^{-i\omega(t-x/V)}$$

Jika ganti  $\omega$  dengan  $2\pi v$  dan V dengan  $v\lambda$ , kita peroleh:

$$\psi = Ae^{-2\pi t(vt - x/\lambda)}$$

Yang bentuknya menguntungkan, karena kita telah mengetahui hubungan v dengan  $\lambda$  dinyatakan dalam energi total E dan momentum P dari partikel yang diberikan oleh  $\psi$ , selanjutnya karena E =hv =  $2\pi\hbar$  dan  $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{P}$ , maka kita peroleh:

$$\psi = Ae^{-i/\hbar(Et-px)}$$

Persamaan di atas merupakan pemberian matematis gelombang ekivalen dari partikel bebas yabg berenergi total E dan momentum p yang bergerak dalam arah +x.

Subtitusi persamaan \*\* dan \*\*\* ke parsamaan \* didapat:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi$$

Persamaan di atas merupakan persamaan Schrodinger bergantung waktu dalam satu dimensi. Dalam tiga dimensi dapat dinyatakan sebagai:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + V\psi$$

Dengan energi potensial V merupakan fungsi terhadap x, y, z, dan t. Setiap pembatasan yang dapat membatasi gerak partikel dapat mempengaruhi fungsi energi potensial V. Sekali bentuk V diketahui, maka persamaan Schrodinger dapat dipecahkan untuk mendapatkan fungsi gelombang partikel  $\psi$ , sehingga kerapatan peluang  $\psi^2$  ditentukan untuk x, y, z, dan t tertentu. Persamaan di atas hanya bias dipakai untuk persoalan non-relativsitik dan rumusan yang lebih memakan pikiran diperlukan jika kelajuan partikel yang mendekati kecepatan cahaya.

### 4.3 Sifat-sifat suatu Fungsi Gelombang

Untuk fungsi gelombang partikel yang tidak bergantung waktu,  $\psi$  ( x ),

 $|\psi(x)|^2 dx$ disebut peluang menemukan partikel di antara x dan x + dx.

 $|\psi(x)|^2$ rapat peluang partikel berada di x

Total peluang untuk menemukan partikel itu disepanjang sumbu-x adalah:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx$$

Dengan ψ \* adalah konjugasi dari ψ.

Fungsi  $\psi$  ( x ) yang memenuhi persamaan di atas disebut fungsi yang dinormalisasi, sedangkan disebut rapat peluang.

Suatu fungsi gelombang partikel harus memiliki kelakuan yang baik, yakni:

Bagi fungsi keadaan yang dinormalisasi

$$A_{av} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \hat{A} \psi(x) dx$$

Andaikan:

$$\hat{A}\varphi_n(x) = a_n\varphi_n(x)$$

$$\psi(x) = \sum_{n} c_n \varphi_n(x)$$

Jika  $\{\varphi_n\}$  adalah fungsi-fungsi yang ortonormal

$$A_{av} = \int \psi^*(x) \hat{A} \psi(x) dx = \sum_{mn} c_m^* c_n \int \varphi_m^*(x) \hat{A} \varphi_n(x) dx$$

$$\sum_{mn} c_m^* c_n a_n \int \varphi_m^*(x) \, \varphi_n(x) \, dz = \sum_{mn} c_m^* c_n a_n \delta_{mn}$$

$$\sum_{n} c_{n}^{*} c_{n} a_{n}$$

Karena harga rata-rata suatu besaran fisis adalah ril maka berlaku

$$\int \psi^*(x)\hat{A}\psi(x)dx = \int [\hat{A}\psi(x)]^*dx$$

Secara matematik, operator yang memenuhi persamaan di atas disebut operator hermitian.

## 4.3.2 Operator momentum

Menurut de Broglie, sebuah partikel yang bergerak sepanjang sumbu-x mempunyai momentum linier  $p_x$ =  $\hbar k$  dengan  $k=2\pi/\lambda$ . Fungsi gelombang partikel itu adalah .

$$\varphi(x) = ae^{ikx}$$

Bagaimanakah bentuk operator momentum yang memiliki harga eigen  $p_x = \hbar k$ ?

$$\left[\widehat{H}\psi(x)\right]^* = -i\hbar \frac{\partial \psi^*(x,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \hat{A} \psi + \psi^* \hat{A} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar} \psi^* \hat{H} \hat{A} \psi + \frac{1}{i\hbar} \psi^* \hat{A} \hat{H} \psi = \frac{1}{i\hbar} \psi^* \big[ \hat{A} \hat{H} - \hat{H} \hat{A} \big] \psi = \frac{1}{i\hbar} \psi^* \big[ \hat{A}, \hat{H} \big] \psi$$

Maka

$$\frac{dA_{av}}{dt} = \int \psi^* \left( \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{H}] \right) \psi \ dx$$

Jadi,

$$\frac{dA_{av}}{dt} = \int \psi^* \frac{d\hat{A}}{dt} \psi \, dx$$

Dengan

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} \left[ \hat{A}, \hat{H} \right]$$

 $\frac{d\hat{A}}{dt}$ Operator turunan dari

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}$$
Turunan dari A

Jika operator  $\hat{A}$  komut dengan  $\hat{H}$ , maka

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}$$

Jika operator  $\hat{A}$  selain komut dengan  $\hat{H}$ , juga tak bergantung waktu:  $\frac{d\hat{A}}{dt} = 0$ 

Besaran fisis seperti itu disebut tetapan gerak dari partikel (kekal dalam pengertian klasik).

$$C^2 \int_{-a}^{a} \left[ \cos^2 \left( \frac{\pi x}{2a} \right) + \sin^2 \left( \frac{3\pi x}{a} \right) + \frac{1}{16} \cos^2 \left( \frac{3\pi}{2a} \right) \right] dx = 1$$

Dalam hal ini telah diabaikan suku-suku lainnya sehingga diperoleh:

$$2ac^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{32}\right) = 1$$

Atau

$$c = 4\sqrt{\frac{1}{33a}}$$

#### Latihan

1. Diketahui bahwa:

$$E\psi = \frac{p^2\psi}{2m} + V\psi$$

Buktikan bahwa:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi$$

2. Gunakanlah teknik pemisahan variabel untuk memperlihatkan bahwa ada persamaan Schrodinger tiga dimensi untuk potensial bebas waktu yang dapat ditulis:

$$\psi(x,y,z,t) = \psi(x,y,z,t)e^{-\frac{Et}{\hbar}}$$

Dengan  $\psi(x, y, z, t)$  adalah solusi persamaan Shcrodinger bebas waktu.

3. Suatu partikel bergerak yang memenuhi persamaan:  $\psi(x,t) = 5.0 \ e^{i(30x-50t)}$ . Hitunglah energi dan momentum partikel tersebut.

Dan Persamaan di adas dapat diperluas menjadi

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$$
$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi$$
$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi$$

Dan dari hubungan  $E = \hbar \omega$  dan  $p = \hbar k$ , diperoleh

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k^2 \Psi$$

di mana

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

Persamaan di atas adalah bentuk persamaan yang telah lazim dikenal; dengan  $k^2$  selalu positif, maka pemecahannya adalah

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx$$

Nilai energi yang diperkenankan adalah:

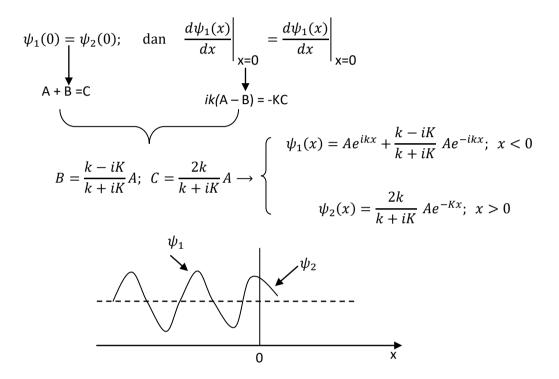
$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Karena pemecahan kita tidak memberi batasan pada k, maka energi partikel diperkenankan memiliki semua nilai (dalam istilah fisika kuantum, kita katakan bahwa energinya tidak terkuantisasi). Perhatikan bahwa Persamaan di atas tidak lain adalah energi kinetik sebuah partikel dengan momentum  $p = \hbar k$ , atau, setara dengan ini,  $p = h/\lambda$ ; ini tidak lain daripada apa yang kita perkirakan, karena kita telah membentuk

$$\psi_2(x) = Ce^{-Kx}; \quad K^2 = \frac{2m_e(V_0 - E)}{\hbar^2} - k^2$$

Di x = 0,  $\psi_1$  dan  $\psi_2$  harus bersambung agar fungsi gelombang itu kontinu;

Syarat kontinu:



Gambar 5.2 Fungsi Gelombang

Kerapatan peluang elektron di x > 0 dapat dihitung dengan menggunakan  $\psi_2(x)$ :

$$|\psi_2(x)|^2 = \frac{4k^2}{k^2 + K^2} |A|^2 e^{-2Kx} = \frac{4E}{V_0} |A|^2 e^{-2Kx}$$

Jadi, meskipun mengalami potensial penghalang yang lebih besar dari energinya, elektron masih mempunyai peluang berada di x > 0.

Peluang itu menuju nol jika  $V_0 >> E$ , atau di  $x = \infty$ .

$$|C/A|^2 = \frac{4k^2}{k^2 + K^2} = \frac{4E}{V_0}$$

adalah koefisien transmisi yang secara klasik tak dapat diramalkan.

$$ik(A - B) = K(C - D)$$

dan syarat kontinuitas di x = a dengan menggunakan  $\psi_2(x)$  dan  $\psi_3(x)$ , memberikan

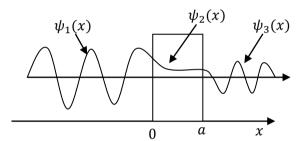
$$Ce^{Ka} + De^{-Ka} = Fe^{ika}$$

$$K(Ce^{Ka} - De^{-Ka}) = ikFe^{ika}$$

Dengan mengeliminasi C dan D, akan diperoleh:

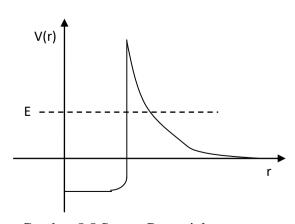
$$\frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{V_0^2 \sin h^2 (Ka)}{V_0^2 \sin h^2 (Ka) + 4E(V_0 - E)} \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{4E(V_0 - E)}{V_0^2 \sin h^2 (Ka) + 4E(V_0 - E)}$$

Ilustrasi fungsi gelombang:



Gambar 5.4 Fungsi Gelombang

 $\frac{|B|^2}{|A|^2}$ merupakan koefisien pantulan di x = 0 dan $\frac{|F|^2}{|A|^2}$ adalah koefisien transmisi di x = a. Jadi, secara kuantum elektron dapat menerobos potensial penghalang meskipun energinya lebih kecil daripada potensial penghalang. Fenomena inilah yang disebut sebagai efek terobosan (*tunnel effect*).



Gambar 5.5 Sumur Potensial

$$\psi_n(x) = C \cos(n\pi x/2a)$$
 untuk  $n = 1,3,5,...$ 

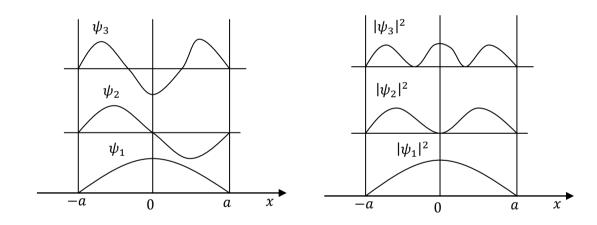
$$\psi_n(x) = D \sin(n\pi x/2a)$$
 untuk  $n = 2,4,6,...$ 

Harga C dan D dihitung melalui normalisasi fungsi, yakni:  $\int_{-a}^{a} \psi_{n}^{*}(x) \psi_{n}(x) dx = 1$ 

Hasilnya adalah C=D=1/√a, sehingga fungsi-fungsi eigen adalah:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right)$$
 untuk  $n = 1,3,5,\dots$ 

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right)$$
 untuk  $n = 1,3,5,\dots$ 



Gambar 5.7 Fungsi-Fungsi Eigen

Fungsi-fungsi ini membentuk set ortonormal; artinya:  $\int \psi_n^*(x)\psi_{n\prime}(x)dx = \delta_{nn\prime}$ 

bertingkat-tingkat) ditandai oleh bilangan kuantum n.

Fisika Kuantum, 2014

$$\psi(x) = Ce^{-K|a|}$$
dengan  $K^2 = \frac{2m_e(V_0 - E)}{\hbar^2}$ 

Syarat kontinu di  $x = \pm a$ :

$$\cos ka = Ce^{-Ka}$$

$$-k \sin ka = -KCe^{-Ka}$$

$$\sin ka = Ce^{-Ka}$$

$$ka \cot g ka = -Ka$$

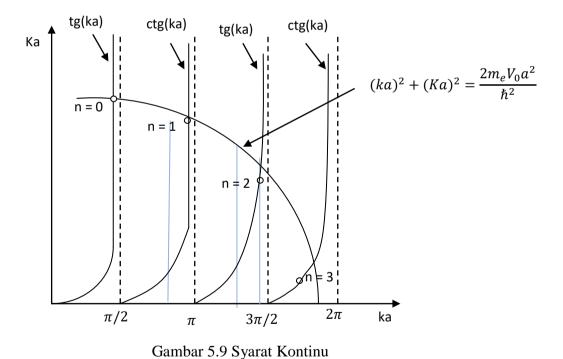
$$k \cos ka = -KCe^{-Ka}$$

$$k^2 = \frac{2m_e E}{\hbar^2}$$

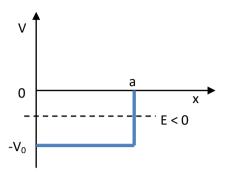
$$K^2 = \frac{2m_e (V_0 - E)}{\hbar^2}$$

$$(ka)^2 + (Ka)^2$$

$$= \frac{2m_e V_0 a^2}{\hbar^2}$$



Terlihat, jumlah tingkat energi sangat bergantung pada harga  $V_o a^2$ ; misalnya untuk  $V_o a^2 \leq (\pi \hbar^2/4 \; m_e)$  hanya ada satu, dan  $V_o a^2 \leq (\pi \; \hbar^2/2 \; m_e)$  ada dua tingkat energi.



