МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

РЕФЕРАТ

КАЗАНЦЕВА РАГДАЯ ВАЛЕРЬЕВИЧА

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

Выполнил:
Студент 1 курса магистратуры очной формы обучения
Направление подготовки (специальность) 03.03.02 Физика
Направленность (профиль) Физика конденсированного состояния

Руководитель
к.ф.м.н., профессор, профессор теоретической физики,
(ученая степень, ученое звание, должность)

____________ / Р.М.Вахитов
(подпись) (И.О. Фамилия)

Уфа-2020

Уравнение Буссинеска

$$u_{tt} - u_{xx} - 3(u^2)_{xx} - u_{xxxx} = 0 \qquad (1)$$

Уравнение Буссинеска представляет собой уравнение нелинейной струны и имеет различные физические положения. В частности, оно описывает распространение длинных волн на поверхности воды.

Подстановкой

$$u = 2(\ln f)_{xx} \qquad (2)$$

уравнение (1) сведётся к билинейному дифференциальному уравнению

$$(D_t^2 - D_x^2 - D_x^4) f \bullet f = 0. \qquad (3)$$

Пользуясь техникой Хироты, найти одно- и двухсолитонное решения уравнения Буссинеска.

==

Решение

Приведем уравнение (3) в привычное обозначение. Для этого избавимся от операторов Хироты.

Сначала упростим уравнение (4), после чего заменим $g = g(\xi, \tau)$ на $f = f(x, t)$

$$(D_t^2 - D_x^2 - D_x^4) f \bullet g = 0. \qquad (4)$$

In [1]:
```
from sympy import *
init_printing(use_unicode=True)

x, xi, tau, t = symbols('x xi tau t')
d_t = Symbol('\partial_t')
d_x = Symbol('\partial_x')
d_tau = Symbol(r'\partial_\tau')
d_xi = Symbol(r'\partial_\xi')
f, g = symbols('f g', cls = Function)
D_t, D_x = symbols('D_t D_x', cls = Function)

fg = f(x, t)*g(xi, tau)

# Операторы Хироты
D_t = d_t - d_tau
D_x = d_x - d_xi
```

In [2]:
```
Eq(Symbol('D_t^{2}fg'), expand(D_t*D_t)*f(x, t)*g(xi, tau))
```

Out[2]: $D_t^2 fg = \left(\partial_\tau^2 - 2\partial_\tau\partial_t + \partial_t^2\right) f(x,t) g(\xi,\tau)$

In [3]:
```
s1 = fg.diff(t, t) - 2*fg.diff(t, tau) + fg.diff(tau, tau)
Eq(Symbol('D_t^{2}fg'), s1)
```

Out[3]: $D_t^2 fg = f(x,t)\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}g(\xi,\tau) + g(\xi,\tau)\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,t) - 2\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\frac{\partial}{\partial\tau}g(\xi,\tau)$

In [4]:
```
Eq(Symbol('D_x^{2}fg'), expand(D_x*D_x)*f(x, t)*g(xi, tau))
```

Out[4]: $D_x^2 fg = \left(\partial_\xi^2 - 2\partial_\xi\partial_x + \partial_x^2\right) f(x,t) g(\xi,\tau)$

In [5]:
```
s2 = fg.diff(x, x) - 2*fg.diff(x, xi) + fg.diff(xi, xi)
Eq(Symbol('D_x^{2}fg'), s2)
```

Out[5]: $D_x^2 fg = f(x,t)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}g(\xi,\tau) + g(\xi,\tau)\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t) - 2\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\frac{\partial}{\partial\xi}g(\xi,\tau)$

In [6]:
```
Eq(Symbol('D_x^{4}fg'), expand((D_x**4))*f(x, t)*g(xi, tau))
```

Out[6]: $D_x^4 fg = \left(\partial_\xi^4 - 4\partial_\xi^3\partial_x + 6\partial_\xi^2\partial_x^2 - 4\partial_\xi\partial_x^3 + \partial_x^4\right) f(x,t) g(\xi,\tau)$

In [6]:
```
Eq(Symbol('D_x^{4}fg'), expand((D_x**4))*f(x, t)*g(xi, tau))
```

Out[6]:

$$D_x^4 fg = \left(\partial_\xi^4 - 4\partial_\xi^3\partial_x + 6\partial_\xi^2\partial_x^2 - 4\partial_\xi\partial_x^3 + \partial_x^4\right) f(x,t)g(\xi,\tau)$$

In [7]:
```
s3 = fg.diff(xi,xi,xi,xi)-4*fg.diff(xi,xi,xi,x)+6*fg.diff(xi,xi,x,x)-4*fg.diff(xi,x,x,x)+fg.diff(x,x,x,x)
Eq(Symbol('D_x^{4}fg'), s3)
```

Out[7]:

$$D_x^4 fg = f(x,t)\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}g(\xi,\tau) + g(\xi,\tau)\frac{\partial^4}{\partial x^4}f(x,t) - 4\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}g(\xi,\tau) + 6\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}g(\xi,\tau) - 4\frac{\partial^3}{\partial x^3}f(x,t)\frac{\partial}{\partial\xi}g(\xi,\tau)$$

In [8]:
```
Dfg = s1 - s2 - s3
Dfg
```

Out[8]:

$$f(x,t)\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}g(\xi,\tau) - f(x,t)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}g(\xi,\tau) - f(x,t)\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}g(\xi,\tau) + g(\xi,\tau)\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,t) - g(\xi,\tau)\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t) - g(\xi,\tau)\frac{\partial^4}{\partial x^4}f(x,t)$$
$$- 2\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\frac{\partial}{\partial\tau}g(\xi,\tau) + 2\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\frac{\partial}{\partial\xi}g(\xi,\tau) + 4\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}g(\xi,\tau) - 6\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}g(\xi,\tau) + 4\frac{\partial^3}{\partial x^3}f(x,t)\frac{\partial}{\partial\xi}g(\xi,\tau)$$

Создадим программную функцию, которая выполняет действие оператора $(D_t^2 - D_x^2 - D_x^4)$ на две функции.

