Correction Mathématiques – Série D - 2025

Problème

On considère la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x e^{x}+x+1}{e^{x}}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé, d'unité 1cm.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^{x}-x$

a. Étude du sens de variation de g

$g'(x)=e^{x}-1,\quad g'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x}=1 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$

$Si\ \ x<0\ :\ g\ \ est\ \ décroissante$

$Si\ \ x>0\ :\ g\ \ est\ \ croissante$

$Si\ \ x=0\ :\ g\ \ admet\ \ un\ \ minimum\ \ égale\ \ à\ \ g(0)=1$

$Si\ \ x<0\ :\ g\ \ est\ \ décroissante$ $Si\ \ x>0\ :\ g\ \ est\ \ croissante$ $Si\ \ x=0\ :\ g\ \ admet\ \ un\ \ minimum\ \ égale\ \ à\ \ 1$

b. Calcul de g(0) et déduction du sign de g(x) pour tout réel x

$g(0)=e^{0}-0=1$

Comme g(0) est le minimum de g alors $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\quad g(x)\geq 1>0$

g(0)=1	g(x) est positive pour tout réel x

2. Calcul des limites de f aux bornes de ses ensembles de définition

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+xe^{-x}+e^{-x}=\lim_{x\to-\infty} x+e^{-x}(x+1)=-\infty+\infty(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+xe^{-x}+e^{-x}=\lim_{x\to+\infty} x(1+e^{-x})+e^{-x}=+\infty(1+0)+0=+\infty$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3. Expression de f'(x) en fonction de g(x)

$$f'(x)=(x+xe^{-x}+e^{-x})'=(1+e^{-x}-xe^{-x}-e^{-x})\times\frac{e^{x}}{e^{x}}=\frac{e^{x}-x}{e^{x}}=\frac{g(x)}{e^{x}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{g(x)}{e^{x}}}$$

Tableau de variation de f

x	-∞ +∞
f'(x)	+
f	$-\infty \nearrow +\infty$

4. Étude des branches infinies de (C)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+xe^{-x}+e^{-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty} 1+e^{-x}+\frac{e^{-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty} 1+e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\infty(1+0)=+\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+xe^{-x}+e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-x}+\frac{e^{-x}}{x}=1+0+0=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}+e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}}+\frac{1}{e^x}=0+0=0$

En -∞, (C) admet une branche parabolique de direction parallèle à (y'Oy)
En +∞, (C) admet une asymptote oblique d' équation y = x

5. Montrons que f(x)=0 admet une solution unique $\alpha \in]-1;0[$

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$,
Comme $0 \in \mathbb{R}$, alors

$\boxed{\text{Il existe unique } \alpha \in \mathbb{R} \text{ , tel que } f(\alpha)=0}$

Montrons que $\alpha \in]-1;0[$

$\alpha \in]-1;0[\quad si \quad f(-1)\times f(0)<0$

$f(-1)=-1-e+e=-1 \quad et \quad f(0)=1, \quad f(-1)\times f(0)=-1\times 1=-1<0 \quad alors$

