Ecuaciones de FitzHugh - Nagumo

Agustín Caracci   Rafael Kaempfer   Joaquín Oyarzún

1 de diciembre de 2022

Índice

Indice

Introducción

Ecuaciones de FitzHugh - Nagumo (como sistema de EDO's):

Introducción

Ecuaciones de FitzHugh - Nagumo (como sistema de EDO's):

$$\dot{v} = v - \frac{v^3}{3} - w + RI_{app}$$
$$\tau \dot{w} = v + a - bw$$

Introducción

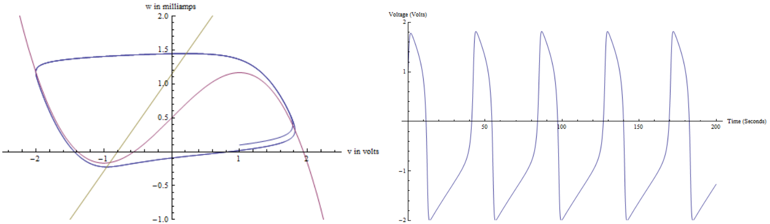


Figura 1: Diagrama de fase y tiempo. Fuente: Wikipedia

Introducción

Motivación:

Introducción

Motivación: Generalización de las ecuaciones sobre un dominio de dos dimensiones con la finalidad de visualizar el flujo del potencial eléctrico en órganos.

Introducción

Motivación: Generalización de las ecuaciones sobre un dominio de dos dimensiones con la finalidad de visualizar el flujo del potencial eléctrico en órganos.

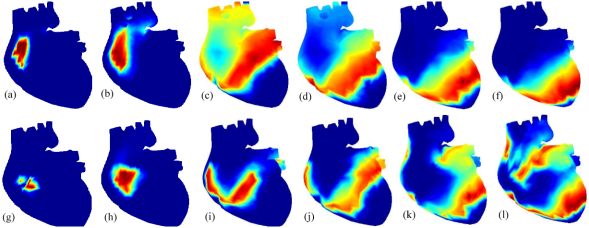


Figura 2: Propagación de la onda eléctrica en corazón. Fuente: Hui Yang, et al., 2016

Indice

Problema

Considere el conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ cuya frontera poligonal Σ tiene vector normal $\mathbf{n}$ y $T > 0$ es el tiempo final.

Problema

Considere el conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ cuya frontera poligonal Σ tiene vector normal $\mathbf{n}$ y $T > 0$ es el tiempo final. Se definen:

- Dominio : $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$.

Problema

Considere el conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ cuya frontera poligonal Σ tiene vector normal $\mathbf{n}$ y $T > 0$ es el tiempo final. Se definen:

- Dominio : $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$.
- Frontera: $\Sigma_T = \Sigma \times (0, T)$.

Problema

Considere el conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ cuya frontera poligonal Σ tiene vector normal $\mathbf{n}$ y $T > 0$ es el tiempo final. Se definen:

- Dominio : $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$.
- Frontera: $\Sigma_T = \Sigma \times (0, T)$.

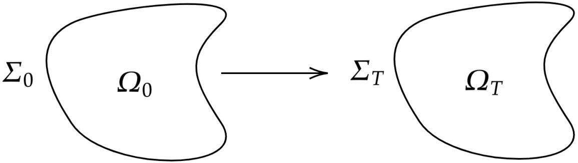
Sabiendo que $v = v(x, t)$ es el potencial transmembranal y $w = w(x, t)$ es la corriente de relajación para la célula.

Problema

Considere el conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ cuya frontera poligonal Σ tiene vector normal $\mathbf{n}$ y $T > 0$ es el tiempo final. Se definen:

- Dominio : $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$.
- Frontera: $\Sigma_T = \Sigma \times (0, T)$.

Sabiendo que $v = v(x, t)$ es el potencial transmembranal y $w = w(x, t)$ es la corriente de relajación para la célula.



Problema

El problema (basado en los estudios de Hodgkin - Huxley) se modela como:

Problema

El problema (basado en los estudios de Hodgkin - Huxley) se modela como:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - D\left(\displaystyle\int_\Omega v(x,t)\,dx\right)\Delta v + I_{\text{ion}}(v,w) = I_{\text{app}}(x,t), \quad (x,t)\in\Omega_T \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} - H(v,w) = 0, \quad (x,t)\in\Omega_T \\ \\ D\left(\displaystyle\int_\Omega v(x,t)\,dx\right)\nabla v\cdot\mathbf{n} = 0, \quad (x,t)\in\Sigma_T \\ \\ v(x,0) = v_0(x), \\ w(x,0) = w_0(x). \end{cases}$$

Problema

Para efectos del proyecto, se tomará la simplificación de considerar como constante (igual a 1), las integrales sobre el voltaje (de la primera ecuación) y en las consideraciones de frontera.