In [9]:
```
def Hirota(f, g):
    Hir = f*g.diff(t,t) - f*g.diff(x,x) - f*g.diff(x,x,x,x) + g*f.diff(t,t) - g*f.diff(x,x) - g*f.diff(x,x,x,x)\
          - 2*f.diff(t)*g.diff(t) + 2*f.diff(x)*g.diff(x) + 4*f.diff(x)*g.diff(x,x,x) - 6*f.diff(x,x)*g.diff(x,x)\
          + 4*f.diff(x,x,x)*g.diff(x)
    return Hir
```

В явном виде дифференциальное уравнение (3) имеет вид

In [10]:
```
f = f(x, t)
Dff = Hirota(f, f)
Eq(Dff,0)
```

Out[10]:

$$2f(x,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,t) - 2f(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t) - 2f(x,t)\frac{\partial^4}{\partial x^4}f(x,t) - 2\left(\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right)^2 + 2\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\right)^2 + 8\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\frac{\partial^3}{\partial x^3}f(x,t)$$
$$- 6\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t)\right)^2 = 0$$

Замечание: операторы дифференцирования действуют только на стоящуюю перед ними функцию.

Перепишем на более понятном языке.

$$ff_{tt} - f_{xx} - ff_{xxxx} - f_t^2 + f_x^2 + 4f_xf_{xxx} - 3f_{xx}^2 = 0$$

Разложим f в ряд по малому параметру ε:

$$f = 1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \varepsilon^3 f^{(3)} + \dots$$

In [11]:
```
eps = Symbol('varepsilon')
f1, f2, f3 = symbols('f^{(1)} f^{(2)} f^{(3)}')
f1_tt, f2_tt, f3_tt = symbols('f_{tt}^{(1)} f_{tt}^{(2)} f_{tt}^{(3)}')
f1_t, f2_t, f3_t = symbols('f_{t}^{(1)} f_{t}^{(2)} f_{t}^{(3)}')
f1_xxxx, f2_xxxx, f3_xxxx = symbols('f_{xxxx}^{(1)} f_{xxxx}^{(2)} f_{xxxx}^{(3)}')
f1_xxx, f2_xxx, f3_xxx = symbols('f_{xxx}^{(1)} f_{xxx}^{(2)} f_{xxx}^{(3)}')
f1_xx, f2_xx, f3_xx = symbols('f_{xx}^{(1)} f_{xx}^{(2)} f_{xx}^{(3)}')
f1_x, f2_x, f3_x = symbols('f_{x}^{(1)} f_{x}^{(2)} f_{x}^{(3)}')

f      = 1 + eps*f1 + eps**2*f2 + eps**3*f3
f_tt   = eps*f1_tt + eps**2*f2_tt + eps**3*f3_tt
f_t    = eps*f1_t + eps**2*f2_t + eps**3*f3_t
f_xxxx = eps*f1_xxxx + eps**2*f2_xxxx + eps**3*f3_xxxx
f_xxx  = eps*f1_xxx + eps**2*f2_xxx + eps**3*f3_xxx
f_xx   = eps*f1_xx + eps**2*f2_xx + eps**3*f3_xx
f_x    = eps*f1_x + eps**2*f2_x + eps**3*f3_x

H = f*f_tt-f_xx-f*f_xxxx-f_t**2+f_x**2+4*f_x*f_xxx-3*f_xx**2
H = collect(expand(H), eps)
```

In [12]:
```
H.coeff(eps, 1)
```
Out[12]:
$$f_{tt}^{(1)} - f_{xxxx}^{(1)} - f_{xx}^{(1)}$$

In [13]:
```
H.coeff(eps, 2)
```
Out[13]:
$$f^{(1)} f_{tt}^{(1)} - f^{(1)} f_{xxxx}^{(1)} + f_{tt}^{(2)} - \left(f_{t}^{(1)}\right)^{2} - f_{xxxx}^{(2)} + 4 f_{xxx}^{(1)} f_{x}^{(1)} - 3 \left(f_{xx}^{(1)}\right)^{2} - f_{xx}^{(2)} + \left(f_{x}^{(1)}\right)^{2}$$

In [14]:
```
H.coeff(eps, 3)
```
Out[14]:
$$f^{(1)} f_{tt}^{(2)} - f^{(1)} f_{xxxx}^{(2)} + f^{(2)} f_{tt}^{(1)} - f^{(2)} f_{xxxx}^{(1)} + f_{tt}^{(3)} - 2 f_{t}^{(1)} f_{t}^{(2)} - f_{xxxx}^{(3)} + 4 f_{xxx}^{(1)} f_{x}^{(2)} + 4 f_{xxx}^{(2)} f_{x}^{(1)} - 6 f_{xx}^{(1)} f_{xx}^{(2)} - f_{xx}^{(3)} + 2 f_{x}^{(1)} f_{x}^{(2)}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим бесконечную систему линейных уравнений:

$$\varepsilon : \qquad f_{tt}^{(1)} - f_{xxxx}^{(1)} - f_{xx}^{(1)} = 0$$

$$\varepsilon^2 : \qquad f_{tt}^{(2)} - f_{xxxx}^{(2)} - f_{xx}^{(2)} = -f^{(1)} f_{tt}^{(1)} + f^{(1)} f_{xxxx}^{(1)} + \left(f_{t}^{(1)}\right)^{2} - 4 f_{xxx}^{(1)} f_{x}^{(1)} + 3 \left(f_{xx}^{(1)}\right)^{2} - \left(f_{x}^{(1)}\right)^{2} = -\frac{1}{2}(D_t^2 - D_x^2 - D_x^4) f^{(1)} f^{(1)}$$

$$\varepsilon^3 : \qquad f_{tt}^{(3)} - f_{xxxx}^{(3)} - f_{xx}^{(3)} = -f^{(1)} f_{tt}^{(2)} + f^{(1)} f_{xxxx}^{(2)} - f^{(2)} f_{tt}^{(1)} + f^{(2)} f_{xxxx}^{(1)} + 2 f_{t}^{(1)} f_{t}^{(2)} - 4 f_{xxx}^{(1)} f_{x}^{(2)} - 4 f_{xxx}^{(2)} f_{x}^{(1)} + 6 f_{xx}^{(1)} f_{xx}^{(2)} - 2 f_{x}^{(1)} f_{x}^{(2)} = -\frac{1}{2}(D_t^2 - D_x^2 - D_x^4) f^{(1)} f^{(2)}$$

$\varepsilon^4 :$

$\varepsilon^5 :$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

===

Рассмотрим вначале односолитонное решение уравнения Буссинеска.

