

**SOLUSI ANALITIK DAN NUMERIK  
DARI MODEL SATURASI DIFUSI TEKANAN RENDAH**

**UNSUR INTERSTISI TERHADAP TITANIUM**

**SKRIPSI**

Oleh:

**Mochammad Machfudh**

**165090300111009**



**JURUSAN FISIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS BRAWIJAYA**

**2019**



**SOLUSI ANALITIK DAN NUMERIK  
DARI MODEL SATURASI DIFUSI TEKANAN RENDAH  
UNSUR INTERSTISI TERHADAP TITANIUM**

**SKRIPSI**

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh  
gelar Sarjana Sains dalam Bidang Fisika

Oleh:

**Mochammad Machfudh**  
**165090300111009**



**JURUSAN FISIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS BRAWIJAYA**

**MALANG**

**2019**





LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

SOLUSI ANALITIK DAN NUMERIK  
DARI MODEL SATURASI DIFUSI TEKANAN RENDAH  
UNSUR INTERSTISI TERHADAP TITANIUM

Oleh :

Mochammad Machfudh

165090300111009

Setelah dipertahankan di depan Majelis Pengaji  
Pada tanggal 30 DECEMBER 2019  
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam Bidang Fisika

Pembimbing I

Dr.rer.nat. Abdurrouf, S.Si., M.Si  
NIP. 197209031994121001

Pembimbing II

Ir. D.J.D.H. Santjojo, M.Phil., Ph.D  
NIP. 196601311990021001



Prof. Dr.rer.nat. Muhammad Nurhuda  
NIP. 196409101990021001



## LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

**Nama : Mochammad Machfudh**

**NIM : 165090300111009**

**Jurusan : Fisika**

**Penulis Skripsi Berjudul :**

**SOLUSI ANALITIK DAN NUMERIK DARI MODEL SATURASI DIFUSI TEKANAN RENDAH UNSUR INTERSTISI TERHADAP TITANIUM**

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. Isi dari Skripsi saya yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya akan bersedia menanggung segala risiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 14 November 2019

Yang Menyatakan,

(Mochammad Machfudh)  
NIM. 165090300111009



# SOLUSI ANALITIK DAN NUMERIK DARI MODEL SATURASI DIFUSI TEKANAN RENDAH UNSUR INTERSTISI TERHADAP TITANIUM

## ABSTRAK

Penguatan kekerasan pada permukaan titanium perlu dilakukan untuk merekayasa bahan agar lebih keras dengan cara dilapisi. Pelapisan ini dilakukan dengan proses nitriding pada suhu yang sangat tinggi. Namun proses nitriding pada suhu tinggi menyebabkan titanium bersifat *fatigue*. Untuk mengatasi hal tersebut telah dilakukan penelitian terkait nitriding menggunakan *hollow cathode* pada suhu yang rendah. *Hollow cathode* berfungsi untuk memadatkan intensitas ion nitrogen sebelum ditumbukan kedalam titanium. Dari penelitian tersebut dihasilkan penguatan pada titanium. Namun terjadi keanehan dengan munculnya fase  $\omega - Ti$  pada titanium. Seharusnya fase tersebut muncul ketika proses pendinginan dari  $\beta - Ti$  menuju  $\alpha - Ti$  dari suhu yang sangat tinggi menuju suhu rendah. Permasalahan munculnya fase  $\omega - Ti$  pada nitriding suhu rendah terlalu kompleks dan belum ditemukan suatu model yang menjelaskan mengenai permasalahan tersebut. Sehingga untuk menemukan solusinya perlu dipelajari model difusi unsur interstisi pada titanium pada beberapa jurnal terkait. Model difusi reaktif menjelaskan bahwa terjadinya reaksi kimia pada permukaan titanium terjadi setelah difusi ke titanium mencapai kondisi saturasi. Solusi analitik dari model ini perlu dilakukan kembali untuk mencari parameter suhu, waktu, dan laju unsur interstisi yang optimum. Solusi seperti analitik tidak mudah untuk dilakukan sehingga dibutuhkan solusi numerik untuk mempermudah mencari solusi dari model tersebut. Metode yang digunakan dalam solusi secara analitik adalah menggunakan persamaan diferensial orde 1, persamaan diferensial orde 2 serta transformasi *Laplace*. Solusi numerik untuk persamaan diferensial menggunakan beberapa metode, yaitu: metode Euler beda maju, metode Heun, Runge-Kutta orde 2, Runge-Kutta orde 3, Runge-Kutta orde 4. Solusi numerik untuk persamaan non linear berubah



terhadap waktu dan terhadap domain ruang diselesaikan dengan metode FTCS (*Forward Time Central Space*) dan BTCS (*Backward Time Central Space*).

**Kata Kunci:** Titanium, Nitriding, Persamaan Difusi, Persamaan diferensial parsial, syarat batas, FTCS, BTCS





**repository.ub.ac.id**

# ANALYTICAL AND NUMERICAL SOLUTIONS OF THE DIFFUSION SATURATION MODEL LOW PRESSURE OF INTERSTITIAL ELEMENTS TOWARD TITANIUM

## ABSTRACT

Reinforcement of the material on the surface of titanium must be enhanced to strengthen the material by coating. This coating is carried out by nitriding the process at very high temperatures. However, nitriding at high temperatures leads to fatigue of titanium. To overcome this, studies on nitriding using a hollow cathode were conducted at low temperatures. The hole cathode serves to condense the intensity of nitrogen ions before they are piled up to titanium. From these investigations, a reinforcement was found on titanium. But something strange happens with the appearance of the  $\omega$ -Ti phase on Titanium. This phase should occur from very high to low temperatures when cooling  $\beta$ -Ti to  $\alpha$ -Ti. The problem with the occurrence of  $\omega$ -Ti in low-temperature nitriding is too complex, and no model has yet been found to explain this problem. To find a solution, the diffusion model of the interstitial elements in titanium needs to be studied in several related journals. Reactive diffusion models explain that chemical reactions occur on the surface of titanium after diffusion to titanium has reached saturation conditions. The analytical solution of this model must be repeated to determine the optimal temperature, time and velocity of the interstitial elements. Solutions like analytics are not easy, so numerical solutions are needed to simplify the search for solutions from the model. The method used in analytical solutions is to use a first order differential equation, a second order differential equation, and a Laplace transform. Numerical solutions to differential equations use several methods, namely forward Euler method, Heun method, Runge-Kutta order 2, Runge-Kutta order 3, Runge-Kutta order 4. The numerical solution for non-linear equations changes with respect to the time and the space resolved with the methods FTCS and BTCS.

**Keywords:** Titanium, Nitriding, Diffusion equation, Different partial equation, Boundary conditions, FTCS, BTCS





# KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Segala puji bagi Allah SWT yang telah memberikan kemudahan sehingga terselesaikan nya skripsi yang berjudul "**SOLUSI ANALITIK DAN NUMERIK DARI MODEL SATURASI DIFUSI TEKANAN RENDAH UNSUR INTERSTISI TERHADAP TITANIUM**" dengan tepat waktu. Tanpa pertolongan-Nya tentunya tidak akan sanggup untuk menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Shalawat serta salam semoga terlimpah curahkan kepada baginda tercinta kita yaitu Nabi Muhammad SAW yang kita nantikan syafa'atnya di akhirat nanti.

