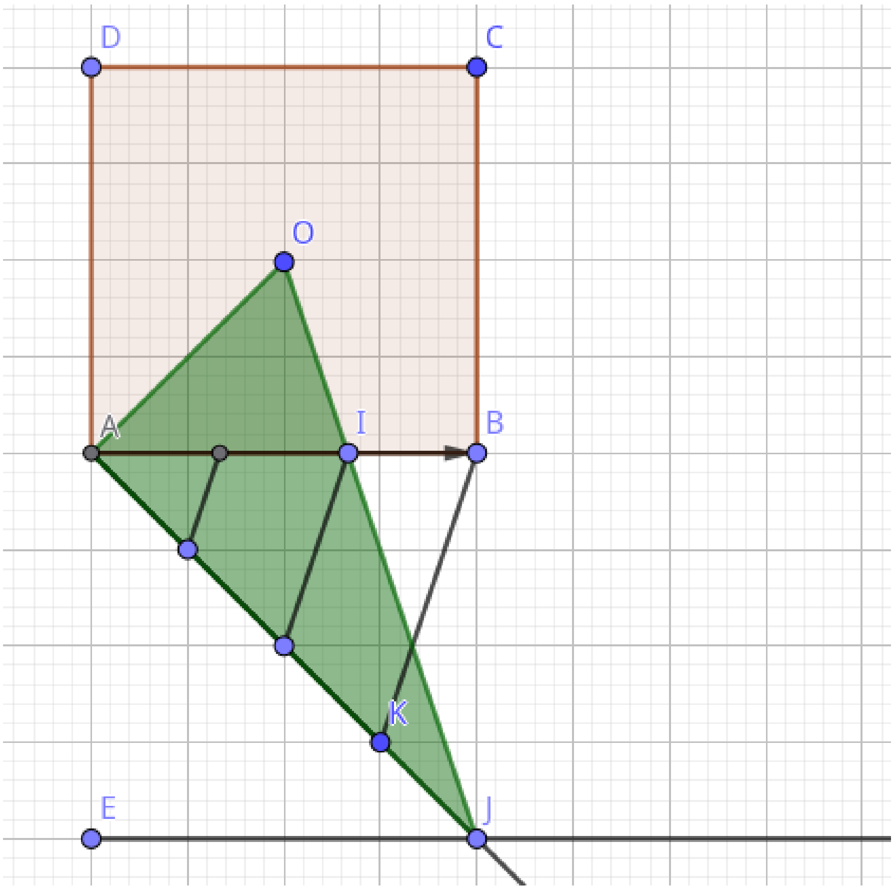
Correction Baccalauréat – Mathématiques série S – Session 2025

Problème 1 :

Partie A :