Gambar 5.11 Sumur Potensial Persegi dengan Dinding

Di dalam daerah 0 < x < a, persamaan Schrödinger adalah:

$$\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + (-E + V_0)\psi_1 = 0$$

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + k^2\psi_1 = 0; \quad k^2 = \frac{2m_e}{\hbar^2}(V_0 - E)$$

Solusinya:

$$\psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

Karena  $\psi_1(0) = 0$ , maka A+B = 0 atau B = -A

$$\psi_1(x) = A(e^{ikx} - e^{-ikx}) = C \sin kx$$

Persamaan Schrödinger di daerah x > a adalah:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{d^2\psi_2}{dx^2} - E\psi_2 = 0$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + K^2\psi_1 = 0; \quad K^2 = \frac{2m_e E}{\hbar^2}$$

$$\psi_2(x) = De^{-Kx}$$

$$C \sin ka = De^{-Ka}$$

$$kC \cos ka = KDe^{-Ka}$$

$$D = C\sqrt{\frac{k^2 \exp(2Ka)}{k^2 + K^2}}$$

Dan ka ctg (ka) = -Ka

$$k^{2}a^{2}+K^{2}a^{2}=\frac{2m_{e}V_{0}a^{2}}{\hbar^{2}}$$

### 5.7 Osilator Harmonis Sederhana

Dalam mekanika klasik, osilator harmonis sederhana adalah benda yang bergerak osilasi dengan simpangan kecil dalam pengaruh gaya konservatif:

$$\vec{F} = -m\omega^2 \vec{x}$$

m adalah massa, dan  $\omega$  adalah  $2\pi x$  frekuensi; gerak osilasi berbentuk sinusoida dengan amplitudo A adalah:

$$x(t) = A \sin \omega t$$

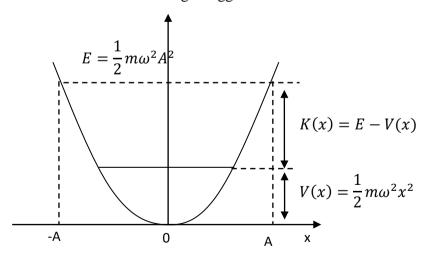
Dengan gaya konservatif tersebut, energi potensial yang dimiliki benda adalah:

$$V(x) = -\int_{0}^{x} \vec{F} d\vec{x} = \frac{1}{2}m\omega^{2}x^{2}$$

Energi total sebagai jumlah energi potensial (V) dan energi kinetik (K) diperlihatkan dalam:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

Jadi, secara klasik osilator memiliki energi tunggal.



Gambar 5.14 Osilator Harmonis Sederhana

$$\psi_n(z) = N_n H_n(z) e^{-\frac{1}{2}z^2}; \qquad N_n = \sqrt{\frac{1}{2^n n! \, \pi^{1/2}}}$$

$$\psi_n(x) = N_n H_n(ax) e^{-\frac{1}{2}a^2 x^2}; \qquad N_n = \sqrt{\frac{a}{2^n n! \, \pi^{1/2}}}$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{a}\psi_n(z)$$

dimana adalah faktor normalisasi dan n merupakan bilangan kuantum.

Contoh fungsi-fungsi keadaan:

$$H_0(z) = 1 \longrightarrow \psi_0(z) = \sqrt{\pi^{-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

$$H_1(z) = 2z \longrightarrow \psi_1(z) = \sqrt{2\pi^{-\frac{1}{2}}} z e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

$$H_2(z) = 4z^2 - 2 \longrightarrow \psi_2(z) = \sqrt{\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} (2z^2 - 1) e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

Fungsi-fungsi eigen di atas membentuk set yang ortonormal.

Dari 
$$c = \frac{2E}{\hbar\omega} \operatorname{dan} \quad n = \frac{1}{2}(c-1)$$

diperoleh energi eigen (keadaan) bersangkutan:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega; \quad n = 0,1,2,\dots...$$

Terlihat bahwa, karena partikel terperangkap dalam potensial V, maka energinyadiskrit . Frekuensi osilator lebih kurang sama de ngan frekuensi bunyi; oleh sebab itu,  $\hbar\omega$  disebut fonon. Jadi, fungsi keadaan  $\psi_n$  dikatakan mengandung n buah fonon.

Untuk lebih jelasnya, fungsi-fungsi keadaan diperlihatkan dalam gambar di bawah ini. Fungsi keadaan

$$\psi_0(z) = \sqrt{\pi^{-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

#### **Contoh Soal**

1. Hitunglah gaya pegas rata-rata.

$$F = -m\omega^2 x$$

$$F_{ave} = -m\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) x \psi_n(x) dx = -\omega \sqrt{m\hbar\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(z) z \psi_n(z) dz$$

2. Hitunglah harga rata-rata energi potensial.

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$
 
$$V_{ave} = \frac{1}{2}m\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)x^2 \psi_n(x) dx = \frac{1}{2}\hbar\omega \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(z)z^2 \psi_n(z) dz$$

dari osilator harmonik 
$$\frac{d^2\psi_n(z)}{dz^2} + (c-z^2)\,\psi_n(z) = 0$$
 
$$c = \frac{2E_n}{\hbar\omega}$$
 
$$\begin{cases} \left(-\frac{d^2}{dz^2} + z^2\right)\,\psi_n(z) = 2\left(n + \frac{1}{2}\right)\,\psi_n(z) \\ \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\,\psi_n = n\,\psi_n \end{cases}$$
 
$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(z + \frac{d}{dz}\right); \quad \hat{a}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(z - \frac{d}{dz}\right); \rightarrow 2\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + 1 = 2\hat{a}\hat{a}^{\dagger} - 1 = -\frac{d^2}{dz^2} + z^2 \end{cases}$$

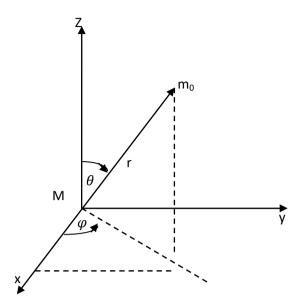
Operator  $\hat{a}^{\dagger}\hat{a}$  mempunyai nilai eigen n dengan fungsi keadaan  $\psi_n$ ; karena n menyatakan jumlah fonon dalam keadaan  $\psi_n$  maka operator ini disebut operator okupasi.

Karena 
$$\frac{1}{2}\hbar\omega(2\hat{a}\hat{a}^+ - 1)\psi_n(z) = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\psi_n(z)$$

 $\hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^{+}-\frac{1}{2}\right)$ merupakan operator hamiltonian.

Selanjutnya,

$$\hat{a}^+ \psi_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( z - \frac{d}{dz} \right) \psi_n = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}; \quad \hat{a} \psi_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( z + \frac{d}{dz} \right) \psi_n = \sqrt{n} \psi_{n-1}$$



Gambar 6.1 Sketsa Koordinat (x,y,z) Dan Koordinat  $(\sigma,\theta,\mu)$ 

Fungsi Hamilton (fungsi energi total) yang menggambarkan sistem atom hidrogen tersebut adalah :

$$H = \frac{p^2}{2m_0} + V(r)$$

Operator Hamiltonnya:

$$Hop = -\frac{\hbar^2}{2mo}\nabla^2 + V(r) \tag{4-2}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Dalam koordinat bola operator Laplace tersebut berbentuk:

$$\nabla^2 = \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

Sehingga dalam koordinat bola, operator Hamilton:

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left[ r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] - \frac{Ze^2}{4\pi \varepsilon_0 r}$$

Karena ruas kiri terdiri dari variabel r, sedangkan ruas kanan hanya bergantung dari variabel  $\varphi$ , dan apabila keduannya selalu harus sama, masing-masing ruas itu sama dengn suatu tetapan, yang kita namakan saja  $\lambda$ .

Dari uraian diatas diperoleh dua perangkat persaman:

### 1. Persamaan radial

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{2m_0r^2}{\hbar^2}[E - V(r)]R - \lambda R = 0 \text{ atau}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left[\frac{2m_0r^2}{\hbar^2}\left\{E - V(r)\right\} - \frac{\lambda}{r^2}\right]R = 0$$

## 2. Persamaan Anguler

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Psi}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\varphi} \frac{d^2\Psi}{d\varphi^2} = -\lambda \Psi$$

Dengan  $\Psi(\theta, \varphi) = H(\theta)\phi(\varphi)$ 

Subsitusi dalam persamaan anguler akan memberikan

$$\frac{\Phi}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) + \frac{H}{\sin^2\theta} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -\lambda H\Phi$$

Perkalian seluruhnya dengan  $sin^2\theta \frac{1}{H\Phi}$ akan menghasilkan

$$\frac{1}{H}\sin\theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dH}{d\theta}\right) + \lambda\sin^2\theta = -\frac{1}{\phi} \frac{d^2\phi}{d\phi^2}$$

Masing-masing ruas itu harus sama dengan suatu tetapan yang sementara ini dinamakan v permisahan variabel  $\theta$  dan  $\varphi$  akan menghasilkan dua perangkat persamaan.

## 6.3 Pemecahan Persamaan Anguler $\psi(\theta, \varphi)$

Persamaan anguler  $\Phi(\varphi)$ 

$$\frac{d^2\Phi}{d\omega^2} = -v\Phi$$

Diketahui mempunyai solusi  $\Phi(\varphi)$  dengan keberkalaan  $2\pi$ , artinya

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$$

Solusi yang mungkin

 $v \equiv 0$ ,  $berarti\Phi = A + B\varphi$ ; bukan suatu solusi yang umum

$$v \neq 0$$
,  $berarti\Phi = Ae^{iv^{\frac{1}{2}}\phi} + Be^{iv^{\frac{1}{2}}\phi}$ 

Ambil solusi umum, sehingga

$$\Phi_{\rm m}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \dots$$

Faktor  $(2\pi)$  karena normalisasi dalam selang  $(02\pi)$ 

Persamaan anguler  $\Theta(\theta)$ ;  $denganv = m^2 menjadi$ 

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right) \Theta = 0$$

Bentuk ini dikenal dari fisika mtematika ,dengan solusi yang berbentuk : polinon legendre

Lakukanlah transformasi  $\theta$  = arc cos W, atau cos  $\theta$ = W, maka solusinya :

$$\Theta(\theta) = p(\omega)$$

Dimana selang  $\theta$ :  $(0,\pi)$  menjadi selang W, (1,-1)

Persamaan differensial diatas berubah menjadi:

Tinjau ulang pemecahan persamaan anguler total:

- 1.  $\Phi_{\rm m}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$
- 2.  $H(\theta)$  mempunyai solusi berhingga hanya apabila  $\lambda = \ell(\ell+1)$  dengan  $\ell = 0,1,2,3,...$
- 3. Apabila m = 0, maka  $\Theta(\theta)$  adalah polinon Legendre dengan mengambil  $\theta arc \cos w$ , maka:

 $\Theta_{\ell}(\theta) = P_{\ell}(w)$ , memenuhi:

$$\frac{d}{dw}\left[(1-w^2)\frac{dp}{dw}\right] + \ell(\ell+1)P_{\ell} = 0$$

4. Apabila m ≠ 0, maka solusi berhingga hanya |m| ≤ ℓ.
Θ<sub>ℓ</sub><sup>m</sup>(θ) = P<sub>ℓ</sub>(w) diperoleh melalui transformasi θ = arc cos ω
P<sub>ℓ</sub><sup>m</sup>(ω) memenuhi persamaan

$$\frac{d}{dw} \left[ (1 - w^2) \frac{dP_{\ell}^m}{dw} \right] + \left[ \ell(\ell - 1) - \frac{m^2}{1 - w^2} \right] P_{\ell}^m = 0$$

### Bentuk solusi persamaan Anguler

Persamaan anguler total

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Psi}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{d^2\Psi}{d\varphi^2} = -\ell(\ell+1)\Psi$$

Solusi persamaan di atas dinamakan Sherical Harmonics,  $\Psi_{\ell m}(\theta, \varphi)$ 

Fungsi-fungsi tersebut adalah orthonormal dengan paritas  $(-2)^{\ell}$ 

Tabel 6.1 Fungsi Sherical Harmonics,  $\Psi_{lm}(\theta, \varphi)$ 

$\ell$	M	Fungsi anguler $\Psi_{\ell m}(\theta, \varphi)$
0	0	$\Psi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
1	0	$\Psi_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$
	<u>±</u> 1	

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left(\frac{2m_0}{\hbar^2}\left\{E - V(r)\right\} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)R(r) = 0$$

Dengan fungsi potensial:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}; harga\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Analisa tentang pemecahan persamaan radial diatas memberikan hasil sebagai di bawah ini

1. Ada solusi dapat dipergunakan ditetapkan suatu tetapan baru *n* ang bernilai:

$$n = (\ell + 1), (\ell + 2), (\ell + 3), \dots$$

2. Bentuk solusi persamaan radial termaksud diatas:

$$R_{n,\ell}(e\frac{Zr}{na_0}(\frac{zr}{|a})^{\ell}G_{n,\ell}(\frac{zr}{a_0}))$$

Dengan 
$$a_{0=} \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_0 e^2}$$
, sedagkan:

 $G_{n,\ell}\left(\frac{Ze}{a_0}\right)$  adalah suatu polinom dalam  $\left(\frac{Z_r^-}{n_0}\right)$  dengan harga n dan  $\ell$  yang berbeda.

