Correction Baccalauréat – Mathématiques série S – Session 2025

Exercice 1

Partie A :

On considère les matrices suivantes : $A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&3\\1&1&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-3&-2&3\\2&1&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}$

1.a. Calcul de AxB et BxA

$$A\times B=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&3\\1&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3&-2&3\\2&1&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$$

$$B\times A=\begin{pmatrix}-3&-2&3\\2&1&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&3\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$$

$$\boxed{\begin{array}{l}A\times B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3\\ B\times A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3\end{array}}$$

b. Comme AxB = BxA = I_3, alors B est l' inverse de A et A est l'inverse de B.

2. On considère le système d' équation $(S):\begin{cases}y-z=-3\\x+3z=17\\x+y+z=11\end{cases}$

a. Écriture sous forme matricielle de (S) :

(S) : AX = Y avec $A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&3\\1&1&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, et $Y=\begin{pmatrix}-3\\17\\11\end{pmatrix}$

$$\boxed{(S):\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&3\\1&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\17\\11\end{pmatrix}}$$

b. Détermination de X

$AX=Y \Leftrightarrow A^{-1}AX=A^{-1}Y$ or $A^{-1}=B \Leftrightarrow X=BY$

$$X=\begin{pmatrix}-3&-2&3\\2&1&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\17\\11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}8\\0\\3\end{pmatrix}}$$

Partie B :

1. Détermination du reste de la division euclidienne de 7×3^{359} par 11

- Reste de la division euclidienne de 3^n par 11 :
  $3^0\equiv1[11]\,3^1\equiv3[11]\,3^2\equiv9[11]\,3^3\equiv5[11]\,3^4\equiv4[11]\,3^5\equiv1[11]$
  $3^{5k}\equiv1[11]\,\forall n\in\mathbb{N}$

$359 \equiv 4[5], 3^{355} \equiv 1[11] \Leftrightarrow 3^{359} \equiv 3^4[11]\, or\, 3^4 \equiv 4[11]$
$3^{359} \equiv 4[11] \Leftrightarrow 7 \times 3^{359} \equiv 4 \times 7[11]\, or\, 6 \times 7 = 28 \equiv 6[11]$
$7 \times 3^{359} \equiv 6[11]$

Le reste de la division euclidienne de 7×3^{359} *par* 11 est 6

2.a. Une solution particulière de $23x - 17y = 1$
$23 = 17 + 6 \Rightarrow 6 = 23 - 17$
$17 = 6 \times 2 + 5 \Rightarrow 5 = 17 - 6 \times 2$
$6 = 5 + 1 \Rightarrow 6 - 5 = 1$
$or\, 5 = 17 - 6 \times 2 \Rightarrow 6 - 17 + 6 \times 2 = 1 \Leftrightarrow 17(-1) + 6(3) = 1$
$or\, 6 = 23 - 17 \Rightarrow 17(-1) + 3(23 - 17) = 1$
$23(3) - 17(3) - 17(1) = 1 \Leftrightarrow 23(3) - 17(4) = 1$

$S_0 = \{(3,4)\}$

b. Déduction de la résolution dans $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ *de* $23x - 17y = 2$

$23(3) - 17(4) = 1 \Leftrightarrow 23(6) - 17(8) = 2$
$23x - 17y = 2$
$23(6) - 17(8) = 2$
$23(x - 6) - 17(y - 8) = 2 \Leftrightarrow 23(x - 6) = 17(y - 8)$
$Comme\ pgcd(23,17) = 1, 23\ divise\ y - 8\ et\ 17\ divise\ x - 6$
$y - 8 = 23k \Rightarrow y = 8 + 23k\ et\ x - 6 = 17k \Rightarrow x = 6 + 17k$

$S = \{(6 + 17k, 8 + 23k) / \square k \in \mathbb{Z}\}$

<u>Exercice 2 :</u>

1. Équations paramétriques de la droite (D)

$(D)\ a\ pour\ coefficient\ directeur\ \vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} et\ passe\ par\ le\ point\ A\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

$(D): X = \vec{u}t + A\ avec\ X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Rightarrow (D): \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -2t - 1 \\ z = t + 3 \end{cases}$

$(D): \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -2t - 1, t \in \mathbb{R} \\ z = t + 3 \end{cases}$

