

Formulación variacional de FitzHugh - Nagumo y el problema de minimización efectivo

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio acotado con frontera poligonal Σ y $T > 0$ el tiempo final. Considere $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$, $v = v(x, t)$ y $w = w(x, t)$; para todo $(x, t) \in \Omega_T$. Tenemos que v corresponde al potencial transmembranal escalar y w es la variable interna que controla la recuperación de la célula. Se definen las ecuaciones de FitzHugh - Nagumo de reacción - difusión no local mediante el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} - D\Delta v + I_{\text{ion}}(v, w) = I_{\text{app}}(x, t), \\ \frac{\partial w}{\partial t} = H(v, w), \\ D\Delta v \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (x, t) \in \Sigma_T, \\ v(x, 0) = v_0(x), \\ w(x, 0) = w_0(x). \end{array} \right.$$

donde $D > 0$ es la tasa de difusión (dependiente del potencial transmembranal), $I_{\text{app}}(x, t)$ es el estímulo e $I_{\text{ion}}(v, w)$ es la corriente iónica definida por la función $I_{\text{ion}} : \Omega_T \times \Omega_T \rightarrow \Omega_T$:

$$\begin{aligned} I_{\text{ion}}(v, w) &= I_{\text{ion},1}(v) + I_{\text{ion},2}(w), \\ &= -\lambda v(v - \theta)(1 - v) + \lambda w. \end{aligned}$$

Además $H : \Omega_T \times \Omega_T \rightarrow \Omega_T$ con $H(v, w) := av - bw$; en donde $\lambda, \theta, a, b \in \mathbb{R}$ parámetros fijos. Enfatizaremos de que $I_{\text{ion},1}$, $I_{\text{ion},2}$ y H son funciones continuas en su dominio.

En lo que sigue, consideraremos la integración temporal de las ecuaciones de FitzHugh - Nagumo en el intervalo de tiempo $[0, T]$ utilizando una discretización temporal de Backward - Euler con paso de tiempo $\Delta t = \frac{T}{N}$. De esta manera, se obtienen las ecuaciones semidiscretas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} - D\Delta v_{n+1} + I_{\text{ion}}(v_{n+1}, w_{n+1}) = I_{\text{app}}(x, t_{n+1}), \\ \frac{w_{n+1} - w_n}{\Delta t} = H(v_{n+1}, w_{n+1}). \end{array} \right. \quad (1)$$

con $n = \{1, 2, \dots, N\}$ y $t_n = n\Delta t$. La formulación variacional de las ecuaciones semidiscretas (1) está dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_T} \frac{v - v_n}{\Delta t} \varphi + D \int_{\Omega_T} \nabla v \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega_T} I_{\text{ion}}(v, w) \varphi = \int_{\Omega_T} I_{\text{app}}(x, t) \varphi, \\ \int_{\Omega_T} \frac{w - w_n}{\Delta t} \psi = \int_{\Omega_T} H(v, w) \psi, \end{array} \right. \quad (2)$$

en donde $\varphi \in H^1(\Omega)$ y $\psi \in C([0, T], L^2(\Omega))$. Es de nuestro interés, analizar el comportamiento de la formulación variacional (débil) de la ecuación (2) como problema de minimización efectivo. Sin embargo, debemos considerar algunos resultados preliminares.