1. Une figure avec construction de I et J

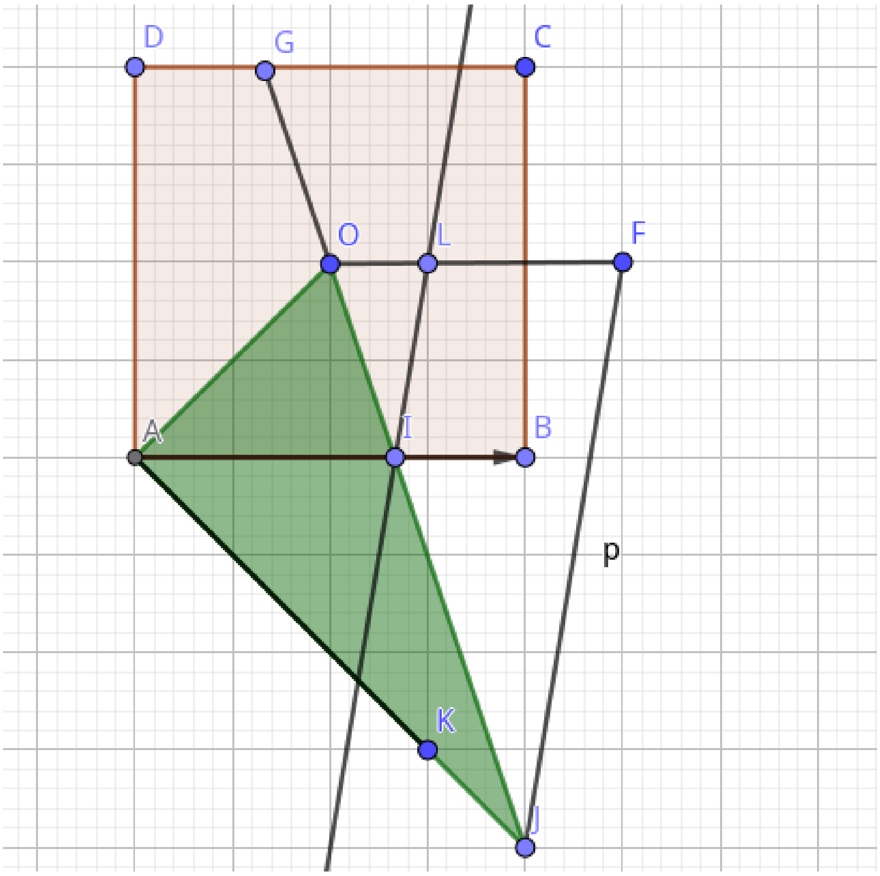
- Construction de I :
  Traçage du segment [AK]
  Division en 3 parties égales de [AK] et plaçage de I, intersection de segment [AB] et la droite parallèle à (KB) passant par le deuxième point parmi les 3 dans le segment [AK]
- Construction de J :
  $mes(\widehat{\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AO}})=\frac{\pi}{2}$ *alors* J appartient à la demi-droite d'origine A perpendiculaire à (AO) vers le bas. Soit AEJ le triangle rectangle en E. Alors
  $\cos(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AJ})=\frac{AE}{AJ}=\cos(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad AE=4\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2}=4$



2.a. Détermination et construction de G = bar{(J;1);(O ;-4)}

$G=\{(J;1);(O;-4)\}$

$\overrightarrow{GJ}-4\overrightarrow{GO}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OJ}-4\overrightarrow{GO}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OG}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OJ}$



b. Détermination et construction de l'ensemble $(\Gamma):\{M\in(P)/MJ^2-4MO^2=0\}$

Soit

$f:(P) \rightarrow (P)$

$\quad M \rightarrow f(M)=MJ^2-4MO^2$

une fonction scalaire de Leibniz alors $f(M)=(1-4)MG^2+f(G)$ *où* $G=\{(J;1);(O;-4)\}$

$f(M)=-3MG^2+f(G)$

Calcul de f(G)

$f(G)=GJ^2-4GO^2 \quad or \quad GO=\frac{1}{3}OJ \quad et \quad GJ=GO+OJ \quad \Rightarrow \quad OJ=GJ-GO$

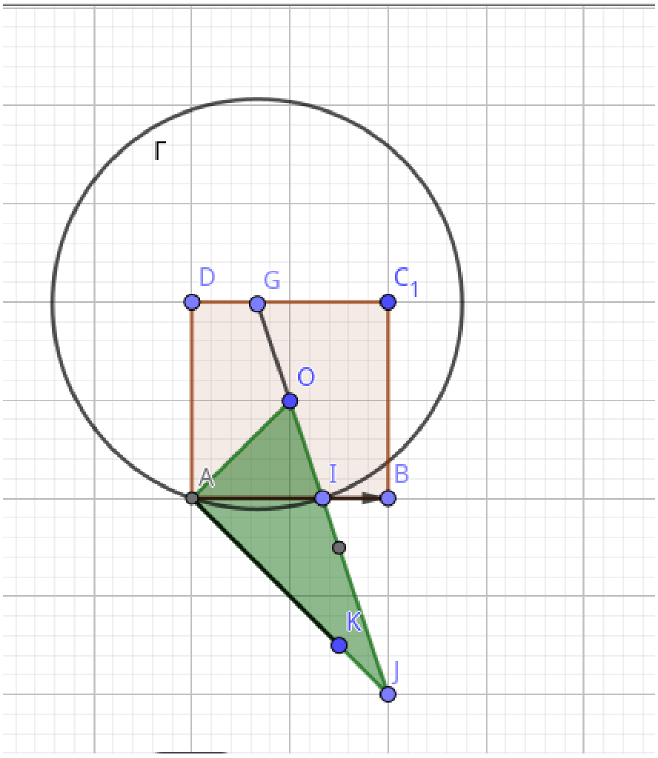
$GO=\frac{1}{3}(GJ-GO)=\frac{1}{3}GJ+\frac{1}{3}GO \quad \Leftrightarrow \quad 4GO=GJ$