В этом случае $f^{(1)}$ предствим в виде $f^{(1)} = e^{\theta} = e^{ax - bt + \delta}$

In [15]:
```
theta, delta = symbols('\\theta \delta')
a, b = var('a b', positive = True)

# Подставляем в первое уравнение системы и решаем ДУ
f1 = exp(a*x-b*t+delta)

eq = Eq(f1.diff(t,t) - f1.diff(x, x, x, x) - f1.diff(x, x), 0)
eq.simplify()
```
Out[15]:
$$\left(-a^{4} - a^{2} + b^{2}\right) e^{\delta + ax - bt} = 0$$

In [16]:
```
b_ = solve(eq, b)[0]
Eq(b, b_)
```
Out[16]:
$$b = a \sqrt{a^{2} + 1}$$

In [17]:
```
f1 = f1.subs(b,b_)
Eq(Symbol('f^{(1)}'), f1)
```
Out[17]:
$$f^{(1)} = e^{\delta - at\sqrt{a^{2}+1} + ax}$$

$$f^{(1)} = e^{\delta - at\sqrt{a^{2}+1} + ax}$$

Подставляя во второе уравнение системы, увидим действие операторов Хироты на $e^{\theta} \bullet e^{\theta}$, что приведет к обнулению. Поэтому

$$f^{(2)} = 0$$

$$f = 1 + \varepsilon f^{(1)} = |\varepsilon = 1| = 1 + e^{\theta}$$

$$\theta = \delta - at\sqrt{a^2+1} + ax$$

In [18]:
```
f = 1 + exp(a*x-b*t+delta)
Eq(Symbol('f'),f)
```

Out[18]: $f = e^{\delta + ax - bt} + 1$

In [19]:
```
u = 2*(ln(f)).diff(x,x).subs([(a*x-b*t+delta, theta), (2*a*x-2*b*t+2*delta, 2*theta)])
Eq(Symbol('u'), u)
```

Out[19]:
$$u = \frac{2a^2\left(e^{\theta} - \frac{e^{2\theta}}{e^{\theta}+1}\right)}{e^{\theta}+1}$$

In [20]:
```
Eq(Symbol('u'), u.simplify())
```

Out[20]:
$$u = \frac{a^2}{2\cosh^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Таким образом односолитонное решение уравнения Буссинеска имеет вид

$$u = \frac{a^2}{2\cosh^2\frac{1}{2}\left(ax - a\sqrt{a^2+1} + \delta\right)}$$

===

Теперь найдём двухсолитонное решение уравнения Буссинеска. В этом случае $f^{(1)}$ предствим в виде

$$f^{(1)} = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}$$

$$\theta_i = a_i x - b_i t + \delta_i, \qquad i = 1, 2$$

In [21]:
```
theta_1, theta_2, delta_1, delta_2 = symbols('\\theta_1 \\theta_2 \delta_1 \delta_2')
a1, b1, a2, b2 = symbols('a_1 b_1 a_2 b_2', positive = True)

# Подставляем в первое уравнение системы и решаем ДУ
f1_1 = exp(a1*x-b1*t+delta_1)
f1_2 = exp(a2*x-b2*t+delta_2)

eq1_1 = f1_1.diff(t,t) - f1_1.diff(x, x, x, x) - f1_1.diff(x, x)
eq1_2 = f1_2.diff(t,t) - f1_2.diff(x, x, x, x) - f1_2.diff(x, x)
Eq(eq1_1.simplify() + eq1_2.simplify(), 0)
```

Out[21]: $\left(-a_1^4 - a_1^2 + b_1^2\right)e^{\delta_1 + a_1 x - b_1 t} + \left(-a_2^4 - a_2^2 + b_2^2\right)e^{\delta_2 + a_2 x - b_2 t} = 0$

In [22]:
```
b1_ = solve(eq1_1, b1)[0]
Eq(b1, b1_)
```

Out[22]: $b_1 = a_1\sqrt{a_1^2+1}$

In [23]:
```
b2_ = solve(eq1_2, b2)[0]
Eq(b2, b2_)
```

Out[23]: $b_2 = a_2\sqrt{a_2^2+1}$

In [24]:
```
f1 = f1_1 + f1_2
Eq(Symbol('f^{(1)}'), f1)
```

Out[24]: $f^{(1)} = e^{\delta_1 + a_1 x - b_1 t} + e^{\delta_2 + a_2 x - b_2 t}$

Подставляем $f^{(1)}$ во второе уравнение системы. Оператор $D = D_t^2 - D_x^2 - D_x^4$ действует на

$$f \bullet g = f^{(1)} \bullet f^{(1)}$$

In [27]:
```
eq2 = -1/S(2)*Hirota(f1, f1)
eq2 = eq2.subs([(delta_1-b1*t+a1*x, theta_1), (delta_2-b2*t+a2*x, theta_2)])
eq2 = eq2.simplify()
Eq(Symbol('-\\frac{1}{2} D(f^{(1)} \\bullet f^{(1)})'), eq2)
```

Out[27]: $-\frac{1}{2} D(f^{(1)} \bullet f^{(1)}) = \left(a_1^4 - 4a_1^3 a_2 + 6a_1^2 a_2^2 + a_1^2 - 4a_1 a_2^3 - 2a_1 a_2 + a_2^4 + a_2^2 - b_1^2 + 2b_1 b_2 - b_2^2\right) e^{\theta_1 + \theta_2}$

Чтобы решить ДУ:

$$f_{tt}^{(2)} - f_{xxxx}^{(2)} - f_{xx}^{(2)} = \left(a_1^4 - 4a_1^3 a_2 + 6a_1^2 a_2^2 + a_1^2 - 4a_1 a_2^3 - 2a_1 a_2 + a_2^4 + a_2^2 - b_1^2 + 2b_1 b_2 - b_2^2\right) e^{\theta_1 + \theta_2},$$

представим $f^{(2)} = Ae^{\theta_1 + \theta_2}$

In [29]:
```
A, delta_12 = symbols('A \\delta_{12}')

f2 = A*exp(a1*x - b1*t + delta_1 + a2*x - b2*t + delta_2)

diffeq2 = (f2.diff(t,t) - f2.diff(x,x,x,x) - f2.diff(x,x)).simplify().\
          subs([(delta_1-b1*t+a1*x, theta_1), (delta_2-b2*t+a2*x, theta_2)])

Eq(diffeq2, eq2)
```

