Correction Mathématiques C 2025

Exercice : Probabilité et Arithmétique

I. <u>**Probabilité**</u>

Une urne contient **5n** boules blanches et **3n+2** boules rouges.
Total boules : 5n+3n+2 = 8n+2

1. Épreuve : « Tirage simultanée de trois boules »

a) Calcul de la probabilité de A_n en fonction de n puis calcul de la limite de A_n

A_n : « Avoir exactement 2 boules blanches »

A_n = {Blanche,Blanche,Rouge}

$$Card(\Omega)=C_{8n+2}^{3}=\frac{(8n+2)!}{3!\times(8n-1)!}=\frac{(8n+2)(8n+1)8n}{6}=\frac{512n^3+192n^2+16n}{6}$$

$$Card(A_n)=C_{5n}^{2}\times C_{3n+2}^{1}=\frac{(5n)!}{2!\times(5n-2)!}\times\frac{(3n+2)!}{(3n+1)!}=\frac{5n(5n-1)(3n+2)}{2}=\frac{75n^3+35n^2-10n}{2}$$

$$p(A_n)=\frac{Card(A_n)}{Card(\Omega)}=\frac{225n^3+105n^2-30n}{512n^3+192n^2+16n}$$

$$\boxed{p(A_n)=\frac{225n^3+105n^2-30n}{512n^3+192n^2+16n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}p(A_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{225n^3+105n^2-30n}{512n^3+192n^2+16n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{225n^3}{512n^3}=\frac{225}{512}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}p(A_n)=\frac{225}{512}}$$

b) Vérification de $P(A_1)=\frac{5}{12}$

$$p(A_1)=\frac{225+105-30}{512+192+16}=\frac{300}{720}=\frac{5}{12}$$

$$\boxed{p(A_1)=\frac{5}{12}}$$

2. Épreuve : « Tirage successive, avec remise de trois boules »

Soit P_n la probabilité de B_n

B_n : « Obtenir 2 boules rouges et une boule blanche »

B_n = {(Rouge,Rouge,Blanche)} [Avec les permutations possibles]

a) Calcul de P_n

$$Card(\Omega)=(8n+2)^3=512n^3+384n^2+96n+8$$

$$Card(B_n)=5n\times(3n+2)^2\times\frac{3!}{2!\times1!}=15n\times(3n+2)^2=135n^3+180n^2+60n$$

$$P_n=\frac{135n^3+180n^2+60n}{512n^3+384n^2+96n+8}$$

$$\boxed{P_n = \frac{135n^3+180n^2+60n}{512n^3+384n^2+96n+8}}$$

b) La valeur de n pour avoir P_n = 3/8

$P_n=\frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{135n^3+180n^2+60n}{512n^3+384n^2+96n+8}=\frac{3}{8} \Leftrightarrow 1080n^3+1440n^2+480n=1536n^3+1152n^2+228n+24$

$456n^3-228n^2-252n+24=0 \Leftrightarrow 38n^3-19n^2-21n+2=0 \Leftrightarrow n(38n^2-19n-21)=-2=2\times-1=-2\times1$

$Comme\, n\in\mathbb{N}, alors\, 38n^2-19n-21\in\mathbb{Z}, donc\, n\, divise\, 2\, ou\, n\, divise\, 1$

$n\in\{1,2\}$

$Si\, n=2\, alors\, 2(152-38-21)=-2 \Leftrightarrow 186=-2\, FAUX\, alors\, n\neq 2$

$Si\, n=1\, alors\, 1(38-19-21)=-2 \Leftrightarrow -2=-2\, VRAI\, alors\, n=1$

$$\boxed{n = 1}$$

II. **Arithmétique**

1. a. La table d'addition et de multiplication dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

Table d'addition

+	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{3}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{4}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$

