Correction Mathématiques – Série D - 2025

Exercice 2

I. Un dé à 4 faces numérotées 1,2,3,et 4 est truqué.

P_i : *probabilité pour que la face i soit caché* : $P_i = \frac{i}{k}$

1.a. Montrons que k = 10

La somme des événements élémentaires est égale à 1

$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+2+3+4}{k} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1+2+3+4 = 10$, D'où

$\boxed{k=10}$

b. Déduction de P_1, P_2, P_3, et P_4

$P_i = \frac{i}{k} = \frac{i}{10}$

$P_1 = \frac{1}{10} \quad P_2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \quad P_3 = \frac{3}{10} \quad P_4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$P_1 = \frac{1}{10}$	$P_2 = \frac{1}{5}$	$P_1 = \frac{3}{10}$	$P_1 = \frac{2}{5}$

2. Épreuve : Lancer deux fois indépendamment du dé. On note par a le premier numéro caché et b le second.

X : Variable aléatoire égale à |a-b|

La loi de X :

Univers-image de X :

X	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	0	1	2
3	2	1	0	1
4	3	2	1	0

$\Omega(X) = \{0,1,2,3\}$

Loi de probabilité de X

x_i	0	1	2	3	Total
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

II. On considère une série statistique à deux variables (X,Y)

La droite de régression de x en y a pour équation x = 0,77y – 9,71. Et le coefficient de corrélation est r = 0,99.

1. Détermination de la moyenne arithmétique $\bar{y}$ sachant que $\bar{x} = 8$

Sachant que $\bar{x} = 0{,}77\,\bar{y} - 9{,}71 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}77\,\bar{y} = 17{,}71 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{y} = 23$

$\boxed{\bar{y} = 23}$

2. Montrons que si a le coefficient directeur de la droite de régression de y en x et a' celui de x en y, alors $r^2 = aa'$

$r = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \qquad a = \frac{cov(X,Y)}{V(X)} \qquad a' = \frac{cov(X,Y)}{V(Y)}$

$$r^2=\left[\frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}\right]^2=\frac{cov(X,Y)cov(X,Y)}{\sigma^2(X)\sigma^2(Y)}=\frac{cov(X,Y)}{\sigma^2(X)}\times\frac{cov(X,Y)}{\sigma^2(Y)}\quad Or\quad V(X)=\sigma^2(X)\quad et\quad V(Y)=\sigma^2(Y$$

$$r^2=\frac{cov(X,Y)}{V(X)}\times\frac{cov(X,Y)}{V(Y)}=aa'$$

$$\boxed{r^2=aa'}$$

3. Une équation de la droite de régression de y en x de cette série

$y=ax+b$

$r^2=aa' \quad avec \quad a'=0{,}77 \quad et \quad r=0{,}99 \quad \Rightarrow \quad a=\frac{(0{,}99)^2}{0{,}77}=1{,}27$

$\overline{y}=a\overline{x}+b \quad \Rightarrow \quad b=23-1{,}27\times 8=12{,}84$

$\boxed{y = 1{,}27x + 12{,}84}$