3. Harga energi:

$$E_n = -\frac{m_0 Z^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 2\hbar^2 n^2}, n = 1,2,3,4,\dots$$

Rumus energi:

 $E_n$ , untuk sistem atom hidrogen yang diperoleh dengan menerapkan metode Shcrodinger ternyata tetap sama.

Dengan hasil diperoleh dengar mempergunakan postulat Bohr.

Rumus energi termaksud, sebagaimana juga rumus tingkat energi menurut Bohr, dapat menerapkan dengan jelas harga-harga panjang gelombang yang dipancarkan oleh atom-atom hidrogen. Oleh karena itu untuk kesesuaian antara pengamatan dan

$$\int\limits_{0}^{\infty} [R_{n\ell}(r)]^2 r^2 dr = 1$$

### Normalisasi Persamaan Gelombang Schrodinger

Solusi persamaan gelombang Schrodinger untuk sistem atom hidrogen ditandai oleh 3 bilangan bulat  $n, \ell$  dan m. Oleh karena itu ketiga bilangan tersebut dicantumkan dalam notasi solusi persamaan Schrodinger sebagai:

$$\Psi_{n\ell m}(r,\theta,\varphi) = R_{n\ell}(r)\Psi_{n\ell m}(\theta,\varphi)$$

Fungsi gelombang tersebut dinormalisasikan sebagai:

$$\int_{0}^{\infty} r^{2} dr [R_{n\ell}(r)]^{2} \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{\pi} d\theta \sin \theta \, \Psi_{\ell m}^{*} \, \Psi_{\ell m} = 1$$

Karena elemen volumenya adalah:

$$d\tau = (dr)(r d \theta)(r \sin \theta d \varphi)$$

Dengan menormalisasikan  $R_{n\ell}(r)$ , dengan  $\int_0^\infty [R_{n\ell}(r)]^2 r^2 dr = 1$ , maka dapat dibataskan rapat kebolehjadian radial sebagai berikut:

$$P_{n\ell} = [R_{\ell m}^* R_{\ell m} r^2]$$

Persamaan di atas adalah kebolehjadian untuk menemukan suatu elektron atom hidrogen yang keadaannya dinyatakan dengan perangkat bilangan kuantum  $(n, \ell)$ , diantara r dan (r+dr) tanpa memperhatikan harga  $\theta$  dan harga  $\varphi$ .

### Tinjauan ulang pemecahan persamaan Schrodinger untuk sistem atom hidrogen

Persamaan gelombang Schrodinger untuk atom hidrogen

$$\widehat{H} \psi(r,\theta,\varphi) = E\psi(r,\theta,\varphi)$$

Dengan

Solusi persamaan radial itu ditandai oleh dua tetapan, yaitu  $n, \ell$ 

$$R_{n\ell}(r) = e^{-\frac{Zr}{na_0}} \left(\frac{Zr}{a_0}\right)^{\ell} G_{n,\ell} \left(\frac{Zr}{a_0}\right)$$

Dengan  $a_0$  radius Bhor, dan  $G_{n,\ell}\left(\frac{Zr}{a_0}\right)$  suatu polinon dalam  $\left(\frac{Zr}{a_0}\right)$  kecuali itu persamaan radial juga memberikan harga energi E dari sistem hidrogen, harga energi ini ditandai oleh bilangan tetap n:

$$E_n = -\frac{m_0 Z^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 2\hbar^2 n^2}$$

- 5. Ternyata bahwa  $E_n$  di atas sama dengan apa yang diperoleh dengan menggunakan postulat-postulat Bhor.  $E_n$  memberikan kuantitasi energi total, ramalan tentang garis spektrum radiasi hidrogen berdasarkan rumus dalam d sesuai dengan kenyataan.
- 6. Pada akhirnya ada 3 buah bilangan yang member cirri pada solusi persamaan Shrodinger untuk sistem atom hidrogen, yaitu:  $n, \ell, m$

Keterkaitan bilangan tersebut satu dengan lainnya:

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$
 $|m| \le \ell$ 
 $\ell = 0,1,2,3,\dots$ 
 $n = (\ell + 1), (\ell + 2),\dots$ 

Ketiga bilangan bulat itu dinamakan bilangan kuantum, yang secara khusus dibrikan nama sebagai berikut:

n =bilangan kuantum utama

$$n = 0.1.2.3.4....$$

 $\ell=$  bilangan kuantum lintas edar, atau bilangan kuantum orbital, atau bilangan kuantum azimuth

$$\ell = 0.1, 2, 3, \dots (n-1)$$

m =bilangan kuntum magnetic

$$m = -\ell, -(\ell - 1), \dots, -1, 0, +1, 2, \dots, \ell$$

7. Setiap perangkat bilangan kuantum  $(n, \ell, m)$  menggambarkan suatu keadaan khusus sistem atom hidrogen (keadaan kuantum). Setiap keadaan kuantum ditandai oleh perangkat  $(n, \ell, m)$ :

Kehadiran medan magnet ini meniadakan kesetangkupan bola. Ternyata dalam hal seperti ini degenerasi terangkat, dan energi total ditentukan tidak hanya oleh n, tetapi juga m.

#### **Contoh Soal**

1. Buktikan harga rata-rata 1/r untuk elektron 1s dalam atom hidrogen adalah  $1/a_0$ . Jawab.

Fungsi gelombang elektron 1s dari tabel adalah:

$$\psi = \frac{e^{-\frac{r}{a_0}}}{\sqrt{\pi}a_0^{\frac{3}{2}}}$$

Karena  $dV = r^2 \sin \theta \ dr \ d\theta \ d\phi$  kita dapatkan harga ekspektasi 1/r ialah:

$$\left(\frac{1}{r}\right) = \int_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right) |\psi|^{2} dV = \frac{1}{\pi a_{0}^{3}} \int_{0}^{\infty} r e^{-\frac{2r}{a_{0}}} dr \int_{0}^{\pi} \sin\theta d\theta \int_{0}^{2\pi} d\phi$$
$$\int_{0}^{\infty} r e^{-\frac{2r}{a_{0}}} dr = \frac{a_{0}^{2}}{4}, \qquad \int_{0}^{\pi} \sin\theta d\theta = 2 \ \dim \int_{0}^{2\pi} d\phi = 2\pi$$
$$\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{\pi a_{0}^{3}} x \frac{a_{0}^{2}}{4} x 2x 2\pi = \frac{1}{a_{0}}$$

- 2. a. Apakah nilai-niai  $\ell$  yang mungkin bagi n = 6
  - b. Apakah nilai-nilai  $m\ell$  yang mungkin bagi  $\ell=6$
  - c. Apakah nilai  $\ell$  terkecil paling mungkin untuk mana  $\ell$  dapat sama dengan 4.
  - d. Apakah nilai  $\ell$  terkecil paling mungkin yang dapat memiliki suatu komponen z sama dengan  $4\hbar$ .

Jawab.

- a. Nilai-nilai  $\ell$  yang mungkin bagi  $\ell=6$ Nilai  $\ell$  terbatas oleh (n-1), jadi nilai  $\ell$  yang mungkin bagi  $\ell=6$  adalah: 0,1,2,3,4,5, atau  $\ell$  yang mungkin  $\{0,1,2,3,4,5\}$ .
- b. Nilai bilangan kuantu magnetik  $m_\ell$  dibatasi oleh  $\pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm \ell$ . Jadi nilai  $m_\ell$  yang mungkin untuk  $\ell = 6$ , yaitu  $\pm 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$  atau  $\{\pm 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6\}$

# **BAB VII**

# PENERAPAN METODE SCHRODINGER PADA SISTEM ATOM HIDROGEN (2) (PENGEMBANGAN KONSEP)

Setelah mempelajari buku ini anda diharapkan memiliki kemampuan untuk dapat:

- Menjelaskan berbagai operator dalam sistem persamaan gelombang shcrodinger kuantum atom hidrogen
- 2. Menjelaskan sistem atom hidrogen sederhana dalam medan magnet luar yang homogen

# 7.1 Berbagai Operator Dalam Sistem Persamaan Gelombang Shrodinger Kuantum Atom Hidrogen

#### 1. Operator Hamilton

Operator Hamilton untuk atom hidrogen (model sederhana):

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] + V(r)$$

Fungsi-Eigen untuk  $\widehat{H}$ 

$$\Psi_{n,l,m}(r,\theta,\varphi) = R_{ne}(r)\Psi_{lm}(\theta,\varphi)$$

Eigen Value

$$E_n = -\frac{m_0 Z^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 2\hbar} \left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ternyata bahwa  $\widehat{H}$  di atas dapat diberi makna yang lebih luas. Perluasan makna tersebut ternyata memberikan landasan bertolak yang lebih konseptual.

# 2. Operator Momentum

Sebelum melangkah lebih jauh perlu diperoleh terlebih dahulu bentuk  $\hat{L}^2$  dan  $\hat{L}_Z$  dalam koordinat bola.

Batasan momentum anguler:  $\begin{vmatrix} \vec{l} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ P_x & P_v & P_z \end{vmatrix}$ 

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0;$$
  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta};$   $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta}$ 

Dengan menggunakan hubungan-hubungan di atas akan di peroleh:

$$\hat{L}_k = +i\hbar \left[ \sin\!\phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot\!\theta \cos\!\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

Operator untuk pangkat duanya momentum  $\hat{L}^2$ :

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_v^2 + \hat{L}_z^2$$

ternyata bahwa

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Perhatikan persamaan eigen value untuk atom hidrogen

$$\widehat{H}\Psi_{n\ell m}(r,\theta,\phi) = E\Psi_{n\ell m}(r,\theta,\phi)$$

Dengan pemisahan variabel persamaan di atas dapat di peroleh persamaan radial dan persamaan anguler.

Persamaan anguler:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} \bigg( \sin\!\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \bigg) \Psi_{\ell,m} + \frac{1}{\sin^2\!\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \Psi_{\ell,m} = \dots \cdot \ell(\ell+1) \Psi_{\ell,m}$$

Dengan menggunakan  $\hat{L}^2$ 

$$\hat{L}^2 Y \hat{L}^2 \Psi_{\ell,m}(\theta,\varphi) = \hbar^2 \ell(\ell,+1) \Psi_{\ell,m}(\theta,\varphi)$$

Melihat bentuk dari persamaan tersebut, dapatlah dikatakan bahwa bentuknya adalah suatu eigen value Equation untuk operator  $L^2$ , dan Eigen Function  $\Psi_{\ell,m\,(\theta,\varphi)}$ , dan Eigen Value  $\hbar^2\ell(\ell+1)$ 

Operasi masing-masing operator tersebut terhadap eigen function energi untuk sistem atom hidrogen:

$$\begin{split} \hat{L}_Z^2 \, \Psi_{n\ell m} &= \hbar^2 \ell (\ell+1) \Psi_{n\ell m} \\ \hat{L}_Z \Psi_{n\ell m} &= m \hbar \Psi_{n\ell m} \\ \widehat{H} \Psi_{n\ell m} &= E_n \Psi_{n\ell m} \\ \end{split}$$
 Dengan

$$E_n \frac{m_0 Z^2 e^4}{(4_{\pi \epsilon 0})^2 \hbar^2 2} \frac{1}{n^2}$$

Disini terlihat bahwa kuantisas:

Momentum anguler

$$\langle L^2 \rangle = \hbar^2 \ell (\ell + 1)$$

Komponem Z momentum anguler

$$\langle L_2 \rangle = m\hbar$$

Energi sistem atom hidrogen  $E_n = -\frac{13.6}{n^2}eV$ 

Bilangan kuantum  $\ell$  dan m secara bersama-sama menemukan bentuk lintas edar elektron mengelilingi inti atom. Representasinya adalah rapat kebolehjadian eloktron dalam ruang tiga dimensi. Adapun tabel kuantisasi tersebut adalah:

Tabel 7.1 Eigen Value Problem Untuk Sistem Atom Hidrogen

Operator	Eigen Function	Bilangan Kuantum	Eigen Value
Ĥ	$\Psi_{n,\ell,m}(r,\theta,\varphi)$	$n, \ell, m$	$m_0 Z^2 e^4 = 1$
$\widehat{L}_Z^2$	$\Psi_{n,\ell,m}(r,\theta,\varphi)$	$\ell$	$\frac{E_n}{(4_{\pi\varepsilon0})^2\hbar^22}\frac{1}{n^2}$ $\hbar^2\ell(\ell+1)$
$\hat{L}_Z$	$\Psi_{n,\ell,m}(r,\theta,\varphi)$	m	mħ

#### 7.2 Sistem Atom Hidrogen Sederhana Dalam Medan Magnet Luar Yang Homogen

Fungsi potensial V(r) atom hidrogen memiliki kesetangkupan bola. Kesetanggupan yang tinggi itu memberikan degenerasi yang sangat tinggi. Energi  $E_n$  sistem atom hidrogen yang ditandai oleh bilangan kuantum n, ternyata n sesuai dengan  $n^2$  buah fungsi eigen yang kesemuanya memiliki bilangan kuantum utama n.