$f(G)=(4GO)^2-4GO^2=(16-4)GO^2=12GO^2$

$(\Gamma):\{M \in (P) \ / \ f(M)=0\} \quad f(M)=0 \ \Leftrightarrow \ 3MG^2=12GO^2 \ \Rightarrow \ MG^2=4GO^2 \ \Rightarrow \ MG=2GO$

$\boxed{(\Gamma) \text{ est un cercle de centre G et de rayon r = 2GO}}$

Construction

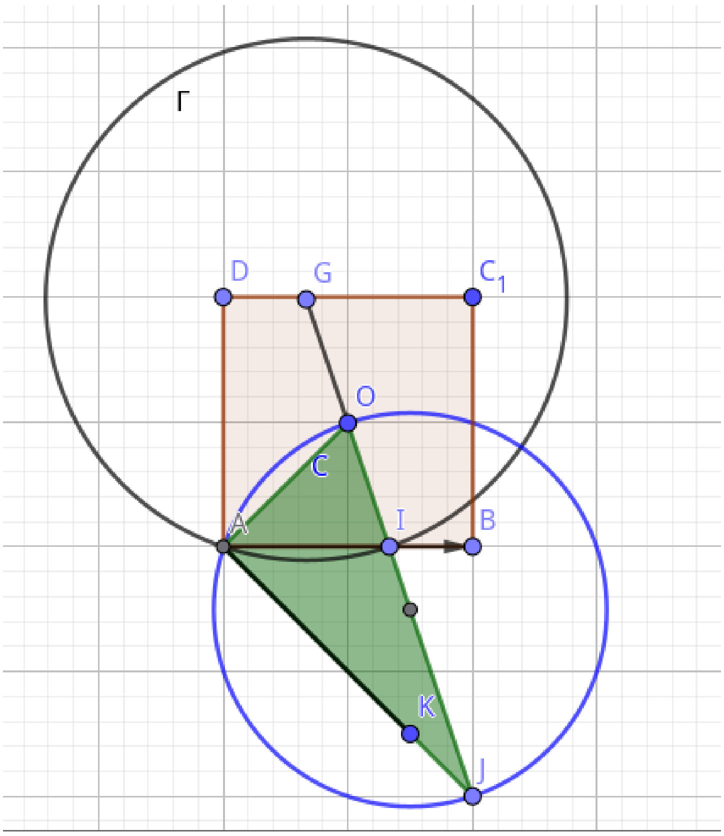


3. Ensemble des points (C) = $\{M \in (P) / \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MJ}=0\}$

$\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MJ}=0$ alors $mes(\widehat{\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MJ}}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ alors MOJ est un triangle rectangle en M, donc l'ensemble des points M constitue le cercle de diamètre [OJ]

$\boxed{\text{(C) est le cercle de diamètre [OJ]}}$

Construction :



4. a. Le rapport et un angle de S

S est une composition d'une homothétie de rapport -2 et d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, alors

S est une similitude plane directe de rapport **2** et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

b. Calcul de S(A)

$S(A)=(h\circ r)(A)=h[r(A)] \quad or \quad r(A)=B$

$S(A)=h(B)=B' \quad avec \quad -2\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IB'} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB'}=-2(\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{B'B})$

$3\overrightarrow{IB'}=2\overrightarrow{BB'} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{B'I}=\frac{2}{3}\overrightarrow{B'B} \quad \Rightarrow \quad B'=A$

$S(A)=A$

S(A)=A alors A est le centre de S

c. Montrons que A est un point d'intersection de (C) et (Γ)