Out[29]: $A\left(-(a_1 + a_2)^4 - (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2\right) e^{\theta_1 + \theta_2} = \left(a_1^4 - 4a_1^3 a_2 + 6a_1^2 a_2^2 + a_1^2 - 4a_1 a_2^3 - 2a_1 a_2 + a_2^4 + a_2^2 - b_1^2 + 2b_1 b_2 - b_2^2\right) e^{\theta_1 + \theta_2}$

In [30]:
```
A = (solve(Eq(diffeq2, eq2), A)[0])
A = A.subs([(b1,b1_), (b2,b2_)]).simplify()
Eq(Symbol('A'), A)
```

Out[30]:
$$A = \frac{2a_1^2 - 3a_1 a_2 + 2a_2^2 - \sqrt{a_1^2 + 1}\sqrt{a_2^2 + 1} + 1}{2a_1^2 + 3a_1 a_2 + 2a_2^2 - \sqrt{a_1^2 + 1}\sqrt{a_2^2 + 1} + 1}$$

Подставляем $f^{(2)}$ и $f^{(1)}$ в третье уравнение системы. Оператор $D = D_t^2 - D_x^2 - D_x^4$ действует на $f \bullet g = f^{(1)} \bullet f^{(2)}$

In [31]:
```
eq3 = -1/S(2)*Hirota(f1, f2)

eq3 = eq3.subs([(delta_1-b1*t+a1*x, theta_1), (delta_2-b2*t+a2*x, theta_2)])
eq3 = (eq3.subs([(b1, b1_), (b2, b2_)])).simplify()
Eq(Symbol('-\\frac{1}{2} D(f^{(1)} \\bullet f^{(2)})'), eq3)
```

Out[31]: $-\frac{1}{2} D(f^{(1)} \bullet f^{(2)}) = 0$

ДУ: $f_{tt}^{(3)} - f_{xxxx}^{(3)} - f_{xx}^{(3)} = 0$ имеет решение $f^{(3)} = 0$. Таким образом, ряд обрывается.

In [32]:
```
f = 1 + eps*f1 + eps**2*f2
Eq(Symbol('f'), f)
```

Out[32]: $f = A\varepsilon^2 e^{\delta_1 + \delta_2 + a_1 x + a_2 x - b_1 t - b_2 t} + \varepsilon\left(e^{\delta_1 + a_1 x - b_1 t} + e^{\delta_2 + a_2 x - b_2 t}\right) + 1$

In [168]:
```
f = 1 + exp(a1*x-b1*t+delta_1) + exp(a2*x-b2*t+delta_2) + exp(a1*x-b1*t + a2*x-b2*t + delta_1 + delta_2 + delta_12)
Eq(Symbol('f'),f)
```

Out[168]: $f = e^{\delta_1 + a_1 x - b_1 t} + e^{\delta_2 + a_2 x - b_2 t} + e^{\delta_1 + \delta_2 + \delta_{12} + a_1 x + a_2 x - b_1 t - b_2 t} + 1$

In [173]:
```
u = 2*(ln(f)).diff(x,x).subs([(a1*x-b1*t+delta_1, theta_1), (a2*x-b2*t+delta_2, theta_2)])
Eq(Symbol('u'), (u).simplify())
```

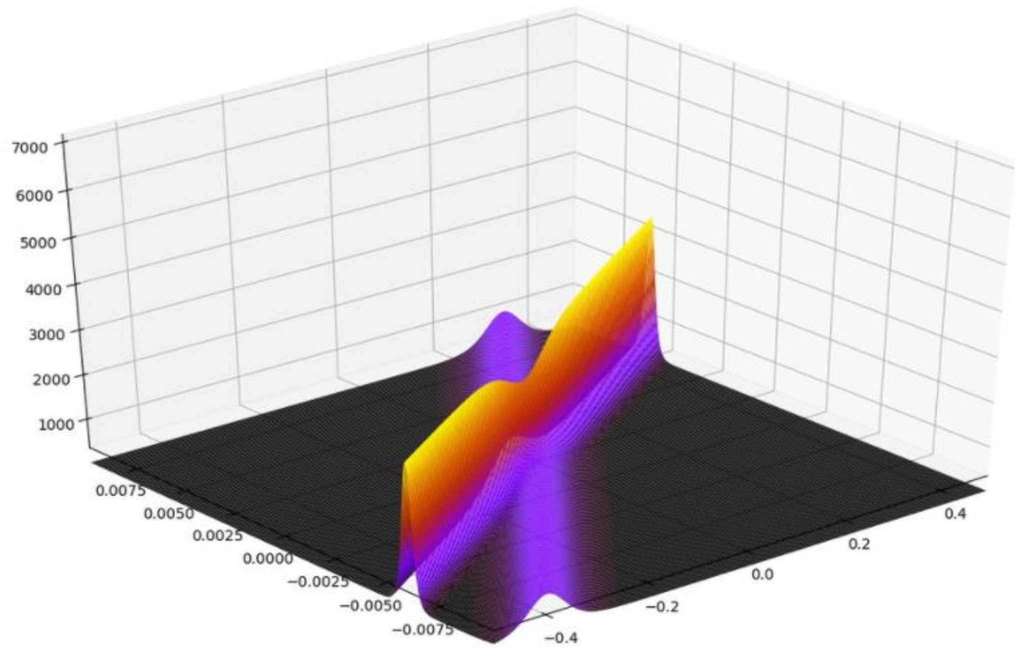
Out[173]:
$$u = \frac{2\left(-\left(a_1 e^{\theta_1} + a_2 e^{\theta_2} + (a_1 + a_2) e^{\delta_{12} + \theta_1 + \theta_2}\right)^2 + \left(a_1^2 e^{\theta_1} + a_2^2 e^{\theta_2} + (a_1 + a_2)^2 e^{\delta_{12} + \theta_1 + \theta_2}\right)\left(e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\delta_{12} + \theta_1 + \theta_2} + 1\right)\right)}{\left(e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\delta_{12} + \theta_1 + \theta_2} + 1\right)^2}$$