Table de Multiplication

X	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$	$\dot{3}$
$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{2}$
$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{4}$	$\dot{3}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

b. Résolution dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$x $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$de $\begin{cases} x+\bar{3}y=\bar{3} \\ \bar{2}x+\bar{4}y=\bar{0} \end{cases}$

$$\begin{cases} x+\overline{3}\,y=\overline{3} \\ \overline{2}\,x+\overline{4}\,y=\overline{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{2}\,x+y=\overline{1} \\ \overline{2}\,x+\overline{4}\,y=\overline{0} \end{cases} \Rightarrow \overline{4}\,x+\overline{0}\,y=\overline{1} \Leftrightarrow \overline{4}\,x=\overline{1} \Rightarrow x=\overline{4}$$

$$y+\overline{2}\times\overline{4}=\overline{1} \Leftrightarrow y+\overline{3}=\overline{1} \Leftrightarrow y=\overline{3}$$

$$\boxed{S=\{(\overline{4};\overline{3})\}}$$

2. a. L' ensemble de diviseur de 108

$108=3^3\times 2^2$

$D^+_{108}=\{1,2,3,4,6,9,12,18,27,36,54,108\}$

$$\boxed{D^+_{108}=\{1,2,3,4,6,9,12,18,27,36,54,108\}}$$

b. L' ensemble des couples (a,b) d'entiers naturels vérifiant :

$\begin{cases} ppcm(a,b)-3\,pgcd(a,b)=108 \\ 10\leq pgcd(a,b)\leq 15 \end{cases}$ on note par m = ppcm(a,b) et d = pgcd(a,b)

$$\begin{cases} m-3d=108 \\ 10\leq d\leq 15 \end{cases} \Rightarrow md-3d^2=108\,d\;o\,r\;md=ab$$

$$\begin{cases} ab-3d^2=108\,d \\ 10\leq d\leq 15 \end{cases} il\,existe\,(x,y)\,avec\,x\wedge y=1\,et \begin{cases} a=dx \\ b=dy \end{cases}$$

$$\begin{cases} xyd^2-3d^2=108\,d \\ 10\leq d\leq 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy-3)\,d=108 \\ 10\leq d\leq 15 \end{cases} \Rightarrow d\;divise\;108 \Leftrightarrow d\in D^+_{108}$$

$d\in\{12\}\;car\;10\leq d\leq 15, d=12$

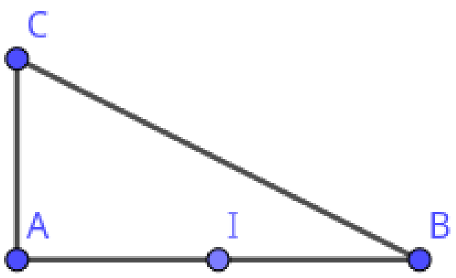
$(xy-3)\times 12=108 \Leftrightarrow xy-3=9 \Leftrightarrow xy=6\;et\;x\wedge y=1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases} ou \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases} ou \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} ou \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

$(a,b)\in\{(12,72),(72,12),(24,36),¿¿¿\}$

$$\boxed{S=\{(12,72),(72,12),(24,36),(36,24)\}}$$

<u>**Problème 1 :**</u> Géométrie plane



<u>PARTIE A : </u>Méthode géométrique

1. Détermination et construction de l' ensemble (E_1) des points M du plan tels que :

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|$

$On\ note\ par\ G=\{(A,1),(B,1),(C,1)\}\ Alors\ \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\| \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|$

$or\ \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Rightarrow \left\|3\,\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\| \Rightarrow \left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|}{3}$

$(E_1)\ est\ le\ cercle\ de\ centre\ G\ et\ de\ rayon\ r=AG\ car\ \left\|\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|$

