Correction Mathématiques – Série D - 2025

Exercice 2

I. Un dé à 4 faces numérotées 1,2,3,et 4 est truqué.

$P_i : probabilité\ pour\ que\ la\ face\ i\ soit\ caché : P_i = \frac{i}{k}$

1.a. Montrons que k = 10

La somme des événements élémentaires est égale à 1

$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 \Leftrightarrow \frac{1+2+3+4}{k} = 1 \Leftrightarrow k = 1+2+3+4 = 10$, D'où

$\boxed{k=10}$

b. Déduction de P_1, P_2, P_3, et P_4

$P_i = \frac{i}{k} = \frac{i}{10}$

$P_1 = \frac{1}{10}\ P_2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}\ P_3 = \frac{3}{10}\ P_4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$P_1 = \frac{1}{10}$	$P_2 = \frac{1}{5}$	$P_3 = \frac{3}{10}$	$P_4 = \frac{2}{5}$

2. Épreuve : Lancer deux fois indépendamment du dé. On note par a le premier numéro caché et b le second.

X : Variable aléatoire égale à |a-b|

La loi de X :

Univers-image de X :

X	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	0	1	2
3	2	1	0	1
4	3	2	1	0

$X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$

Loi de probabilité de X

Calcul de P(X=xi) $\forall x_i \in X(\Omega)$

Pour X = 0 : $(a,b) \in \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

$P(X=0) = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1+4+9+16}{100} = \frac{3}{10}$

Pour X = 1 : $(a,b) \in \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3)\}$

$P(X=1) = 2P_1P_2 + 2P_2P_3 + 2P_3P_4 = 2 \times \left(\frac{1}{50} + \frac{3}{50} + \frac{6}{50}\right) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$

Pour X = 2 : $(a,b) \in \{(1,3),(2,4),(3,1),(4,2)\}$

$P(X=2) = 2P_1P_3 + 2P_2P_4 = 2 \times \left(\frac{3}{100} + \frac{2}{25}\right) = \frac{11}{50}$

Pour X = 3 : $(a,b) \in \{(1,4),(4,1)\}$

$P(X=3) = 2P_1P4 = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$

Le tableau suivant montre la loi de probabilité de X

x_i	0	1	2	3	Total
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{2}{25}$	1

II. On considère une série statistique à deux variables (X,Y)
La droite de régression de x en y a pour équation x = 0,77y – 9,71. Et le coefficient de corrélation est r = 0,99.
1. Détermination de la moyenne arithmétique $\overline{y}$ sachant que $\overline{x}=8$
$\text{Sachant que } \overline{x}=0,77\,\overline{y}-9,71 \Leftrightarrow 0,77\,\overline{y}=17,71 \Leftrightarrow \overline{y}=23$

$$\boxed{\overline{y}=23}$$

2. Montrons que si a le coefficient directeur de la droite de régression de y en x et a' celui de x en y, alors $r^2=aa'$

$$r=\frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}\quad a=\frac{cov(X,Y)}{V(X)}\quad a'=\frac{cov(X,Y)}{V(Y)}$$

$$r^2=\left[\frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}\right]^2=\frac{cov(X,Y)\,cov(X,Y)}{\sigma^2(X)\sigma^2(Y)}=\frac{cov(X,Y)}{\sigma^2(X)}\times\frac{cov(X,Y)}{\sigma^2(Y)}\ Or\ V(X)=\sigma^2(X)\ et\ V(Y)=\sigma^2(Y)$$

$$r^2=\frac{cov(X,Y)}{V(X)}\times\frac{cov(X,Y)}{V(Y)}=aa'$$

$$\boxed{r^2=aa'}$$

3. Une équation de la droite de régression de y en x de cette série
$y=ax+b$

$$r^2=aa'\ avec\ a'=0,77\ et\ r=0,99\Rightarrow a=\frac{(0,99)^2}{0,77}=1,27$$

$$\overline{y}=a\,\overline{x}+b\Rightarrow b=23-1,27\times 8=12,84$$

$$\boxed{y = 1,27x + 12,84}$$

Problème

On considère la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{xe^x+x+1}{e^x}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé, d'unité 1cm.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x-x$

a. Étude du sens de variation de g

$g'(x)=e^x-1, \quad g'(x)=0 \iff e^x=1 \iff x=0$

$Si\ \ x<0\ :\ g\ \ est\ \ décroissante$

$Si\ \ x>0\ :\ g\ \ est\ \ croissante$

$Si\ \ x=0\ :\ g\ \ admet\ \ un\ \ minimum\ \ égale\ \ à\ \ g(0)=1$

$$\boxed{\begin{array}{l} Si\ \ x<0\ :\ g\ \ est\ \ décroissante \\ Si\ \ x>0\ :\ g\ \ est\ \ croissante \\ Si\ \ x=0\ :\ g\ \ admet\ \ un\ \ minimum\ \ égale\ \ à\ \ 1 \end{array}}$$