2.a. Montrons que les droites (D) et (D’) sont orthogonaux

$(D'): \begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = 5t - 8 \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = -2t + 6 \end{cases}$

$(D'): X = \vec{a}t + A_0\ avec\ \vec{a} = \begin{pmatrix}4\\5\\-2\end{pmatrix} (D) \perp (D')\ si\ et\ seulement\ si\ \vec{a}\begin{pmatrix}4\\5\\-2\end{pmatrix} \times \vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} = 0$

$\vec{a}\begin{pmatrix}4\\5\\-2\end{pmatrix} \times \vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} = 12 - 10 - 2 = 0\ Alors\ (D) \perp (D')$

$(D) \perp (D')$

b. Les coordonnées du point I intersection de (D) et (D')

$$I=(D)\cap(D') \Leftrightarrow \begin{cases} x=3t+2=4t+1 \\ y=-2t-1=5t-8 \\ z=t+3=-2t+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=1 \\ t=1 \end{cases} \textit{Pour } t=1,(D)\cap(D')$$

$$I\begin{pmatrix} x=3+2 \\ y=-2-1 \\ z=-2+6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow I\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{I\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

3. Une équation cartésienne du plan (P) contenant les deux droites (D) et (D')

Soit $\vec{n}$ *un vecteur normal de* (P) *alors* $\vec{n}$ *est perpendiculaire aux vecteurs directeurs de* (D) *et* (D')

$$\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\times\vec{a}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow 4a+5b-2c=0 \; et \; \vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\times\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow 3a-2b+c=0 \Leftrightarrow 6a-4b+2c=0$$

$$10a+b=0 \Leftrightarrow b=-10a \textit{, prenons } a=1 \textit{ alors } b=-10, c=2(-10)-3(1)=-23$$

$$\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ -23 \end{pmatrix}$$

$$\forall M(x,y,z)\in(P), \overrightarrow{IM}\times\vec{n}=0$$

$$\begin{pmatrix} x-5 \\ y+3 \\ z-4 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ -23 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow x-5-10(y+3)-23(z-4)=0 \Leftrightarrow x-5-10y-30-23z+92=0$$

$$(P): x-10y-23z+57=0$$

$$\boxed{(P): x-10y-23z+57=0}$$

Problème 1 :

Partie A :

1. Une figure avec construction de I et J

- Construction de I :

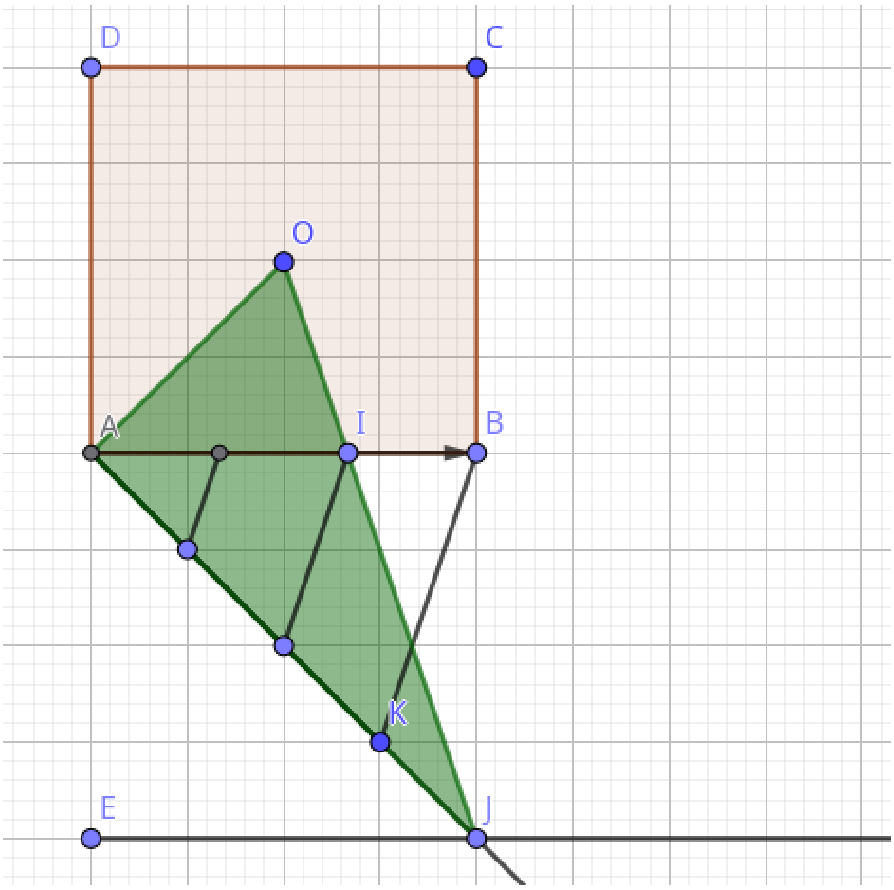
  Traçage du segment [AK]