$d'où\ A\in(E_1)$

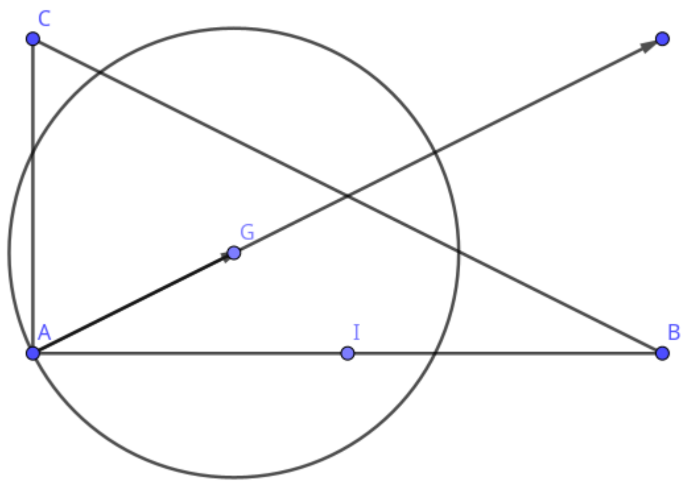
$\boxed{(E_1)\ est\ le\ cercle\ de\ centre\ G\ et\ de\ rayon\ r=AG}$

Détermination de G :

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0} \Leftrightarrow 3\,\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$

Construction de (E_1)



2. Soit S une similitude plane directe tel que S(B) = A et S(A)=C

Détermination de rapport et l'angle de S

Rapport k :

$k=\frac{AA}{BA}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$ d' où $k=\frac{1}{2}$

Angle θ :

$\theta=\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{-\pi}{2}$

$\boxed{\text{S est une similitude plane directe de rapport } k=\frac{1}{2} \text{ et d'angle } \theta=\frac{-\pi}{2}}$

3. Soit Ω le centre de S

a. Montrons que Ω appartient au cercle de diamètre [AB] et à la droite (BC)

$Comme\ S(B)=A\ et\ \theta=\frac{-\pi}{2}\ alors\ \left(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega A}\right)=\frac{-\pi}{2}$, alors le triangle ΩA B est un triangle rectangle en Ω, d' hypoténuse [AB]. Donc, le triangle $\Omega A B$ est inscrit dans le cercle de diamètre [AB], alors

$\boxed{\Omega \text{appartient au cercle de diamètre [AB]}}$

SoS est une similitude plane directe de centre Ω, de rapport k^2 et d'angle $2\theta = -\pi$

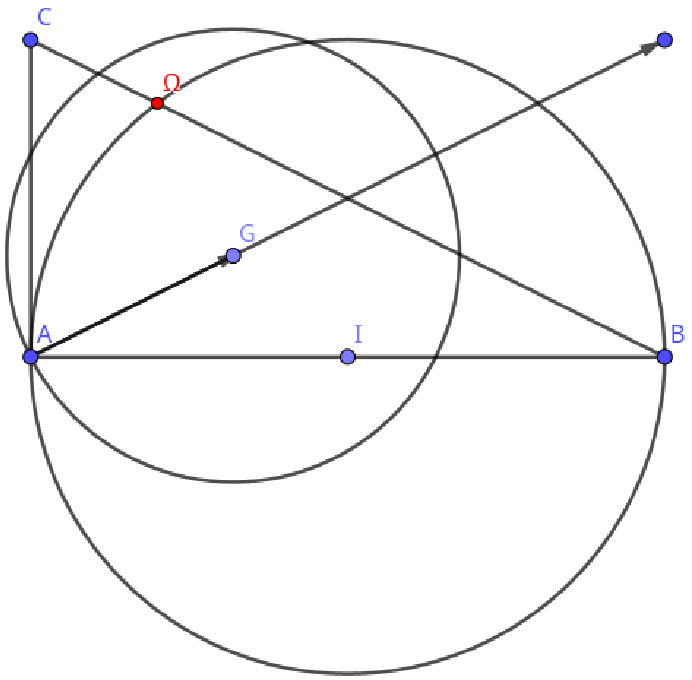
$(S \circ S)(B) = S[S(B)] = s(A) = C \Rightarrow (S \circ S)(B) = C$

Alors, $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}) = -\pi$, d'où,

$\boxed{\Omega \text{ appartient à la droite (BC)}}$

b. Construction de Ω

Ω est l' intersection entre le cercle de diamètre [AB] et la droite (BC), excluant B et C



4. On note D l'image de C par S

a. Montrons que Ω, A , D sont alignés et que (CD) // (AB)

$(S \circ S)(A) = S[S(A)] = s(C) = D \Rightarrow (S \circ S)(A) = D$

Alors, $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega D}) = -\pi$, d'où,