Energi total  $E^1$  dari suatu atom hidrogen dalam medan magnet luar  $\overline{B}$  dipresentasikan oleh operator Hamilton  $\widehat{H}^1$ . Hubungan antara  $\widehat{H}^1$  dan  $\widehat{H}$  adalah:

$$\widehat{H}^1 = \widehat{H} + \widehat{V}_B$$

Dengan  $\widehat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m_o}\nabla^2+V(r)$ . Bagaimana besarnya $E^1$ ?. Andaikan bahwa sistem atom hidrogen berada dalam keadaan kauntum  $(n,\ell,m)$ . Fungsi eigen untuk keadaan tersebut adalah  $\Psi_{n\ell m}(r,\theta,\varphi)$ . Maka harga ekspektasi  $\langle E^1 \rangle$  adalah:

$$\langle n\ell m \| \widehat{H}^1 \| n\ell m \rangle = \langle n\ell m | \widehat{H} | n\ell m \rangle + \langle n\ell m | \widehat{V}_B | n\ell m \rangle$$

Darimana diperoleh bahwa:

$$\langle E^1 \rangle = E_n \langle n\ell m | n\ell m \rangle + g_L \frac{\mu_B}{\hbar} B \langle n\ell m | L_Z | n\ell m \rangle$$

Karena normalisasi, maka  $\langle n\ell m|n\ell m\rangle 1;=sedangkan\ L_Z|n\ell m\rangle=m\hbar|n\ell m\rangle;$  sehingga

$$\langle E^1 \rangle = E_n + m\hbar g_L \frac{\mu_B}{\hbar} B$$

Darimana diperoleh bahwa pergeseran harga energi karena kehadiran medan magnet luar  $\bar{B}$  adalah:

$$\Delta E = \langle E^1 \rangle - E_n$$

Atau

$$\Delta E = (g_L \mu_B B)_m$$

Dengan m bilangan kuantum megnetik. Pergeseran harga energi atom hidrogen karena aton itu ditempatkan dalam medan magnet luar  $\bar{B}$  adalah:

$$\Delta E = (g_L \mu_B B)_m$$

Ternyata bahwa:

1 fungsi eigen mempunyai  $\ell = 0$ 

3 fungsi eigen dengan  $\ell = 1$  (m = -1,0,+1)

5 fungsi eigen dengan  $\ell = 2$  (m = -2,-1,0,+1,+2)

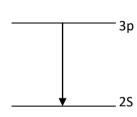
7 fungsi eigen dengan  $\ell = 3$  (m = -3,-2,-1,0,+1,+2,+3)

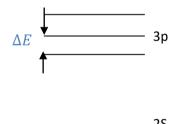
Kegandaan tersebut dinyatakan dalam tanda kurung disebelah setiap tingkat energi. Jadi kalau semua  $\ell$  yang berlainan dikumpulkan maka kegandaan setiap tingkat n = 4 tersebut adalah: 1+3+5+7=16 atau  $n^2=16$ .

#### **Contoh Soal**

- 1. Andaikanlah kuat medan magnetik adalah  $B = 10^5$  gaus = 10 tesla. Perhatikan proses transisi 3p ke 2S. Tentukanlah:
  - a. Selisih frekuensi transisi
  - b. Panjang gelombang transisi
  - c. Pergeseran panjang gelombang transisi
  - d. Frekuensi larmor

Jawab.





a. 
$$E_3 - E_2 = -\frac{13.6}{9}eV - \frac{(-13.6)}{4}eV = 1.89 = 3.02x10^{-19}eV$$

b. Frekuensi

$$v_{3-2} = \frac{E_3 - E_2}{h} = 4,56x10^{14} Hz$$
$$\lambda_{3-2} = \frac{c}{v_{3-2}} = 0,658x10^{-6} m = 0,66 \ \mu m$$

c. 
$$\mu_B = 9.27x10^{-24} J/Tesla$$
 
$$\Delta E = (g_L \mu_B B) m = 1x9.27x10^{-24} x10 = 9.27x10^{-23} J$$

#### **BAB VIII**

# PENERAPAN METODE SCHRODINGER PADA SISTEM ATOM HIDROGEN (3) (DENGAN SPIN ELEKTRON)

Setelah mempelajari buku ini anda diharapkan memiliki kemampuan untuk dapat:

- 1. Menjelaskan spin elektron
- 2. Menjelaskan spin elektron dan persoalan nilai eigen
- 3. Menjelaskan model atom hidrogen dengan spin dalam medan magnet luar
- 4. Menjelaskan gerak presesi (Larmor)

#### 8.1 Spin Elektron

Pada tahun 1927 philipps dan Taylor menggunakan berkas hidrogen bersuhu rendah (jadi sebagian besar atomnya mempunyai  $\ell=0$  dan m=0), dan melewatinya melalui suatu sistem sksperimental seperti Stern dan Gerlach, ternyata masih terjadi kuntisasi ruang untuk atom hidrogen dengan  $\ell=0$  dan m=0; khususnya dua arah yang berlainan karena  $\langle L \rangle=0$  dan  $\langle L_z \rangle=0$  juga, maka tidak mungkin ini berasal dari lintas-edar elektron yang mengelilingi inti atom.

Berdasarkan dari hasil eksperimen di atas mereka menyarankan bahwa elektron itu sendiri berputar mengelilingi sumbunya sendiri. Laksana perputaran bumi mengelilingi sumbunya dalam perjalanannya mengelilingi matahari. Ini dinamakan gerak gasing elektron (elektron spin). Besarnya momen dipol magnetiknya dapat dinyatakan sebagai:

$$\vec{\mu}_s = -\frac{g_s \mu_B}{\hbar} \vec{S}$$

Dalam hal ini:  $\vec{\mu}_s$ : adalah magneton Bohr

 $\hbar$ : adalah tetapan Planck dibagi  $2\pi$ 

 $g_s \vec{S}$ : adalah momentum anguler gerak gasing elektron mengelilingi sumbunya sendiri

Kemungkinan ada bahwa momen dipol magnetik yang teramati berasal dari inti atom. Apabila demikian halnya, maka besarnya akan berada di

#### 8.2 Spin Elektron dan Persoalan Nilai Eigen

Bagaimana langkah-langkah dalam menampung spin elektron ini dalam kerangkan teoritik yang telah dikembangkan atom hidrogen?. Secara skematik langkah-langkah tersebut sebagai berikut:

1. Meninjau momen dipol megnetik spin dibataskan sebagai:

$$\vec{\mu}_S = -\frac{g_S \mu_B}{\hbar} \vec{S}$$

Vektor  $\vec{S}$  dinamakan spin elektron (analog dengan vector L untuk momentum anguler orbital).

2. Analog dengan  $\langle \vec{L} \rangle$ , kita katakana bahwa:

$$\langle S \rangle = \hbar \sqrt{s(s+1)}$$

Demikian pula komponen Z dari $\bar{S}$ :

$$\langle S_z \rangle = m_s \hbar$$

Dimana juga  $m_s$  berkait dengan  $\vec{S}$ ;B khususnya  $m_s$  mempunyai harga yang berbeda satu ( $\Delta m_s = 1$ ), sedangkan harganya terletak antara –s dan +s. Karena ternyatabahwa berkas atom hidrogen mengurai menjadi dua komponen di bawah pengaruh medan magnet luar, maka ada dua harga m, yang berbeda satu dan kemungkinannya adalah:

$$m_s = -\frac{1}{2}\operatorname{dan} + \frac{1}{2}$$
$$S = -\frac{1}{2}$$

Pengukuran eksperimental menunjukkan  $g_s m_s = \pm 1$  dimana diperoleh bahwa faktor spin  $g_s = 2$ .

3. Apabila gerak gasing masuk dalam sistem atom hidrogen, tentu gerak tersebut harus dipresentasikan dengan suatu fungsi katakanlah  $X_{mS}$  pada mana operator spin  $\hat{S}$  dan  $\hat{S}_z$  beroperasi dengan ketentuan:

$$\hat{S}_z X_{mS} = s(s+1)\hbar^2 X_{mS} = \frac{3}{4}\hbar^2 X_{mS}$$
$$\hat{S}_z X_{mS} = m_s \hbar X_{mS}$$

$$\hat{S}^2|n\ell m_\ell m_s\rangle = s(s+1)|n\ell m_\ell m_s\rangle$$

$$\hat{S}|n\ell m_\ell m_s\rangle = m_s \hbar |n\ell m_\ell m_s\rangle$$

Dengan menelaah lagi  $|n\ell m_\ell m_s\rangle$ , karena normalisasi harus dipenuhi, maka:

$$\langle n\ell m_{\ell}m_{\varsigma}|n\ell m_{\ell}m_{\varsigma}\rangle=1$$

Atau

$$\langle X^+|X^+\rangle = 1$$

$$\langle X^-|X^-\rangle = 1$$

Karena  $m_s = -\frac{1}{2} dan + \frac{1}{2}$  adalah dua bilangan kuantum state berlainan, maka keduanya independen satu dari yang lainnya.

$$\langle X^+|X^-\rangle = \langle X^-|X^+\rangle = 0$$

# 8.3 Model Atom Hidrogen dengan Spin Dalam Medan Magnet Luar

Dapat dibataskan terlebih dahulu momen dipol magnetik total atom hidrogen.

$$\vec{\mu}_H = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S$$

Dalam hal ini H menyatakan atom hidrogen.

$$\bar{\mu}_H = -\frac{e}{2m_0} \left( g_L \vec{L} + g_S \vec{S} \right)$$

Diketahui  $g_L = 1 \, dan \, g_S = 2$ , maka:

$$\vec{\mu}_H = -\frac{e}{2m_0} \left( \vec{L} + 2\vec{S} \right)$$

Energi potensial  $\vec{\mu}_H$  dalam medan magnet luar  $\vec{B}$ :

$$V_B = \vec{\mu}_L \bullet \vec{B} = \frac{e}{2m_0} (L_z + 2S_z)$$

#### Catatan:

Di sebelah kiri adalah tingkat energi tanpa medan luar, di sebelah kanan tingkat energi yang terurai di bawah pengaruh medan induksi magnetik B. Angka dalam kurung di samping tingkat energi yang terurai adalah jumlah tingkat energi yang berbeda untuk tingkat itu di bawah pengaruh medan induksi magnetik B.

Contohnya 3p, ada 5 tingkat energi yang berbeda untuk 6 rangkap bilangan kuantum berikut:

$$\Delta E = \frac{B\mu_B}{X}(m_\ell + 2m_s) = A(m_\ell + 2m_s)$$

Untuk (3,1,1,+1/2), maka 
$$\Delta E = +2A$$
  
(3,1,0,+1/2), maka  $\Delta E = +A$   
(3,1,1,-1/2), maka  $\Delta E = 0$   
(3,1,-1,+1/2), maka  $\Delta E = 0$   
(3,1,0,-1/2), maka  $\Delta E = -A$   
(3,1,-1,-1/2), maka  $\Delta E = -2A$ 

Kaedah seleksi berlaku adalah:

$$\Delta L = \pm 1$$

$$\Delta m_{\ell} = 0, \pm 1$$

$$\Delta m_{s} = 0$$

#### 8.4 Gerak Presesi (Larmor)

Dalam model yang dianut tidak ada pertautan antara  $\vec{L}$ ,  $\vec{S}$ , masing-masing terkuantisasi sendiri secara tidak berantungan satu dengan lainnya. Jadi dua medan induksi magnetik B, masing-masing terkuantisasi dalam ruang secara tersendiri, dan juga melakukan gerak presesinya masing-masing mengelilingi sumbu Z yang sama.

#### Contoh soal

1. Suatu atom hidrogen dalam keadaan kuantum n=3 dan  $\ell=2$ dan  $\Delta m_\ell=-1$ . Hitunglah harga besaran-besaran fisika atom hidrogen yang berkaitan dengan adanya medan magnet luar. Andaikan bahwa induksi magnetik  $\mathbf{B}=5,0$  Tesla.

Jawab.

Diketahui: n = 3 dan  $\ell = 2$  dan  $\Delta m_{\ell} = -1$ 

a. Kuantisasi arah  $\vec{L}$ , memberikan sudut  $\theta$ 

$$\theta = \arccos\left(\frac{m_{\ell}\hbar}{\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}}\right) = 114^{0}$$

b. Perubahan energi total elektron

$$V_B = \mu_B B m_\ell = 9.27 \times 10^{-24} \text{x} \, 5.0 \times (-1) \text{J} = 2.90 \times 10^{-24} \text{J}$$

c. Frekuensi gerak presesi

$$\vec{\omega}_L = \frac{\mu_B B}{\hbar} = \frac{9,27x10^{-24}x5}{6,63x10^{-34}} = 7,0x10^{10} Hz$$

2. Berapakah besarnya derajat degenerasi dari fungsi eigen atom hidrogen dalam keadaan n= 1, 2, dan 3. Anggaplah bahwa presentasi keadaan kuantum dinyatakan dengan  $(n, \ell, m_\ell, m_s)$ .

Jawab.

Sistem atom hidrogen dipresentasikan dengan  $(n, \ell, m_\ell, m_s)$  untuk harga n yang tertentu, harga  $\ell$  dapat:  $0,1,2,\ldots$  (n-1)

Sedangkan untuk setiap harga  $\ell$  tertentu, harga  $m_{\ell}$  dapat:

$$m_{\ell} = -\ell, -\ell(\ell-1), -\ell(\ell-2), \dots, 0, 1, 2, \dots, (\ell-1), \ell$$

Jumlahnya adalah  $(2\ell+1)$  buah harga  $m_\ell$  untuk setiap  $\ell$  tertentu.

Jumlah total harga  $m_\ell$  yang ada untuk semua harga  $\ell$ :

$$\sum_{\ell=0}^{(n-1)} (2\ell+1) = 1+3+4+\dots+(2n-3)+(2n-1) = (2n)\frac{n}{2} = n^2$$

Sedangkan  $m_{\ell}$  dapat berharga +1/2, -1/2 ini berarti bahwa setiap keadaan yang ditandai oleh bilangan kuantum utama n, mempunyai tingkat degenerasi  $2n^2$ .

# BAB IX PENERAPAN METODE SCHRODINGER PADA SISTEM ATOM HIDROGEN (Dengan Kaitan Spin-Lintas Edar)

Setelah mempelajari buku ini anda diharapkan memiliki kemampuan untuk dapat:

- 1. Menjelaskan ikatan gerak gasing dan lintasan edar
- 2. Menjelaskan momentum anguler total dan gambaran kuantum
- 3. Menjelaskan hubungan antara harga J dengan harga  $\ell$  dan s
- 4. Menjelaskan persoalan nilai eigen yang menyangkut momentum anguler total
- 5. Menjelaskan evaluasi energi pertautan  $(\vec{L} \cdot \vec{S})$
- 6. Menjelaskan sistem atom hidrogen dengan pertautan  $(\vec{L} \cdot \vec{S})$  dalam medan  $\vec{B}$

#### 9.1 Pendahuluan

Penyajian tentang metode Schrodinger pada sistem atom hidrogen telah dilakukan secara bertahap, sebagai berikut:

- 1. Pada model yang paling sederhana, dengan satu elektron yang berputar dalam ruang mengelilingi inti yang bermuatan +Ze.
- 2. Model yang sama seperti bagian (1), tetapi dimana perhatian terutama ditujukan kepada interpretasi tentang beberapa hal yang berkaitan dengan bentuk matematika persamaan Schrodinger.
- 3. Model yang lebih disempurnakan, dimana diperhitungkan gerak-gasing (spin) elektron.