  Division en 3 parties égales de [AK] et plaçage de I, intersection de segment [AB] et la droite parallèle à (KB) passant par le deuxième point parmi les 3 dans le segment [AK]

- Construction de J :

  $mes(\widehat{\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AO}})=\frac{\pi}{2}$ *alors* J appartient à la demi-droite d'origine A perpendiculaire à (AO) vers le bas. Soit AEJ le triangle rectangle en E. Alors

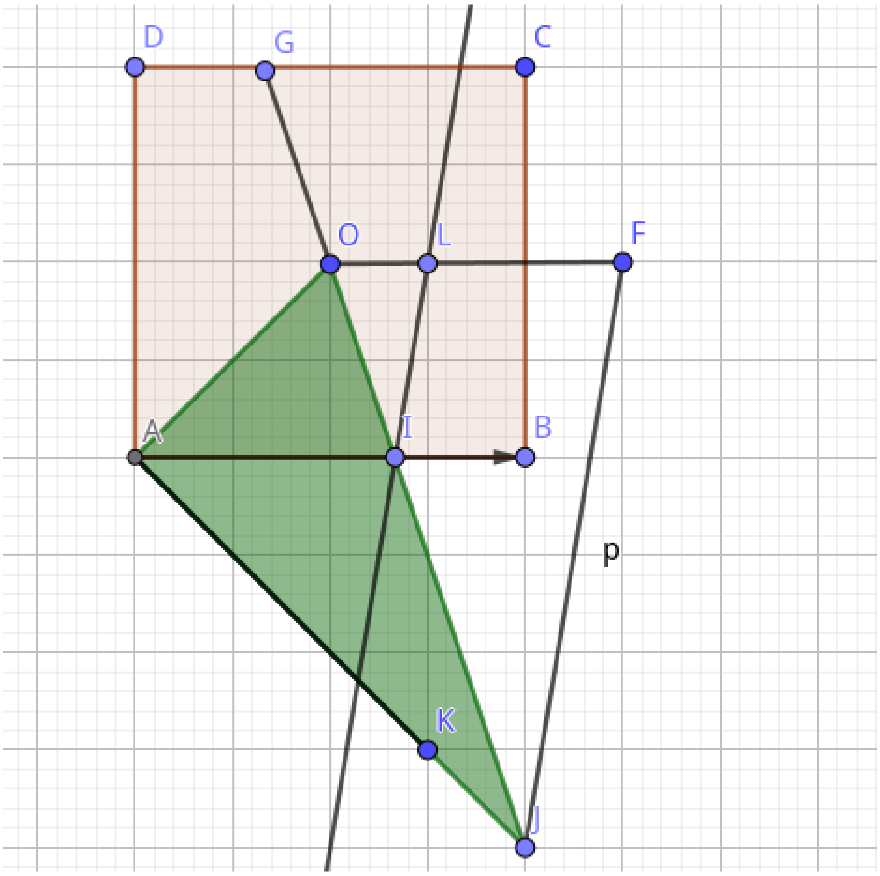
  $\cos(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AJ})=\frac{AE}{AJ}=\cos(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad AE=4\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2}=4$



2.a. Détermination et construction de G = bar{(J;1);(O ;-4)}

$G=\{(J;1);(O;-4)\}$

$\overrightarrow{GJ}-4\overrightarrow{GO}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OJ}-4\overrightarrow{GO}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OG}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OJ}$



b. Détermination et construction de l'ensemble $(\Gamma):\{M\in(P)/MJ^2-4MO^2=0\}$