b. Calcul de g(0) et déduction du sign de g(x) pour tout réel x

$g(0)=e^0-0=1$

Comme g(0) est le minimum de g alors $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ \ g(x)\geq 1>0$

g(0)=1	g(x) est positive pour tout réel x

2. Calcul des limites de f aux bornes de ses ensembles de définition

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+xe^{-x}+e^{-x}=\lim_{x\to-\infty} x+e^{-x}(x+1)=-\infty+\infty(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+xe^{-x}+e^{-x}=\lim_{x\to+\infty} x(1+e^{-x})+e^{-x}=+\infty(1+0)+0=+\infty$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3. Expression de f'(x) en fonction de g(x)

$$f'(x)=(x+xe^{-x}+e^{-x})'=(1+e^{-x}-xe^{-x}-e^{-x})\times\frac{e^x}{e^x}=\frac{e^x-x}{e^x}=\frac{g(x)}{e^x}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{g(x)}{e^x}}$$

Tableau de variation de f

x	-∞	+∞
f'(x)	+	
f	$-\infty$	$+\infty$

4. Étude des branches infinies de (C)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+xe^{-x}+e^{-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty} 1+e^{-x}+\frac{e^{-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty} 1+e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\infty(1+0)=+\infty$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+xe^{-x}+e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1+e^{-x}+\frac{e^{-x}}{x} = 1+0+0=1$

$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x}+e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}}+\frac{1}{e^x} = 0+0=0$

En -∞, (C) admet une branche parabolique de direction parallèle à (y'Oy)
En +∞, (C) admet une asymptote oblique d' équation y = x

5. Montrons que f(x)=0 admet une solution unique $\alpha \in]-1;0[$
f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$,
Comme $0 \in \mathbb{R}$, alors

Il existe unique $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $f(\alpha)=0$

Montrons que $\alpha \in]-1;0[$

$\alpha \in]-1;0[\quad si \quad f(-1)\times f(0)<0$

$f(-1)=-1-e+e=-1 \quad et \quad f(0)=1, \quad f(-1)\times f(0)=-1\times 1=-1<0 \quad alors$