Problema

Para efectos del proyecto, se tomará la simplificación de considerar como constante (igual a 1), las integrales sobre el voltaje (de la primera ecuación) y en las consideraciones de frontera. De esta manera:

Problema

Para efectos del proyecto, se tomará la simplificación de considerar como constante (igual a 1), las integrales sobre el voltaje (de la primera ecuación) y en las consideraciones de frontera. De esta manera:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - D\Delta v + I_{\text{ion}}(v,w) = I_{\text{app}}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} - H(v,w) = 0, \quad (x,t) \in \Omega_T \\ \\ D\nabla v \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (x,t) \in \Sigma_T \\ \\ v(x,0) = v_0(x), \\ w(x,0) = w_0(x). \end{cases}$$

Problema

De las ecuaciones simplificadas de FitzHugh - Nagumo, tenemos que que $D > 0$ es la tasa de difusión,

Problema

De las ecuaciones simplificadas de FitzHugh - Nagumo, tenemos que que $D > 0$ es la tasa de difusión, $I_{\text{app}}(x, t)$ es el estímulo

Problema

De las ecuaciones simplificadas de FitzHugh - Nagumo, tenemos que que $D > 0$ es la tasa de difusión, $I_{\text{app}}(x,t)$ es el estímulo e $I_{\text{ion}}(v,w)$ es la corriente iónica:

Problema

De las ecuaciones simplificadas de FitzHugh - Nagumo, tenemos que que $D > 0$ es la tasa de difusión, $I_{\mathrm{app}}(x,t)$ es el estímulo e $I_{\mathrm{ion}}(v,w)$ es la corriente iónica:

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{ion}}(v,w) &:= I_{\mathrm{ion},1}(v) + I_{\mathrm{ion},2}(w), \\ &= -\lambda v(v-\theta)(1-v) + \lambda w. \end{aligned}$$

Problema

De las ecuaciones simplificadas de FitzHugh - Nagumo, tenemos que que $D > 0$ es la tasa de difusión, $I_{\text{app}}(x,t)$ es el estímulo e $I_{\text{ion}}(v,w)$ es la corriente iónica:

$$\begin{aligned} I_{\text{ion}}(v,w) &:= I_{\text{ion},1}(v) + I_{\text{ion},2}(w), \\ &= -\lambda v(v-\theta)(1-v) + \lambda w. \end{aligned}$$

Adicionalmente $H(v,w) := av - bw$,

Problema

De las ecuaciones simplificadas de FitzHugh - Nagumo, tenemos que que $D > 0$ es la tasa de difusión, $I_{\text{app}}(x, t)$ es el estímulo e $I_{\text{ion}}(v, w)$ es la corriente iónica:

$$\begin{aligned} I_{\text{ion}}(v, w) &:= I_{\text{ion},1}(v) + I_{\text{ion},2}(w), \\ &= -\lambda v(v-\theta)(1-v) + \lambda w. \end{aligned}$$

Adicionalmente $H(v, w) := av - bw$, en donde $a, b \in \mathbb{R}^+$

Problema

De las ecuaciones simplificadas de FitzHugh - Nagumo, tenemos que que $D > 0$ es la tasa de difusión, $I_{\text{app}}(x, t)$ es el estímulo e $I_{\text{ion}}(v, w)$ es la corriente iónica:

$$\begin{aligned} I_{\text{ion}}(v, w) &:= I_{\text{ion},1}(v) + I_{\text{ion},2}(w), \\ &= -\lambda v(v - \theta)(1 - v) + \lambda w. \end{aligned}$$

Adicionalmente $H(v, w) := av - bw$, en donde $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$ son valores fijos.

Problema

De esta manera:

Problema

De esta manera:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = D\Delta v + \lambda v(v-\theta)(1-v) - \lambda w + I_{\text{app}}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = av - bw, \quad (x,t) \in \Omega_T \\ \\ D\nabla v \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (x,t) \in \Sigma_T \\ \\ v(x,0) = v_0(x), \\ w(x,0) = w_0(x). \end{cases}$$

Solución integral

Buscamos resolver la ecuación de FitzHugh - Nagumo bajo la consideración

Solución integral

Buscamos resolver la ecuación de FitzHugh - Nagumo bajo la consideración: $I_{\text{app}}(x,t) = 0$, para todo $(x,t) \in \Omega_T$.

