Correction Mathématiques – Série D - 2025

Exercice 1 :

1. Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^2-(1+2i)z-3+11i=0$

$z^2-(1+2i)z-3+11i=0$

$\Delta=[-(1+2i)]^2-4(1)(-3+11i)=-3+4i+12-44i=9-40i=5^2-4^2-2\times5\times4i=(5-4i)^2$

$z_1=\dfrac{1+2i-5+4i}{2}=-2+3i \qquad z_2=\dfrac{1+2i+5-4i}{2}=3-i$

$\boxed{S=\{-2+3i\ ;\ 3-i\}}$

2. Dans le plan complexe (P), on a les points

$A(z_A=-2+3i),\quad B(z_B=3-i),\quad C(z_C)=7+4i \quad et \quad D(z_D=2+8i)$, I le milieu de [AC]

a. Montrons que ABCD est un carré

ABCD est un carré si les deux diagonales ont le même longueur et orthogonaux

$C'est-à-dire\quad AC=BD \quad et \quad mes(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}})\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\Leftrightarrow \dfrac{z_C-z_A}{z_D-z_B}=\pm i$

$\dfrac{z_C-z_A}{z_D-z_B}=\dfrac{7+4i+2-3i}{2+8i-3+i}=\dfrac{(9+i)(-1-9i)}{(-1+9i)(-1-9i)}=\dfrac{-9+9-i-81i}{1+81}=-\dfrac{81i}{81}=-i$

$Alors\quad AC=BD \quad et \quad mes(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}})\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi],\quad Donc$

$\boxed{\text{ABCD est un carré}}$

b. L'ensemble des points M du plan d' affixe z vérifiant $|2iz+7-5i|=4$

$On\ pose\quad z=x+iy \quad alors \quad |2iz+7-5i|=|2ix-2y+7-5i|$

$|2ix-2y+7-5i|=4 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{(2x-5)^2+(-2y+7)^2}=4$

$(2x-5)^2+(-2y+7)^2=16 \quad\Leftrightarrow\quad 4\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+4\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2=16$

$(\Gamma):\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2=4=2^2$

$\boxed{(\Gamma) \text{ est un cercle de centre } \left(\dfrac{5}{2},\dfrac{7}{2}\right) \text{ et de rayon 2 cm}}$

3. a. L' expression complexe de r :

$r:z'=e^{i\theta}z+b \quad avec \quad \theta=mes(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{AB}})=arg(\dfrac{z_B-z_A}{z_A-z_D})=arg\left(\dfrac{(5-4i)(-4+5i)}{(-4-5i)(-4+5i)}\right)=arg\left(\dfrac{25i+16i}{16+25}\right)=arg(i)=\dfrac{\pi}{2}$

$r:z'=iz+b \quad or \quad A=r(D) \ \Rightarrow\ z_A=iz_D+b \ \Rightarrow\ b=z_A-iz_D=-2+3i-2i+8=6+i$

$r:z'=iz+6+i$

$\boxed{r:z'=iz+6+i}$

b. Soit $f:(P)\to(P)$

$z\to z'=-2z+2+19i$

b1. Expression complexe de la transformation $g=f\circ r$

$g=f\circ r \quad\Rightarrow\quad g(M)=f[r(M)] \quad : \quad z'=-2[iz+6+i]+2+19i$

$g:z'=-2iz-12-2i+2+19i=-2iz-10+17i$

$\boxed{g:z'=-2iz-10+17i}$

b2. La nature et les éléments caractéristiques de g

g est de la forme $z' = az + b$ *alors g est une similitude plane directe*

Éléments caractéristiques :

Rapport k : $k = |a| = |-2i| = 2$

Angle θ : $\theta = arg(a) = arg(-2i) = -\dfrac{\pi}{2}$

Centre $\Omega(z_\Omega)$: $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{(-10+17i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{24+37i}{5} = \dfrac{24}{5} + \dfrac{37}{5}i$

g est une similitude plane directe de centre Ω d’affixe $\dfrac{24}{5} + \dfrac{37}{5}i$, de rapport 2 et d’angle π/2