Dalam pembahasan pada bab ini, akan dikemukakan model yang lebih disempurnakan lagi, yaitu dimana turut diperhitungkan juga kaitan yang ada antara gerak-gasing elektron dan gerak elektron tersebut mengelilingi inti atom +Ze (gerak orbital).

Bila antara  $\vec{L}$  dan  $\vec{S}$  tidak ada interaksi, maka dalam ruang bebas (tanpa medan gaya luar), tak ada momen gaya yang bekerja, baik pada  $\vec{L}$ , maupun pada  $\vec{S}$ . Dalam keadaan ini tak terjadi kuantisasi ruang, baik bagi  $\vec{L}$ , maupun bagi  $\vec{S}$ . Penelaahan seksama sesungguhnya menunjukkan adanya interaksi

Selanjutnya dengan mengeliminasi persamaan (7-3) ke persamaan(7-2), maka diperoleh:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{V} x \frac{\vec{F}_e}{e}$$

Kerna: $c^2 = \mu_o \varepsilon_o$ , maka diperoleh persamaan:

$$\vec{F}_e = -\frac{dV(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$$

Sedangkan momentum anguler lintas edar elektron dinyatakan sebagai:

$$\vec{L} = -m_o(\vec{V}x\vec{r})$$

Sedangkan induksi magnetik di tempat elektron adalah:

$$\vec{B}_i = \frac{1}{em_o c^2} \left[ \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \right] \vec{L}$$

#### 9.2 Ikatan Gerak Gasing dan Lintasan Edar

Energi potensial  $V_{S,L}$  untuk momen dipol spin elektron dalam medan $\vec{B}_i$  internal yang berasal dari gerak nisbi inti atom terhadap elektron adalah:

$$V_{\vec{S}.\vec{L}} = -\vec{\mu}_S \vec{B}_i = \frac{g_{s\mu_B}}{\hbar} \vec{S}.\vec{B}_i$$

Tenyata bahwa apabila keadaan dikembalikan pada situasi dimana elektron bergerak dan inti atom bergerak ternyata ada transformasi yang memberikan hasil akhir.

$$V_{\vec{S}.\vec{L}} = \frac{1}{2m^2 oC^2} \frac{1}{r} \left[ \frac{dV(r)}{dr} \right] (\vec{S}.\vec{L})$$

Inilah yang dinamakan kaitan spin-orbit, atau spin-orbit coupling. Ikatan  $(\vec{S}.\vec{L})$  ini mengubah gambaran gerak elektron dari yang digambarkan dalam bab Sebelumnya. Apabila ikatan  $\vec{L}$  dan  $\vec{S}$  kuat, maka  $\vec{L}$  dan  $\vec{S}$  masingmasing berinteraksi langsung dengan medan magnet luar. Dengan ikatan kuat

$$\langle J^2 \rangle = j_2(j_2+1)\hbar^2$$

Sekarang  $\vec{j}$  berharga maksimum apabila $\vec{j}_1$ dan  $\vec{j}_2$  sejajar, pada kesempatan mana  $J=j_1+j_2$ , yang disebut saja  $J_{maks}$ 

 $\vec{J}$  berharga minimum apabila  $\vec{J}_1$ dan  $\vec{J}_2$  berlawanan arah,sehingga pada  $\vec{J}$  kesempatan itu:

 $j_{min}=j_1-j_2$ ,andaikan  $j_1>j_2$ , sehingga harga  $\vec{J}$ ,yang dibataskan sebagai  $\vec{J}=\vec{J}+\vec{J}_2$  mungkin

Mempunyai harga:

$$j = j_{mak}(j_{mka}^{-1}), (j_{mka}^{-2}), ... ... (j_{min}^{+1}), j_{min}$$

#### Contoh Soal

1. Carilah harga j dan  $m_i$  untuk keadaan dengan  $\ell = 2$  dan s = 1/2

Harga j yang mungkin adalah j =5/2 dengan

$$m_i = 5/2, 3/2, 1/2, -1/2, -3/2, -5/2;$$
dan

Harga j = 3/2 dengan  $m_j = 3/2, 1/2, -1/2, -3/2,$ 

$$\langle J \rangle = \hbar \frac{\sqrt{35}}{2} \langle J \rangle = \hbar \frac{\sqrt{35}}{2}$$

$$j=5/2$$
  $j=3/2$ 

$$\langle J^2 \rangle = \left(\frac{5}{2}\right) \left(\frac{5}{2} + 1\right) \hbar^2 \langle J^2 \rangle = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2} + 1\right) \hbar^2$$

$$\langle J_Z \rangle = \frac{5\hbar}{2}, \frac{3\hbar}{2}, \frac{\hbar}{2}, -\frac{\hbar}{2}, -\frac{3\hbar}{2}, -\frac{5\hbar}{2} \langle J_Z \rangle = \frac{3\hbar}{2}, \frac{\hbar}{2}, -\frac{\hbar}{2}, -\frac{3\hbar}{2},$$

#### 9.5 Persoalan Nilai Eigen yang Menyangkut Momentum Anguler Total

Apabila pertautan kuat maka yang berperan adalah  $\vec{j}$  dan bukan  $\vec{s}$  lagi. Jadi representasi dengan perangkat bilangan kuantum  $(n,m,m_\ell,m_s)$  tidak dapat dipergunakan lagi.

Sehingga pergeseran harga energi karena pengaruh  $\vec{B}$  adalah:

$$\Delta E = \langle E^1 \rangle - E_n$$

$$\Delta E = \langle n, \ell, j, m_j | V_{S.\hat{L}} | n, \ell, j, m_j \rangle$$

Selanjutnya kita mengevaluasi  $\langle |V_{S>\hat{L}}\rangle$ , sebelum menentukan hasil dari operator ini,

Kita terlebih dahulu meninjau  $\vec{j} = \vec{L} + \vec{S}$ 

$$\vec{l} \cdot \vec{l} = \vec{L} \cdot \vec{L} + 2\vec{S} \cdot \vec{L} + \vec{S} \cdot \vec{S}$$

Atau dapat dinyatakan sebagai:

$$\vec{L}.\vec{S} = \frac{1}{2}[J^2 - L^2 - S^2]$$

Sehingga hubungan operatornya:

$$(\vec{L}.\vec{S})_{op} = \frac{1}{2} [J_{OP}^2 - L_{OP}^2 - S_{OP}^2]$$

$$\left(\vec{L}.\vec{S}\right)_{op}|n,\ell,j,m_j\rangle = \frac{1}{2}\left[j(j+1)\hbar^2 - \ell(\ell+1)\hbar^2 - \frac{3}{4}\hbar^2\right]|n,\ell,j,m_j\rangle$$

Diperoleh bahwa: 
$$\left\langle n, \ell, j, m_j \middle| \left(\vec{L}.\vec{S}\right)_{op} \middle| n, \ell, j, m_j \right\rangle = \frac{\hbar^2}{2} \left[ j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right]$$

Hasil di atas dapat diterapkan untuk menentukan  $\langle V_{S,L} \rangle$ 

$$\langle V_{S.L} \rangle = \frac{\hbar^2}{4m_o^2 C^2} \left[ j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right] \langle \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \rangle$$

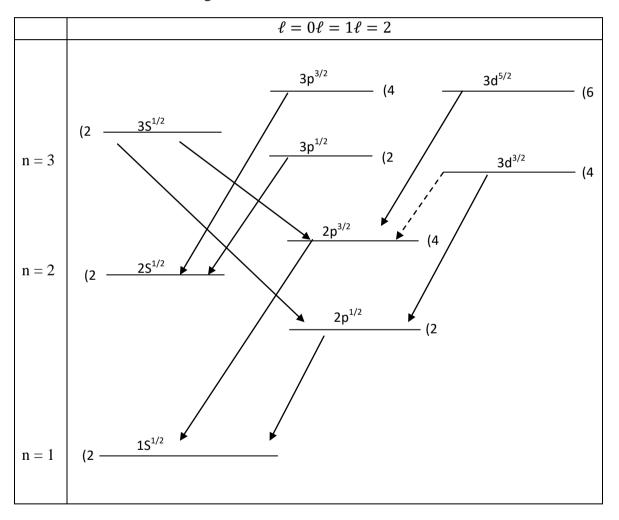
Dengan:

$$\langle \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \rangle = \left\langle n, \ell, j, m_j \middle| \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \middle| n, \ell, j, m_j \right\rangle$$

Apabila digunakan notasi:

$$\Delta \ell = \pm 1$$
  $\Delta j = 0, \pm 1$   $\Delta m_j = 0, \pm 1$ 

Tabel 9.1 Tingkat Energi Atom Hidrogen dengan Pertautan  $(\vec{L} \cdot \vec{S})$ , tanpa medan magnet luar



Menurut fisika lanjut:

$$A_o = \frac{|E_n|Z^2\alpha^2}{2n\ell(\ell+1)\left(\ell+\frac{1}{2}\right)}$$

Besarnya kira-kira $10^{-14}$  kali beda energi ( $\Delta E_n$ ).

Dengan  $\vec{j}_o$  adalah vector satuan dalam arah  $\vec{j}$ ;  $\vec{j}_o = \frac{\vec{j}}{|\vec{j}|}$ 

Oleh karena itu:

$$[\vec{\mu}_H]_J = -\frac{e}{2m_o} \left( 1 + \frac{\vec{S} \cdot \vec{J}}{|\vec{\vec{J}}|^2} \right) \vec{J}$$

Bilangan kuantum dalam sistem hanyalah  $(n,\ell,j,m_j)$ . Oleh karena itu dalam ungkapan diatas  $\vec{S}$  harus dieminasai.Hal itu dapat dilakukan melalui hubungan:

$$\vec{j} = \vec{j} + \vec{s}$$
atau  $\vec{L} = \vec{J} - \vec{S}$ ,

dari mana diperoleh:

$$L^2 = J^2 + S^2 - 2\vec{J} \cdot \vec{S}$$

Dalam ungkapan diatas diperoleh:

$$\vec{J} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2} [J^2 + S^2 - L^2]$$
, atau

$$[\vec{\mu}_H]_J = -\frac{e}{2m_o} \left[ 1 + \frac{J^2 + S^2 - L^2}{2|\vec{J}|^2} \right] \vec{J}$$

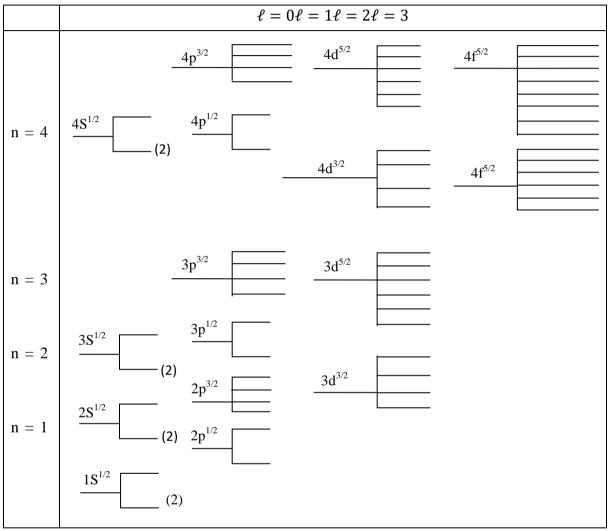
Energi potensial momen dipole magnetik adalah:

$$V_B = -[\vec{\mu}_H]_J \bullet \vec{B}$$

Apabila  $\vec{B}$  merepresentasikan induksi magnet medan luar, maka ungkapan untuk operatornya adalah:

Sketsa tingkat energinya dapat dilihat dibawah ini.

Tabel 9.2 Sketsa Tingkat Energi Untuk Sistem Atom Hidrogen Dalam Medan  $\vec{B}$  Luar. Sistem Bilangan Kuantum  $(n, \ell, j, m_j)$ 



Penampilan spin elektron diperlukan apabila relativitas tidak dipertimbangkan, jadi teori fisika kuantum yang tak-relativistik. Dengan penampilan spin itu dapat diterangkan gejala-gejala yang diamatidalam spektrum pancaran atom hidrogen.

Spektrum halus yang ditelah disebutkan sebelumnya memberikan pegeseran harga energi yang hampir sama dengan  $\langle V_{S.L} \rangle$ . Sumber struktur halus adalah efek relativistik, karena berubahnya massa elektron dengan kecepatannya. Baik  $\langle V_{S.L} \rangle$  maupun struktur halus bersumber pada kenisbian, tetapi dari aspek yang berlainan.

Jawab:

a. 
$$|L| = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1)} = \hbar \sqrt{3(3+1)} = \hbar \sqrt{12}$$

b. dan c.

$m_\ell < \ell$	$(n,\ell,m)$	$L_{\rm Z}$	$\theta = \arccos\left(\frac{L_Z}{ L }\right)$
0	(4,3,0)	0	90
+1	(4,3,1)	ħ	45
0	(4,3,0)	0	90
-1	(4,3,-1)	-ħ	45
2	(4,3,2)	2ħ	35
+1	(4,3,1)	ħ	60
0	(4,3,0)	0	90
-1	(4,3,-1)	-ħ	114
-2	(4,3,-2)	-2ħ	30
+3	(4,3,3)	3ħ	26
+2	(4,3,2)	2ħ	55
+1	(4,3,1)	ħ	73
0	(4,3,0)	0	90
-1	(4,3,-1)	-ħ	107
-2	(4,3,-2)	-2ħ	125
-3	(4,3,-3)	-3ħ	150

# Latihan

- 1. Carilah harga j dan  $m_i$  untuk keadaan dengan  $\ell=3$  dan  $S=\frac{1}{2}$ .
- 2. Tentukan transisi-transisi berikut ini dengan memperhitungkan spin elektron.