Penulis menyadari bahwa terselesaikan nya skripsi yang telah penulis laksanakan bukanlah keberhasilan individu maupun kelompok. Ada beberapa pihak yang telah memberikan masukan dan dorongan kepada penulis sehingga skripsi ini terselesaikan dengan baik. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Orang tua penulis, Bapak A. Qodir Arifin dan Ibu Umi Kulsum beserta seluruh keluarga penulis yang selalu memberikan doa, dukungan, semangat sehingga dapat terlaksana dengan baik sampai akhir.
2. Dr. rer. nat. Abdurrouf, S.Si, M.Si sebagai dosen pembimbing I dan Ir. D.J.D.H. Santjojo, M.Phil.,Ph.D sebagai dosen pembimbing II yang telah memberikan pengarahan dan masukan kepada penulis selama penyusunan skripsi.
3. Prof. Dr. rer. nat. Muhammad Nurhuda selaku ketua jurusan Fisika Universitas Brawijaya dan dosen penasehat akademik yang memberikan bimbingan dan saran mulai dari awal semester hingga akhir semester selama menempuh pendidikan S1 Fisika.
4. Bapak dan Ibu dosen, laboran, serta karyawan jurusan Fisika atas didikan dan bantuan selama proses perkuliahan.



5. Ibu Joseph yang selalu membantu dan meluangkan waktu dan memberikan pelajaran yang menjadi pengalaman berharga bagi penulis.
6. Sahabat-sahabat tercinta saya Isbel, Renaldy, Mas Febrian, Mudo, Iqbal, Rio, Mbak Arin yang selalu meluangkan waktu, tenaga untuk selalu membantu serta selalu ada ketika dibutuhkan.
7. Teman seperjuangan lulus semester ganjil Mas Bagas yang selalu menemaninya dalam mengurus administrasi keperluan skripsi.
8. Seluruh angkatan Fisika 2016 atas kebersamaan dan keluargaan yang menjadi pengalaman berharga.
9. Seluruh pihak yang tidak mampu penulis sebutkan satu persatu, yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini dengan baik.

Penulis tentu menyadari bahwa tugas ini masih jauh dari kata sempurna dan masih banyak terdapat kesalahan serta kekurangan di dalamnya. Diharapkan isi dari skripsi ini dapat bermanfaat bagi perkembangan ilmu pengetahuan. Demikian, dan apabila terdapat banyak kesalahan pada skripsi ini penulis mohon maaf.

Malang, 14 November 2019

Penulis



## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL.....</b>	<b>i</b>
<b>LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI.....</b>	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
<b>LEMBAR PERNYATAAN .....</b>	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
<b>KATA PENGANTAR .....</b>	<b>xiii</b>
<b>DAFTAR ISI.....</b>	<b>xvii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR .....</b>	<b>xxi</b>
<b>DAFTAR LAMPIRAN .....</b>	<b>xxiii</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN .....</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	4
1.3 Batasan Masalah .....	4
1.4 Tujuan Penelitian .....	4
1.5 Manfaat Penelitian .....	4
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA .....</b>	<b>5</b>
2.1 Titanium .....	5
2.2 Plasma Nitriding .....	7
2.3 Difusi Unsur Interstisi .....	7
2.4 Metode Analitik .....	9
2.5 Metode Numerik .....	11
2.6 Python .....	17
<b>BAB III METODE PENELITIAN .....</b>	<b>19</b>
3.1 Lokasi dan Waktu .....	19
3.2 Alat dan Bahan .....	19
3.3 Tahapan Penelitian .....	19



<b>BAB IV SOLUSI ANALITIK .....</b>	<b>31</b>
4.1 Gambaran Fisis Difusi Saturasi Nitrogen pada Titanium .....	31
4.2 Perhitungan Konsentrasi Nitrogen Pada Permukaan Titanium	
Kondisi Saturasi Difusi .....	34
4.3 Difusi Nitrogen pada Titanium .....	36
<b>BAB V SOLUSI NUMERIK .....</b>	<b>45</b>
5.1 Perhitungan Konsentrasi Nitrogen Pada Permukaan Titanium	
Kondisi Saturasi Difusi .....	45
5.2 Difusi Nitrogen Pada Titanium .....	49
5.3 Perbandingan Solusi Numerik dan Analitik .....	55
<b>BAB VI PENUTUP .....</b>	<b>59</b>
6.1 Kesimpulan.....	59
6.2 Saran.....	59
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>61</b>



## **DAFTAR GAMBAR**

Gambar 2. 1. Struktur layer close-packed.....	5
Gambar 2. 2. Struktur Hexagonal close-packed.....	6
Gambar 2. 3 Struktur body-centered cubic.....	6
Gambar 2. 4 Skema Difusi reaktif.....	8
Gambar 3. 1 Flow Chart Metode Euler beda maju.....	21
Gambar 3. 2 Flow Chart Metode Heun .....	22
Gambar 3. 3 Flow Chart Metode Runge-Kutta orde 2.....	23
Gambar 3. 4 Skema Metode FTCS .....	26
Gambar 3. 5 Skema Metode BTCS .....	27
Gambar 4. 1 Solusi analitik konsentrasi nitrogen pada permukaan titanium kondisi difusi mencapai saturasi .....	35
Gambar 4. 2 Difusi nitrogen pada titanium dengan variasi laju perpindahan massa (h) .....	43
Gambar 4. 3 Difusi nitrogen pada titanium dengan variasi suhu yang mempengaruhi nilai koefisien difusi (D) .....	44
Gambar 4. 4 Difusi nitrogen pada titanium dengan variasi waktu ...	44



<b>DAFTAR LAMPIRAN</b>	
Lampiran 1. 1 Source Code perhitungan analitik konsentrasi dinamis pada permukaan .....	63
Lampiran 1. 2 Source Code Metode numerik Euler beda maju .....	64
Lampiran 1. 3 Source Code Metode numerik heun.....	65
Lampiran 1. 4 Source Code Metode Runge-Kutta orde 2 .....	66
Lampiran 1. 5 Source Code Metode Runge-Kutta orde 3 .....	67
Lampiran 1. 6 Source Code Metode Runge-Kutta orde 4 .....	68
Lampiran 1. 7 Source Code perhitungan konsentrasi dinamis dan total.....	69
Lampiran 1. 8 Source Code perhitungan Analitik difusi pada titanium .....	71
Lampiran 1. 9 Metode FTCS.....	75
Lampiran 1. 10 Source Code Metode BTCS.....	77



## 1.1 Latar Belakang

Permukaan titanium perlu dikeraskan dengan dilapisi oleh lapisan tipis. Saat ini, titanium tersedia sebagai logam rekayasa yang bersaing dengan baja tahan karat, tembaga campuran, dan komposit. Namun, titanium memiliki tingkat ketahanan keausan yang rendah (Zhecheva et al., 2005). Titanium merupakan logam yang memiliki sifat ketahanan korosi yang rendah, kekuatan yang tinggi, kerapatan yang rendah, ringan, bio-kompatibel, serta kemampuan dalam mempertahankan struktur pada suhu yang tinggi. Dengan keunggulan dari sifat titanium ini, titanium banyak digunakan dalam berbagai bidang seperti penerbangan, otomotif, industri, kimia, dan aplikasi bio-medis (Zhecheva et al., 2005; Inagaki, 2014).

Solusi atas tingkat ketahanan keausan yang rendah dapat diselesaikan dengan meningkatkan kekerasan permukaan titanium. Metode yang efektif dalam penguatan kekerasan pada permukaan bahan adalah nitriding. Nitriding adalah perlakuan panas yang melibatkan difusi, dimana nitrogen dimasukkan ke area substrat padat. Selain untuk meningkatkan kekerasan pada permukaan bahan, nitriding juga dapat digunakan untuk meningkatkan ketahanan aus dan ketahanan korosi. Secara umum nitriding dapat digunakan pada berbagai macam bahan seperti besi cor, baja tahan karat, dan baja karbon. Dalam beberapa tahun terakhir, nitriding digunakan pada material seperti aluminium dan titanium. Oleh sebab itu, titanium adalah bahan yang cocok untuk nitridasi (Yoshida et al., 2013).