Solución integral

Buscamos resolver la ecuación de FitzHugh - Nagumo bajo la consideración: $I_{\mathrm{app}}(x,t) = 0$, para todo $(x,t) \in \Omega_T$. Por lo tanto:

Solución integral

Buscamos resolver la ecuación de FitzHugh - Nagumo bajo la consideración: $I_{\text{app}}(x,t) = 0$, para todo $(x,t) \in \Omega_T$. Por lo tanto:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t) = D\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) + \lambda v(1-v)(v-\theta) - \lambda w, \\ \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}(x,t) = av - bw. \\ \\ v(x,0) = v_0(x), \\ w(x,0) = w_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

Solución integral

Buscamos resolver la ecuación de FitzHugh - Nagumo bajo la consideración: $I_{\text{app}}(x,t) = 0$, para todo $(x,t) \in \Omega_T$. Por lo tanto:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t) = D\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) + \lambda v(1-v)(v-\theta) - \lambda w, \\[2ex]
\dfrac{\partial w}{\partial t}(x,t) = av - bw. \\[2ex]
v(x,0) = v_0(x), \\
w(x,0) = w_0(x),
\end{cases}
\tag{1}
$$

que corresponde a un sistema acoplado de una ecuación diferencial parcial parabólica junto a una ecuación diferencial ordinaria.

Solución integral

Para resolver (1), expresaremos el sistema de forma matricial.

Solución integral

Para resolver (1), expresaremos el sistema de forma matricial. En efecto:

Solución integral

Para resolver (1), expresaremos el sistema de forma matricial. En efecto:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \\ \\ \begin{pmatrix} v(x,0) \\ w(x,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0(x) \\ w_0(x) \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{2}$$

Solución integral

Para resolver (1), expresaremos el sistema de forma matricial. En efecto:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \\ \\ \begin{pmatrix} v(x,0) \\ w(x,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0(x) \\ w_0(x) \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{2}$$

en donde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función suave definida por:

Solución integral

Para resolver (1), expresaremos el sistema de forma matricial. En efecto:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \\ \\ \begin{pmatrix} v(x,0) \\ w(x,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0(x) \\ w_0(x) \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{2}$$

en donde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función suave definida por:

$$F\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda v(1-v)(v-\theta) - \lambda w \\ av - bw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{\text{ion}}(v,w) \\ H(v,w) \end{pmatrix}.$$

Solución integral

Por temas de notación, diremos:

Solución integral

Por temas de notación, diremos:

$$U(x,t) = \begin{pmatrix} v(x,t) \\ w(x,t) \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución integral

Por temas de notación, diremos:

$$U(x,t) = \begin{pmatrix} v(x,t) \\ w(x,t) \end{pmatrix},$$
$$A = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, (2) se puede expresar de manera más compacta:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,t) = A\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t) + F(U(x,t)), \\[2ex] U(0) = U_0(x) = \begin{pmatrix} v_0(x) \\ w_0(x) \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{3}$$

Solución integral

Resolveremos (3) recurriendo al Principio de Duhamel.

Solución integral

Resolveremos (3) recurriendo al Principio de Duhamel. Pero antes, debemos estudiar la ecuación del calor:

Solución integral

Resolveremos (3) recurriendo al Principio de Duhamel. Pero antes, debemos estudiar la ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),$$

Solución integral

Resolveremos (3) recurriendo al Principio de Duhamel. Pero antes, debemos estudiar la ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),$$

con condición inicial $u(x,0) = u_0(x)$ y $a > 0$.

Solución integral

Resolveremos (3) recurriendo al Principio de Duhamel. Pero antes, debemos estudiar la ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),$$

con condición inicial $u(x,0) = u_0(x)$ y $a > 0$. La solución de esta EDP está dada por:

Solución integral

Resolveremos (3) recurriendo al Principio de Duhamel. Pero antes, debemos estudiar la ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),$$

con condición inicial $u(x,0) = u_0(x)$ y $a > 0$. La solución de esta EDP está dada por:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= H(x,t) * u_0(x), \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y,t)u_0(y)\,dy, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}} e^{-\frac{1}{4at}(x-y)^2} u_0(y)\,dy. \end{aligned}$$

Solución integral

Resolveremos (3) recurriendo al Principio de Duhamel. Pero antes, debemos estudiar la ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),$$

con condición inicial $u(x,0) = u_0(x)$ y $a > 0$. La solución de esta EDP está dada por:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= H(x,t) * u_0(x), \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y,t)u_0(y)\,dy, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}} e^{-\frac{1}{4at}(x-y)^2} u_0(y)\,dy. \end{aligned}$$

en donde $H(t,x)$ corresponde al núcleo del calor y $*$ es la convolución en $\mathbb{R}$.