A est un point d'intersection si A appartient à (C) et à (Γ)

$(\Gamma):\{M\in(P)/MJ^2-4MO^2=0\}$

Si A appartient à (Γ) alors $AJ^2-4AO^2=0 \quad avec \quad AJ=4\sqrt{2} \quad et \quad AO=\frac{1}{2}[4\sqrt{2}]=2\sqrt{2}$

$AJ^2-4AO^2=(4\sqrt{2})^2-4(2\sqrt{2})^2=32-4\times 8=32-32=0$ alors A appartient à (Γ)

$(C)=\{M\in(P)/\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MJ}=0\}$

Comme AJO est un triangle rectangle en A alors $\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MJ}=0$, Donc A appartient à (C)

A est un point d'intersection de (Γ) et (C)

Partie B :

1. Détermination des affixes des points O, I, J et G

$O \quad centre \quad de \quad carré \quad ABCD \quad alors \quad z_O=\frac{z_C+z_A+z_B+z_D}{4}=\frac{2+2i+0+2+2i}{4}=1+i$

$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad alors \quad z_I-z_A=\frac{2}{3}(z_B-z_A) \quad \Rightarrow \quad z_I=\frac{2}{3}(2)=\frac{4}{3}$

$(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AO})=\frac{\pi}{2} \quad et \quad AJ=\frac{4}{2}\sqrt{2} \quad alors \quad arg\left(\frac{z_O}{z_J}\right)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow arg(z_J)=arg(z_O)-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}$

$et \quad |z_J|=2\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad z_J=422e^{-i\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2-2i$

$G=\{(J;1);\bar{(}O;-4)\} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{JG}-4\overrightarrow{OG}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad z_G-z_J-4z_G+4z_O=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3z_G=4z_O-z_J$

$z_G=\frac{1}{3}(4+4i-2+2i)=\frac{2}{3}+2i$

$z_O=1+i$	$z_I=\frac{4}{3}$	$z_J=2-2i$	$z_G=\frac{2}{3}+2i$

2. a. Expression complexe de r et h

$r:z'=e^{i\theta}z+z_O(1-e^{i\theta}) \quad \Leftrightarrow \quad z'=iz+(1+i)(1-i)=iz+2$

$h:z'=kz+z_I(1-k) \quad \Leftrightarrow \quad z'=-2z+\frac{4}{3}(1+2)=-2z+4$

$r:z'iz+2$	$h:z'=-2z+4$

b. L' expression complexe, la nature et les éléments caractéristiques de S

$S=h\circ r: z'=-2(iz+2)+4=-2iz-4+4=-2iz$

$S: z'=-2iz$

S est de la forme $z'=az+b$ *alors S est une similitude plane directe*

Rapport k : $k=|-2i|=2$

Angle θ: $\theta=arg(-2i)=-\dfrac{\pi}{2}$

Centre Ω: $z_\Omega=\dfrac{0}{1+2i}=0=z_A$

S est une similitude plane directe de centre A, de rapport **2** et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$

3. Montrons que A est un point d' intersection de (Γ) et (C)

A est un point d'intersection si A appartient à (C) et à (Γ)

$(\Gamma):\{M\in(P)/MJ^2-4MO^2=0\}$

Si A appartient à (Γ) alors $AJ^2-4AO^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad |z_J|^2-4|z_O|^2=0$

$|z_J|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$ *et* $|z_O|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2} \quad\Leftrightarrow\quad |z_J|^2-4|z_O|^2=(2\sqrt{2})^2-4(\sqrt{2})^2=8-8=0$

alors A appartient à (Γ)

$(C)=\{M\in(P)/\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MJ}=0\}\quad \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AJ}=0 \quad\Leftrightarrow\quad arg\left(\dfrac{z_O}{z_J}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[\pi]$

$\dfrac{z_O}{z_J}=\dfrac{1+i}{2-2i}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)=\dfrac{i}{2} \quad arg\left(\dfrac{z_O}{z_J}\right)=arg\left(\dfrac{i}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

Donc A appartient à (C)

A est un point d'intersection de (Γ) et (C)