Soit

$f:(P) \rightarrow (P)$

$\quad M \rightarrow f(M)=MJ^2-4MO^2$

une fonction scalaire de Leibniz alors $f(M)=(1-4)MG^2+f(G)$ *où* $G=\{(J;1);(O;-4)\}$

$f(M)=-3MG^2+f(G)$

Calcul de f(G)

$f(G)=GJ^2-4GO^2$ *or* $GO=\frac{1}{3}OJ$ *et* $GJ=GO+OJ \Rightarrow OJ=GJ-GO$

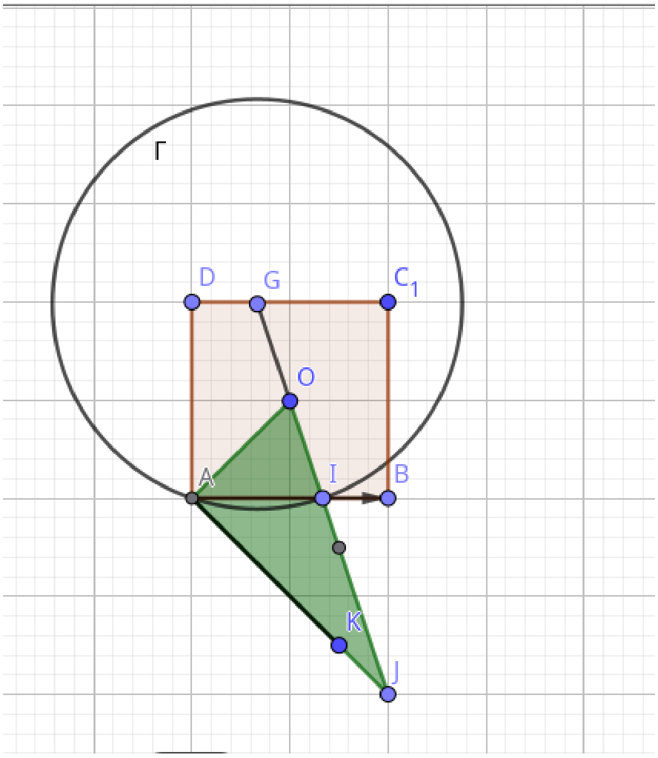
$GO=\frac{1}{3}(GJ-GO)=\frac{1}{3}GJ+\frac{1}{3}GO \Leftrightarrow 4GO=GJ$

$f(G)=(4GO)^2-4GO^2=(16-4)GO^2=12GO^2$

$(\Gamma):\{M \in (P) \ / \ f(M)=0\}$ $f(M)=0 \Leftrightarrow 3MG^2=12GO^2 \Rightarrow MG^2=4GO^2 \Rightarrow MG=2GO$