Solución integral

Para obtener las soluciones de la ecuación (matricial):

Solución integral

Para obtener las soluciones de la ecuación (matricial):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,t) = A\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t), \\ \\ U(0) = U_0(x), \end{cases}$$

Solución integral

Para obtener las soluciones de la ecuación (matricial):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,t) = A\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t), \\ \\ U(0) = U_0(x), \end{cases}$$

debemos considerar su núcleo de Green asociado, el cuál está dado por la matriz:

Solución integral

Para obtener las soluciones de la ecuación (matricial):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,t) = A\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t), \\ \\ U(0) = U_0(x), \end{cases}$$

debemos considerar su núcleo de Green asociado, el cuál está dado por la matriz:

$$G(x,t) := \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{1}{4Dt}x^2} & 0 \\ 0 & \delta(x) \end{bmatrix}.$$

Solución integral

En virtud del núcleo de Green $G(x, t)$, obtenemos la solución correspondiente:

Solución integral

En virtud del núcleo de Green $G(x,t)$, obtenemos la solución correspondiente:

$$
\begin{aligned}
U(x,t) &= G(x,t) * U_0(x), \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t)U_0(y)\,dy, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{1}{4Dt}(x-y)^2} & 0 \\ 0 & \delta(x-y) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_0(y) \\ w_0(y) \end{pmatrix} dy, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{1}{4Dt}(x-y)^2} v_0(y) + \delta(x-y) w_0(y) \right] dy.
\end{aligned}
$$

Solución integral

Por Duhamel, la solución del sistema (3) está dada por:

Solución integral

Por Duhamel, la solución del sistema (3) está dada por:

$$U(x,t) = G(x,t) * U_0(x) + \int_0^T G(x,t-s) * F(U(x,s))\, ds.$$

Solución integral

En términos de la convolución $*$, se obtiene finalmente:

Solución integral

En términos de la convolución $*$, se obtiene finalmente:

$$
\begin{aligned}
U(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t)U_0(y)\,dy + \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t-s)F(U(y,s))\,dy\,ds,\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{1}{4Dt}(x-y)^2} v_0(y) + \delta(x-y) w_0(y) \right] dy\\
&\quad + \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-s)}} e^{-\frac{1}{4Dt}(x-y)^2} & 0 \\ 0 & \delta(x-y) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -I_{\text{ion}}(v(y,s),w(y,s)) \\ H(v(y,s),w(y,s)) \end{pmatrix} dy\,ds.
\end{aligned}
$$

Solución integral

$$
\begin{aligned}
U(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{1}{4Dt}(x-y)^2} v_0(y) + \delta(x-y) w_0(y) \right] dy \\
&\quad - \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{1}{4Dt}(x-y)^2} I_{\text{ion}}(v(y,s), w(y,s))\, dy\, ds \\
&\quad + \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) H(v(y,s), w(y,s))\, dy\, ds,
\end{aligned}
$$

Solución integral

$$
\begin{aligned}
U(x,t) = &\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{1}{4Dt}(x-y)^2}v_0(y)+\delta(x-y)w_0(y)\right]dy\\
&-\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{1}{4Dt}(x-y)^2}I_{\text{ion}}(v(y,s),w(y,s))\,dy\,ds\\
&+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-y)H(v(y,s),w(y,s))\,dy\,ds,
\end{aligned}
$$

que corresponde a la solución integral de la ecuación de FitzHugh- Nagumo con estímulo $I_{\text{app}}(x,t)=0$, para todo $(x,t)\in\Omega_T$.