Таким образом, в результате упрощений двухсолитонное решение уравнения Буссинеска имеет вид

$$u = |a_1^2 - a_2^2| \, \frac{a_1^2 \cosh\left(\theta_2 + \frac{\delta_{12}}{2}\right) + a_2^2 \cosh\left(\theta_1 + \frac{\delta_{12}}{2}\right) + |a_1^2 - a_2^2|}{\left[|a_1 - a_2| \cosh\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \delta_{12}}{2}\right) + (a_1 + a_2) \cosh\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)\right]^2}$$

$$\delta_{12} = \ln(A), \qquad \varepsilon = 1$$

$$A = \frac{2a_1^2 - 3a_1 a_2 + 2a_2^2 - \sqrt{a_1^2 + 1}\sqrt{a_2^2 + 1} + 1}{2a_1^2 + 3a_1 a_2 + 2a_2^2 - \sqrt{a_1^2 + 1}\sqrt{a_2^2 + 1} + 1}$$



Теперь найдём трёхсолитонное решение уравнения Буссинеска. В этом случае $f^{(1)}$ представим в виде

$$f^{(1)} = e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3}$$

$$\theta_i = a_i x - b_i t + \delta_i, \qquad i = 1, 2, 3$$

In [45]:
```
theta_3, delta_3 = symbols('\\theta_3 \delta_3')
a3, b3 = symbols('a_3 b_3', positive = True)

# Подставляем в первое уравнение системы и решаем ДУ
f1_1 = exp(a1*x-b1*t+delta_1)
f1_2 = exp(a2*x-b2*t+delta_2)
f1_3 = exp(a3*x-b3*t+delta_3)

eq1 = f1_1.diff(t,t) - f1_1.diff(x, x, x, x) - f1_1.diff(x, x)
eq2 = f1_2.diff(t,t) - f1_2.diff(x, x, x, x) - f1_2.diff(x, x)
eq3 = f1_3.diff(t,t) - f1_3.diff(x, x, x, x) - f1_3.diff(x, x)

Eq(eq1.simplify() + eq2.simplify() + eq3.simplify(), 0)
```

Out[45]: $\left(-a_1^4 - a_1^2 + b_1^2\right) e^{\delta_1 + a_1 x - b_1 t} + \left(-a_2^4 - a_2^2 + b_2^2\right) e^{\delta_2 + a_2 x - b_2 t} + \left(-a_3^4 - a_3^2 + b_3^2\right) e^{\delta_3 + a_3 x - b_3 t} = 0$

In [46]:
```
b1__ = solve(eq1, b1)[0]
Eq(b1, b1__)
```

Out[46]: $b_1 = a_1\sqrt{a_1^2 + 1}$

In [47]:
```
b2__ = solve(eq2, b2)[0]
Eq(b2, b2__)
```

Out[47]: $b_2 = a_2\sqrt{a_2^2 + 1}$

In [48]:
```
b3__ = solve(eq3, b3)[0]
Eq(b3, b3__)
```

Out[48]: $b_3 = a_3\sqrt{a_3^2 + 1}$

In [50]:
```
f1 = f1_1 + f1_2 + f1_3
Eq(Symbol('f^{(1)}'), f1)
```

Out[50]: $f^{(1)} = e^{\delta_1 + a_1 x - b_1 t} + e^{\delta_2 + a_2 x - b_2 t} + e^{\delta_3 + a_3 x - b_3 t}$

In [51]:
```
eq2 = -1/S(2) * Hirota(f1, f1)
eq2 = eq2.subs([(delta_1-b1*t+a1*x, theta_1), (delta_2-b2*t+a2*x, theta_2), (delta_3-b3*t+a3*x, theta_3)])
eq2 = expand(eq2.simplify())
e = exp
o1 = theta_1
o2 = theta_2
o3 = theta_3
eq2 = eq2.subs([(e(o1)*e(o2), e(o1+o2)), (e(o1)*e(o3), e(o1+o3)), (e(o2)*e(o3), e(o2+o3))])
eq2 = collect(eq2, [e(o1+o2), e(o1+o3), e(o2+o3)])
Eq(Symbol('-\\frac{1}{2} D(f^{(1)} \\bullet f^{(1)})'), eq2)
```

Out[51]:
$$-\frac{1}{2}D(f^{(1)} \bullet f^{(1)}) = \left(a_1^4 - 4a_1^3 a_2 + 6a_1^2 a_2^2 + a_1^2 - 4a_1 a_2^3 - 2a_1 a_2 + a_2^4 + a_2^2 - b_1^2 + 2b_1 b_2 - b_2^2\right) e^{\theta_1 + \theta_2}$$
$$+ \left(a_1^4 - 4a_1^3 a_3 + 6a_1^2 a_3^2 + a_1^2 - 4a_1 a_3^3 - 2a_1 a_3 + a_3^4 + a_3^2 - b_1^2 + 2b_1 b_3 - b_3^2\right) e^{\theta_1 + \theta_3}$$
$$+ \left(a_2^4 - 4a_2^3 a_3 + 6a_2^2 a_3^2 + a_2^2 - 4a_2 a_3^3 - 2a_2 a_3 + a_3^4 + a_3^2 - b_2^2 + 2b_2 b_3 - b_3^2\right) e^{\theta_2 + \theta_3}$$

Чтобы решить ДУ:

$$f_{tt}^{(2)} - f_{xxxx}^{(2)} - f_{xx}^{(2)} = -\frac{1}{2}D(f^{(1)} \bullet f^{(1)}),$$

представим $f^{(2)} = Ae^{\theta_1 + \theta_2} + Be^{\theta_1 + \theta_3} + Ce^{\theta_2 + \theta_3}$

In [54]:
```
A, B, C = symbols('A B C')

f2_1 = A*exp(a1*x-b1*t+delta_1 + a2*x-b2*t+delta_2).subs([(b1, b1__), (b2, b2__)])
f2_2 = B*exp(a1*x-b1*t+delta_1 + a3*x-b3*t+delta_3).subs([(b1, b1__), (b3, b3__)])
f2_3 = C*exp(a2*x-b2*t+delta_2 + a3*x-b3*t+delta_3).subs([(b2, b2__), (b3, b3__)])

equation_1 = (f2_1.diff(t,t) - f2_1.diff(x,x,x,x) - f2_1.diff(x,x)).simplify().\
             subs([(delta_1-b1__*t+a1*x, theta_1), (delta_2-b2__*t+a2*x, theta_2)])
equation_2 = (f2_2.diff(t,t) - f2_2.diff(x,x,x,x) - f2_2.diff(x,x)).simplify().\
             subs([(delta_1-b1__*t+a1*x, theta_1), (delta_3-b3__*t+a3*x, theta_3)])
equation_3 = (f2_3.diff(t,t) - f2_3.diff(x,x,x,x) - f2_3.diff(x,x)).simplify().\
             subs([(delta_2-b2__*t+a2*x, theta_2), (delta_3-b3__*t+a3*x, theta_3)])

equation = equation_1 + equation_2 + equation_3
Eq(Symbol('f_{tt}^{(2)} - f_{xxxx}^{(2)} - f_{xx}^{(2)}'), equation)
```