- 3. Sebuah elektron berada pada keadaan n = 5,  $\ell$  = 4 dari atom hidrogen.
  - a. Berapa panjangkah vektor momentum sudut elektron?
  - b. Berapa banyakkah komponen Z berbeda yang mungkin dapat dimiliki vektor momentum sudut?
  - c. Sudut-sudut berapakah yang dibuat oleh vektor  $\ell$  terhadap sumbu Z?

Berpangkal dari operator linier tertentu dapat dibuat operator linier yang baru melalui operasi aljabar sebagai berikut.

a. perkalian operator dengan suatu tetapan c:

$$\left[ cA_{op} \right] \psi \equiv c \left[ A_{op} \psi \right]$$

b.  $jumlah dua operator A_{op} dan B_{op}$ 

$$S_{op}\psi \equiv A_{op}\psi + B_{op}\psi$$

c. hasil kali dua operator A<sub>op</sub> dan B<sub>op</sub>

$$P_{op}\psi \equiv A_{op}B_{op} \psi \equiv A_{op}[B_{op}\psi]$$

Khusunya tentang butir c di atas dapat dinyatakan disini bahwa tidak selamanya  $A_{op}\;B_{op}=B_{op}\;A_{op}.$ 

#### 10.2 Harga Ekspektasi dan Persoalan Nilai Eigen

Apakah ada syarat yang harus dipenuhi oleh suatu operator mekanika kuantum?. Karena operator linier  $A_{op}$  ber-kaitan dengan variabel dinamika A, maka tentunya diinginkan agar harga ekspektasi  $\langle A \rangle$  yang diperoleh dengan memper-gunakan operator  $A_{op}$  adalah riel, jadi Persamaan (10.2) harus riel.

$$\langle A \rangle = \frac{\langle \psi | A_{op} \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \tag{10.2}$$

 $\langle A \rangle$ adalah riel apabila harga tersebut sama dengan kompleks konjugatenya, yakni:

$$\langle A \rangle = \langle A \rangle^* \tag{10.3}$$

Maka ini berarti bahwa:

$$\frac{\langle \psi | A \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{\langle \psi | A \psi \rangle^*}{\langle \psi | \psi \rangle^*} \tag{10.4}$$

$$e^{i\alpha}\left[\left\langle \phi \middle| \mathbf{A}_{\mathrm{op}}\psi \right\rangle - \left\langle \mathbf{A}_{\mathrm{op}}\phi \middle| \psi \right\rangle \right] = e^{-i\alpha}\left[\left\langle \mathbf{A}_{\mathrm{op}}\psi \middle| \phi \right\rangle - \left\langle \psi \middle| \mathbf{A}_{\mathrm{op}}\phi \right\rangle \right]$$

Ini berlaku untuk setiap harga α, jika dan hanya jika :

$$\langle \phi | A_{op} \psi \rangle = \langle A_{op} \phi | \psi \rangle$$
 dan

$$\langle \psi | \mathbf{A}_{op} \phi \rangle = \langle \mathbf{A}_{op} \psi | \phi \rangle$$
 (10.6)

Atau

$$\langle \phi | A_{op} \psi \rangle = \langle \psi | A_{op} \phi \rangle^*$$
 dan

$$\langle \psi | A_{\text{op}} \phi \rangle = \langle \phi | A_{\text{op}} \psi \rangle^*$$
 (10.7)

Dari mekanika kuantum telah diketahui bahwa pengukurannya berlandaskan kebolehjadian, sehingga kita harus berbicara tentang harga ekspektasi dan statistik harga variabel dinamik-nya. Dalam statistik maka ukuran yang penting adalah  $\delta A = A - \langle A \rangle$ ,

dan  $\Delta A = \left[\left\langle \left(\delta A\right)^2\right\rangle\right]^{\frac{1}{2}}$  atau  $\left(\Delta A\right)^2 = \left\langle \left(\delta A\right)^2\right\rangle$  apabila dijabarkan maka diperoleh bahwa:

$$\left(\Delta A\right)^2 = \left\langle A^2 \right\rangle - \left\langle A \right\rangle^2 \tag{10.8}$$

Pertantayaan sekarang adalah: Apakah ada situasi dengan  $\Delta A = 0$ ?, artinya tidak ada fluktuasi statistik untuk harga variabel dinamika A?

$$\left\langle \mathbf{A}^{2}\right\rangle = \frac{\left\langle \psi \,\middle|\, \mathbf{A}_{\mathrm{op}}^{2} \psi \,\middle|\, \right\rangle}{\left\langle \psi \,\middle|\, \psi \,\middle|\, \right\rangle}$$

$$\left\langle \mathbf{A} \right\rangle^2 = \frac{\left\langle \psi \, \middle| \, \mathbf{A}_{\text{op}} \psi \right\rangle^2}{\left\langle \psi \, \middle| \, \psi \right\rangle^2}$$

Apabila tidak fluktuasi  $\Delta A = 0$ , maka  $\langle A^2 \rangle = \langle A \rangle^2$ 

#### Contoh 10.1

Momentum linier suatu partikel yang bergerak dalam ruang bebas, momentumnya berharga pasti dan tertentu, yakni:

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$
 dengan  $\left| \vec{k} \right| = (2m_o E)^{\frac{1}{2}}$ .

# 10.3 Sifat-sifat Operator Mekanika Kuantum

Untuk memudahkan penyajiannya maka sifat-sifat operator mekanika kuantum ditampilkan dalam seperangkat teorema.

#### Teorema I:

Operator Hamilton untuk parikel tunggal dalam medan potensial V(r) adalah operator Hermit.

Bukti:

V(r) adalah operator perkalian saja, oleh karena itu bersifat Hermit.

## **Contoh 10.2.**

Apakah operator  $\nabla^2$  bersifat Hermit?

#### Penyelesaian:

Andaikanlah bahwa  $\varphi$  dan  $\psi$  merupakan fungsi gelombang untuk H. Perhatikan operasi di bawah ini:

$$\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \psi^*) = (\vec{\nabla} \varphi) \cdot (\vec{\nabla} \psi^*) + \varphi \nabla^2 \psi^*$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\psi^* \vec{\nabla} \varphi) = (\vec{\nabla} \psi^*) \cdot (\vec{\nabla} \varphi) + \psi^* \nabla^2 \varphi$$

Pengurangan dan integrasi ruas kiri:

$$\int \left\{ \vec{\nabla} \cdot \left( \varphi \vec{\nabla} \, \psi^* \right) - \vec{\nabla} \cdot \left( \psi^* \vec{\nabla} \varphi \right) \right\} d\tau = \int \left\{ \varphi \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \varphi \right\} d\tau$$

Karena  $\varphi$  dan  $\varphi^*$  sama dengan nol di daerah tak berhingga (solusi persamaan gelombang). Oleh karena itu ruas kanan sama dengan nol, sehingga:

$$\int \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\tau = -\int \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \varphi d\tau$$

Perkalikan dengan  $-i\hbar$ :

$$\int \varphi^* \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \varphi \right) d\tau = \int \left( i\hbar \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \right) \varphi d\tau$$

Karena ini berlaku juga untuk koordinat y, maupun z, maka persamaan tersebut dapat diluaskan menjadi:

$$\int \varphi^* \left( -i\hbar \vec{\nabla} \varphi \right) d\tau = \int \left( -i\hbar \vec{\nabla} \varphi \right)^* \varphi d\tau$$

Jadi  $-i\hbar\vec{\nabla}$  adalah merupakan operator Hermit.

# **Contoh 10.3.**

Apakah operator  $L_{op}^2$  adalah operator Hermit?.

Penyelesaian

Oleh karena  $p_{xop}$ ,  $p_{yop}$ , dan  $P_{zop}$  operator Hermit dan  $x_{op}$ ,  $y_{op}$ ,  $z_{op}$  selain operator juga riel, maka operator momentum  $L_{xop}$ ,  $L_{yop}$ ,  $L_{zop}$  operator Hermit, maka  $L_{op}^2$  juga operator Hermit.

#### **Teorema III:**

Andaikanlah bahwa himpunan  $\{\varphi_i\}$  merupakan fungsi eigen dari suatu operator  $A_{op}$  dengan nilai eigen yang berlainan  $\{a_i\}$  maka  $\{\varphi_i\}$  merupakan fungsi ortogonal meliputi seluruh daeah dimana  $A_{op}$  operator Hermit.

Bukti:

Pandanglah dua fungsi eigen  $\, \varphi_{\scriptscriptstyle k} \,$  dan  $\, \varphi_{\scriptscriptstyle \ell} \,$  . Karena  $\, A_{\rm op} \,$  operator Hermit, maka:

$$\langle A \rangle = \langle \varphi_i | A_{op} \varphi_i \rangle = a_i$$
 (10.12)

$$\langle B \rangle = \langle \varphi_i | B_{op} \varphi_i \rangle = b_i$$

Keduanya mempunyai harga yang pasti (dianggap bahwa  $\varphi_i$  dinormalisasikan, sehingga  $\langle \varphi_i | \varphi_i \rangle$  = 1).

#### Teorema V:

Apabila dua operator  $A_{op}$  dan  $B_{op}$  mempunyai perangkat fungsi eigen yang sama maka:

$$A_{op}B_{op} = B_{op}A_{op}$$

Bukti:

$$A_{op} \lceil B_{op} \varphi_i \rceil = A_{op} b_i \varphi_i = b_i \lceil A_{op} \varphi_i \rceil = b_i a_i \varphi_i$$

$$B_{op}\left[A_{op}\varphi_i\right] = B_{op}a_i\varphi_i = a_i\left[B_{op}\varphi_i\right] = a_ib_i\varphi_i$$

Oleh karena itu:

$$A_{op}B_{op}\varphi_i = B_{op}A_{op}\varphi_i \tag{10.13}$$

Karena  $\varphi_i \neq 0$ , maka  $A_{op}B_{op} = B_{op}A_{op}$ . Diktehui bahwa  $A_{op}$  dan  $B_{op}$  berkomutasi.  $A_{op}B_{op} = B_{op}A_{op}$ , berarti bahwa  $A_{op}B_{op} - B_{op}A_{op} = 0$ .  $A_{op}$  dan  $B_{op}$ berkomutasi, berarti  $\left[ A_{op}, B_{op} \right] = 0.$ 

#### **Teorema VI:**

Apabila  $A_{op}$  dan  $B_{op}$  berkomutasi, maka fungsi eigen kedua operator tersebut adalah perangkat yang sama.

Bukti:

# **Teorema VII:**

Apabila  $A_{op}$  dan  $B_{op}$  berkumutasi, maka harga nilai ekspektasi  $\langle A \rangle$  dan  $\langle B \rangle$  dapat diukur secara serentak dengan kepastian.

Bukti:

Menurut teorema VI karena  $A_{op}$  dan  $B_{op}$  berkomutasi maka kedua operator itu mempunyai perangkat fungsi eigen yang sama  $\{\varphi_i\}$ .

$$A_{op}\varphi_i = a_i\varphi_i$$

$$B_{op}\varphi_i = b_i\varphi_i$$

Darimana diperoleh bahwa:

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \langle \varphi_i | A_{op} \varphi_i \rangle = a_i \langle \varphi_i | \varphi_i \rangle$$

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \langle \varphi_i | B_{op} \varphi_i \rangle = b_i \langle \varphi_i | \varphi_i \rangle$$
(10.16)

Kedua besaran dinamiknya dapat ditetapkan dengan pasti secara serentak.

# 10.4 Komutator dan Prinsip Ketidakpastian

Andaikanlah  $A_{op}$  dan  $B_{op}$ , bagaimanakah sifat operator  $\left[A_{op},B_{op}\right]$ ?  $A_{op}$  dan  $B_{op}$  Hermit. Bataskan :  $D_{op} \equiv \left[A_{op},B_{op}\right]$ . Andaikanlah bahwa  $\varphi$  dan  $\psi$  merupakan fungsi dari ruang fungsi dimana  $A_{op}$  dan  $B_{op}$  beroperasi.

$$egin{aligned} raket{arphi D_{op} \psi} &= raket{arphi | A_{op}, B_{op} | \psi} \end{aligned}$$
 $= raket{arphi | A_{op} B_{op} \psi} - raket{arphi | B_{op} A_{op} \psi}$ 
 $raket{D_{op} \varphi | \psi} &= raket{A_{op} B_{op} \varphi | \psi} - raket{B_{op} A_{op} \varphi | \psi}$ 

#### **Contoh 10.4.**

Andaikan bahwa  $[A_{op},B_{op}]=iC_{op}$ ;  $A_{op}$  dan  $B_{op}$  operator Hermit. Hubungan apakah yang ada diantara  $\langle A \rangle;\langle B \rangle;dan \ \langle C \rangle$ ?