Indice

Forma bilineal

Para aplicar el método numérico se hizo la formulación variacional del problema estático y con estimulación nula ($I_{app} = 0$), donde p y q serán las funciones test para v y w:

Forma bilineal

Para aplicar el método numérico se hizo la formulación variacional con las siguientes formas bilineales, donde $p, q \in H^1$ serán las funciones test para $v, w \in L^2$:

Forma bilineal

Para aplicar el método numérico se hizo la formulación variacional con las siguientes formas bilineales, donde $p, q \in H^1$ serán las funciones test para $v, w \in L^2$:

$$
\begin{aligned}
a((v,w),(p,q)) &= D\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla p \, \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega I_{ion}(v,w)\cdot p \, \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega H(v,w)\cdot q \\
m((v,w),(p,q)) &= \int_\Omega vp \, \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega w \cdot q d\Omega \\
\ell(p,q) &= \int_\Omega I_{app}\, p \, \mathrm{d}\Omega
\end{aligned}
$$

Método

Para abordar el problema utilizando los supuestos de las forma analítica, se decidió trabajar con Galerkin estándar en espacio y utilizar un método iterativo en el tiempo, que fue Euler explícito:

Método

Para abordar el problema utilizando los supuestos de las forma analítica, se decidió trabajar con Galerkin estándar en espacio y utilizar un método iterativo en el tiempo, que fue Euler explícito:

$$\frac{m((v^{n+1} - v^n, w^{n+1} - w^n), (p, q))}{\Delta t} + a((v^n, w^n), (p, q))) = \ell(p, q)$$

Método

Para abordar el problema utilizando los supuestos de las forma analítica, se decidió trabajar con Galerkin estándar en espacio y utilizar un método iterativo en el tiempo, que fue Euler explícito:

$$\frac{m((v^{n+1} - v^n, w^{n+1} - w^n), (p, q))}{\Delta t} + a((v^n, w^n), (p, q))) = \ell(p, q)$$

$$m((\delta v^{n+1}, \delta w^{n+1}), (p, q)) = \Delta t\, \ell(p, q) - \Delta t\, a((v^n, w^n), (p, q)))$$

Problema matricial

Lo que se traduce al siguiente problema matricial:

Problema matricial

Lo que se traduce al siguiente problema matricial:

$$M\delta\mathbf{u}_h^{n+1} = \Delta t\left(\mathbf{l} - A\mathbf{u}_h^n\right).$$

Problema matricial

Lo que se traduce al siguiente problema matricial:

$$M\delta \mathbf{u}_h^{n+1} = \Delta t \left(\mathbf{l} - A\mathbf{u}_h^n \right).$$

Donde, se toma una malla $\mathcal{T}_h \in \Sigma$ y V_N el espacio de funciones polinomiales.

Indice

Implementación

Se escogeron 3 escenarios para realizar las simulaciones:

Implementación

Se escogeron 3 escenarios para realizar las simulaciones:

- Caso 1: Condiciones iniciales sinusoidales y de borde Dirichlet homogéneas.

Implementación

Se escogeron 3 escenarios para realizar las simulaciones:

- Caso 1: Condiciones iniciales sinusoidales y de borde Dirichlet homogéneas.
- Caso 2: Condición inicial de voltaje gaussiano y corriente de relajación nula. Condición de frontera corresponde a círculo centrado de radio 0.04.

Implementación

Se escogeron 3 escenarios para realizar las simulaciones:

- Caso 1: Condiciones iniciales sinusoidales y de borde Dirichlet homogéneas.
- Caso 2: Condición inicial de voltaje gaussiano y corriente de relajación nula. Condición de frontera corresponde a círculo centrado de radio 0.04.
- Caso 3: Condiciones iniciales cuadradas (esquina) con condiciones de bordes homogéneas.

Condiciones iniciales, de borde y excitación: Caso 1

- **Intervalo temporal**: $t_n \in [0, 3]$

Condiciones iniciales, de borde y excitación: Caso 1

- **Intervalo temporal**: $t_n \in [0, 3]$
- **Parámetros**: $D = 0{,}5$, $a = 0{,}15$, $b = 0{,}9$, $\lambda = -100$, $\theta = 0{,}4$, $h = 1/32$ y $\Delta t = 1/80$.

Condiciones iniciales, de borde y excitación: Caso 1

- **Intervalo temporal**: $t_n \in [0, 3]$
- **Parámetros**: $D = 0{,}5$, $a = 0{,}15$, $b = 0{,}9$, $\lambda = -100$, $\theta = 0{,}4$, $h = 1/32$ y $\Delta t = 1/80$.
- **Condiciones iniciales**:

$$v_0(x, y) = 1 + 0{,}5 \cos(4\pi x) \cos(4\pi y),$$
$$w_0(x, y) = 1 + 0{,}5 \cos(8\pi x) \cos(8\pi y).$$

Condiciones iniciales, de borde y excitación: Caso 1

- **Intervalo temporal**: $t_n \in [0, 3]$
- **Parámetros**: $D = 0{,}5$, $a = 0{,}15$, $b = 0{,}9$, $\lambda = -100$, $\theta = 0{,}4$, $h = 1/32$ y $\Delta t = 1/80$.
- **Condiciones iniciales**:

$$v_0(x, y) = 1 + 0{,}5 \cos(4\pi x) \cos(4\pi y),$$
$$w_0(x, y) = 1 + 0{,}5 \cos(8\pi x) \cos(8\pi y).$$

- **Estimulación**: $I_{app} = 0$.