Out[54]:

$$f_{tt}^{(2)} - f_{xxxx}^{(2)} - f_{xx}^{(2)} = A\left(-(a_1+a_2)^4 - (a_1+a_2)^2 + \left(a_1\sqrt{a_1^2+1} + a_2\sqrt{a_2^2+1}\right)^2\right)e^{\theta_1+\theta_2}$$
$$+ B\left(-(a_1+a_3)^4 - (a_1+a_3)^2 + \left(a_1\sqrt{a_1^2+1} + a_3\sqrt{a_3^2+1}\right)^2\right)e^{\theta_1+\theta_3} + C\left(-(a_2+a_3)^4 - (a_2+a_3)^2 + \left(a_2\sqrt{a_2^2+1} + a_3\sqrt{a_3^2+1}\right)^2\right)e$$

In [55]:
```
A = solve(Eq(equation_1, (-4*a1**3*a2+6*a1**2*a2**2-4*a1*a2**3+2*b1__*b2__-2*a1*a2)*e(o1+o2)), A)[0]
Eq(Symbol('A'), A)
```

Out[55]:

$$A = \frac{2a_1^2 - 3a_1a_2 + 2a_2^2 - \sqrt{a_1^2+1}\sqrt{a_2^2+1} + 1}{2a_1^2 + 3a_1a_2 + 2a_2^2 - \sqrt{a_1^2+1}\sqrt{a_2^2+1} + 1}$$

In [56]:
```
B = solve(Eq(equation_2, (-4*a1**3*a3+6*a1**2*a3**2-4*a1*a3**3+2*b1__*b3__-2*a1*a3)*e(o1+o3)), B)[0]
Eq(Symbol('B'), B)
```

Out[56]:

$$B = \frac{2a_1^2 - 3a_1a_3 + 2a_3^2 - \sqrt{a_1^2+1}\sqrt{a_3^2+1} + 1}{2a_1^2 + 3a_1a_3 + 2a_3^2 - \sqrt{a_1^2+1}\sqrt{a_3^2+1} + 1}$$

In [57]:
```
C = solve(Eq(equation_3, (-4*a2**3*a3+6*a2**2*a3**2-4*a2*a3**3+2*b2__*b3__-2*a2*a3)*e(o2+o3)), C)[0]
Eq(Symbol('C'), C)
```

Out[57]:

$$C = \frac{2a_2^2 - 3a_2a_3 + 2a_3^2 - \sqrt{a_2^2+1}\sqrt{a_3^2+1} + 1}{2a_2^2 + 3a_2a_3 + 2a_3^2 - \sqrt{a_2^2+1}\sqrt{a_3^2+1} + 1}$$

Подставляем $f^{(2)}$ и $f^{(1)}$ в третье уравнение системы. Оператор $D = D_t^2 - D_x^2 - D_x^4$ действует на $f \bullet g = f^{(1)} \bullet f^{(2)}$

In [140]:
```
Eq(Symbol('f^{(1)}'), f1)
```

Out[140]: $f^{(1)} = e^{\delta_1+a_1x-b_1t} + e^{\delta_2+a_2x-b_2t} + e^{\delta_3+a_3x-b_3t}$

In [142]:
```
f2 = (f2_1 + f2_2 + f2_3).subs([(b1__, b1), (b2__, b2), (b3__, b3)])
Eq(Symbol('f^{(2)}'), f2)
```

Out[142]: $f^{(2)} = Ae^{\delta_1+\delta_2+a_1x+a_2x-b_1t-b_2t} + Be^{\delta_1+\delta_3+a_1x+a_3x-b_1t-b_3t} + Ce^{\delta_2+\delta_3+a_2x+a_3x-b_2t-b_3t}$

In [146]:
```
eq3 = -1/S(2)* Hirota(f1, f2)

eq3 = eq3.subs([(delta_1-b1*t+a1*x, theta_1), (delta_2-b2*t+a2*x, theta_2),\
                                (delta_3-b3*t+a3*x, theta_3)])

eq3 = eq3.subs([(b1, b1__), (b2, b2__), (b3, b3__)]).simplify(force = True)

Eq(Symbol('-\\frac{1}{2} D(f^{(1)} \\bullet f^{(2)})'), eq3)
```

Out[146]:

$$-\frac{1}{2}D(f^{(1)} \bullet f^{(2)}) = \left(2Aa_1^3a_2 - 2Aa_1^3a_3 + 3Aa_1^2a_2^2 - 6Aa_1^2a_2a_3 + 3Aa_1^2a_3^2 + 2Aa_1a_2^3 - 6Aa_1a_2^2a_3 + 6Aa_1a_2a_3^2 - Aa_1a_2\sqrt{a_1^2+1}\sqrt{a_2^2+1}\right.$$
$$+ Aa_1a_2 - 2Aa_1a_3^3 + Aa_1a_3\sqrt{a_1^2+1}\sqrt{a_3^2+1} - Aa_1a_3 - 2Aa_2^3a_3 + 3Aa_2^2a_3^2 - 2Aa_2a_3^3 + Aa_2a_3\sqrt{a_2^2+1}\sqrt{a_3^2+1} - Aa_2a_3 - 2Ba_1^3a_2$$
$$+ 2Ba_1^3a_3 + 3Ba_1^2a_2^2 - 6Ba_1^2a_2a_3 + 3Ba_1^2a_3^2 - 2Ba_1a_2^3 + 6Ba_1a_2^2a_3 - 6Ba_1a_2a_3^2 + Ba_1a_2\sqrt{a_1^2+1}\sqrt{a_2^2+1} - Ba_1a_2 + 2Ba_1a_3^3$$
$$- Ba_1a_3\sqrt{a_1^2+1}\sqrt{a_3^2+1} + Ba_1a_3 - 2Ba_2^3a_3 + 3Ba_2^2a_3^2 - 2Ba_2a_3^3 + Ba_2a_3\sqrt{a_2^2+1}\sqrt{a_3^2+1} - Ba_2a_3 - 2Ca_1^3a_2 - 2Ca_1^3a_3 + 3Ca_1^2a_2^2$$
$$+ 6Ca_1^2a_2a_3 + 3Ca_1^2a_3^2 - 2Ca_1a_2^3 - 6Ca_1a_2^2a_3 - 6Ca_1a_2a_3^2 + Ca_1a_2\sqrt{a_1^2+1}\sqrt{a_2^2+1} - Ca_1a_2 - 2Ca_1a_3^3 + Ca_1a_3\sqrt{a_1^2+1}\sqrt{a_3^2+1}$$
$$\left. - Ca_1a_3 + 2Ca_2^3a_3 + 3Ca_2^2a_3^2 + 2Ca_2a_3^3 - Ca_2a_3\sqrt{a_2^2+1}\sqrt{a_3^2+1} + Ca_2a_3\right)e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}$$

