Correction Baccalauréat – Mathématiques série S – Session 2025

Problème 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x)=\begin{cases}(x+1)e^{-x}-1 & si \quad x\leq 0\\ x(1-\ln x) & si \quad x>0\end{cases}$

On note par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

Partie I

1. Étude de la continuité et de dérivabilité de f en $x_0 = 0$

Continuité

$f(0)=(0+1)e^{0}-1=1-1=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)e^{-x}-1=1-1=0=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x(1-\ln x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x-x\ln x=0-0=0=f(0)$

$Comme \quad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0, \quad alors \quad f \quad est \quad continue \quad en \quad x_0=0$

Dérivabilité :

$f'_g(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(x+1)e^{-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-x}+\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{-x}-1}{x}=1-\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{e^{t}-1}{t}=1-1=0$

$f'_d(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x(1-\ln(x))}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+} 1-\ln x=1-(-\infty)=+\infty$

Comme $f'_g(0)\neq f'_d(0)$ alors f n'est pas dérivable en 0

f est continue en 0	f n'est pas dérivable en 0

2.a. Étude des variations de f sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$

$Si \quad x<0: \quad f'(x)=[(x+1)e^{-x}-1]'=e^{-x}-(x+1)e^{-x}=-xe^{-x}$

$Pour \quad x<0: \ -x>0 \quad et \quad e^{-x}>0 \quad alors \quad f'(x)>0 \quad Donc \quad f \quad est \quad croissante$

$Si \quad x>0: \quad f'(x)=[x(1-\ln x)]'=1-\ln x+\dfrac{x}{-x}=1-\ln x-1=-\ln x$

$-\ln x=0 \ \Leftrightarrow \ x=1 \quad alors \quad si \quad 0<x<1 \ ,-\ln x>0 \quad alors \quad f \quad est \quad croissante$

$Si \quad x>1 \quad -\ln x<0, \quad alors \quad f \quad est \quad décroissante$

$Si \quad x<0: \quad f \quad est \quad croissante$ $Si \quad 0<x\leq 1: \quad f \quad est \quad croissante$ $Si \quad x>1: \quad f \quad est \quad décroissante$

b. Tableau de variation de f

x	-∞		0		1		+∞
f'(x)		+	0‖+∞	+	0	-	
f	$-\infty$	↗	0	↗	1	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}(x+1)e^{-x}-1=(-\infty)(+\infty)=-\infty$

$f(1)=1(1-\ln 1)=1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} x(1-\ln x)=+\infty(-\infty)=-\infty$

3. Étude des branches infinies de (C)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)e^{-x}-1}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^{-x}\left(\frac{x+1-e^{x}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{e^{x}}{x}\right)=+\infty(1+0-0)=+\infty$$

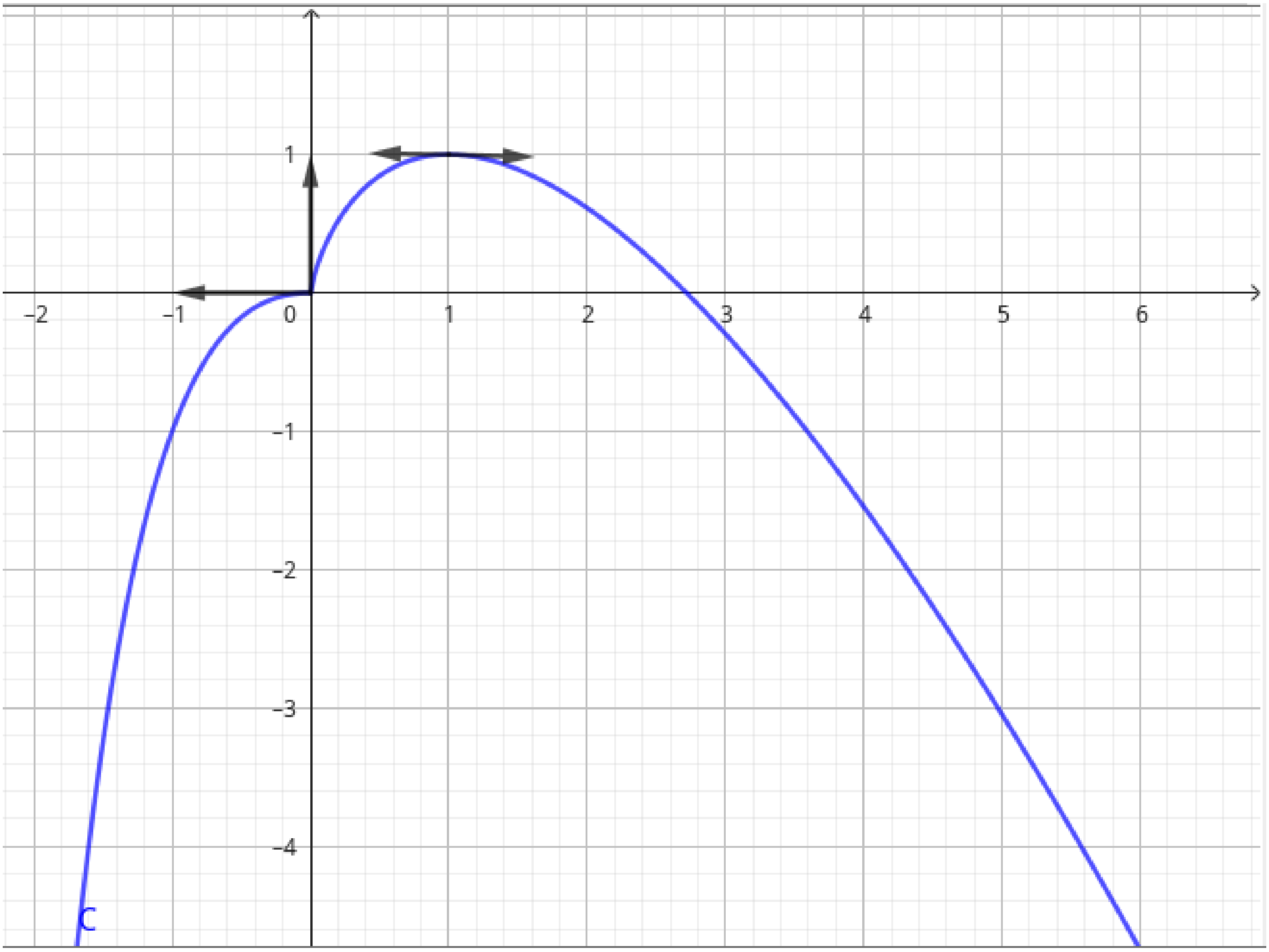
Alors en -∞, (C) admet une branche parabolique de direction parallèle à l’axe des ordonnées (y’Oy)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(1-\ln x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}1-\ln x=-\infty$$