$\boxed{\Omega \text{, A , D sont sont alignés}}$

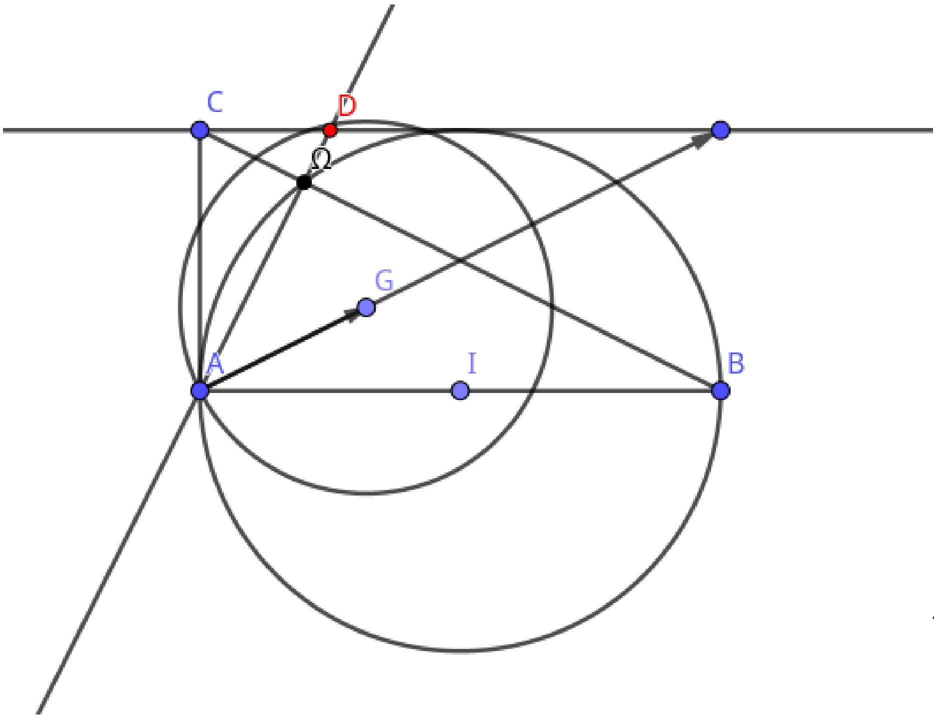
$(S \circ S)(\overrightarrow{BA}) = S[S(\overrightarrow{BA})] = s(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{CD} \Rightarrow (S \circ S)(\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{CD}$

$or\ (S \circ S)\ est\ une\ similitude\ plane\ directe\ d'angle\ -\pi\ , alors\ mes(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}) = -\pi$ alors

$\boxed{\text{(CD) et (AB) sont parallèles}}$

b. Construction du point D

D est l'intersection entre la droite (ΩA) et la droite passant par C, parallèle à (AB)



PARTIE B : Méthode utilisant des nombres complexes

1. Les affixes des points A, B, C

A : origine du repère, alors $z_A = 0$

$\vec{u}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{4} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=4\vec{u} \Rightarrow z_B - z_A = 4 \Rightarrow z_B = 4$

$\vec{v}=\dfrac{\overrightarrow{AC}}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AC}=2\vec{v} \Rightarrow z_C - z_A = 2i \Rightarrow z_C = 2i$

$z_A = 0$	$z_B = 4$	$z_C = 2i$

2. a. L'expression complexe de S

S est une similitude plane directe alors S a pour expression complexe de la forme

S : z' = az + b

$$\begin{cases} S(B)=A \\ S(A)=C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_A = az_B + b \\ zc = az_A + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+b=0 \\ b=2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{-i}{2} \\ b=2i \end{cases}$$

$$\boxed{(S): z' = -\frac{1}{2}iz + 2i}$$

b. Déduction de ses éléments caractéristiques

Rapport k : $k=|a|=\left|-\dfrac{1}{2}i\right|=\dfrac{1}{2}$

Angle θ : $\theta=arg(a)=arg\left(-\dfrac{1}{2}i\right)=-\dfrac{\pi}{2}$

Centre Ω : $z_\Omega=\dfrac{b}{1-a}=\dfrac{2i}{1+\dfrac{i}{2}}=\dfrac{4i(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{4+8i}{4+1}=\dfrac{4}{5}+\dfrac{8}{5}i$

