

Correction Mathématiques – Série D - 2025

Exercice 2

I. Un dé à 4 faces numérotées 1,2,3,et 4 est truqué.

P_i : probabilité pour que la face i soit caché : $P_i = \frac{i}{k}$

1.a. Montrons que $k = 10$

La somme des événements élémentaires est égale à 1

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 \Leftrightarrow \frac{1+2+3+4}{k} = 1 \Leftrightarrow k = 1+2+3+4 = 10, \text{ D'où}$$

$$k=10$$

b. Dédution de P_1, P_2, P_3 , et P_4

$$P_i = \frac{i}{k} = \frac{i}{10}$$

$$P_1 = \frac{1}{10} \quad P_2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \quad P_3 = \frac{3}{10} \quad P_4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$P_1 = \frac{1}{10} \quad P_2 = \frac{1}{5} \quad P_3 = \frac{3}{10} \quad P_4 = \frac{2}{5}$$

2. Épreuve : Lancer deux fois indépendamment du dé. On note par a le premier numéro caché et b le second.

X : Variable aléatoire égale à $|a-b|$

La loi de X :

Univers-image de X :

X	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	0	1	2
3	2	1	0	1
4	3	2	1	0

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

Loi de probabilité de X

x_i	0	1	2	3	Total
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

II. On considère une série statistique à deux variables (X, Y)

La droite de régression de x en y a pour équation $x = 0,77y - 9,71$. Et le coefficient de corrélation est $r = 0,99$.

1. Détermination de la moyenne arithmétique \bar{y} sachant que $\bar{x} = 8$

$$\text{Sachant que } \bar{x} = 0,77\bar{y} - 9,71 \Leftrightarrow 0,77\bar{y} = 17,71 \Leftrightarrow \bar{y} = 23$$

$$\bar{y} = 23$$

2. Montrons que si a le coefficient directeur de la droite de régression de y en x et a' celui de x en y , alors $r^2 = aa'$

$$r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \quad a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} \quad a' = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(Y)}$$

$$r^2 = \left[\frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \right]^2 = \frac{\text{cov}(X, Y)\text{cov}(X, Y)}{\sigma^2(X)\sigma^2(Y)} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma^2(X)} \times \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma^2(Y)} \quad \text{Or} \quad V(X) = \sigma^2(X) \quad \text{et} \quad V(Y) = \sigma^2(Y)$$

$$r^2 = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} \times \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(Y)} = aa'$$

$r^2 = aa'$

3. Une équation de la droite de régression de y en x de cette série

$$y = ax + b$$

$$r^2 = aa' \quad \text{avec} \quad a' = 0,77 \quad \text{et} \quad r = 0,99 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{(0,99)^2}{0,77} = 1,27$$

$$\bar{y} = a\bar{x} + b \quad \Rightarrow \quad b = 23 - 1,27 \times 8 = 12,84$$

$y = 1,27x + 12,84$