PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL
IMT3410 - MÉTODOS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES

Propuesta de proyecto

Integrantes: Agustín Caracci, Rafael Kaempfer, Joaquín Oyarzún.

1. Ecuación

Para el proyecto nos vamos a enfocar en la ecuación de FitzHugh - Nagumo, la cual se utiliza para modelar sistemas biológicos excitables; como por ejemplo una neurona.

Para un conjunto acotado $\Omega \subset R^2$ con frontera poligonal Σ, con vector normal $\mathbf{n}$ y un tiempo final $T > 0$, el dominio del problema se define por $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ y la frontera del problema como $\Sigma_T = \Sigma \times (0, T)$. Tenemos que $v = v(x, t)$ representa el potencial transmembranal y $w = w(x, t)$ es una variable de recuperación. Las ecuaciones que rigen el sistema están dadas por:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - D\left(\displaystyle\int_\Omega v(x,t)\,dx\right)\Delta v + I_{\text{ion}}(v,w) = I_{\text{app}}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} - H(v,w) = 0, \quad (x,t) \in \Omega_T \\ \\ D\left(\displaystyle\int_\Omega v(x,t)\,dx\right)\Delta v \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (x,t) \in \Sigma_T \\ v(x,0) = v_0(x), \\ w(x,0) = w_0(x). \end{cases}$$

donde $D > 0$ es la tasa de difusión (dependiente del potencial transmembranal), $I_{\text{app}}(x, t)$ es el estímulo e $I_{\text{ion}}(v, w)$ es la corriente iónica definida por la función $I_{\text{ion}} : \Omega_T \times \Omega_T \to \Omega_T$:

$$\begin{aligned} I_{\text{ion}}(v,w) &= I_{\text{ion},1}(v) + I_{\text{ion},2}(w), \\ &= -\lambda v(v-\theta)(1-v) + \lambda w. \end{aligned}$$

Además $H : \Omega_T \times \Omega_T \to \Omega_T$ con $H(v, w) := av - bw$; en donde $\lambda, \theta, a, b \in \mathbb{R}^+$ son parámetros fijos.

Para efectos de este proyecto, se tomará la simplificación de considerar como constante (igual a 1), la integral sobre el voltaje de la primera ecuación y en las consideraciones de frontera. Por lo tanto, obtenemos la siguiente versión simplificada de la ecuación de FitzHugh - Nagumo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - D\Delta v + I_{\text{ion}}(v,w) = I_{\text{app}}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} - H(v,w) = 0, \quad (x,t) \in \Omega_T \\ \\ D\Delta v \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (x,t) \in \Sigma_T \\ v(x,0) = v_0(x), \\ w(x,0) = w_0(x). \end{cases}$$

2. Objetivos

A través del proyecto se busca hacer un modelamiento de la variación de voltaje en el plano de una simplificación del corazón humano, aplicando complejidades incrementales. Es decir partiendo desde geometrías planas simples hasta algunas que sean más similares a un corazón real. De manera análoga se abordará I_{ext} de forma que sea similar a la excitación de la membrana cardiaca.

Primero se realizará un análisis de propiedades analíticas (estabilidad y convergencia) y numéricas de la ecuación. Para hacer lo que se propone, se recurrirá al método de Galerkin tanto continuo (elementos finitos) como discontinuo (DG).

Respecto a las condiciones de borde espaciales y temporales se tomarán constantes, definidas por las ecuaciones. En cuanto a la excitación (I_{app}) se irá variando.

A continuación se listan los objetivos

1. Seleccionar el mejor método numérico entre CG y DG.
2. Experimentar con distintas geometrías de corazón (rectangular, circular, doble compartimiento).
3. Experimentar con distintos f (I_{app}). La aproximación que se está considerando es una función que se propaque en una trayectoria del corazón, las funciones pensadas son: gaussianas, triángulos o rectángulos. Se espera poder respaldarlas con información bibliográfica.

3. Tareas

3.1. Semana 21/11

1. 1.0 Buscar las condiciones de frontera de w y v.
2. 1.1 Encontrar solución analítica para $I_{app} = 0$.
3. 2. Hacer la formulación variacional.
4. 3.0 Definir exactamente el método numérico: Opciones: Galerkin Discontinuo con algun metodo de paso de tiempo (preferiblemente multi-steps).
5. 3.1 Estudiar método y programarlo (NGsolve y hacer el análisis de convergencia).
6. 3.2 Revisar estabilidad (preguntarle a l profe)

3.2. Semana 28/21

1. 4.0 Hacer variaciones de I_{app} .
2. 4.1 Hacer variaciones w y v.
3. 5. Revisar si se cumplen las condiciones CFL.