Alors, (C) admet, au voisinage de +∞, une branche parabolique parallèle à (y’Oy)

4. Construction de la courbe (C) et les 2 demi-tangentes en 0

- 1ère demi-tangente : à gauche, f’(0) = 0 alors il y a une demi-tangente horizontale
- 2éme demi-tangente : à droite, f’(0) = +∞ alors il y a une demi-tangente verticale



Partie II

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n>0,\quad U_n=\frac{1}{n!}\int_{-1}^{0}(x+1)^n e^{-x}\,dx$

1. a. Calcul de U_1

$$U_1=\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-x}\,dx=\left[-(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}-e^{-x}\,dx=-1+0+\left[-e^{-x}\right]_{-1}^{0}=-1-1+e=-2+e$$

$$\boxed{U_1=e-2}$$

b. Interprétation géométrique de ce résultat

$|U_1 - 1| = \left|\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-x}\,dx-\int_{-1}^{0}-1\,dx\right|=\left|\int_{-1}^{0}f(x)\,dx\right|$ = |e-2-1| = 3-e ≈ 0,28 cm² est l'aire du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisse, l'axe des ordonnées et la droite d'équation x=-1.

2.a. Un encadrement de U_n

$$-1\le x\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad 0\le -x\le 1 \quad\Leftrightarrow\quad 1\le e^{-x}\le e$$

$$(x+1)^n \;\le\; (x+1)^n e^{-x} \;\le\; e(x-1)^n$$

$$\int_{-1}^{0}(x+1)^n\,dx \;\le\; \int_{-1}^{0}(x+1)^n e^{-x}\,dx \;\le\; e\int_{-1}^{0}(x-1)^n\,dx \quad avec \quad \int_{-1}^{0}(x+1)^n\,dx=\left[\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n+1} \;\le\; \int_{-1}^{0}(x+1)^n e^{-x}\,dx \;\le\; \frac{e}{n+1}$$

$$\frac{1}{(n+1)n!} \;\le\; \frac{1}{n!}\int_{-1}^{0}(x+1)^n e^{-x}\,dx \;\le\; \frac{e}{(n+1)n!}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \;\le\; U_n \;\le\; \frac{e}{(n+1)!}$$

$$\boxed{\frac{1}{(n+1)!} \;\le\; U_n \;\le\; \frac{e}{(n+1)!}}$$

b. Déduction de la limite de U_n

$$\frac{1}{(n+1)!} \;\le\; U_n \;\le\; \frac{e}{(n+1)!}$$

$$or \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)!}=0 \quad alors \quad D'après\ le\ théorème\ de\ Gendarmes \quad \lim_{n\to+\infty}U_n=0$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}U_n=0}$$

3. En utilisant l'intégration par parties, vérifions que $U_{n+1}=U_n-\frac{1}{(n+1)!}$

$$U_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\int_{-1}^{0}(x+1)^{n+1}e^{-x}\,dx=\frac{1}{(n+1)!}\left[-e^{-x}\times(x+1)^{n+1}\right]_{-1}^{0}+\frac{n+1}{(n+1)!}\int_{-1}^{0}(x+1)^n e^{-x}\,dx$$

$$U_{n+1}=-\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{n!}\int_{-1}^{0}(x+1)^n e^{-x}\,dx=U_n-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$\boxed{U_{n+1}=U_n-\frac{1}{(n+1)!}}$$

4. Montrons que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e$

$$U_n=U_{n-1}-\frac{1}{n!}$$

$$U_{n-1}=U_{n-2}-\frac{1}{(n-1)!} \quad +$$

....

$$U_2=U_1-\frac{1}{2!}$$

après addition membres, membres et simplifications, on a :

$$U_n=U_1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{1!}-\frac{1}{0!}+1+1=U_1+2+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e-2+2+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

$$U_n=e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

$$Or \quad \lim_{n\to+\infty}U_n=0 \quad alors \quad \lim_{n\to+\infty}e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=0 \quad \Leftrightarrow \quad e-\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=0$$

$$D'où \quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e}$$