Чтобы решить ДУ:

$$f^{(3)}_{tt} - f^{(3)}_{xxxx} - f^{(3)}_{xx} = -\frac{1}{2}D(f^{(1)} \bullet f^{(2)}),$$

представим $f^{(3)} = De^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}$

In [260]:
```
D = symbols('D')

f3 = D*exp(a1*x-b1*t+delta_1 + a2*x-b2*t+delta_2 + a3*x-b3*t+delta_3).subs([(b1, b1__), (b2, b2__), (b3, b3__)])

diffeq3 = (f3.diff(t,t) - f3.diff(x,x,x,x) - f3.diff(x,x)).simplify().\
          subs([(delta_1-b1__*t+a1*x, theta_1), (delta_2-b2__*t+a2*x, theta_2), (delta_3-b3__*t+a3*x, theta_3)])

Eq(Symbol('f_{tt}^{(3)} - f_{xxxx}^{(3)} - f_{xx}^{(3)}'), diffeq3)
```

Out[260]:
$$f_{tt}^{(3)} - f_{xxxx}^{(3)} - f_{xx}^{(3)} = D\left(-(a_1+a_2+a_3)^4 - (a_1+a_2+a_3)^2 + \left(a_1\sqrt{a_1^2+1} + a_2\sqrt{a_2^2+1} + a_3\sqrt{a_3^2+1}\right)^2\right)e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}$$

In [261]:
```
D = solve(Eq(diffeq3, eq3), D)[0].simplify()
D = collect(D, [Symbol('A'), Symbol('B'), Symbol('C')])
Eq(Symbol('D'), D)
```

Out[261]:
$$D = \frac{\begin{aligned}&A\left(-2a_1^3a_2 + 2a_1^3a_3 - 3a_1^2a_2^2 + 6a_1^2a_2a_3 - 3a_1^2a_3^2 - 2a_1a_2^3 + 6a_1a_2^2a_3 - 6a_1a_2a_3^2 + a_1a_2\sqrt{a_1^2+1}\sqrt{a_2^2+1} - a_1a_2 + 2a_1a_3^3\right.\\&\left.- a_1a_3\sqrt{a_1^2+1}\sqrt{a_3^2+1} + a_1a_3 + 2a_2^3a_3 - 3a_2^2a_3^2 + 2a_2a_3^3 - a_2a_3\sqrt{a_2^2+1}\sqrt{a_3^2+1} + a_2a_3\right)\\&+ B\left(2a_1^3a_2 - 2a_1^3a_3 - 3a_1^2a_2^2 + 6a_1^2a_2a_3 - 3a_1^2a_3^2 + 2a_1a_2^3 - 6a_1a_2^2a_3 + 6a_1a_2a_3^2 - a_1a_2\sqrt{a_1^2+1}\sqrt{a_2^2+1} + a_1a_2 - 2a_1a_3^3\right.\\&\left.+ a_1a_3\sqrt{a_1^2+1}\sqrt{a_3^2+1} - a_1a_3 + 2a_2^3a_3 - 3a_2^2a_3^2 + 2a_2a_3^3 - a_2a_3\sqrt{a_2^2+1}\sqrt{a_3^2+1} + a_2a_3\right)\\&+ C\left(2a_1^3a_2 + 2a_1^3a_3 - 3a_1^2a_2^2 - 6a_1^2a_2a_3 - 3a_1^2a_3^2 + 2a_1a_2^3 + 6a_1a_2^2a_3 + 6a_1a_2a_3^2 - a_1a_2\sqrt{a_1^2+1}\sqrt{a_2^2+1} + a_1a_2 + 2a_1a_3^3\right.\\&\left.- a_1a_3\sqrt{a_1^2+1}\sqrt{a_3^2+1} + a_1a_3 - 2a_2^3a_3 - 3a_2^2a_3^2 - 2a_2a_3^3 + a_2a_3\sqrt{a_2^2+1}\sqrt{a_3^2+1} - a_2a_3\right)\end{aligned}}{(a_1+a_2+a_3)^4 + (a_1+a_2+a_3)^2 - \left(a_1\sqrt{a_1^2+1} + a_2\sqrt{a_2^2+1} + a_3\sqrt{a_3^2+1}\right)^2}$$

In [153]:
```
f3 = f3.subs([(D, Symbol('D')), (b1__, b1), (b2__, b2), (b3__, b3)])
Eq(Symbol('f^{(3)}'), f3)
```

Out[153]:
$$f^{(3)} = De^{\delta_1+\delta_2+\delta_3+a_1x+a_2x+a_3x-b_1t-b_2t-b_3t}$$

In [162]:
```
f = 1 + eps*f1 + eps**2*f2 + eps**3*f3
Eq(Symbol('f'), f)
```

Out[162]:
$$f = D\varepsilon^3e^{\delta_1+\delta_2+\delta_3+a_1x+a_2x+a_3x-b_1t-b_2t-b_3t} + \varepsilon^2\left(Ae^{\delta_1+\delta_2+a_1x+a_2x-b_1t-b_2t} + Be^{\delta_1+\delta_3+a_1x+a_3x-b_1t-b_3t} + Ce^{\delta_2+\delta_3+a_2x+a_3x-b_2t-b_3t}\right) + \varepsilon\left(e^{\delta_1+a_1x-b_1t} + e^{\delta_2+a_2x-b_2t} + e^{\delta_3+a_3x-b_3t}\right) + 1$$