$\boxed{(\Gamma)\ \text{est un cercle de centre G et de rayon r = 2GO}}$

Construction

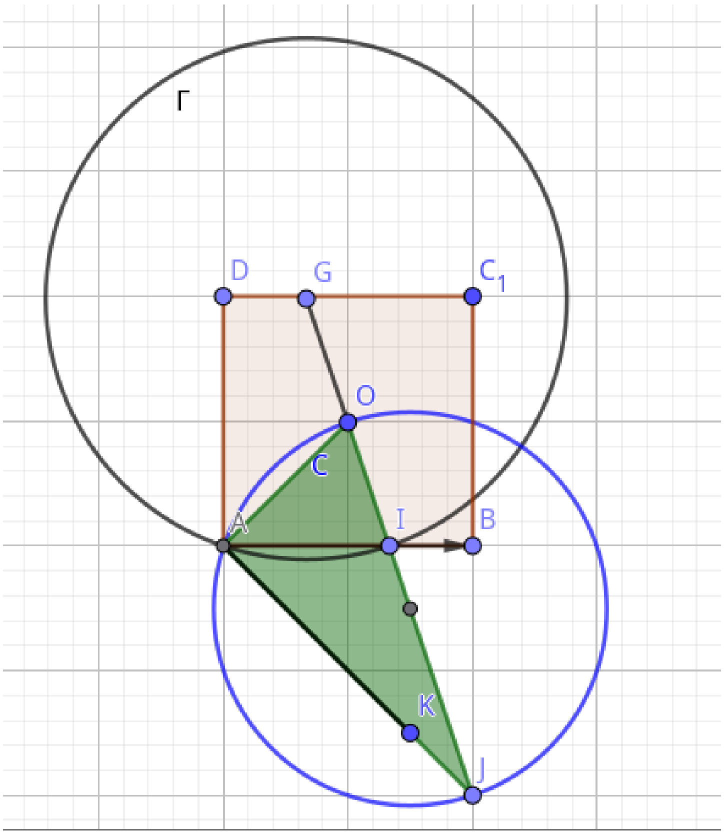


3. Ensemble des points (C) = $\{M \in (P) / \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MJ}=0\}$

$\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MJ}=0$ alors $mes(\widehat{\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MJ}}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ alors MOJ est un triangle rectangle en M, donc l'ensemble des points M constitue le cercle de diamètre [OJ]

$\boxed{\text{(C) est le cercle de diamètre [OJ]}}$

Construction :



4. a. Le rapport et un angle de S

S est une composition d'une homothétie de rapport -2 et d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, alors

S est une similitude plane directe de rapport **2** et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

b. Calcul de S(A)

$S(A)=(h\circ r)(A)=h[r(A)] \quad or \quad r(A)=B$

$S(A)=h(B)=B' \quad avec \quad -2\vec{IB}=\vec{IB'} \Leftrightarrow \vec{IB'}=-2(\vec{IB'}+\vec{B'B})$

$3\vec{IB'}=2\vec{BB'} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{B'I}=\frac{2}{3}\vec{B'B} \quad \Rightarrow \quad B'=A$

$S(A)=A$

S(A)=A alors A est le centre de S

c. Montrons que A est un point d'intersection de (C) et (Γ)

A est un point d'intersection si A appartient à (C) et à (Γ)

$(\Gamma):\{M\in(P)/MJ^2-4MO^2=0\}$

Si A appartient à (Γ) alors $AJ^2-4AO^2=0 \quad avec \quad AJ=4\sqrt{2} \quad et \quad AO=\frac{1}{2}[4\sqrt{2}]=2\sqrt{2}$

$AJ^2-4AO^2=(4\sqrt{2})^2-4(2\sqrt{2})^2=32-4\times 8=32-32=0$ alors A appartient à (Γ)

$(C)=\{M\in(P)/\vec{MO}.\vec{MJ}=0\}$

Comme AJO est un triangle rectangle en A alors $\vec{MO}.\vec{MJ}=0$, Donc A appartient à (C)

A est un point d'intersection de (Γ) et (C)

Partie B :

1. Détermination des affixes des points O, I, J et G

$O \; centre \; de \; carré \; ABCD \quad alors \quad z_O=\frac{z_C+z_A+z_B+z_D}{4}=\frac{2+2i+0+2+2i}{4}=1+i$

$\vec{AI}=\frac{2}{3}\vec{AB} \quad alors \quad z_I-z_A=\frac{2}{3}(z_B-z_A) \quad \Rightarrow \quad z_I=\frac{2}{3}(2)=\frac{4}{3}$

$(\vec{AJ},\vec{AO})=\frac{\pi}{2} \quad et \quad AJ=\frac{4}{2}\sqrt{2} \quad alors \quad arg\left(\frac{z_O}{z_J}\right)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow arg(z_J)=arg(z_O)-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}$

$et \quad |z_J|=2\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad z_J=422e^{-i\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2-2i$

$G=\{(J;1);\bar{(}O;-4)\} \quad \Rightarrow \quad \vec{JG}-4\vec{OG}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad z_G-z_J-4z_G+4z_O=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3z_G=4z_O-z_J$

$z_G=\frac{1}{3}(4+4i-2+2i)=\frac{2}{3}+2i$

$z_O=1+i$	$z_I=\frac{4}{3}$	$z_J=2-2i$	$z_G=\frac{2}{3}+2i$

2. a. Expression complexe de r et h

$r:z'=e^{i\theta}z+z_O(1-e^{i\theta}) \quad \Leftrightarrow \quad z'=iz+(1+i)(1-i)=iz+2$