$\boxed{\text{S est une similitude plane directe de centre } \Omega \text{ d'affixe } z_\Omega=\frac{4}{5}+\frac{8}{5}i, \text{ de rapport } k=\frac{1}{2} \text{ et d'angle } \theta=-\frac{\pi}{2}}$

3. Vérifions que A, Ω, D sont alignés

A, Ω, D sont alignés si $arg\left(\frac{z_\Omega - z_A}{z_D - z_A}\right) \equiv \pi[2\pi]$

$D = S(C)$

$z_D = -\frac{1}{2} i z_C + 2i = 1 + 2i$

$arg\left(\frac{z_\Omega - z_A}{z_D - z_A}\right) = arg\left(\frac{(4+8i)(-5+10i)}{(-5-10i)(-5+10i)}\right) = arg\left(\frac{-100}{125}\right) = arg\left(-\frac{4}{5}\right) = \pi$

$arg\left(\frac{z_\Omega - z_A}{z_D - z_A}\right) \equiv \pi[2\pi]$ alors

A, Ω, D sont alignés

4. On pose $\overline{S} = S_{(BC)} \circ S$

L' expression complexe de $\overline{S}$ et ses caractéristiques

- Expression complexe de $S_{(BC)}$

  $S_{(BC)} : z' = a\overline{z} + b$ or B et C sont invariants par $S_{(BC)}$, alors

  $a = \frac{z_B - z_C}{\overline{z_B} - \overline{z_C}} = \frac{4-2i}{4+2i} = \frac{(2-i)^2}{(2-i)(2+i)} = \frac{3-4i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

  $b = z_B - a\overline{z_B} = 4 - 4a = a(1-a) = 4\left(\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i\right) = \frac{8}{5} + \frac{16}{5}i$

  $S_{(BC)} : z' = \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)\overline{z} + \frac{8}{5} + \frac{16}{5}i$

- Expression complexe de $\overline{S} = S_{(BC)} \circ S$

$\overline{S} = S_{(BC)} \circ S : z' = \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)\overline{\left(-\frac{1}{2}iz + 2i\right)} + \frac{8}{5} + \frac{16}{5}i = \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)\left(\frac{1}{2}i\overline{z} - 2i\right) + \frac{8}{5} + \frac{16}{5}i$

$z' = \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{10}i\right)\overline{z} - \frac{8}{5} - \frac{6}{5}i + \frac{8}{5} + \frac{16}{5}i = \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{10}i\right)\overline{z} + 2i$

$$\boxed{S_{(BC)} \circ S : z' = \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{10}i\right)\overline{z} + 2i}$$

- Éléments caractéristiques de $\overline{S}$

  $\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{10}i\right)(-2i) + 2i = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i + 2i = \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i \neq 0$ et $\left|\frac{2}{5} + \frac{3}{10}i\right| = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{25}{100}\right)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

  Alors $\overline{S}$est une similitude plane indirecte

Rapport k :

$$k=\left|\frac{2}{5}+\frac{3}{10}i\right|=\frac{1}{2}$$

Centre $\Omega : z_\Omega=\dfrac{a\bar{b}+b}{1-a\bar{a}}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1+2i}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{5}\times(1+2i)=\dfrac{4}{5}+\dfrac{8}{5}i$

Ensemble des points invariants (*Axe* Δ):

$$(\Delta)=\{M(z)\in(P)\ /\ a(\bar{z}-\overline{z_\Omega})=|a|(z-z_\Omega)\}$$

$$z=\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\right)(\bar{z}-\overline{z_\Omega})+z_\Omega$$

