

Correction Baccalauréat – Mathématiques série S – Session 2025

Exercice 1

Partie A :

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1.a. Calcul de $A \times B$ et $B \times A$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \\ B \times A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \end{aligned}$$

b. Comme $A \times B = B \times A = I_3$, alors B est l'inverse de A et A est l'inverse de B.

2. On considère le système d'équation (S) :
$$\begin{cases} y - z = -3 \\ x + 3z = 17 \\ x + y + z = 11 \end{cases}$$

a. Écriture sous forme matricielle de (S) :

$$(S) : AX = Y \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ et } Y = \begin{pmatrix} -3 \\ 17 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$(S) : \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 17 \\ 11 \end{pmatrix}$$

b. Détermination de X

$$AX = Y \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}Y \text{ or } A^{-1} = B \Leftrightarrow X = BY$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 17 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Partie B :

1. Détermination du reste de la division euclidienne de 7×3^{359} par 11

- Reste de la division euclidienne de 3^n par 11 :

$$3^0 \equiv 1[11] \quad 3^1 \equiv 3[11] \quad 3^2 \equiv 9[11] \quad 3^3 \equiv 5[11] \quad 3^4 \equiv 4[11] \quad 3^5 \equiv 1[11]$$

$$3^{5k} \equiv 1[11] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned}
359 &\equiv 4[5], 3^{355} \equiv 1[11] \Leftrightarrow 3^{359} \equiv 3^4[11] \text{ or } 3^4 \equiv 4[11] \\
3^{359} &\equiv 4[11] \Leftrightarrow 7 \times 3^{359} \equiv 4 \times 7[11] \text{ or } 6 \times 7 = 28 \equiv 6[11] \\
7 \times 3^{359} &\equiv 6[11]
\end{aligned}$$

Le reste de la division euclidienne de 7×3^{359} par 11 est 6

2.a. Une solution particulière de $23x - 17y = 1$

$$23 = 17 + 6 \Rightarrow 6 = 23 - 17$$

$$17 = 6 \times 2 + 5 \Rightarrow 5 = 17 - 6 \times 2$$

$$6 = 5 + 1 \Rightarrow 6 - 5 = 1$$

$$\text{or } 5 = 17 - 6 \times 2 \Rightarrow 6 - 17 + 6 \times 2 = 1 \Leftrightarrow 17(-1) + 6(3) = 1$$

$$\text{or } 6 = 23 - 17 \Rightarrow 17(-1) + 3(23 - 17) = 1$$

$$23(3) - 17(3) - 17(1) = 1 \Leftrightarrow 23(3) - 17(4) = 1$$

$$S_0 = \{(3, 4)\}$$

b. Dédution de la résolution dans \mathbb{Z}/\mathbb{Z} de $23x - 17y = 2$

$$23(3) - 17(4) = 1 \Leftrightarrow 23(6) - 17(8) = 2$$

$$23x - 17y = 2$$

$$23(6) - 17(8) = 2$$

$$23(x - 6) - 17(y - 8) = 2 \Leftrightarrow 23(x - 6) = 17(y - 8)$$

Comme $\text{pgcd}(23, 17) = 1$, 23 divise $y - 8$ et 17 divise $x - 6$

$$y - 8 = 23k \Rightarrow y = 8 + 23k \text{ et } x - 6 = 17k \Rightarrow x = 6 + 17k$$

$$S = \{(6 + 17k, 8 + 23k) / k \in \mathbb{Z}\}$$