$h:z'=kz+z_I(1-k) \quad \Leftrightarrow \quad z'=-2z+\frac{4}{3}(1+2)=-2z+4$

$r:z'iz+2$	$h:z'=-2z+4$

b. L' expression complexe, la nature et les éléments caractéristiques de S

$S=h\circ r : z'=-2(iz+2)+4=-2iz-4+4=-2iz$

$S: z'=-2iz$

S *est de la forme* $z'=az+b$ *alors* S *est une similitude plane directe*

Rapport k : $k=|-2i|=2$

Angle θ: $\theta=arg(-2i)=-\dfrac{\pi}{2}$

Centre Ω: $z_\Omega=\dfrac{0}{1+2i}=0=z_A$

$\boxed{\text{S est une similitude plane directe de centre A, de rapport } \mathbf{2} \text{ et d'angle } -\frac{\pi}{2}}$

3. Montrons que A est un point d' intersection de (Γ) et (C)

A est un point d'intersection si A appartient à (C) et à (Γ)

$(\Gamma):\{M\in(P)/MJ^2-4MO^2=0\}$

Si A appartient à (Γ) alors $AJ^2-4AO^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad |z_J|^2-4|z_O|^2=0$

$|z_J|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2} \quad et \quad |z_O|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad |z_J|^2-4|z_O|^2=(2\sqrt{2})^2-4(\sqrt{2})^2=8-8=0$

alors A appartient à (Γ)

$(C)=\{M\in(P)/\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MJ}=0\} \quad \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AJ}=0 \quad \Leftrightarrow \quad arg\left(\dfrac{z_O}{z_J}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[\pi]$

$\dfrac{z_O}{z_J}=\dfrac{1+i}{2-2i}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)=\dfrac{i}{2} \quad arg\left(\dfrac{z_O}{z_J}\right)=arg\left(\dfrac{i}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

Donc A appartient à (C)

$\boxed{\text{A est un point d'intersection de } (\Gamma) \text{ et (C)}}$

Problème 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x)=\begin{cases}(x+1)e^{-x}-1 & si \quad x\leq 0\\ x(1-\ln x) & si \quad x>0\end{cases}$

On note par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

Partie I

1. Étude de la continuité et de dérivabilité de f en $x_0 = 0$

Continuité

$$f(0)=(0+1)e^{0}-1=1-1=0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)e^{-x}-1=1-1=0=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x(1-\ln x)=\lim_{x\to 0^+} x-x\ln x=0-0=0=f(0)$$

$$Comme \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0, \quad alors \quad f \quad est \quad continue \quad en \quad x_0=0$$

Dérivabilité :

$$f'_g(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(x+1)e^{-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-} e^{-x}+\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-x}-1}{x}=1-\lim_{t\to 0^+}\frac{e^{t}-1}{t}=1-1=0$$

$$f'_d(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(1-\ln(x))}{x}=\lim_{x\to 0^+} 1-\ln x=1-(-\infty)=+\infty$$

Comme $f'_g(0)\neq f'_d(0)$ alors f n'est pas dérivable en 0

f est continue en 0	f n'est pas dérivable en 0

2.a. Étude des variations de f sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$

$$Si \quad x<0: \quad f'(x)=[(x+1)e^{-x}-1]'=e^{-x}-(x+1)e^{-x}=-xe^{-x}$$

$$Pour \quad x<0: \ -x>0 \quad et \quad e^{-x}>0 \quad alors \quad f'(x)>0 \quad Donc \quad f \quad est \quad croissante$$

$$Si \quad x>0: \quad f'(x)=[x(1-\ln x)]'=1-\ln x+\frac{x}{-x}=1-\ln x-1=-\ln x$$

$$-\ln x=0 \ \Leftrightarrow \ x=1 \quad alors \quad si \quad 0<x<1 \ ,-\ln x>0 \quad alors \quad f \quad est \quad croissante$$

$$Si \quad x>1 \quad -\ln x<0, \quad alors \quad f \quad est \quad décroissante$$

$Si \quad x<0: \quad f \quad est \quad croissante$
$Si \quad 0<x\leq 1: \quad f \quad est \quad croissante$
$Si \quad x>1: \quad f \quad est \quad décroissante$

b. Tableau de variation de f

x	-∞		0		1		+∞
f'(x)		+	0‖+∞	+	0	-	
f	$-\infty$	↗	0	↗	1	↘	$-\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}(x+1)e^{-x}-1=(-\infty)(+\infty)=-\infty$$

$$f(1)=1(1-\ln 1)=1$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} x(1-\ln x)=+\infty(-\infty)=-\infty$$