Posons $z=x+iy \quad \Rightarrow$

$$x+iy=\frac{4}{5}x-\frac{4}{5}iy+\frac{3}{5}ix+\frac{3}{5}y-\frac{8}{5}+\frac{4}{5}i+\frac{4}{5}+\frac{8}{5}i$$

$$\begin{cases}5x=4x+3y-4\\5y=-4y+3x-4\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{4}{3}\\ y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

$$(\Delta): y=\frac{x}{3}+\frac{4}{3}$$

$$\boxed{(\overline{S})\ \text{est une similitude plane indirecte de centre } \Omega\left(\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right),\ \text{de rapport } k=\frac{1}{2}\ \text{et d'axe } (\Delta): y=\frac{x}{3}+\frac{4}{3}}$$

Problème 2 : Problème d' analyse

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

Partie A : Étude de la fonction f

1. a. Calcul de la dérivée f'(x) de f

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)x^2-2x\ln x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3},x\neq 0$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}}$$

b. Les limites de en 0^+ et $+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^2}=-\infty\times+\infty=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$	$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

c. Étude de variations de f

$Signe\ \ de\ \ f'(x)$:

$$f'(x)=0\ \Leftrightarrow x\neq 0\ \ et\ \ 1-2\ln x=0\quad\Leftrightarrow\quad \ln x=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ x=e^{1/2}=\sqrt{e}$$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f	$-\infty$	↗	$\frac{1}{2}e^{-1}$	↘	0

$Si\ \ x\ \in]0\ ;\ \sqrt{e}[,\ f\ \ est\ \ strictement\ \ croissante$
$Si\ \ x\ \in]\ \sqrt{e}\ \ ;\ +\infty[,\ f\ \ est\ \ strictement\ décroissante$
$Si\ \ x=\sqrt{e},\ f\ \ admet\ \ un\ \ extremum$

2. a. Une équation de tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1

$$(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)\quad\Leftrightarrow\quad(T):y=x-1+0=x-1\quad\Leftrightarrow\quad(T):y=x-1$$

$$\boxed{(T):y=x-1}$$

b. Construction de (C) et (T) dans le même repère

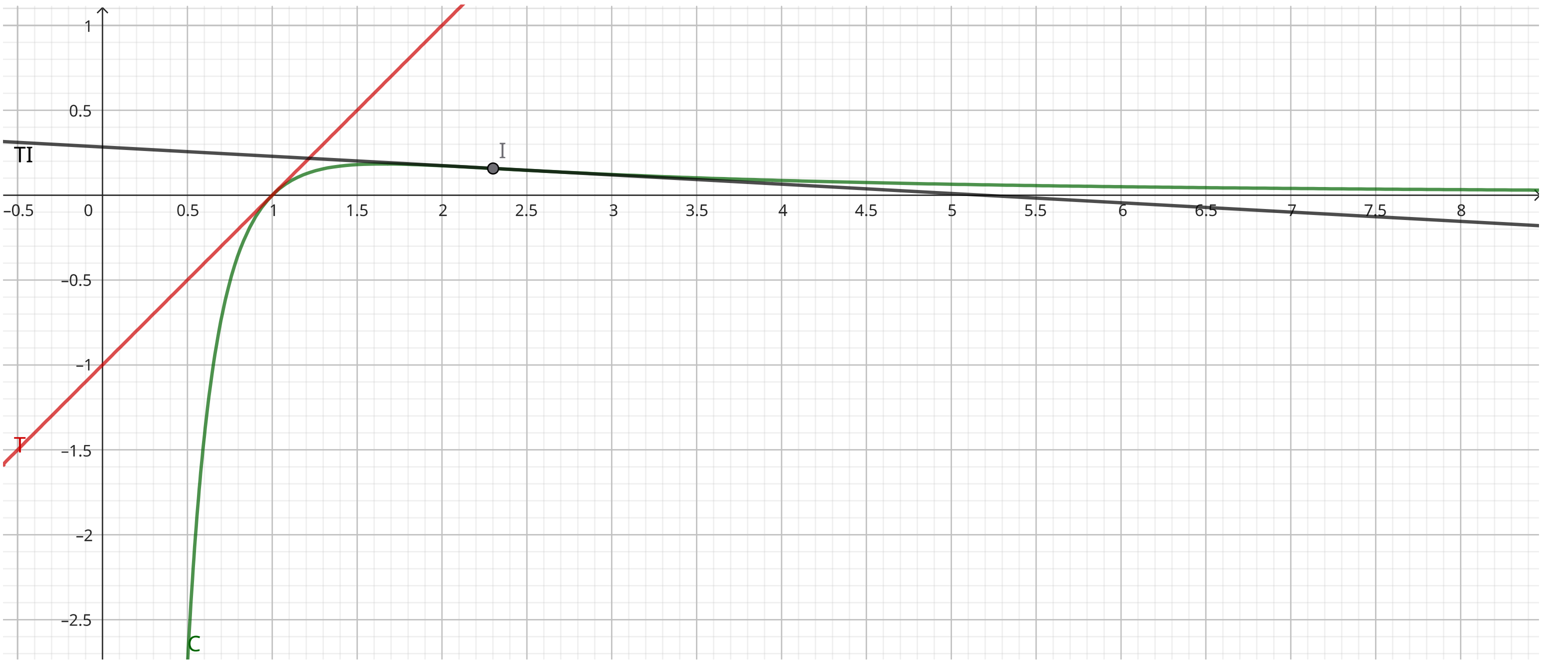
- (C) admet une asymptote verticale d' équation x=0
- (C) admet une asymptote horizontale d'équation y=0
- $\left(\sqrt{e};\frac{1}{2}e^{-1}\right)$ est le maximum de (C)

