Correction Mathématiques – Série D - 2025

Exercice 2

I. Un dé à 4 faces numérotées 1,2,3,et 4 est truqué.

P_i : *probabilité pour que la face i soit caché* : $P_i = \frac{i}{k}$

1.a. Montrons que k = 10

La somme des événements élémentaires est égale à 1

$P_1+P_2+P_3+P_4=1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+2+3+4}{k}=1 \quad \Leftrightarrow \quad k=1+2+3+4=10$, D'où

$\boxed{k=10}$

b. Déduction de P_1, P_2, P_3, et P_4

$P_i=\frac{i}{k}=\frac{i}{10}$

$P_1=\frac{1}{10} \quad P_2=\frac{2}{10}=\frac{1}{5} \quad P_3=\frac{3}{10} \quad P_4=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

$P_1=\frac{1}{10}$	$P_2=\frac{1}{5}$	$P_3=\frac{3}{10}$	$P_4=\frac{2}{5}$

2. Épreuve : Lancer deux fois indépendamment du dé. On note par a le premier numéro caché et b le second.

X : Variable aléatoire égale à |a-b|

La loi de X :

Univers-image de X :

X	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	0	1	2
3	2	1	0	1
4	3	2	1	0

$X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$

Loi de probabilité de X

Calcul de P(X=xi) $\forall \quad x_i \in X(\Omega)$

Pour X = 0 : $(a,b) \in \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

$P(X=0)=P_1^2+P_2^2+P_3^2+P_4^2=\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{10}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{1+4+9+16}{100}=\frac{3}{10}$

Pour X = 1 : $(a,b) \in \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3)\}$

$P(X=1)=2P_1P_2+2P_2P_3+2P_3P_4=2\times\left(\frac{1}{50}+\frac{3}{50}+\frac{6}{50}\right)=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$

Pour X = 2 : $(a,b) \in \{(1,3),(2,4),(3,1),(4,2)\}$

$P(X=2)=2P_1P_3+2P_2P_4=2\times\left(\frac{3}{100}+\frac{2}{25}\right)=\frac{11}{50}$

Pour X = 3 : $(a,b) \in \{(1,4),(4,1)\}$

$P(X=3)=2P_1P4=\frac{4}{50}=\frac{2}{25}$

x_i	0	1	2	3	Total
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{2}{25}$	1

II. On considère une série statistique à deux variables (X,Y)
La droite de régression de x en y a pour équation x = 0,77y – 9,71. Et le coefficient de corrélation est r = 0,99.
1. Détermination de la moyenne arithmétique $\bar{y}$ sachant que $\bar{x}=8$

$Sachant\ \ que\ \ \bar{x}=0{,}77\bar{y}-9{,}71 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}77\bar{y}=17{,}71 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{y}=23$

$$\boxed{\bar{y}=23}$$

2. Montrons que si a le coefficient directeur de la droite de régression de y en x et a' celui de x en y, alors $r^2=aa'$

$$r=\frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \qquad a=\frac{cov(X,Y)}{V(X)} \qquad a'=\frac{cov(X,Y)}{V(Y)}$$

$$r^2=\left[\frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}\right]^2=\frac{cov(X,Y)cov(X,Y)}{\sigma^2(X)\sigma^2(Y)}=\frac{cov(X,Y)}{\sigma^2(X)}\times\frac{cov(X,Y)}{\sigma^2(Y)} \quad Or \quad V(X)=\sigma^2(X)\ \ et\ \ V(Y)=\sigma^2(Y)$$

$$r^2=\frac{cov(X,Y)}{V(X)}\times\frac{cov(X,Y)}{V(Y)}=aa'$$

$$\boxed{r^2=aa'}$$

3. Une équation de la droite de régression de y en x de cette série

$y=ax+b$

$$r^2=aa' \quad avec \quad a'=0{,}77\ \ et\ \ r=0{,}99 \quad \Rightarrow \quad a=\frac{(0{,}99)^2}{0{,}77}=1{,}27$$

$$\bar{y}=a\bar{x}+b \quad \Rightarrow \quad b=23-1{,}27\times 8=12{,}84$$

$$\boxed{y = 1{,}27x + 12{,}84}$$