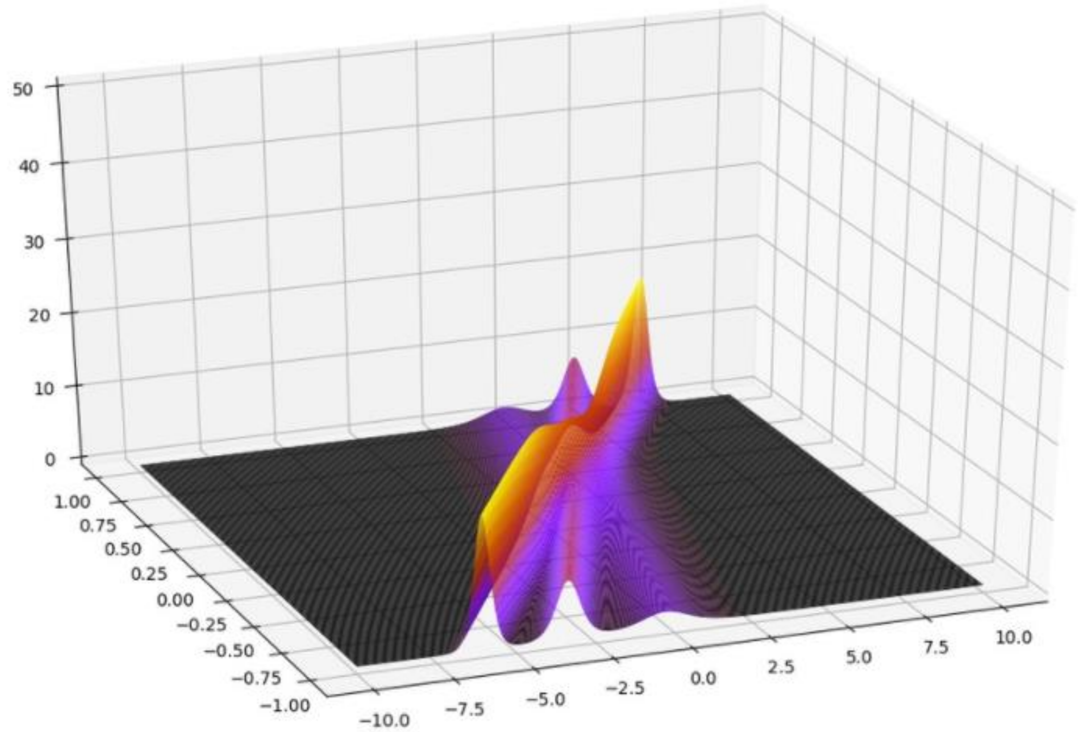
In [285]:
```
q1 = delta_1
q2 = delta_2
q3 = delta_3
q123, q12, q13, q23 = symbols('\delta_{123} \delta_{12} \delta_{13} \delta_{23}')

f = e(q1+q2+q3+a1*x+a2*x+a3*x-b1*t-b2*t-b3*t+q123) + e(q1+q2+a1*x+a2*x-b1*t-b2*t+q12) + e(q1+q3+a1*x+a3*x-b1*t-b3*t+q13)\
    + e(q2+q3+a2*x+a3*x-b2*t-b3*t+q23) + e(q1+a1*x-b1*t) + e(q2+a2*x-b2*t) + e(q3+a3*x-b3*t) + 1
f
```

Out[285]:
$$e^{\delta_1+a_1x-b_1t} + e^{\delta_2+a_2x-b_2t} + e^{\delta_3+a_3x-b_3t} + e^{\delta_1+\delta_2+\delta_{12}+a_1x+a_2x-b_1t-b_2t} + e^{\delta_1+\delta_3+\delta_{13}+a_1x+a_3x-b_1t-b_3t} + e^{\delta_2+\delta_3+\delta_{23}+a_2x+a_3x-b_2t-b_3t} + e^{\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_{123}+a_1x+a_2x+a_3x-b_1t-b_2t-b_3t} + 1$$

In [286]:
```
u = 2*(ln(f)).diff(x,x).subs([(a1*x-b1*t+q1, theta_1), (a2*x-b2*t+q2, theta_2), (a3*x-b3*t+q3, theta_3)])
u = u.simplify()
Eq(Symbol('u'), u)
```

Out[286]:
$$u = \frac{\begin{aligned}&2\left(-\left(a_1e^{\theta_1} + a_2e^{\theta_2} + a_3e^{\theta_3} + (a_1+a_2)e^{\delta_{12}+\theta_1+\theta_2} + (a_1+a_3)e^{\delta_{13}+\theta_1+\theta_3} + (a_2+a_3)e^{\delta_{23}+\theta_2+\theta_3} + (a_1+a_2+a_3)e^{\delta_{123}+\theta_1+\theta_2+\theta_3}\right)^2\right.\\&+\left(a_1^2e^{\theta_1} + a_2^2e^{\theta_2} + a_3^2e^{\theta_3} + (a_1+a_2)^2e^{\delta_{12}+\theta_1+\theta_2} + (a_1+a_3)^2e^{\delta_{13}+\theta_1+\theta_3} + (a_2+a_3)^2e^{\delta_{23}+\theta_2+\theta_3} + (a_1+a_2+a_3)^2e^{\delta_{123}+\theta_1+\theta_2+\theta_3}\right)\left(e^{\theta_1} + e^{\theta_2}\right.\\&\left.\left.+ e^{\theta_3} + e^{\delta_{12}+\theta_1+\theta_2} + e^{\delta_{13}+\theta_1+\theta_3} + e^{\delta_{23}+\theta_2+\theta_3} + e^{\delta_{123}+\theta_1+\theta_2+\theta_3} + 1\right)\right)\end{aligned}}{\left(e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + e^{\delta_{12}+\theta_1+\theta_2} + e^{\delta_{13}+\theta_1+\theta_3} + e^{\delta_{23}+\theta_2+\theta_3} + e^{\delta_{123}+\theta_1+\theta_2+\theta_3} + 1\right)^2}$$



50
40
30
20
10
0
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−10.0
−7.5
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0