- Recherche des éventuels points d’inflexion :

$$f''(x)=\frac{-\frac{2}{x}x^3-3x^2(1-2\ln x)}{x^6}=\frac{-5+6\ln x}{x^4}$$

$$f''(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x)=\frac{5}{6} \quad \Rightarrow x=e^{\frac{5}{6}} \quad , \quad f(e^{\frac{5}{6}})=\frac{5}{6}e^{-\frac{5}{3}}$$

Le point $I\left(e^{\frac{5}{6}},\frac{5}{6}e^{-\frac{5}{2}}\right)$ est un point d’inflexion de (C)



3.a. Montrons que la tagente (T_u) au point d’abscisse u est parallèle à la droite (Δ) : y = x si et seulement si $u^3+2\ln u=1$

$(T_u): y=f'(u)(x-u)+f(u)=f'(u)x-uf'(u)+f(u)$

(T_u) // (Δ) si et seulement s’ils ont le même coefficient directeur, c’est à dire :

$f'(u)=1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-2\ln u}{u^3}=1,\ u\neq 0 \ \ alors \quad 1-2\ln u=u^3 \quad \Leftrightarrow \quad u^3+2\ln u=1$, Alors

$$\boxed{(T_u)\ //\ (\Delta) : y = x \quad \Leftrightarrow \quad u^3+2\ln u=1}$$

b. Étude des sens de variation de h définie sur $]0;+\infty[$ $par \ \ h(u)=u^3+2\ln u$

$h'(u)=3u^2+\frac{2}{u}=\frac{3u^3+2}{u}>0 \quad \forall \quad u>0$, alors h est strictement croissante.

$$\boxed{\text{h est strictement croissante sur }]0;+\infty[}$$

c. Déduction de l’existence unique du point de (C) où la tangente est parallèle à (Δ)

$h \ \ est \ \ une \ \ bijection \ \ de \ \ ]0;+\infty[\ \ vers \ \ ]-\infty;+\infty[=\mathbb{R},\ \ or \ \ 1 \in \mathbb{R},$

$D'après \ \ le \ \ théorème \ \ de \ \ bijection, \ \ il \ \ existe \ \ unique \ \ point\,de \ \ ]0;+\infty[\ \ où \ \ h(x)=1$

C’ est à dire, il existe un point unique tel que $u^3+2\ln u=1$ ⇔ (T_u) // (Δ)

$$\boxed{\exists!\ \ u \in \ ]0;+\infty[\ \ \text{tel que } (T_u)\ //\ (\Delta)}$$

Partie B : Étude d'une suite intégrale

$$\forall \ n \in \mathbb{N}, \ U_n = \frac{1}{n!}\int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^n}{x^2}\,dx$$