Penyelesaian:

Perhatikan sifat operator  $F_{op} = A_{op} + i\lambda B_{op}$  dengan  $A_{op}$  dan  $B_{op}$  operator Hermit. Jelas bahwa apabila  $\varphi$  merupakan fungsi dari ruang fungsi dimana baik  $A_{op}$  dan  $B_{op}$  beroperasi:

$$\langle F_{op}\varphi | F_{op}\varphi \rangle = \int |F_{op}\varphi|^2 d\tau \ge 0$$

Darimana diperoleh bahwa:

$$\langle (A_{op} + i\lambda B_{op})\varphi | (A_{op} + i\lambda B_{op})\varphi \rangle \geq 0$$

Karena baik  $A_{\text{op}}$  , maupun  $\;B_{\text{op}}$  operator-operator Hermit, maka:

$$\langle \varphi | (A_{op} - i\lambda B_{op}) (A_{op} + i\lambda B_{op}) \varphi \rangle \ge 0$$

$$\langle \varphi | (A_{op}^2 + \lambda^2 B_{op}^2 - \lambda C_{op}) \varphi \rangle \ge 0$$

Ungkapan di atas dapat dijabarkan menjadi:

$$\langle A^2 \rangle + \lambda^2 \langle B^2 \rangle - \lambda \langle C \rangle \ge 0$$

Pertidaksamaan ini berlaku untuk semua  $\lambda$ . Ruas kiri mem-punyai harga terkecil apabila:

$$\lambda = \frac{\langle C \rangle}{2 \langle B^2 \rangle}$$
; diangga  $\langle B^2 \rangle \neq 0$ , dimana

 $\langle A^2 \rangle + \lambda^2 \langle B^2 \rangle - \lambda \langle C \rangle = 0$ , dengan harga  $\lambda$  tersebut diperoleh:

ketidakpastian dalam harga dua besaran itu apabila diukur secara serentak, adalah lebih besar dari suatu harga minimum tertentu.

Ini adalah prinsip Heisenberg dalam bentuknya yang paling umum.

## **Contoh 10.6.**

Tunjukkan bahwa pernyataan tersebut di atas dapat diterapkan untuk menentukan hubungan :

$$(\Delta x)(\Delta p_x) \ge \frac{\hbar}{2}$$

Penyelesaian:

Operator:  $p_{xop} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ ; operator  $x_{op} = x$ , sehingga:

$$\left(x_{op} p_{xop} - p_{xop} x_{op}\right) = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} x\right) = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} x\right) = i\hbar$$

Jadi:

$$\left[x_{op}, p_{xop}\right] = i\hbar$$

Dengan menerapkan persamaan  $(\Delta A)(\Delta B) \ge \frac{1}{2} \langle C \rangle$ , maka diperoleh:  $(\Delta x)(\Delta p_x) \ge \frac{\hbar}{2}$ .

#### Contoh 10.7

Jika diketahui  $(\Delta \varphi)$  dan  $(\Delta L_z)$  Tunjukkan bahwa dengan menerapkan persamaan  $(\Delta A)(\Delta B) \geq \frac{1}{2} \langle C \rangle$ , maka diperoleh:

$$(\Delta \varphi)(\Delta L_z) \geq \frac{\hbar}{2}$$

Penyelesaian:

$$L_{zop} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$
 dimana :  $\varphi_{op} = \varphi$  . Sehingga :

Perhatikan: 
$$\frac{d}{dt}\langle Q \rangle = \frac{d}{dt}\langle \psi | Q_{op}\psi \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} | Q_{op}\psi \rangle + \left\langle \psi | Q_{op} \frac{d\psi}{dt} \right\rangle$$

Diketahui bahwa:

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = H_{op}\psi \text{ dan -i}\hbar \frac{d\psi^*}{dt} = H_{op}\psi^* \text{ dengan } H_{op} \text{ adalah operator}$$

Hamilton. Sehingga diperoleh:

$$\frac{d}{dt}\langle Q \rangle = \frac{1}{i\hbar} \left( -\langle H_{op} \psi | Q_{op} \psi \rangle + \langle \psi | Q_{op} H_{op} \psi \rangle \right)$$

Karena  $H_{\text{op}}$  merupakan operator Hermit, maka berlaku:

$$\langle H_{op}\psi | Q_{op}\psi \rangle = \langle \psi | H_{op}Q_{op}\psi \rangle$$

Darimana diperoleh:

$$\begin{split} \frac{d}{dt} \langle Q \rangle &= \frac{1}{i\hbar} \Big( \langle \psi | Q_{op} H_{op} \psi \rangle - \langle \psi | Q_{op} H_{op} \psi \rangle \Big) \\ &= \frac{1}{i\hbar} \Big( \langle \psi | \Big[ Q_{op}, H_{op} \Big] \psi \rangle \Big) \end{split}$$

Jadi perubahan ekspektasi terhadap waktu adalah:

$$\frac{d}{dt}\langle Q\rangle = \frac{1}{i\hbar} \left( \langle \psi | \left[ Q_{op}, H_{op} \right] \psi \rangle \right) \tag{10.22}$$

Apabila  $Q_{op}$  berkomutasi dengan  $H_{op}$  maka jelaslah bahwa  $\frac{d}{dt}\langle Q\rangle = 0$ ,  $\langle Q\rangle$  tidak berubah dengan waktu.

#### **Teorema IX:**

Harga ekspektasi suatu operator yang berkomutasi dengan operator Hamilton suatu sistem mekanika kuantum, tidak berubah dengan waktu.

$$-\frac{\hbar^2}{2m_o}\nabla^2\psi + V(\vec{r})\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

Dengan melakukan inversi (refleksi terhadap titik asal koordinat (0,0,0)), maka persamaan di atas menjadi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_o}\nabla^2\psi + V(-\vec{r})\psi(-\vec{r}) = E\psi(-\vec{r})$$
(10.24)

Apabila  $V(\vec{r}) = V(-\vec{r})$ , maka kedua persamaan SchrÖdinger tersebut di atas setara, artinya bahwa fungsi eigen  $\psi(-\vec{r})$  hanya berbeda suatu tetapan dibandingkan dengan  $\psi(\vec{r})$ .

$$\psi(-\vec{r}) = \alpha \psi(\vec{r})$$

Apabila  $\psi(-\vec{r})$  diinversikan kembali, maka diperoleh

$$\psi(\vec{r}) = \alpha \psi(-\vec{r}) = \alpha^2 \psi$$

Darimana diperoleh bahwa:

$$\alpha^2 = 1$$
 atu  $\alpha = +1$  atau  $\alpha = -1$  (10.25)

Dari sini diperoleh bahwa apabila potensial  $V(\vec{r})$  setangkup terhadap (0,0,0) maka fungsi eigen  $\psi(\vec{r})$  memiliki paritas tertentu, dapat berparitas ganjil, artinya :

$$\psi(-\vec{r}) = -\psi(\vec{r}) \tag{10.26}$$

Atau dapar berparitas genap, paritas genap, yakni

$$\psi(-\vec{r}) = \psi(\vec{r}) \tag{10.27}$$

Disini dianggap bahwa keadaan tidak degerate. Untuk membedakan antara dua paritas tersebut, maka fungsi diberi indeks, untuk :

Fungsi berparitas genap :  $\psi_{+}(\vec{r})$ 

Fungsi berparitas ganjil : 
$$\psi_{-}(\vec{r})$$
 (10.28)

- 5. Tuliskan hubungan antara kumutator dan prinsip ketidakpastian.
- 6. Apakah yang dimaksud dengan harga ekspektasi?

## B. Penerapan Konsep

1. Jika Â,Â,danĈ adalah tiga operator riel. Tunjukkan bahwa:

a. 
$$\left[\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}\right] = \left[\hat{A}, \hat{C}\right] + \left[\hat{B}, \hat{C}\right]$$

b. 
$$\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right] = \hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right] + \left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{B}$$

- 2. Jika  $\hat{A}$  dan  $\hat{B}$  keduanya Hermitian, tunjukkan bahwa  $\hat{A}\hat{B}$  adalah Hermitian jika  $\left[\hat{A},\hat{B}\right] = 0$
- 3. Diberikan operator  $\hat{x}$  dan  $\hat{p}$  yang fungsi-fungsinya di dalam ruang Hilber dan sesuai dengan  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ , tunjukkan bahwa jika  $\hat{x} = x$  (yakni perkalian dengan x), maka  $\hat{p}$  menyatakan

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + f(x)$$

4. Sebuah partikel di dalam potensial satu dimensi V(x), tunjukkan bahwa

$$\Delta E \Delta x \ge \frac{\hbar}{2m} \langle p_x \rangle$$

5. Andaikan tiga operator yang terukur,  $\,\hat{A},\hat{B}\,$  dan  $\,\hat{C}$  , jika diketahui bahwa:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{A}} \operatorname{dan} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{C}} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{B}}$$

Tunjukkan bahwa:

$$\Delta(AB)\Delta C \ge \frac{1}{2}\langle A^2 + B^2 \rangle$$

- 6. Apabila g(x) adalah fungsi terhadap x, tunjukkan bahwa :  $\left[\hat{p}_x, g\right] = -i\hbar \frac{dg}{dx}$
- 7. Jika g(x) dan f(x) adalah fungsi-fungsi analitik, tunjukkan bahwa:

$$g(\hat{A})f(\varphi) = g(a)f(\varphi)$$
 dimana  $\hat{A}\varphi = a\varphi$ 

# BAB XI TEORI PERTURBASI

Setelah mempelajari buku ini anda diharapkan memiliki kemampuan untuk dapat:

- 1. Menjelaskan toeri perturbasi bebas-waktu
- 2. Menjelaskan perturbasi orde pertama
- 3. Menjelaskan perturbasi orde kedua
- 4. Menjelaskan teori perturbasi bergantung waktu
- 5. Menjelaskan perturbasi harmonik
- 6. Menjelaskan perturbasi fungsi tangga
- 7. Menjelaskan limit keberlakuan Golden Rule

#### 11.1 Pendahuluan

Pada bab sebelumnya kita telah berkenalan dengan berbagai persoalan di mana fungsi eigen dan nilai eigen dari beberapa operator. Salah satu bentuk khusus yaitu solusi nilai eigen energi pada persamaan Schrödinger bebas waktu (keadaan tunak) yang dinyatakan dengan :

$$\mathbf{E}_n \psi_m = \mathbf{H} \psi_m$$

Dalam bab ini kita akan membahas efek pada energi  $E_m$  dan pada fungsi eigen  $\psi_m$  dengan gangguan kecil (*small perturbations*) Hamiltonian **H**. Beberapa gangguan kecil ang dimaksud umumnya diakibatkan oleh keberadaan medan listrik dan medan magnetik atau dari interaksi dengan partikel-partikel lain. Jika solusi eksak dari persamaan Schrödinger tidak memungkinkan, metode perturbasi yang akan dibahas berikut ini adalah metode praktis dalam mekanika kuantum.

#### 11.2 Toeri Perturbasi Bebas – Waktu

Diberikan sebuah Hamiltonian  $\mathbf{H}$ , fungsi eigennya  $\psi_n$ , dan nilai eigen  $E_n$ , sehingga

$$\mathbf{H} \ \psi_m = \mathbf{E}_m \psi_m \tag{11.1}$$

$$\psi_0 = \psi_m$$

$$W_0 = E_m \tag{11.4b}$$

di mana  $\psi_n$  dan  $E_n$  adalah fungsi eigen dan nilai eigen pada keadaan perturbasi. Berikutnya kita ekspansi  $\psi_1$  dalam bentuk  $\psi_n$  sebagai

$$\psi_1 = \sum_n a_n^{(1)} \, \psi_n \tag{11.5}$$

dan substitusi ke dalam persamaan (11.4a), diperoleh

$$\sum_{n} a_{n}^{(1)} E_{n} \psi_{n} + H' \psi_{m} = E_{m} \sum_{n} a_{n}^{(1)} \psi_{n} + W_{1} \psi_{m}$$

dikalikan dengan  $\psi_k^*$ , kemudian mengintegrasi dan mengingat bahwa  $\langle \psi_n | \psi_k \rangle = \delta_{kn}$ , memberikan

$$E_k a_k^{(1)} + H_{km} = E_m a_k^{(1)} + W_1 \delta_{km}$$
(11.6)

di mana untuk *k≠m* menghasilkan

$$a_{k}^{(1)} = \frac{H_{km}^{'}}{E_{m} - E_{k}} \quad (k \neq m)$$
 (11.7)

Untuk k = m dalam persamaan (11.6), menghasilkan

$$W_1 = H_{nm}$$
 (11.8)

Tinjau kembali persamaan (11.3) dan (11.4a),  $W_1$  adalah koreksi orde pertama terhadap energi  $E_m$ . Kita masih perlu untuk mengevaluasi  $a_m^{(1)}$ . Ini dilakukan dengan syarat bahwa fungsi gelombang orde pertama yang dikoreksi  $\psi = \psi_m + \psi_1$  dinormalisasi :

$$\int \left( \psi_m + \lambda \sum_n a_n^{(1)} \psi_n \right)^* \left( \psi_m + \lambda \sum_s a_s^{(1)} \psi_s \right) dv =$$

$$1 + \lambda a_m^{(1)} + \lambda a_m^{*(1)} + \lambda^2 \sum_s a_n^{(1)} a_n^{*(1)} = 1$$
(11.9)

$$W_{2} = \sum_{n \neq m} \frac{\left| H_{mn}^{'} \right|^{2}}{E_{m} - E_{n}} \tag{11.12}$$

Kembali ke persamaan (11.11) untuk kasus  $k\neq m$ , dengan menggunakan persamaan (11.7) dan (11.8), dan hasil  $a_m^{(1)}=0$ , memberikan

$$a_{k}^{(2)} = \sum_{n \neq m} \frac{H_{kn}^{'} H_{nm}^{'}}{(E_{m} - E_{n})(E_{m} - E_{k})} - \frac{H_{mm}^{'} H_{km}^{'}}{(E_{m} - E_{k})^{2}}$$

Untuk menentukan  $a_m^{(2)}$ , kita kembali ke integral normalisasi persamaan (11.9), dengan memasukkan koreksi orde kedua pada  $\psi$ , menghasilkan

$$\int \left( \psi_m + \lambda \sum_n a_n^{(1)} \psi_n + \lambda^2 \sum_n a_n^{(2)} \psi_n \right) *$$

$$\left( \psi_m + \lambda \sum_s a_s^{(1)} \psi_s + \lambda^2 \sum_s a_s^{(2)} \psi_s \right) dv = 1$$

dengan menggunakan hasil  $a_{\scriptscriptstyle m}^{\scriptscriptstyle (1)}=0$ , persamaan terakhir menghasilkan

$$a_{m}^{(2)} = -\frac{1}{2} \sum_{n} \left| a_{n}^{(1)} \right|^{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n \neq m} \frac{\left| H_{mn}^{'} \right|^{2}}{\left( E_{m} - E_{n} \right)^{2}}$$
(11.13)

Akhirnya, untuk  $\lambda \rightarrow 1$  dan menuliskan fungsi eigen dan energi pada orde kedua, memberikan

$$\psi = \psi_{m} + \sum_{k \neq m} \frac{H_{km}^{'}}{E_{m} - E_{k}} \psi_{k}$$

$$+ \sum_{k \neq m} \left[ \left( \sum_{n \neq m} \frac{H_{kn}^{'} H_{mn}^{'}}{(E_{m} - E_{n})(E_{m} - E_{k})} - \frac{H_{mm}^{'} H_{km}^{'}}{(E_{m} - E_{k})^{2}} \right) \psi_{k} - \frac{|H_{km}^{'}|^{2}}{2(E_{m} - E_{k})^{2}} \psi_{m} \right]$$
(11.14)

$$[H + H'(t)]\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$
 (11.20)

Pada suatu waktu tertentu t, dengan menggunakan sifat saling melengkapi, ekspansi  $\psi(x, t)$  dalam bentuk  $\psi_n$ :

$$\psi(x,t) = \sum_{n} a_n(t) \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}$$
(11.21)

Pada keadaan Hamiltonian bergantung pada waktu, koefisien  $a_n$ , tidak seperti pada persamaan (11.17), sekarang sebagai fungsi dari pada waktu. Kebergantungan pada waktu ini merupakan suatu hal yang sangat fundamental.

