Correction Baccalauréat – Mathématiques série S – Session 2025

Exercice 1

Partie A :

On considère les matrices suivantes : $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1.a. Calcul de AxB et BxA

$$A\times B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3$$

$$B\times A=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3$$

$$\boxed{\begin{array}{l} A\times B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3 \\ B\times A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3 \end{array}}$$

b. Comme AxB = BxA = I_3, alors B est l' inverse de A et A est l'inverse de B.

2. On considère le système d' équation $(S):\begin{cases} y-z=-3 \\ x+3z=17 \\ x+y+z=11 \end{cases}$

a. Écriture sous forme matricielle de (S) :

(S) : AX = Y avec $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et $Y=\begin{pmatrix} -3 \\ 17 \\ 11 \end{pmatrix}$

$$\boxed{(S):\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 17 \\ 11 \end{pmatrix}}$$

b. Détermination de X

$$AX=Y \quad\Leftrightarrow\quad A^{-1}AX=A^{-1}Y \quad or \quad A^{-1}=B \quad\Leftrightarrow\quad X=BY$$

$$X=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -3 \\ 17 \\ 11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Partie B :

1. Détermination du reste de la division euclidienne de 7×3^{359} par 11

- Reste de la division euclidienne de 3^n par 11 :

  $3^0\equiv1[11]$ $3^1\equiv3[11]$ $3^2\equiv9[11]$ $3^3\equiv5[11]$ $3^4\equiv6[11]$ $3^5\equiv1[11]$

  $3^{5k}\equiv1[11]$ $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$

$359 \equiv 4[5], \quad 3^{355} \equiv 1[11] \quad \Leftrightarrow \quad 3^{359} \equiv 3^4[11] \quad or \quad 3^4 \equiv 6[11]$

$3^{359} \equiv 6[11] \quad \Leftrightarrow \quad 7 \times 3^{359} \equiv 6 \times 7[11] \quad or \quad 6 \times 7 = 42 \equiv 9[11]$

$7 \times 3^{359} \equiv 9[11]$

Le reste de la division euclidienne de 7×3^{359} *par* 11 est 9

2.a. Une solution particulière de $23x - 17y = 1$

$23 = 17 + 6 \quad \Rightarrow \quad 6 = 23 - 17$

$17 = 6 \times 2 + 5 \quad \Rightarrow \quad 5 = 17 - 6 \times 2$

$6 = 5 + 1 \quad \Rightarrow \quad 6 - 5 = 1$

$or \;\; 5 = 17 - 6 \times 2 \quad \Rightarrow \quad 6 - 17 + 6 \times 2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 17(-1) + 6(3) = 1$

$or \;\; 6 = 23 - 17 \quad \Rightarrow \quad 17(-1) + 3(23 - 17) = 1$

$23(3) - 17(3) - 17(1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 23(3) - 17(4) = 1$

$S_0 = \{(3,4)\}$

b. Déduction de la résolution dans $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ *de* $23x - 17y = 2$

$23(3) - 17(4) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 23(6) - 17(8) = 2$

$23x - 17y = 2$

$23(6) - 17(8) = 2$

$23(x-6) - 17(y-8) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 23(x-6) = 17(y-8)$

$Comme \;\; pgcd(23,17) = 1, \;\; 23 \;\; divise \;\; y-8 \;\; et \;\; 17 \;\; divise \;\; x-6$

$y - 8 = 23k \;\Rightarrow\; y = 8 + 23k \quad et \quad x - 6 = 17k \;\Rightarrow\; x = 6 + 17k$

$S = \{(6+17k, \; 8+23k) / \; k \in \mathbb{Z}\}$