Menurut Windajanti *et al* (2017) proses nitriding titanium menggunakan suhu yang sangat tinggi yaitu 700°C - 1000°C. Proses nitriding dengan suhu tinggi ini dapat memperkuat titanium sampai 1300 HV. Namun penggunaan suhu tinggi menyebabkan bahan menjadi *fatigue* dan mengalami perubahan mikro struktur yang dapat merugikan bahan. Maka dari itu, proses nitriding perlu dilakukan pada suhu rendah untuk menghindari sifat *fatigue* pada bahan Titanium.

## BAB I PENDAHULUAN



Jurnal yang berjudul *Low Temperature Nitriding Of Pure Titanium By Using Hollow Cathode RF-DC Plasma* yang ditulis oleh Windajanti *et al* (2017) melakukan penelitian mengenai proses nitriding pada suhu rendah yaitu 450° C dengan menggunakan *Hollow Cathode*. Fungsi *Hollow Cathode* sendiri adalah dapat meningkatkan intensitas ion nitrogen dan membantu menurunkan suhu selama proses nitriding. Proses yang dilakukan dalam memperkeras permukaan titanium adalah variasi waktu dan tekanan. Hasil optimum yang berhasil didapatkan dari penelitian tersebut adalah pada saat variasi waktu 4 jam dengan tekanan 30 Pa sebesar 629,9 HV dan pada waktu 8 jam sebesar 792,2 HV. Namun setelah proses nitriding dilakukan pada suhu rendah terdapat keanehan dengan munculnya  $\omega$ -Ti pada permukaan Titanium. Fase  $\omega$ -Ti adalah fase yang bersifat metastabil. Seharusnya fase ini muncul pada posisi antara saat proses pendinginan dari suhu tinggi yang memiliki struktur  $\beta$ -Ti menuju suhu rendah dengan struktur  $\alpha$ -Ti. Namun pada eksperimen yang dilakukan pada suhu rendah keadaan struktur dari Titanium masih  $\alpha$ -Ti. Hal tersebut membuat suatu pertanyaan. Apakah difusi dapat mempengaruhi perubahan fase pada titanium?

Penelitian yang dilakukan oleh Windajanti *et al* (2017) memunculkan permasalahan mengenai  $\omega$ -Ti yang kompleks. Di sisi lain belum adanya model yang menjelaskan mengenai hal tersebut menjadi permasalahan yang harus diselesaikan. Maka dari itu, dibutuhkan suatu model yang dapat menjelaskan mengenai permasalahan difusi unsur interstisi pada titanium. Sehingga untuk menemukan solusi dari permasalahan tersebut perlu dipelajari model difusi unsur interstisi pada titanium yang mengacu pada jurnal Matychak *et al* (2017) dengan judul *Modeling of Diffusion Saturation of Titanium by Interstitial Element Under Rarefied Atmospheres*.

Berdasarkan jurnal yang ditulis Matychak *et al* (2007) dijelaskan bahwa model saturasi difusi tekanan rendah dari unsur interstisi terhadap titanium. Saturasi difusi merupakan metode penguatan permukaan bahan dengan menggunakan unsur interstisi seperti boron, carbon, nitrogen dan oksigen. Metode ini dilakukan

pada tekanan rendah dengan suhu yang sangat tinggi. Pada proses yang terjadi tidak hanya difusi saja namun, terjadi juga interaksi kimia. Kompleksitas difusi dan korelasi dengan interaksi kimia terkendala pada kurangnya sebuah teori untuk menggambarkan proses difusi reaktif pada tahap yang berbeda. Dalam menggambarkan proses difusi dan interaksi kimia terdapat dua pendekatan. Berdasarkan pendekatan dengan model difusi awal dan teori akibat reaksi bahwa fase mulai terbentuk ketika batas saturasi difusi tercapai. Setelah difusi mencapai titik jenuh atau saturasi, interaksi kimia terjadi pada permukaan titanium. Pada proses interaksi kimia tersebut fase baru akan terbentuk. Pada pendekatan lain yang didasarkan pada model awal reaksi kimia, diawali dengan interaksi kimia yang dilanjutkan proses difusi. Pada pendekatan tersebut fase baru akan terbentuk segera melalui reaksi kimia pada permukaan logam.

Model yang digunakan berdasarkan pendekatan dengan model difusi awal dan teori akibat reaksi bahwa fase mulai terbentuk ketika batas saturasi difusi tercapai. Solusi analitik dari model ini dilakukan untuk mencari parameter suhu, waktu, dan laju unsur interstisi yang optimum. Namun karena solusi secara analitik susah dilakukan maka dibutuhkan solusi secara numerik untuk mempermudah dalam mencari solusi dalam model tersebut. Seluruh penelitian yang ditulis dalam skripsi ini didasarkan pada jurnal *Modeling of Diffusion Saturation of Titanium by Interstitial Element Under Rarefied Atmospheres* yang ditulis oleh Matychak, et al (2017).

Kemajuan *computational science* diharapkan dapat memvariasikan berbagai variabel dalam model tersebut secara akurat. Selain itu dari penelitian ini juga diharapkan menjadi salah satu acuan untuk menyelesaikan permasalahan  $\omega$ -Ti sebelum dilakukan eksperimen secara eksak. Selain itu dua pendekatan yaitu analitik dan numerik dapat menjadi parameter keberhasilan model tersebut untuk mengukur dan menganalisa fenomena saturasi difusi nitrogen pada titanium.

## 1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang tersebut, maka diperoleh beberapa rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimanakah solusi analitik dari model fenomena saturasi difusi tekanan rendah dari unsur interstisi terhadap titanium?
2. Bagaimanakah solusi numerik dari model fenomena saturasi difusi tekanan rendah dari unsur interstisi terhadap titanium?
3. Bagaimana perbandingan antara solusi analitik dan numerik?

## 1.3 Batasan Masalah

Ruang lingkup permasalahan pada penelitian ini dibatasi oleh model fenomena saturasi difusi tekanan rendah yang diselesaikan melalui analitik dan numerik mengacu pada jurnal Matychak *et al* (2017).

## 1.4 Tujuan Penelitian

Dari latarbelakang dan rumusan masalah, maka tujuan dari penelitian ini yaitu:

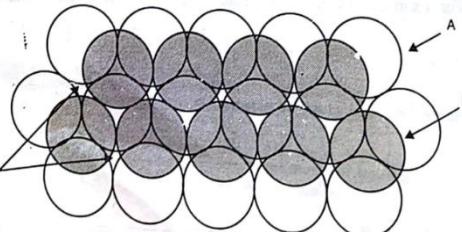
1. Mendapatkan solusi analitik dari model fenomena saturasi difusi tekanan rendah dari unsur interstisi terhadap titanium.
2. Mendapatkan solusi numerik dari model fenomena saturasi difusi tekanan rendah dari unsur interstisi terhadap titanium.
3. Mendapatkan perbandingan dari solusi analitik dan numerik.