Asumsikan bahwa suatu pengukuran dari energi  $E_m$  yang tidak terusik pada suatu waktu t = 0, diperoleh

$$a_{m}(0) = 1$$

$$a_{n}(0) = 0$$
 $(n \neq m)$ 
(11.22)

Selama koefisien  $a_n$  selaras dengan waktu, pengukuran-pengukuran berikutnya dari energi pada waktu t, menghasilkan nilai  $E_k$ . Probabilitas dari suatu peristiwa tertentu adalah  $|a_k(t)|^2$ , yang merupakan probabilitas untuk mendapatkan system dalam keadaan k pada waktu t. Solusi dari persamaan Schrodinger bergantung waktu selanjutnya memberikan suatu deskripsi mengenai penentuan probabilitas suatu system dalam berbagai keadaan eigen  $\psi_n$  dari  $\mathbf{H}$  seiring dengan waktu di bawah pengaruh perturbasi  $\mathbf{H}$ ' (t).

Untuk menggambarkan evolusi system, dibutuhkan pemecahan untuk koefisien  $a_n(t)$ . Dengan mensubstitusi persamaan (11.21) ke dalam (11.20), diperoleh

$$\sum_{n} \psi_{n} \left[ a_{n} \left( -\frac{i E_{n}}{\hbar} \right) e^{-i E_{n} t/\hbar} + a_{k}^{\bullet} e^{-i E_{n} t/\hbar} \right] =$$

$$-\frac{i}{\hbar} \sum_{n} a_{n} (H + H') \psi_{n} e^{-i E_{n} t/\hbar}$$

$$\dot{a}_{k}^{(2)} = -\frac{i}{\hbar} \sum_{n} a_{n}^{(2)} H_{kn}(t) e^{i\omega_{kn}t}$$
 (11.24)

$$\dot{a}_{k}^{(s)} = -\frac{i}{\hbar} \sum_{n} a_{n}^{(s-1)} H_{kn}(t) e^{i\omega_{kn}t}$$

Solusi persamaan orde ke nol adalah  $a_k^{(0)}=$  konstan.  $a_k^{(0)}$  selanjutnya disebut nilai awal kasus dengan pilihan

$$a_m^{(0)} = 1$$

$$a_n^{(0)} = 0 \qquad (n \neq m)$$

sehingga pada t=0 sistem diketahui dengan kepastian mengisi suatu keadaan dengan energi  $E_m$ . Bagian kedua dari persamaan (11.24) direduksi menjadi

$$\dot{a}_{k}^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} H_{km} e^{i\omega_{km}t}$$
 (11.25)

 $\left|a_{k}^{(1)}(t)\right|^{2}$  adalah probabilitas pada orde pertama dari system yang diperoleh pada waktu t dalam keadaan k bila pada t=0 berada dalam keadaan m.

#### 11.6 Perturbasi Harmonik

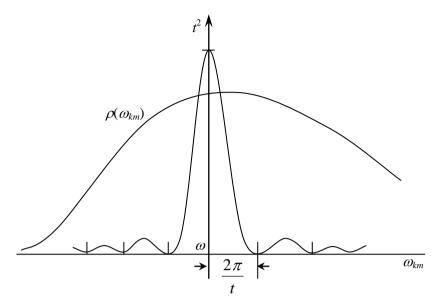
Pada bagian ini akan dibahas kasus khusus di mana perturbasi bervariasi secara sinusoidal dengan waktu :

$$H'(t) = H' e^{-i\omega t} + (H')e^{i\omega t}$$
(11.26a)

Pemecahan H' (t) ke dalam dua bagian dilakukan sedemikian rupa agar bersifat Hermit. Hasil substitusi H' (t) ke dalam (11.25) dan dengan melakukan integrasi adalah

$$a_k^{(1)}(t) = \int_0^t \left(-\frac{i}{\hbar}\right) H_{km}(t') e^{i\omega_{km}t'} dt$$

$$= -\hbar^{-1} \left( H_{km}^{'} \frac{e^{i(\omega_{km} - \omega)t} - 1}{\omega_{km} - \omega} + H_{mk}^{'*} \frac{e^{i(\omega_{km} + \omega)t} - 1}{\omega_{km} + \omega} \right)$$
(11.26b)



Gambar 11.1. Kerapatan fungsi keadaan akhir

dan fungsi probabilitas transisi

Interval dalam  $\omega_{km}$ , di mana fungsi

$$g\left(\omega_{km},t\right) = \frac{\sin^2\left[\frac{1}{2}(\omega_{km} - \omega)t\right]}{\left[\frac{1}{2}(\omega_{km} - \omega)\right]^2}$$
(11.29)

bernilai cukup besar, sekitar  $2\pi/t$  dan dapat dibuat lebih kecil dengan meningkatkan waktu pengamatan t. Daerah di bawah fungsi ini adalah

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\left[\frac{1}{2}(\omega_{km} - \omega)t\right]}{\left[\frac{1}{2}(\omega_{km} - \omega)\right]^2} d\omega_{km} = 2\pi t$$
(11.30)

Pada kasus ketika t cukup besar, sehingga  $2\pi/t$ , yaitu lebar  $g(\omega_{km}, t)$ , jauh lebih kecil dari pada  $\Delta\omega$ , yaitu lebar  $\rho(\omega_{km})$ . Integral persamaan (11.28) menjadi

$$\left|a_{k}^{(1)}(t)\right|^{2} = \frac{1}{\hbar^{2}} \left|H_{km}^{'}\right|^{2} \rho\left(\omega_{km} = \omega\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^{2}\left[\frac{1}{2}(\omega_{km} - \omega)t\right]}{\left[\frac{1}{2}(\omega_{km} - \omega)\right]^{2}} d\omega_{km}$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar^{2}} \left|H_{km}^{'}\right|^{2} \rho\left(\omega_{km} - \omega\right)t$$
(11.31)

dan laju transisi per satuan waktu adalah

$$H'(t) = H'(t \ge 0)$$
 (11.34)

Situasi ini dapat dianggap sebagai suatu kasus terbatas dari perturbasi harmonik yang telah dibahas pada bagian sebelumnya dengan  $\omega \rightarrow 0$ .

Dengan menggunakan bagian kedua dari persamaan (11.24) dengan  $a_n^{(1)} = \delta_{nm}$  (system awalnya berada dalam keadaan m) dan meninjau kembali ke persamaan (11.32), manghasilkan

$$W_{m \to k} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| H_{km}^{'} \right|^{2} \delta \left( E_{m} - E_{k} \right)$$

$$= \frac{1}{\hbar} \left| H_{km}^{'} \right|^{2} \delta \left( v_{m} - v_{k} \right)$$
(11.35)

Bentuk  $W_{m \to k}$  sama seperti pada persamaan (11.33). Perbedaan yang paling penting ada pada fungsi delta yang merupakan suatu keadaan awal (m) dan suatu keadaan akhir dari energi yang sama. Perlu ditekankan bahwa penggunaan persamaan (11.35), sebagaimana persamaan (11.33), terhadap kasus di mana keadaan tunggal k adalah bagian dari suatu *continuum*. Laju transisi total dari  $|m\rangle$  ditentukan oleh penjumlahan  $W_{m \to k}$  semua keadaan akhir.

# 11.8 Limit Keberlakuan Golden Rule

Ada dua kondisi yang digunakan dalam menurunkan persaman (11.31) dan (11.33). Yang pertama adalah  $2\pi/t$  lebih kecil dibanding dengan lebar  $2\pi\Delta v$  dari  $\rho$  ( $\omega_{km}$ ). Kondisi kedua dihasilkan dari teori perturbasi orde pertama dan kenyataan bahwa  $\left|a_k^{(1)}(t)\right|^2 << 1$ ; Kondisi kedua ini dapat diuraikan menggunakan persamaan (11.27) sebagai

$$\frac{H_{km}^{'}}{\hbar} \ll \frac{1}{t} \tag{11.36}$$

Makna fisis dari pernyataan ini bahwa hasildari teori perturbasi orde pertama hanya valid untuk waktu yang cukup singkat sehingga probabilitas untuk transisi keluar dari keadaan awal *m* sangat kecil dari pada 1. Kombinasi kedua kondisi ini menghasilkan

# **DAFTAR PUSTAKA**

Eisberg dan Resnick, 1985. Quantum Physics of Atom, Melecusls, Solids, Nucleiu, and Particles, 2 rd, John weley.

Giancoli, Douglas C. 2001. Fisika Jilid 1. Jakarta: Erlangga.

Giancoli, Douglas C. 2001. Fisika Jilid 2. Jakarta: Erlangga.

Griffilhs, David J., 1994. *Introduction to Quantum Mechanics*. United States of America: Prentice Hall.

Sears, F. W., Zemansky, M. W.,1994. Fisika Untuk Universitas 2 (Mekanika-Panas-Bunyi). Bandung: Binacipta.

Siregar, rustam. 2010. Fisika Kuantum. Bandung: Widya Padjajaran.

Sutopo, 2001. Pengantar Fisika Kuantum: FMIPA UM.

Sutrisno. 1997. Fisika Dasar-Mekanika. Bandung: Penerbit ITB.

Wesley, Addison. 1988. *Phiysical Science*. Canada: Wesley Publishing Company.

Young, Freedman. 2001. Fisika Universitas. Jakarta: Erlangga.

## Apendiks 2

# **Beberapa Integral**

1. 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx$$

2. 
$$\int \psi^*(x) \hat{A} \psi(x) dx = \int [\hat{A} \psi(x)]^* dx$$

3. 
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} H_m(z) H_n(z) dz = 2^n n! \pi^{1/2} \delta_{mn}$$

$$4. \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(z)\psi_n(z)dz = \delta_{mn}$$

5. 
$$\int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{\pi} d\theta \sin \theta \Psi_{\ell,m}^{*} \Psi_{\ell',m'} = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}$$

6. 
$$\int_{0}^{\infty} [R_{n\ell}(r)]^2 r^2 dr = 1$$

7. 
$$\int_{0}^{\infty} r^{2} dr [R_{n\ell}(r)]^{2} \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{\pi} d\theta \sin \theta \, \Psi_{\ell m}^{*} \, \Psi_{\ell m} = 1$$

8. 
$$\int_{0}^{\infty} re^{-\frac{2r}{a_0}} dr = \frac{a_0^2}{4}$$

9. 
$$\int_{0}^{\pi} \sin \theta d\theta = 2 \operatorname{dan} \int_{0}^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

Dalam koordinat bola operator Laplace tersebut berbentuk:

$$\nabla^2 = \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

Sehingga dalam koordinat bola, operator Hamilton:

$$\begin{split} \widehat{H} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left[ r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right. \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left[ -\frac{Ze^2}{4\pi \varepsilon_0 r} \right. \end{split}$$

Dengan demikian pesamaan gelombang Schroedinger untuk model atom H yang sederhana,

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \psi(r, \theta, \varphi)$$
$$\frac{Ze^2}{4\pi \varepsilon_0 r} (r, \theta, \varphi) = E\psi(r, \theta, \varphi)$$

Untuk notasi singkat akan digunakan  $\psi$  ( $\vec{r}$ ) untuk mempresentasikan  $\psi$ (r,  $\theta$ ,  $\varphi$ )

Bagi fungsi keadaan yang dinormalisasi

$$A_{av} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \hat{A} \psi(x) dx$$

Andaikan:

$$\hat{A}\varphi_n(x) = a_n\varphi_n(x)$$

$$\psi(x) = \sum_{n} c_n \varphi_n(x)$$

Jika  $\{\varphi_n\}$  adalah fungsi-fungsi yang ortonormal

$$A_{av} = \int \psi^*(x) \hat{A} \psi(x) dx = \sum_{mn} c_m^* c_n \int \varphi_m^*(x) \hat{A} \varphi_n(x) dx$$

$$\sum_{mn} c_m^* c_n a_n \int \varphi_m^*(x) \, \varphi_n(x) \, dz = \sum_{mn} c_m^* c_n a_n \delta_{mn}$$

$$\sum_{n} c_{n}^{*} c_{n} a_{n}$$

Karena harga rata-rata suatu besaran fisis adalah ril maka berlaku

$$\int \psi^*(x)\hat{A}\psi(x)dx = \int [\hat{A}\psi(x)]^*dx$$

Secara matematik, operator yang memenuhi persamaan di atas disebut operator hermitian.