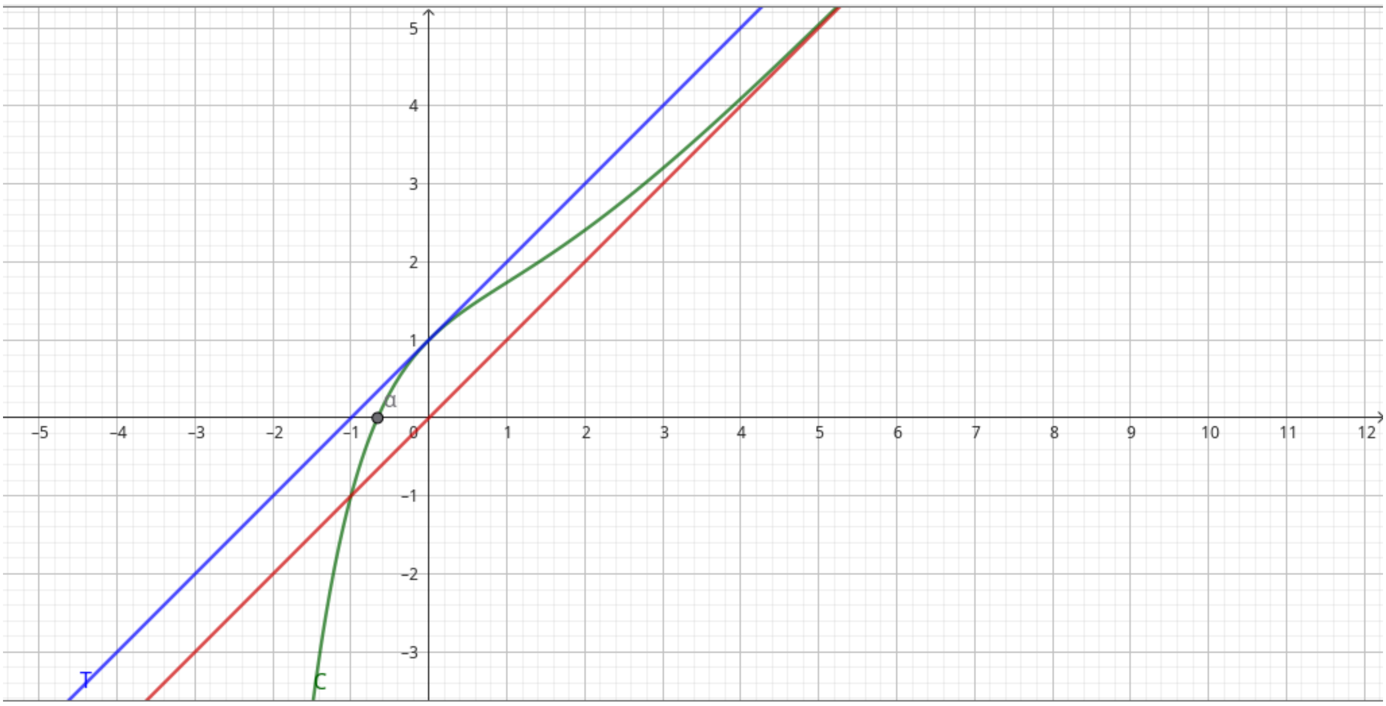
$\boxed{\alpha \in]-1;0[}$

6. Équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = 0$

$(T): y=f'(0)x+f(0) \quad avec\, f(0)=1 \quad et \quad f'(0)=\frac{g(0)}{1}=1 \quad \Leftrightarrow \quad y=x+1$

$\boxed{(T): y=x+1}$

7. Traçage de (C) et (T) dans le même repère

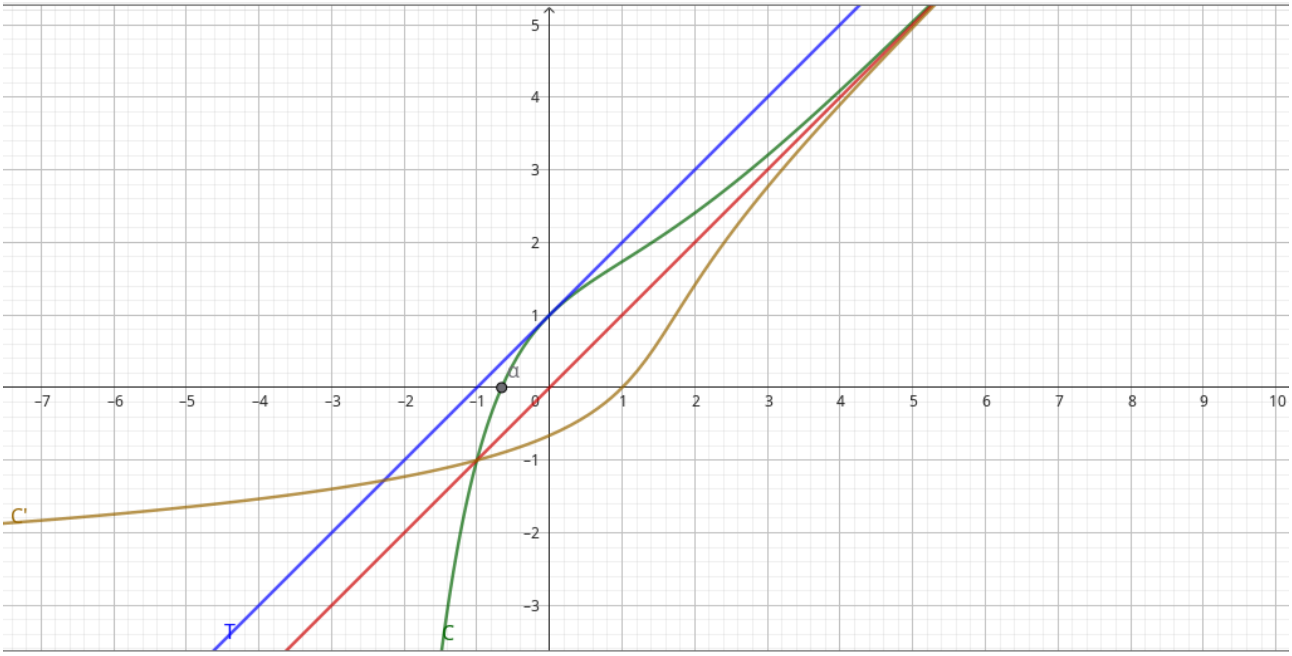


8.a. Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on précisera son ensemble de définition

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$
alors

$\boxed{\text{f admet une fonction réciproque } f^{-1} \text{ définie sur } \mathbb{R}}$

b. Traçage de (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère que (C)
(C') est l'image de (C) par la symétrie orthogonale d'axe y=x



9. Calcul en cm^2, de l'aire du domaine plan limité par (C), les droites d'équations y = x, x = 0 et x=1

$$A=\int_0^1 (f(x)-x)dx=\int_0^1 \frac{x+1}{e^x}dx=\int_0^1 (x+1)e^{-x}dx$$

$$on \quad pose \quad \begin{cases} u=x+1 & \Rightarrow \quad du=dx \\ dv=e^{-x}dx & \Rightarrow \quad v=-e^{-x} \end{cases}$$

$$A=\left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=-2e^{-1}+1-e^{-1}+1=2-\frac{3}{e}\simeq 0,9\,cm^2$$

$$\boxed{A=2-\frac{3}{e}cm^2 \simeq 0,9\,cm^2}$$