## 1.5 Manfaat Penelitian

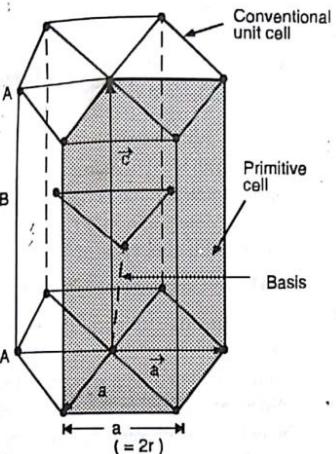
Dengan terwujudnya solusi model saturasi difusi interstisi diharapkan dapat terbentuk pemahaman tentang proses fisika pada fenomena saturasi difusi tekanan rendah dari unsur interstisi terhadap titanium. Harapannya melalui model ini dapat diprediksi perilaku saturasi difusi pada titanium ketika terjadi suatu perubahan terhadap variabel proses difusi.

## 2.1 Titanium

Titanium merupakan salah satu unsur yang memiliki struktur *close-packed*. Struktur *Close-packed* banyak ditemukan pada kristal mono atomik dengan jumlah koordinat untuk setiap atom adalah 12 dan setiap atom dikelilingi oleh 12 atom tetangga. Struktur dari *closed-packed* ditampilkan pada Gambar 2.1. Salah satu tipe struktur *close-packed* adalah *hexagonal close-packed* (HCP) atau dapat disebut dengan  $\alpha$ -*Ti*. Pada suhu normal, titanium memiliki struktur  $\alpha$ -*Ti* dengan ratio  $c/a$  1,587. Struktur  $\alpha$ -*Ti* ditampilkan seperti pada Gambar 2.2. Dapat dilihat pada gambar untuk setiap atom pada layer dikelilingi oleh 6 atom dalam satu bidang. Pada setiap layer terdiri dari 3 bagian yaitu pada bidang alas adalah bagian A berbentuk segi enam, bidang tengah adalah bagian B berbentuk segitiga, dan bidang atas adalah bagian A lagi yang memiliki bentuk sama dengan alas sehingga dapat saling tumpuk dengan layer berikutnya. Layer satu dengan layer lain dapat saling menumpuk terus di atasnya sehingga membentuk susunan layer ...ABABABA... . Jarak antara atom pada bidang bagian A dapat disimbolkan dengan  $a$ . Jarak antara bagian A dengan bagian B yang berbentuk segitiga adalah  $c/2$ . Dan  $C$  adalah tinggi dari satu unit sel. Untuk struktur  $\alpha$ -*Ti* memiliki nilai ideal  $c=1,633a$  (Puri and Babbar, 2000).



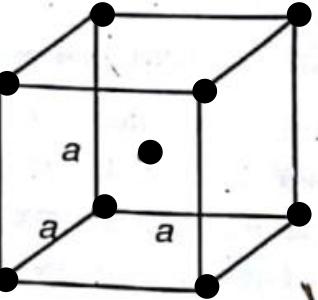
Gambar 2.1. Struktur layer *close-packed*



Gambar 2. 2. Struktur Hexagonal close-packed

Titanium dapat mengalami perubahan struktur pada suhu  $883^{\circ}\text{C}$  berubah menjadi struktur *body-centered cubic* (BCC) atau dapat disebut dengan  $\beta\text{-Ti}$ . Struktur *body-centered cubic* berbentuk kubus dengan delapan atom pada setiap ujung dan satu atom terletak di tengah kubus. Struktur  $\beta$  ditampilkan seperti pada Gambar 2.3.

Sifat titanium bergantung pada kondisi fasenya. Pada fase HCP titanium bersifat kurang keras, kuat, dan elastis. Sedangkan pada fase BCC titanium bersifat lebih keras, kuat, dan kurang elastis.



Gambar 2. 3 Struktur body-centered cubic

Dalam beberapa tahun terakhir titanium banyak digunakan dalam bidang penerbangan. Selain dalam bidang penerbangan titanium juga digunakan di berbagai bidang seperti otomotif, industri, kimia, bio-medis. Titanium merupakan logam yang memiliki sifat ketahanan korosi yang tinggi, kekuatan yang tinggi, kerapatan yang rendah, ringan, bio-kompatibel, dan memiliki kemampuan mempertahankan struktur pada suhu yang tinggi (Inagaki, 2014; Prytula et al., 2005).

## 2.2 Plasma Nitriding

Konsep plasma muncul pertama kali pada tahun 1928 dikemukakan oleh Irving Langmuir (1881-1957). Plasma didefinisikan sebagai gas yang mengalami ionisasi penuh atau sebagian yang terdiri dari elektron dan ion. Pencampuran antara ion-ion positif dengan elektron memiliki sifat yang berbeda dengan gas pada umumnya, pada fase ini disebut dengan plasma. Plasma dikenal sebagai fase zat ke empat setelah fase padatan, cair, dan gas (Piel, 2017).

Plasma banyak digunakan untuk perlakuan penyemprotan, deposisi uap, nitriding dan sebagainya. Pada plasma nitriding, unsur yang digunakan adalah nitrogen. Nitrogen dimasukkan ke dalam permukaan suatu bahan dan selanjutnya unsur berdifusi ke dalam bahan. Dengan adanya bias DC tegangan tinggi pada plasma, ion nitrogen dapat bergerak cepat menimpa permukaan dari suatu bahan. Ion yang menimpa permukaan dari suatu bahan dapat membersihkan permukaan, memanaskan benda dan membuat nitrogen aktif bereaksi dengan atom atau molekul pada permukaan (Aghajani and Behrangi, 2016).

## 2.3 Difusi Unsur Interstisi

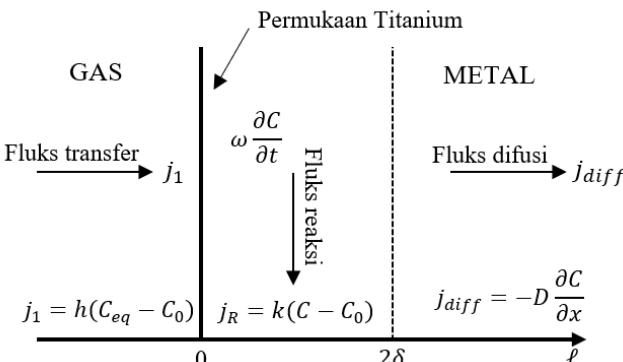
Unsur interstisi adalah unsur yang disisipkan pada suatu bahan. Contoh unsur interstisi adalah boron, carbon, nitrogen, dan oksigen. Unsur interstisi ini di ionisasikan terlebih dahulu, kemudian ion-ionnya difusikan ke dalam suatu bahan.

Difusi yang berlangsung saat nitriding sangatlah kompleks.

Kompleksitas difusi ini berkorelasi dengan reaksi kimia namun secara teori masih belum ada yang menjelaskan secara lengkap mengenai hal ini. Sehingga dibutuhkan suatu model yang dapat menggambarkan proses difusi reaktif yang terjadi. Dalam menggambarkan proses difusi reaktif ini terdapat dua pendekatan yang berbeda. Pendekatan yang pertama adalah pendekatan yang menggambarkan bahwa proses yang berlangsung diawali dengan difusi terlebih dahulu, kemudian dilanjutkan dengan terjadinya reaksi kimia. Pada pendekatan pertama ini fase baru dari bahan terbentuk ketika difusi mencapai titik jenuh atau disebut dengan saturasi. Berbeda dengan pendekatan kedua, pendekatan kedua ini menggambarkan bahwa proses yang terjadi adalah interaksi kimia terlebih dahulu, kemudian dilanjutkan dengan difusi dan fase baru terbentuk segera karena reaksi kimia pada permukaan logam (Matychak et al., 2007).

Dalam menggambarkan atau memodelkan difusi unsur interstisi pada titanium, digunakan pendekatan yang pertama yaitu proses awal yang terjadi difusi dilanjutkan dengan reaksi kimia.