1. Calcul de U_1

$$U_1 = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x^2}\,dx \quad on \quad pose \quad \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{dx}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x} \\ v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad U_1 = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} -\frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^{e^2} = -\frac{3}{e^2} + 0 + 1 = \frac{e^2-3}{e^2}$$

$$\boxed{U_1 = \frac{e^2-3}{e^2}}$$

L' aire du domaine délimité par la courbe (C), l' axe des abscisses et les droites x=0 et x=e^2 est de $\dfrac{e^2-3}{e^2} \approx 0{,}59$ x 4 cm^2

2. a. Montrons que, pour $1 < x < e^2, \quad on \ a \ : \ 0 \le U_n \le \dfrac{2^n}{n!}\left[1 - \dfrac{1}{e^2}\right]$

$$1 \le x \le e^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (\ln 1)^n \le (\ln x)^n \le 2^n$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le \frac{(\ln x)^n}{x^2} \le \frac{2^n}{x^2} \Leftrightarrow \quad \int_1^{e^2} 0\,dx \le \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^n}{x^2}\,dx \le \int_1^{e^2} \frac{2^n}{x^2}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le \frac{1}{n!}\int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^n}{x^2}\,dx \le \frac{2^n}{n!}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{e^2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le U_n \le \frac{2^n}{n!}\left[1 - \frac{1}{e^2}\right]$$

$$\boxed{Si \ \ 1 < x < e^2, \quad on \ a \ : \ 0 \le U_n \le \frac{2^n}{n!}\left[1 - \frac{1}{e^2}\right]}$$

b. Calcul de $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

$$Sachant \ que \ 2^n < n! \ pour \ n \ge 4, \ \lim_{n \to +\infty} \frac{2^n}{n!} = 0 \quad alors \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{2^n}{n!}\left[1 - \frac{1}{e^2}\right] = 0$$

$$D'après \ \le \ théorème \ de \ gendarmes \ \lim_{n \to +\infty} U_n = 0$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = 0}$$

3.a. Montrons que $\forall \ n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} - U_n = -e^{-2} \times \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

Par l'intégration par partie, on a :

$$U_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2}dx=\frac{1}{(n+1)!}\left[-\frac{1}{x}(\ln x)^{n+1}\right]_1^{e^2}+\frac{1}{(n+1)!}\int_1^{e^2}\frac{(n+1)}{x}\frac{(\ln x)^n}{x}dx$$

$$U_{n+1}=-e^{-2}\times\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{1}{n!}\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx=-e^{-2}\times\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}+U_n$$

$$U_{n+1}-U_n=-e^{-2}\times\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\boxed{U_{n+1}-U_n=-e^{-2}\times\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}$$

b. Déduction de $\forall\ n\ \in\ \mathbb{N}, U_n=1-e^{-2}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}$

$$U_n-U_{n-1}=-e^{-2}\times\frac{2^n}{n!}$$

$$U_{n-1}-U_{n-2}=-e^{-2}\times\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\quad +$$

....

$$U_1-U_0=-e^{-2}\times\frac{2^1}{1!}$$

Par addition successive et simplification , on a

$$U_n-U_0=-e^{-2}\times\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k!}\quad\Leftrightarrow\quad U_n=U_0-e^{-2}\times\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k!}\quad \textit{Avec}\quad U_0=\int_1^{e^2}\frac{dx}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{e^2}=1-e^{-2}$$

$$U_n=1-e^{-2}-e^{-2}\times\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k!}=1-e^{2}\left[1+\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k!}\right]=1-e^{2}\left[\frac{2^0}{0!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k!}\right]=1-e^{2}\times\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}$$

$$\boxed{\forall\ n\ \in\ \mathbb{N}, U_n=1-e^{-2}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}}$$

4. Prouvons alors que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}=e^2$

$$\textit{Sachant que}\ \lim_{n\to+\infty}U_n=0\quad or\quad U_n=1-e^{-2}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}$$

$$\Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty}1-e^{-2}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}=0\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{n\to+\infty}e^{-2}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}=1\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}=e^2$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}=e^2}$$