Formulación variacional de FitzHugh - Nagumo y el problema de minimización efectivo

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio acotado con frontera poligonal Σ y $T > 0$ el tiempo final. Considere $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$, $v = v(x,t)$ y $w = (x,t)$; para todo $(x,t) \in \Omega_T$. Tenemos que v corresponde al potencial transmembranal escalar y w es la variable interna que controla la recuperación de la célula. Se definen las ecuaciones de FitzHugh - Nagumo de reacción - difusión no local mediante el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - D\Delta v + I_{\text{ion}}(v,w) = I_{\text{app}}(x,t), \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = H(v,w), \\ \\ D\Delta v \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (x,t) \in \Sigma_T, \\ \\ v(x,0) = v_0(x), \\ w(x,0) = w_0(x). \end{cases}$$

donde $D > 0$ es la tasa de difusión (dependiente del potencial transmembranal), $I_{\text{app}}(x,t)$ es el estímulo e $I_{\text{ion}}(v,w)$ es la corriente iónica definida por la función $I_{\text{ion}} : \Omega_T \times \Omega_T \to \Omega_T$:

$$\begin{aligned} I_{\text{ion}}(v,w) &= I_{\text{ion},1}(v) + I_{\text{ion},2}(w), \\ &= -\lambda v(v-\theta)(1-v) + \lambda w. \end{aligned}$$

Además $H : \Omega_T \times \Omega_T \to \Omega_T$ con $H(v,w) := av - bw$; en donde $\lambda, a, b \in \mathbb{R}^+$ y $\theta \in \mathbb{R}$ (parámetro umbral para la activación eléctrica) son valores fijos. Enfatizaremos de que $I_{\text{ion},1}, I_{\text{ion},2}$ y H son funciones continuas en su dominio.

En lo que sigue, consideraremos la integración temporal de las ecuaciones de FitzHugh - Nagumo en el intervalo de tiempo $[0,T]$ utilizando una discretización temporal de Backward - Euler con paso de tiempo $\Delta t = \frac{T}{N}$. De esta manera, se obtienen las ecuaciones semidiscretas:

$$\begin{cases} \dfrac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} - D\Delta v_{n+1} + I_{\text{ion}}(v_{n+1}, w_{n+1}) = I_{\text{app}}(x, t_{n+1}), \\ \dfrac{w_{n+1} - w_n}{\Delta t} = H(v_{n+1}, w_{n+1}). \end{cases} \tag{1}$$

con $n = \{1, 2, ..., N\}$ y $t_n = n\Delta t$. La formulación variacional de las ecuaciones semidiscretas (1) está dada por:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_T} \frac{v - v_n}{\Delta t}\varphi + D\int_{\Omega_T} \nabla v \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega_T} I_{\text{ion}}(v,w)\varphi = \int_{\Omega_T} I_{\text{app}}(x,t)\varphi, \\ \\ \displaystyle\int_{\Omega_T} \frac{w - w_n}{\Delta t}\psi = \int_{\Omega_T} H(v,w)\psi, \end{cases}$$

en donde $\varphi \in H^1(\Omega)$ y $\psi \in C([0,T], L^2(\Omega))$.

Es de nuestro interés, analizar el comportamiento de las ecuaciones semidiscretas dadas por (1) como problema de minimización efectivo. Sin embargo, debemos considerar algunos resultados preliminares.

Por temas de notación, diremos que $\frac{\partial v}{\partial t} = \dot{v}$ y $\frac{\partial w}{\partial t} = \dot{w}$. Definimos el potencial de tasa como:

$$\Psi\left[\dot{v}, \dot{w}\right] := \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}\dot{v}^2 - \frac{1}{2}\dot{r}^2 \right) dx,$$

El potencial electroquímico generalizado está dado por:

$$\Upsilon\left[v, w\right] := \int_{\Omega} \left[\frac{D}{2} \left|\nabla v\right|^2 + \lambda \left(\frac{v^4}{4} - \frac{(\alpha+1)v^3}{3} + \frac{\alpha v^2}{2} \right) + avw - \frac{b}{2}r^2 \right] dx.$$

Si $\Delta t < \dfrac{3}{\lambda(\theta^2 - \theta + 1)}$, entonces las ecuaciones semidiscretas de FitzHugh - Nagumo dadas en (1) admiten una única solución débil (v_{n+1}, w_{n+1}) determinada por las relaciones:

$$F_n[\Psi_{n+1}] = \min_{\Psi \in H_1(\Omega)} F_n[\Psi],$$
$$r_{n+1} = \frac{r_n + \Delta t a v_{n+1}}{1 + b\Delta t},$$

en donde $F_n[\Psi_n]$ es un funcional estrictamente convexo definido por:

$$F_n[\Psi_n] := \int_{\Omega} \left[\frac{D}{2} \left|\nabla v\right|^2 + f_n(v(x), x) \right] dx,$$

en donde $f_n(v,x) = \max_{r \in \mathbb{R}^2} \left\{ \Delta t \left(\frac{1}{2} \left(\frac{v - v_n}{\Delta t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{w - w_n}{\Delta t} \right)^2 \right) + \lambda \left(\frac{v^4}{4} - \frac{(\alpha+1)v^3}{3} + \frac{\alpha v^2}{2} \right) + avw - \frac{b}{2}r^2 \right\}.$