Interaksi antara gas dan logam digambarkan pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4 Skema Difusi reaktif

Proses difusi unsur interstisi ke dalam titanium dapat dilihat pada Gambar 2.4. Selain terjadi difusi, proses lain yang terjadi adalah

reaksi kimia pada permukaan. Reaksi kimia terjadi pada permukaan bahan sampai kedalaman  $2\delta$ . Dari kedalaman  $2\delta$  sampai  $\ell$  hanya terjadi proses difusi. Secara matematis model tersebut dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{\partial C}{\partial t}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad C(x, 0) = C_0, \quad (2.1)$$

$$\omega \cdot \frac{dC}{dt} = h(C_{eq} - C) - k(C - C_0) + D \frac{\partial C}{\partial x}, \quad x = +0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad x = \ell, \quad (2.3)$$

## 2.4 Metode Analitik

Persamaan matematika merupakan salah satu cara untuk menyelesaikan masalah fisis yang sulit diselesaikan secara teori. Beberapa contoh persamaan matematika yang dapat menyelesaikan sebuah permasalahan sampai diketahui solusinya seperti persamaan diferensial orde 1 dan persamaan diferensial orde 2.

- Persamaan diferensial orde 1

Persamaan diferensial orde 1 merupakan persamaan yang mengandung  $y'$  yang dapat dituliskan

$$y' + P_y = Q,$$

Dimana  $P$  dan  $Q$  adalah fungsi dari  $x$ . Ketika  $Q = 0$  maka persamaannya menjadi

$$y' + P_y = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{dy}{dx} = -P_y,$$

Persamaan tersebut dapat dipisah menjadi

$$\frac{dy}{y} = -P dx,$$

$$\ln y = - \int P dx + C, \\ y = c^{- \int P dx + C} = A c^{- \int P dx},$$

Dimana  $A = c^C$ . Secara lebih sederhana dapat dituliskan

(2.4)

$$I = \int P dx,$$

Sehingga,

$$\frac{dy}{y} = P,$$

Selanjutnya dapat ditulis  $y = Ac^{-l}$  atau  $yc^l = A$

- Persamaan diferensial orde 2

$$a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0,$$

Dimana  $a_2, a_1, a_0$  adalah konstan. Ungkapan jika ditulis  $D$  seperti

$D + 1$  atau  $D^2 + 5D + 4$  atau disebut operator turunan (Boas, 2006).

Persamaannya menjadi

$$D^2 y + 5Dy + 4y = 0 \text{ atau } (D^2 + 5D + 4)y = 0,$$

jika ditulis sederhana menjadi

$$(D + 1)y = 0 \text{ dan } (D + 4)y = 0,$$

Dan dapat dipisahkan dengan solusi

$$y = c_1 e^{-4x}, y = c_2 e^{-x},$$

- Transformasi Laplace

Transformasi Laplace adalah alat matematika yang berguna untuk menyelesaikan berbagai macam masalah fisika matematika. Salah satu penerapan transformasi Laplace pada persamaan difusi adalah menghilangkan variabel waktu. Menyisakan persamaan diferensial yang solusinya ditransformasi ke dalam fungsi ruang yaitu  $x, y, z$ . Hal ini memberikan gambaran konsentrasi dalam  $x, y, z$  dan waktu yang memenuhi kondisi awal dan batas. Misalkan  $f(t)$  diketahui sebagai fungsi dari  $t$  positif (Crank, 1975). Kemudian transformasi laplace  $\tilde{f}(p)$  dari  $f(t)$  didefinisikan sebagai,

(2.5)

$$\tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

## 2.5 Metode Numerik

Komputer adalah alat yang penggunaanya banyak dilakukan hampir di segala bidang. Pemakaian komputer dalam bidang fisika adalah untuk membantu memecahkan masalah matematis, statistik, dan pemodelan. Dalam penggunaan komputer dibutuhkan perangkat lunak untuk menjalankan perintah-perintah dalam memecahkan masalah. Perangkat lunak yang digunakan ini disebut dengan bahasa pemrograman. Pada umumnya, bahasa pemrograman yang dipakai untuk memecahkan model matematis adalah bahasa tingkat tinggi. Beberapa bahasa tingkat tinggi adalah: fortran, pascal, c, c++, visual basic, dan lain-lain. Selain itu logika yang digunakan dalam pembuatan program juga harus di dasarkan pada beberapa metode ilmiah sebagai bentuk model yang digunakan. Beberapa metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde 1 seperti Euler beda maju, metode Heun, Runge-Kuta orde 2, Runge-Kutta orde 3, Runge-kutta orde 4.

- Euler Beda Maju

Persamaan diferensial  $\frac{dy}{dt}$  dapat ditulis fungsi  $f(t, y)$ , dengan  $y(t)$  merupakan persamaan yang berasal

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad a \leq t \leq b \quad y(a) = a,$$

Nilai  $t$  dibatasi  $a$  sampai  $b$  dengan syarat bahwa saat  $t = a$  maka  $y$  memiliki nilai  $a$ . Solusi pada pendekatan tersebut digunakan untuk menentukan titik dalam interval  $[a, b]$ .

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x),$$

Bentuk umumnya:

Nilai baru = nilai lama + step x slop

$$f(x+h) = y_{i+1}, \quad f(x) = y_i, \quad f'(x) = y'_i,$$

Sehingga,

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i,$$

(2.7)

- Metode Heun

Penggunaan metode Euler untuk menghitung nilai yang sangat kecil dengan akurasi tinggi saat ini telah dikembangkan lebih lanjut.

Pengembangan tersebut untuk meminimalkan kesalahan dari hasil yang didapatkan. Dengan menggunakan metode Euler:

$$y'_i = f(x_i, y_i),$$

Metode ini digunakan untuk ekstrapolasi secara linear untuk  $y_{i+1}$

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h,$$

Sehingga,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2}h, \quad (2.8)$$

Pendekatan untuk solusi dari integrasi dapat membuat nilai prediksi dapat mendekati nilai sebenarnya secara lebih tepat.

Persamaan diatas muncul dari persamaan kanan (Abdulrahman, 2019).

- Runge-Kuta Orde 2

Metode Runge-Kuta sering kali Runge-Kuta orde 2 menggunakan deret Taylor

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2} [f(x, y) + f(x+h, y + hf(x, y))],$$

dengan

$$y(x + h) = y_{i+1}, \quad y(x) = y_i,$$

$$k_1 = f(x_i, y_i),$$

$$k_2 = f(x_i + h, y_i + hk_1),$$

sehingga,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \quad (2.9)$$

- Runge-Kuta Orde 3

Runge-Kuta orde 3 merupakan salah satu metode dengan menggunakan pengulangan nilai  $k$ .

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3), \quad (2.10)$$

Dimana,

$$k_1 = f(x_i, y_i),$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right),$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i - hk_1 + 2hk_2).$$

- Runge-Kuta Orde 4

Pada metode Runge-Kuta orde 4 merupakan metode yang paling sering digunakan diantara metode yang lain. Metode ini juga lebih baik, kompleks dari metode yang lainnya, dan melibatkan 5 persamaan.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (2.11)$$

Dimana,

$$k_1 = f(x_i, y_i),$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2\right),$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3),$$



Metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan solusi numerik non linear yang berubah terhadap waktu dan ruang dapat menggunakan metode FTCS (*Forward Time Central Space*) dan BTCS (*Backward Time Central Space*).