Condiciones iniciales, de borde y excitación: Caso 1

- **Intervalo temporal**: $t_n \in [0, 3]$
- **Parámetros**: $D = 0{,}5$, $a = 0{,}15$, $b = 0{,}9$, $\lambda = -100$, $\theta = 0{,}4$, $h = 1/32$ y $\Delta t = 1/80$.
- **Condiciones iniciales**:

$$v_0(x, y) = 1 + 0{,}5 \cos(4\pi x) \cos(4\pi y),$$
$$w_0(x, y) = 1 + 0{,}5 \cos(8\pi x) \cos(8\pi y).$$

- **Estimulación**: $I_{app} = 0$.
- **Condición de borde**: Von Neumann homogénea.

Resultados: Caso 1

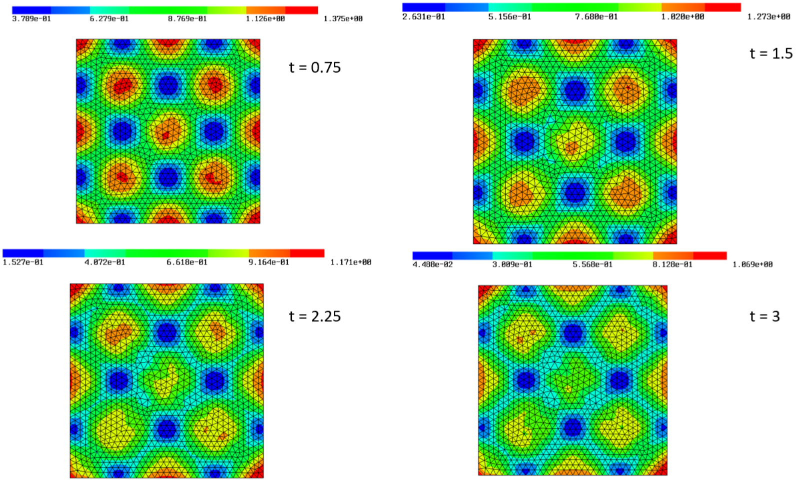


Figura 3: Caso 1

Condiciones iniciales, de borde y excitación: Caso 2

- **Intervalo temporal**: $t_n \in [0, 6]$

Condiciones iniciales, de borde y excitación: Caso 2

- **Intervalo temporal**: $t_n \in [0, 6]$
- **Parámetros**: $a = 0{,}168$, $b = 1$, $\lambda = -100$, $\theta = 0{,}25$, $h = 1/32$ y $\Delta t = 1/80$.

Condiciones iniciales, de borde y excitación: Caso 2

- **Intervalo temporal**: $t_n \in [0, 6]$
- **Parámetros**: $a = 0{,}168$, $b = 1$, $\lambda = -100$, $\theta = 0{,}25$, $h = 1/32$ y $\Delta t = 1/80$.
- **Condiciones iniciales**:

$$v_0(x, y) = 1 - \frac{1}{1 + \exp(-50(x^2 + y^2)^{1/2} - 0{,}1)}, \quad w_0(x, y) = 0.$$

Condiciones iniciales, de borde y excitación: Caso 2

- **Intervalo temporal**: $t_n \in [0, 6]$
- **Parámetros**: $a = 0{,}168$, $b = 1$, $\lambda = -100$, $\theta = 0{,}25$, $h = 1/32$ y $\Delta t = 1/80$.
- **Condiciones iniciales**:

$$v_0(x, y) = 1 - \frac{1}{1 + \exp(-50(x^2 + y^2)^{1/2} - 0{,}1)}, \quad w_0(x, y) = 0.$$

- **Estimulación**:

$$I_{app} = \begin{cases} 5 & \text{si } (x - 0{,}5)^2 + (y - 0, 5)^2 < 0{,}04, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Condiciones iniciales, de borde y excitación: Caso 2