3. Étude des branches infinies de (C)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x+1)e^{-x}-1}{x} = \lim_{x \to -\infty} e^{-x}\left(\frac{x+1-e^{x}}{x}\right) = \lim_{x \to -\infty} e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{e^{x}}{x}\right) = +\infty(1+0-0) = +\infty$$

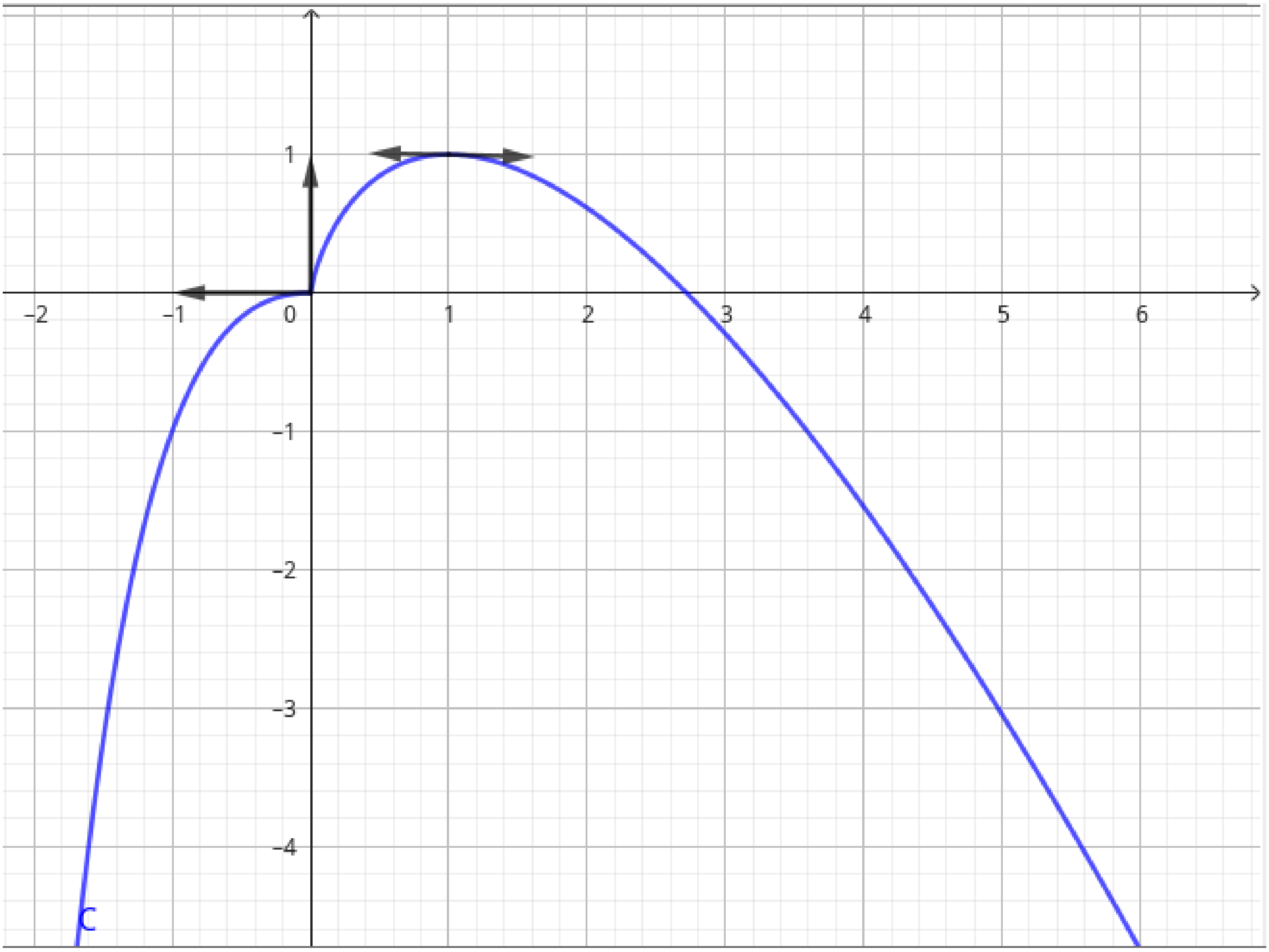
Alors en -∞, (C) admet une branche parabolique de direction parallèle à l'axe des ordonnées (y'Oy)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(1-\ln x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1-\ln x = -\infty$$