- **FTCS (*Forward Time Central Space*)**

FTCS merupakan metode eksplisit yang digunakan untuk penyelesaian pada persamaan diferensial non-linear yang mengalami perubahan terhadap waktu dan dimensi ruang. Metode eksplisit pada dasarnya digunakan untuk mencari nilai pada waktu yang akan datang dengan menggunakan nilai saat ini. Pada metode ini perubahan terhadap waktu menggunakan beda maju dan perubahan pada dimensi ruang menggunakan beda tengah.

### *Forward Time*

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{C^{t+1} - C^t}{\Delta t},$$

### *Central Space*

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{C_{x+1} - 2C_x + C_{x-1}}{\Delta x^2},$$

$$\frac{C_x^{t+1} - C_x^t}{\Delta t} = D \frac{C_{x+1}^t - 2C_x^t + C_{x-1}^t}{\Delta x^2},$$

$$\sigma = \frac{2D\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$C_x^{t+1} = C_x^t + \sigma(0.5C_{x+1}^t - C_x^t + 0.5C_{x-1}^t),$$

$$C_x^{t+1} = (1 - \sigma)C_x^t + 0.5\sigma(C_{x+1}^t + C_{x-1}^t), \quad (2.12)$$

Pada saat kondisi stabil koefisien sisi kanan harus positif sehingga  $(1 - \sigma)$  harus lebih besar dari nol atau sama dengan nol. Sehingga,

$$0 < \sigma \leq 1,$$

$$1 \geq \frac{2D\Delta t}{\Delta x^2},$$

Dimana  $0.5(C_{x+1}^t + C_{x-1}^t)$  merupakan rata-rata medan konsentrasi di sekitar  $C_x^t$  dengan kata lain, istilah rata-rata mewakili nilai kesetimbangan  $C_x^t$ . Karena nilai  $C_x^t$  berada diantara  $C_{x+1}^t$  dan  $C_{x-1}^t$ , maka mengikuti bahwa pada keadaan kesetimbangan, nilai  $C_x^t$  harus menjadi rata-rata nilai tetangganya (Mohammad, 2011). Sehingga dapat dituliskan,

$$C_x^{t+1} = (1 - \sigma)C_x^t + \sigma C_x^{eq}, \quad (2.13)$$

- **BTCS (Backward Time Central Space)**

BTCS merupakan metode implisit yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial non-linear yang mengalami perubahan terhadap waktu dan dimensi ruang. Metode implisit ini pada dasarnya mencari nilai pada saat ini dengan menggunakan nilai sebelumnya. Pada metode ini perubahan terhadap waktu menggunakan beda mundur dan perubahan pada dimensi ruang menggunakan beda tengah (Simon & Purnachandra, 2016).

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{C^t - C^{t-1}}{\Delta t}, \\ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} &= \frac{C_{x+1} - 2C_x + C_{x-1}}{\Delta x^2}, \\ \frac{C_x - C_x^{t-1}}{\Delta t} &= D \frac{C_{x+1}^t - 2C_x^t + C_{x-1}^t}{\Delta x^2}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

Syarat batas penting untuk mendefinisikan suatu masalah agar dapat ditentukan kerangka masalah tersebut secara eksplisit. Syarat batas merupakan beban dan ketahanan terhadap deformasi yang disebabkan oleh beban yang mewakili efek lingkungan sekitar pada model. Penerapan metode numerik dan kualitas perhitungan yang dihasilkan dapat secara tepat menghitung dan merepresentasikan model. Saat ini, analisis komputasi dengan memanfaatkan kondisi batas jauh berkembang pesat dan menjadi sangat kompleks. Beberapa

jenis kondisi batas seperti Syarat batas Dirichlet, Syarat batas Neuman dan syarat batas Robin.

- Syarat batas Dirichlet

Syarat batas Dirichlet terjadi ketika pada persamaan diferensial biasa atau parsial ditentukan nilai-nilai yang perlu dibawa oleh solusi sepanjang batas domain. Permasalahan untuk mencari solusi pada persamaan tersebut dikenal sebagai masalah Dirichlet. Dalam ilmu terapan, kondisi batas Dirichlet juga dapat disebut sebagai kondisi batas tetap.

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$u(0, t) = u_0,$$

$$u(L, t) = u_L,$$

- Syarat batas Neuman

Dalam persamaan matematika, Syarat batas Neumann adalah tipe syarat batas yang digunakan pada persamaan diferensial biasa atau parsial untuk menentukan kondisi nilai-nilai di mana turunan dari suatu solusi digunakan dalam batas domain.

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = u_0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = u_L,$$

- Syarat batas Robin

Syarat batas Robin adalah kombinasi seimbang antara syarat batas Dirichlet dan kondisi batas Neumann. Syarat ini kontras dengan kondisi batas campuran, yang mana Syarat batas dari berbagai jenis yang ditentukan pada subset batas yang berbeda. Syarat batas Robin juga disebut Syarat batas impedansi, pada penerapannya dalam masalah elektromagnetik, atau kondisi batas konvektif yang penerapannya dilakukan untuk masalah perpindahan panas.

$$\text{Unive} au + b \frac{\partial u}{\partial n} = g$$

## 2.6 Python

Python merupakan sebuah bahasa untuk menjembatani pembuat program dengan komputer. Python memiliki potensi yang besar untuk dikembangkan dalam menyelesaikan persoalan. Python adalah bahasa pemrograman yang paling sering digunakan karena efektif dalam melakukan pengolahan numerik (Führer, 2016).

Python juga merupakan salah satu bahasa dengan banyak *library*. Hal tersebut yang membuat Python mudah dipelajari dan digunakan. *Library* merupakan kumpulan program untuk mempermudah pembuatan *Source code*. Selain itu *library* juga sebagai referensi sintaks dan semantik dari bahasa Python. Pada *Library* terdapat pilihan perintah secara opsional untuk menunjang beberapa fungsi pada program. Beberapa *library* dirancang secara eksplisit untuk mendorong dan meningkatkan portabilitas program Python.



## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

#### **3.1 Lokasi dan Waktu**

Penelitian dilaksanakan di Laboratorium Komputasi Universitas Brawijaya, Student Activity Center Jurusan Fisika, dan Brawijaya kediaman penulis yang berada di Desa Beji Kecamatan Junrejo Kota Batu. Penelitian ini dilakukan selama tiga bulan dimulai dari bulan September sampai November.

#### **3.2 Alat dan Bahan**

Alat yang digunakan dalam penelitian adalah sebagai berikut:

1. sebuah Laptop HP Pavilion 14-bf1xx Notebook PC dengan Spesifikasi Processor Intel(R) Core(TM) i7-855U CPU @ 1.80 GHz, 2000 MHz, 4 Core(s), 8 Logical Processor(s), RAM 16.00 GB, SSD 128 dan HDD 1 TB, NVIDIA Geforce 940MX.
2. Program *management environment* MiniConda.
3. Bahasa pemrograman Python dengan beberapa library yaitu, numpy, matplotlib, jupyter notebook, dan scipy.
4. Teks editor Sublime Text 3

#### **3.3 Tahapan Penelitian**

Penelitian ini dilakukan dengan beberapa tahapan sebagai berikut:

1. Model diselesaikan secara analitik:

Model saturasi difusi tekanan rendah dari unsur interstisi terhadap titanium yang ada pada jurnal *Modeling of diffusion saturation of titanium by interstitial elements under rarefied atmospheres* (Matychak et al., 2007) dapat diselesaikan secara analitik menggunakan *First Order Differential Equation, Second Order Differential Equation* dan transformasi *Laplace*.

a. Persamaan diferensial orde 1

Solusi umum dari persamaan diferensial orde 1 adalah sebagai berikut,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),$$

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx,$$

b. Persamaan diferensial orde 2

Solusi umum dari persamaan diferensial orde 2 adalah sebagai berikut,

$$a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0,$$

Dimana  $a_2, a_1, a_0$  adalah konstan. Ungkapan jika ditulis  $D$  seperti

$D + 1$  atau  $D^2 + 5D + 4$  atau disebut operator turunan.