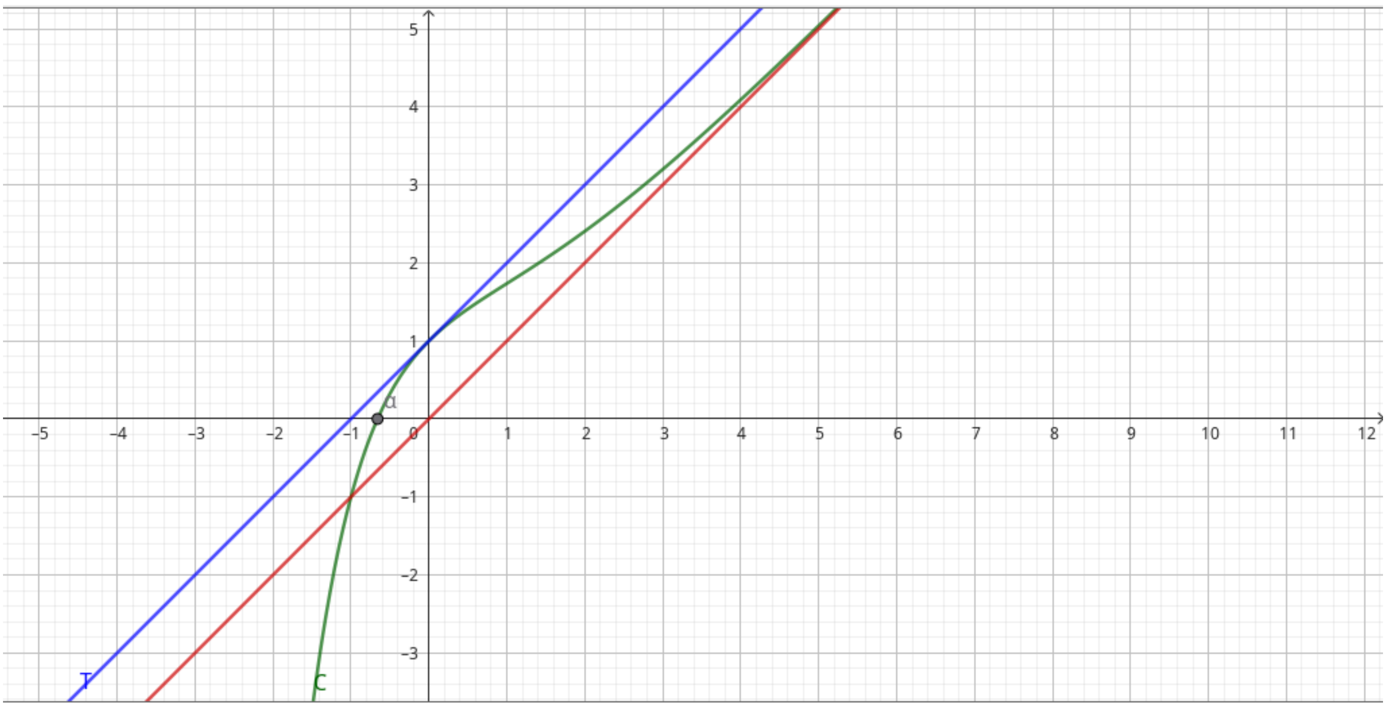
$\boxed{\alpha \in]-1;0[}$

6. Équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = 0$

$(T): y=f'(0)x+f(0) \quad avec\, f(0)=1 \quad et \quad f'(0)=\frac{g(0)}{1}=1 \quad \Leftrightarrow \quad y=x+1$

$\boxed{(T): y=x+1}$

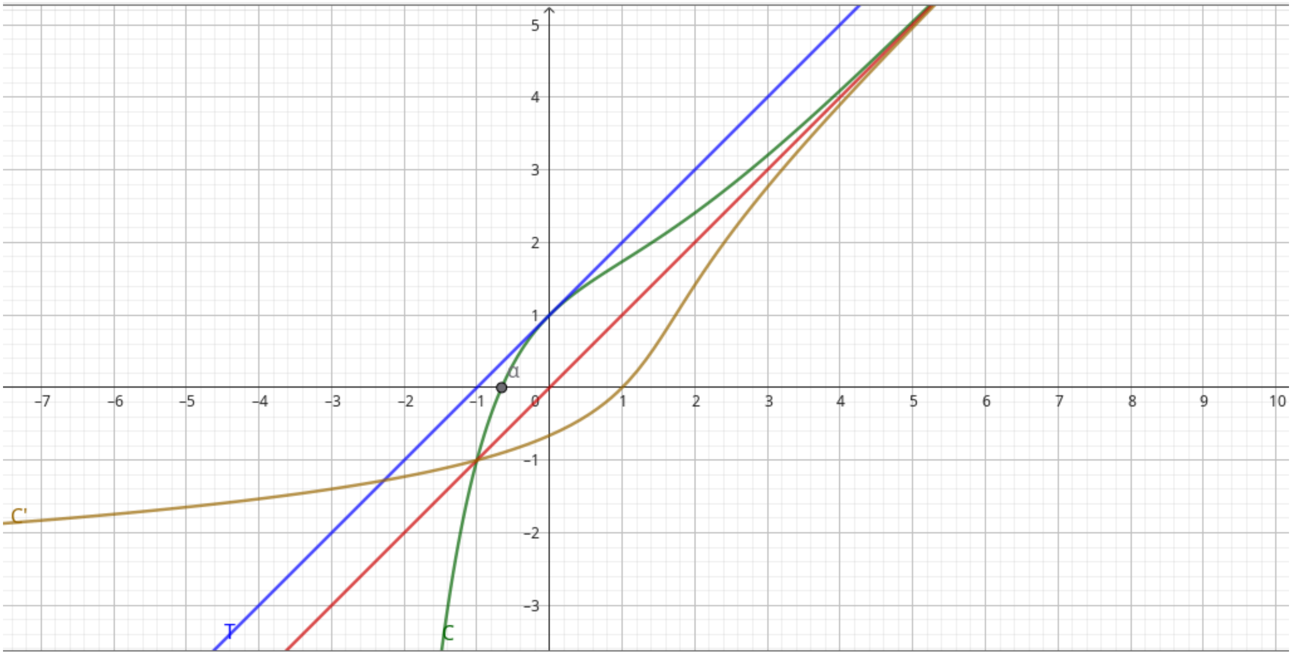
7. Traçage de (C) et (T) dans le même repère



8.a. Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on précisera son ensemble de définition
f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$
alors

f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

b. Traçage de (C’) la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère que (C)
(C’) est l’image de (C) par la symétrie orthogonale d’axe y=x



9. Calcul en cm^2, de l’aire du domaine plan limité par (C), les droites d’équations y = x, x = 0 et x=1

$$A=\int_0^1 (f(x)-x)dx=\int_0^1 \frac{x+1}{e^x}dx=\int_0^1 (x+1)e^{-x}dx$$

$$on \quad pose \begin{cases} u=x+1 & \Rightarrow \quad du=dx \\ dv=e^{-x}dx & \Rightarrow \quad v=-e^{-x} \end{cases}$$

$$A=\left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=-2e^{-1}+1-e^{-1}+1=2-\frac{3}{e}\simeq 0{,}9\,cm^2$$

$$\boxed{A=2-\frac{3}{e}cm^2 \;\simeq\; 0{,}9\,cm^2}$$