- **Intervalo temporal**: $t_n \in [0, 6]$
- **Parámetros**: $a = 0{,}168$, $b = 1$, $\lambda = -100$, $\theta = 0{,}25$, $h = 1/32$ y $\Delta t = 1/80$.
- **Condiciones iniciales**:

$$v_0(x, y) = 1 - \frac{1}{1 + \exp(-50(x^2 + y^2)^{1/2} - 0{,}1)}, \quad w_0(x, y) = 0.$$

- **Estimulación**:

$$I_{app} = \begin{cases} 5 & \text{si } (x - 0{,}5)^2 + (y - 0,5)^2 < 0{,}04, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

- **Condición de borde**: Von Neumann homogénea

Resultados: Caso 2

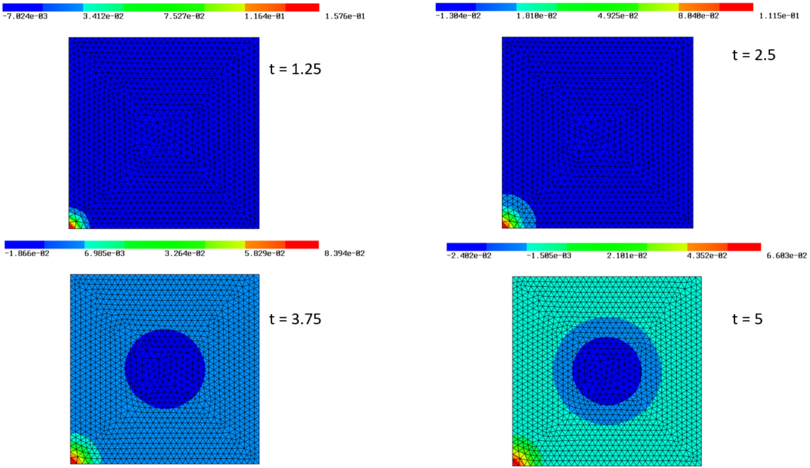


Figura 4: Caso 2

Condiciones iniciales, de borde y excitación: Caso 3

- **Intervalo temporal**: $t_n \in [0, 3]$

Condiciones iniciales, de borde y excitación: Caso 3

- **Intervalo temporal**: $t_n \in [0, 3]$
- **Parámetros**: $a = 0{,}168$, $b = 1$, $\lambda = -100$, $\theta = 0{,}25$, $h = 1/32$ y $\Delta t = 1/80$.

Condiciones iniciales, de borde y excitación: Caso 3

- **Intervalo temporal**: $t_n \in [0, 3]$
- **Parámetros**: $a = 0{,}168$, $b = 1$, $\lambda = -100$, $\theta = 0{,}25$, $h = 1/32$ y $\Delta t = 1/80$.
- **Condiciones iniciales**:

$$v_0(x, y) = \begin{cases} 1{,}4 & \text{si } x < 0{,}5 \wedge y < 0{,}5 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$w_0(x, y) = \begin{cases} 0{,}15 & \text{si } x > 0{,}5 \wedge y < 0{,}5 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Condiciones iniciales, de borde y excitación: Caso 3

- **Intervalo temporal**: $t_n \in [0, 3]$
- **Parámetros**: $a = 0{,}168$, $b = 1$, $\lambda = -100$, $\theta = 0{,}25$, $h = 1/32$ y $\Delta t = 1/80$.
- **Condiciones iniciales**:

$$v_0(x, y) = \begin{cases} 1{,}4 & \text{si } x < 0{,}5 \wedge y < 0{,}5 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$w_0(x, y) = \begin{cases} 0{,}15 & \text{si } x > 0{,}5 \wedge y < 0{,}5 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- **Estimulación**:

$$I_{app} = 0.$$

Condiciones iniciales, de borde y excitación: Caso 3

- **Intervalo temporal**: $t_n \in [0, 3]$
- **Parámetros**: $a = 0{,}168$, $b = 1$, $\lambda = -100$, $\theta = 0{,}25$, $h = 1/32$ y $\Delta t = 1/80$.
- **Condiciones iniciales**:

$$v_0(x, y) = \begin{cases} 1{,}4 & \text{si } x < 0{,}5 \wedge y < 0{,}5 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$w_0(x, y) = \begin{cases} 0{,}15 & \text{si } x > 0{,}5 \wedge y < 0{,}5 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- **Estimulación**:

$$I_{app} = 0.$$

- **Condición de borde**: Von Neumann homogénea.