Alors, (C) admet, au voisinage de +∞, une branche parabolique parallèle à (y'Oy)

4. Construction de la courbe (C) et les 2 demi-tangentes en 0

- 1ère demi-tangente : à gauche, f'(0) = 0 alors il y a une demi-tangente horizontale
- 2éme demi-tangente : à droite, f'(0) = +∞ alors il y a une demi-tangente verticale



Partie II

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n>0,\quad U_n=\frac{1}{n!}\int_{-1}^{0}(x+1)^n e^{-x}dx$

1. a. Calcul de U_1

$$U_1=\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-x}dx=\left[-(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}-e^{-x}dx=-1+0+\left[-e^{-x}\right]_{-1}^{0}=-1-1+e=-2+e$$

$$\boxed{U_1=e-2}$$

b. Interprétation géométrique de ce résultat

$|U_1 - 1| = \left|\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-x}dx-\int_{-1}^{0}-1\,dx\right|=\left|\int_{-1}^{0}f(x)dx\right|$ = |e-2-1| = 3-e ≈ 0,28 cm² est l'aire du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisse, l'axe des ordonnées et la droite d'équation x=-1.

2.a. Un encadrement de U_n

$$-1\le x\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad 0\le -x\le 1 \quad\Leftrightarrow\quad 1\le e^{-x}\le e$$

$$(x+1)^n \;\le\; (x+1)^n e^{-x} \;\le\; e(x-1)^n$$

$$\int_{-1}^{0}(x+1)^n dx \;\le\; \int_{-1}^{0}(x+1)^n e^{-x}dx \;\le\; e\int_{-1}^{0}(x-1)^n dx \quad avec \quad \int_{-1}^{0}(x+1)^n dx=\left[\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n+1} \;\le\; \int_{-1}^{0}(x+1)^n e^{-x}dx \;\le\; \frac{e}{n+1}$$

$$\frac{1}{(n+1)n!} \;\le\; \frac{1}{n!}\int_{-1}^{0}(x+1)^n e^{-x}dx \;\le\; \frac{e}{(n+1)n!}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \;\le\; U_n \;\le\; \frac{e}{(n+1)!}$$

$$\boxed{\frac{1}{(n+1)!} \;\le\; U_n \;\le\; \frac{e}{(n+1)!}}$$

b. Déduction de la limite de U_n

$$\frac{1}{(n+1)!} \;\le\; U_n \;\le\; \frac{e}{(n+1)!}$$

$$or \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)!}=0 \quad alors \quad D'après\ le\ théorème\ de\ Gendarmes \quad \lim_{n\to+\infty}U_n=0$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}U_n=0}$$

3. En utilisant l'intégration par parties, vérifions que $U_{n+1}=U_n-\frac{1}{(n+1)!}$

$$U_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\int_{-1}^{0}(x+1)^{n+1}e^{-x}dx=\frac{1}{(n+1)!}\left[-e^{-x}\times(x+1)^{n+1}\right]_{-1}^{0}+\frac{n+1}{(n+1)!}\int_{-1}^{0}(x+1)^n e^{-x}dx$$

$$U_{n+1}=-\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{n!}\int_{-1}^{0}(x+1)^n e^{-x}dx=U_n-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$\boxed{U_{n+1}=U_n-\frac{1}{(n+1)!}}$$

4. Montrons que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$

$U_n = U_{n-1} - \frac{1}{n!}$

$U_{n-1} = U_{n-2} - \frac{1}{(n-1)!}$ $+$

....

$U_2 = U_1 - \frac{1}{2!}$

après addition membres, membres et simplifications, on a :

$U_n = U_1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{0!} + 1 + 1 = U_1 + 2 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e - 2 + 2 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

$U_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

$Or \quad \lim_{n \to +\infty} U_n = 0 \quad alors \quad \lim_{n \to +\infty} e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e - \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 0$

$D'où \quad \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e}$$