# Solución analítica de FitzHugh - Nagumo

Buscamos resolver de manera analítica la ecuación de FitzHugh - Nagumo bajo la consideración: $I_{\text{app}}(x,t) = 0$, para todo $(x,t) \in \Omega_t = \Omega \times [0,T]$. Es decir:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t) = D\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) + v(1-v)(v-\theta) - w, \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial t}(x,t) = av - bw. \\[2ex] v(x,0) = v_0(x), \\ w(x,0) = w_0(x). \end{cases} \tag{1}$$

Para esto, expresaremos el sistema no lineal de ecuaciones en dos variables independientes: $x$ (espacio) y $t$ (tiempo) de forma matricial. Tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \\[2ex] \begin{pmatrix} v(x,0) \\ w(x,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{2}$$

en donde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función suave definida por:

$$F\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v(1-v)(v-\theta) - w \\ av - bw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{\text{ion}}(v,w) \\ H(v,w) \end{pmatrix}.$$

Note que (1) corresponde a un sistema acoplado de una EDP parabólica junto a una EDO. Por temas de notación, diremos $U(x,t) = \begin{pmatrix} v(x,t) \\ w(x,t) \end{pmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Por lo tanto, (2) se puede expresar de manera más compacta:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,t) = A\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t) + F(U), \\[2ex] U(0) = U_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{3}$$

Resolveremos (3) recurriendo al Principio de Duhamel. Pero antes, será de utilidad estudiar la ecuación del calor: $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ con condición inicial $u(x,0) = u_0(x)$ y $a > 0$. La solución de esta EDP está dada por:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y,t) \cdot u_0(y)\, dy, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}} e^{-\frac{1}{4at}(x-y)^2} \cdot u_0(y)\, dy. \end{aligned}$$

en donde $H(t,x)$ corresponde al núcleo del calor.

Definamos $G(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{1}{4Dt}x^2} & 0 \\ 0 & \delta(x-y) \end{bmatrix}$ como el núcleo de Green asociado a (3). De esta manera, la EDP matricial $\frac{\partial U}{\partial t}(x,t) = A\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t)$ admite la solución:

$$
\begin{aligned}
U(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t)\cdot u_0(y)\,dy, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{1}{4Dt}(x-y)^2} & 0 \\ 0 & \delta(x-y) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_0(y) \\ w_0(y) \end{pmatrix} dy, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{1}{4Dt}(x-y)^2}\cdot v_0(y) + \delta(x-y)\cdot w_0(y) \right] dy, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{1}{4Dt}(x-y)^2}\cdot v_0(y)\,dy + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)\cdot w_0(y)\,dy.
\end{aligned}
$$

Note que (3) es un problema de valores iniciales NO homogéneo. Al igual que en una EDO lineal no homogénea, podemos utilizar el Principio de Duhamel (que también es valido en EPD's). De esta manera, la solución del sistema (3) está dado por:

$$
\begin{aligned}
U(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t)\cdot u_0(y)\,dy + \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t-s)\cdot F(U(y,s))\,dy\,ds, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{1}{4Dt}(x-y)^2}\cdot v_0(y)\,dy + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)\cdot w_0(y)\,dy \\
&+ \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-s)}} e^{-\frac{1}{4Dt}(x-y)^2} & 0 \\ 0 & \delta(x-y) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -I_{\text{ion}}(v(y,s),w(y,s)) \\ H(v(y,s),w(y,s)) \end{pmatrix} dy\,ds, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{1}{4Dt}(x-y)^2}\cdot v_0(y)\,dy + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)\cdot w_0(y)\,dy \\
&+ \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{1}{4Dt}(x-y)^2}\cdot I_{\text{ion}}(v(y,s),w(y,s)) + \delta(x-y)\cdot H(v(y,s),w(y,s)) \right] dy\,ds, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{1}{4Dt}(x-y)^2}\cdot v_0(y)\,dy + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)\cdot w_0(y)\,dy \\
&- \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{1}{4Dt}(x-y)^2}\cdot I_{\text{ion}}(v(y,s),w(y,s))\,dy\,ds + \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)\cdot H(v(y,s),w(y,s))\,dy\,ds.
\end{aligned}
$$

De esta manera, obtenemos que la solución de la ecuación de FitzHugh - Nagumo con estímulo $I_{\text{app}}(x,t) = 0$, para todo $(x,t) \in \Omega_t = \Omega \times [0,T]$ está dada por:

$$
\begin{aligned}
U(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{1}{4Dt}(x-y)^2}\cdot v_0(y)\,dy + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)\cdot w_0(y)\,dy \\
&- \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{1}{4Dt}(x-y)^2}\cdot I_{\text{ion}}(v(y,s),w(y,s))\,dy\,ds + \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)\cdot H(v(y,s),w(y,s))\,dy\,ds.
\end{aligned}
$$