Resultados: Caso 3

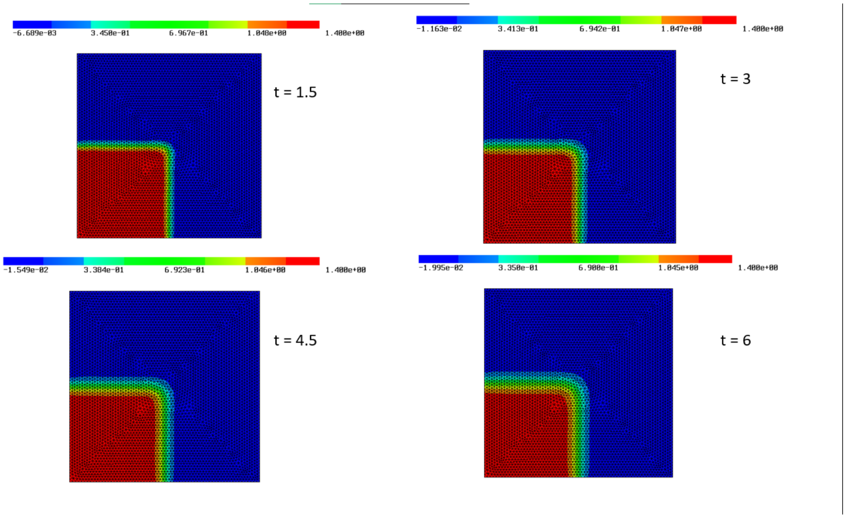


Figura 5: Caso 3

Indice

Convergencia y estabilidad

Convergencia y estabilidad

- Estudio de auto convergencia para el caso 1.

Convergencia y estabilidad

- Estudio de auto convergencia para el caso 1.
- Benchmark: $h = 1/512$.

Convergencia y estabilidad

- Estudio de auto convergencia para el caso 1.
- Benchmark: $h = 1/512$.
- Se prueban resultados para distintos valores de h y de CFL (16 en total).

Convergencia y estabilidad

- Estudio de auto convergencia para el caso 1.
- Benchmark: $h = 1/512$.
- Se prueban resultados para distintos valores de h y de CFL (16 en total).

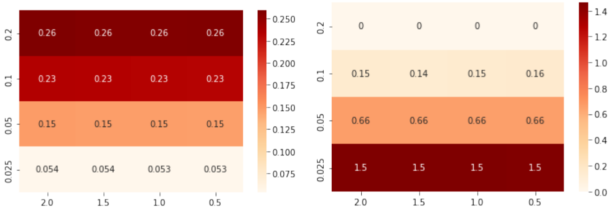


Figura 6: Error y ritmo de convergencia

Convergencia y estabilidad

- Estudio de auto convergencia para el caso 1.
- Benchmark: $h = 1/512$.
- Se prueban resultados para distintos valores de h y de CFL (16 en total).

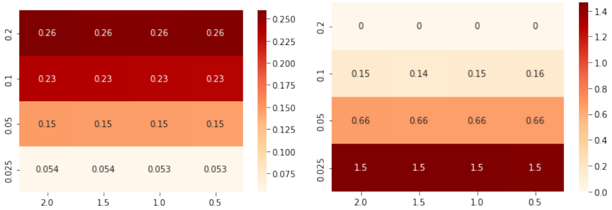


Figura 6: Error y ritmo de convergencia

- Las condiciones CFL no afectan la convergencia ni el error.

Convergencia y estabilidad

- Estudio de auto convergencia para el caso 1.
- Benchmark: $h = 1/512$.
- Se prueban resultados para distintos valores de h y de CFL (16 en total).

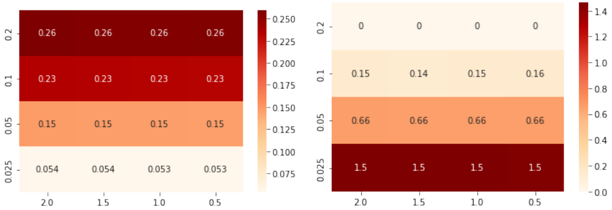


Figura 6: Error y ritmo de convergencia

- Las condiciones CFL no afectan la convergencia ni el error.
- Convergencia acelera a medida que se toman h's cercanos a $\frac{1}{512}$.

Indice

Discusión

- Se logró obtener resultados similares en 2 de los 3 experimentos a los obtenidos en Anaya et al., 2020
- No se logró que la segunda ecuación del sistema impacte como debiese.
- Galerkin discontinuo no resultó ser una buena alternativa.
- No se pudo programar de forma adecuada Euler implícito.