Persamaannya menjadi

$$D^2y + 5Dy + 4y = 0 \text{ atau } (D^2 + 5D + 4)y = 0,$$

Jika ditulis sederhana menjadi

$$(D + 1)y = 0 \text{ dan } (D + 4)y = 0,$$

Dan dapat dipisahkan dengan solusi

$$y = c_1 e^{-4x}, y = c_2 e^{-x},$$

c. Persamaan Laplace

Persamaan Laplace digunakan untuk menyederhanakan perhitungan, dimana variabel terhadap waktu dihilangkan dengan mentransformasikan kedalam domain ruang.

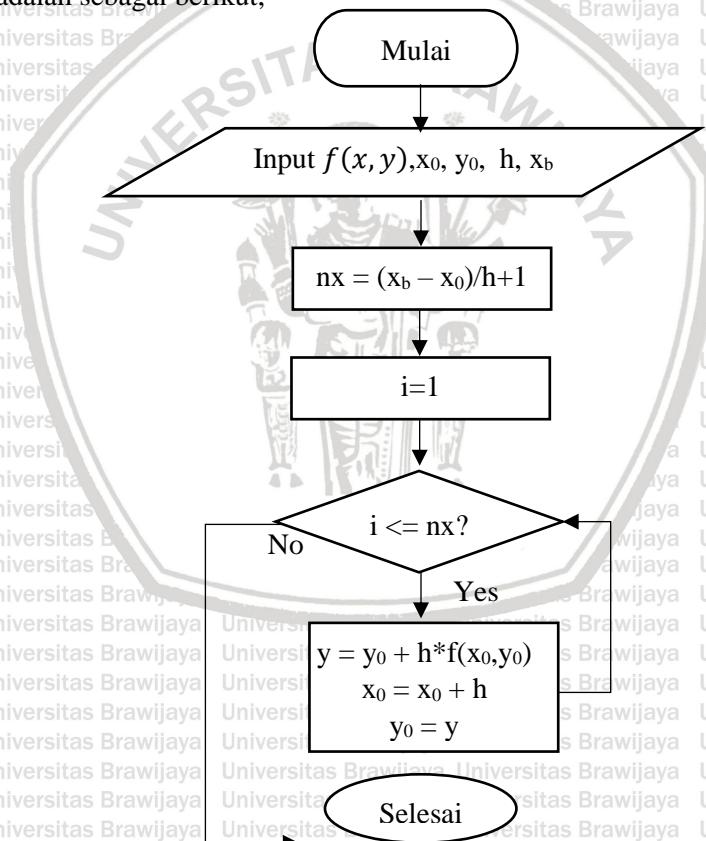
$$\tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

2. Model diselesaikan secara numerik:

Selain dapat diselesaikan secara analitik model ini juga dapat diselesaikan secara numerik. Metode Euler beda maju, metode Heun, Runge-Kuta orde 2, Runge-Kuta orde 3, dan Runge-Kuta orde 4 digunakan untuk menyelesaikan solusi dari persamaan diferensial orde 1. Metode forward time central space dan metode backward time central space digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde 2 yang berubah terhadap ruang dan waktu.

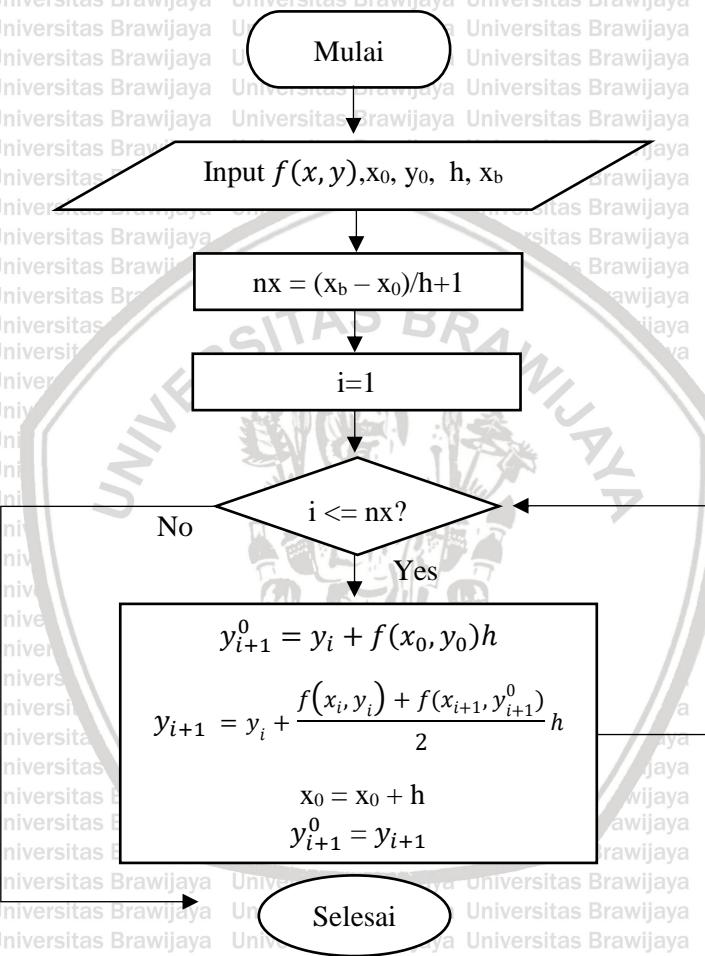
a. Euler beda maju

Dari Persamaan (2.7) flow chart metode Euler beda maju adalah sebagai berikut,



Gambar 3. 1 Flow Chart Metode Euler beda maju

b. Metode Heun  
Dari Persamaan (2.8) flow chart Metode Heun adalah sebagai berikut,



Gambar 3. 2 Flow Chart Metode Heun

Runge-Kutta orde 2

Dari Persamaan (2.9) flow chart Metode Runge-Kutta orde 2

adalah sebagai berikut,



Mulai

Input  $f(x, y), x_0, y_0, h, x_b$

$$nx = (x_b - x_0)/h + 1$$

i=1

No

Yes

$$k_1 = f(x_0, y_0)$$

$$k_2 = f(x_0 + h, y_0 + hk_1)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

$$x_0 = x_0 + h$$

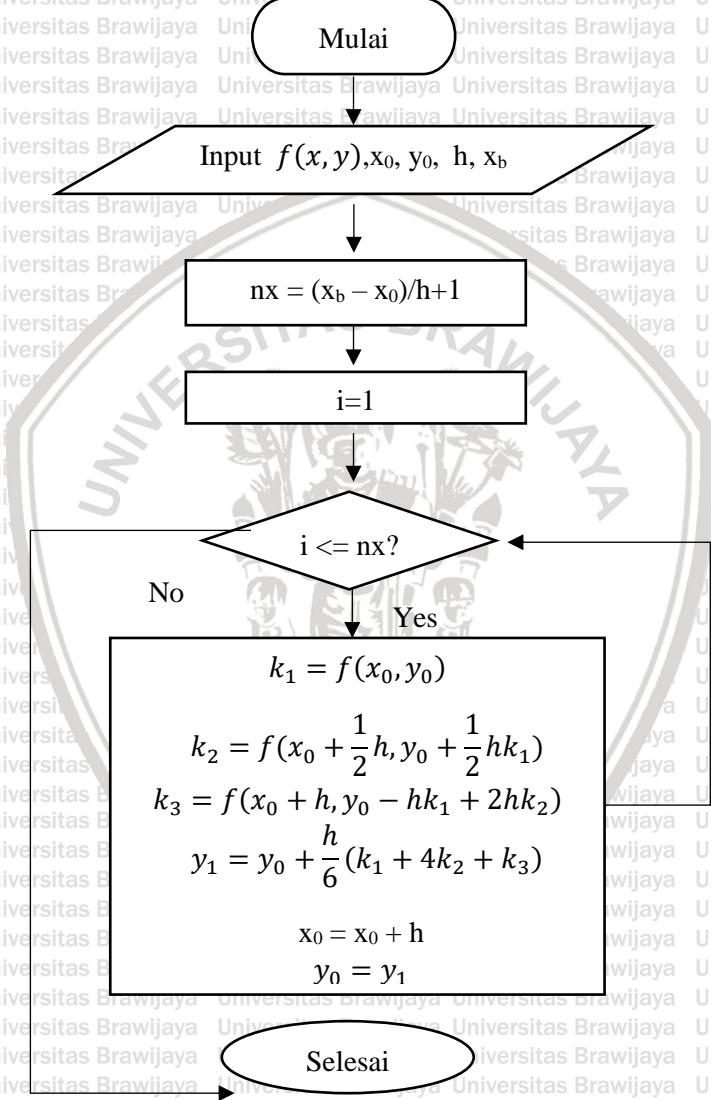
Selesai

Gambar 3. 3 Flow Chart Metode Runge-Kutta orde 2

c. Runge-Kuta orde 3

Dari Persamaan (2.10) flow chart Metode Runge-Kutta orde 3

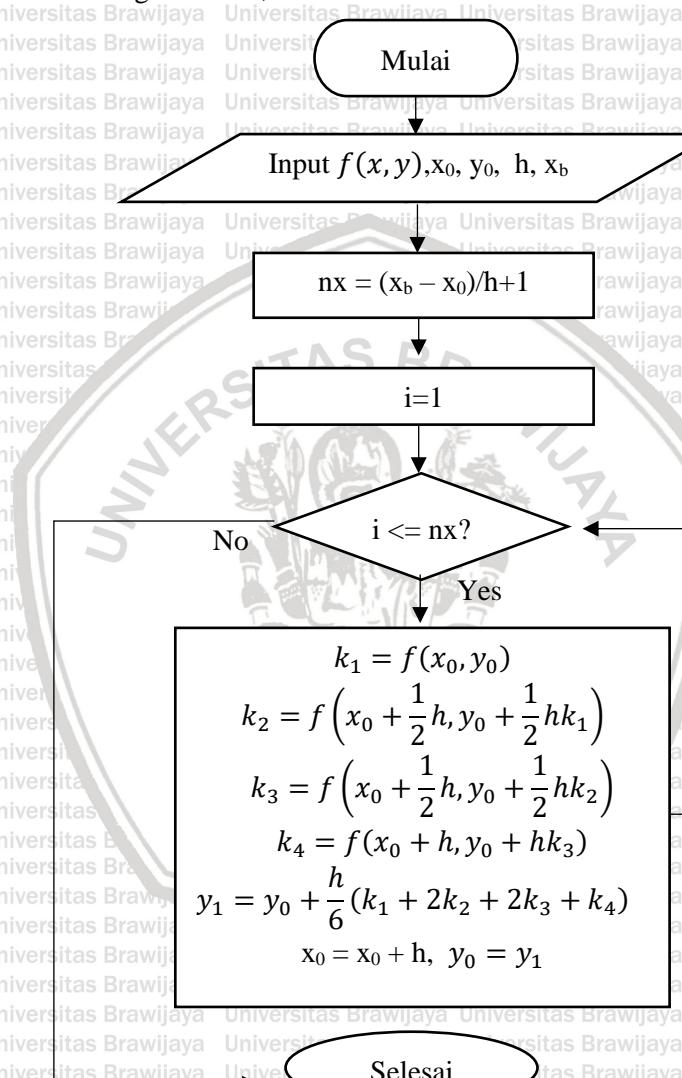
adalah sebagai berikut,



Gambar 3. 4 Flow Chart Metode Runge-Kutta orde 3

d. Runge-Kutta orde 4  
Dari Persamaan (2.11) flow chart Metode Runge-Kutta orde 4

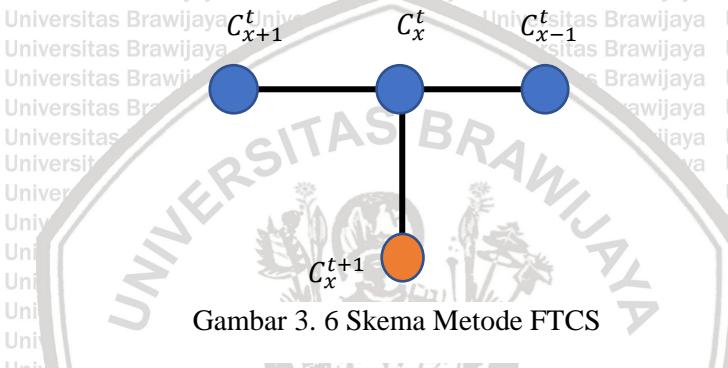
adalah sebagai berikut,



Gambar 3. 5 Flow Chart Metode Runge-Kutta orde 4

e. *Forward time central space*

FTCS merupakan metode eksplisit yang digunakan untuk penyelesaian pada persamaan diferensial non-linear yang mengalami perubahan terhadap waktu dan dimensi ruang. Metode eksplisit pada dasarnya digunakan untuk mencari nilai pada waktu yang akan datang dengan menggunakan nilai saat ini. Pada metode ini perubahan terhadap waktu menggunakan beda maju dan perubahan pada dimensi ruang menggunakan beda tengah. Skema FTCS dapat dilihat pada Gambar 3.6.



Gambar 3. 6 Skema Metode FTCS

		Posisi (x)								
		C <sub>0,1</sub>	C <sub>0,2</sub>	C <sub>0,3</sub>	C <sub>0,4</sub>	C <sub>0,5</sub>	C <sub>0,6</sub>	C <sub>0,n-1</sub>	C <sub>0,n</sub>	
Waktu (t)		C <sub>1,0</sub>	C <sub>1,1</sub>	C <sub>1,2</sub>	C <sub>1,3</sub>	C <sub>1,4</sub>	C <sub>1,5</sub>	C <sub>1,6</sub>	C <sub>1,n-1</sub>	C <sub>1,n</sub>
	C <sub>2,0</sub>		C <sub>2,1</sub>	C <sub>2,2</sub>	C <sub>2,3</sub>	C <sub>2,4</sub>	C <sub>2,5</sub>	C <sub>2,6</sub>	C <sub>2,n-1</sub>	C <sub>2,n</sub>
		C <sub>3,0</sub>	C <sub>3,1</sub>	C <sub>3,2</sub>	C <sub>3,3</sub>	C <sub>3,4</sub>	C <sub>3,5</sub>	C <sub>3,6</sub>	C <sub>3,n-1</sub>	C <sub>3,n</sub>
		C <sub>4,0</sub>	C <sub>4,1</sub>	C <sub>4,2</sub>	C <sub>4,3</sub>	C <sub>4,4</sub>	C <sub>4,5</sub>	C <sub>4,6</sub>	C <sub>4,n-1</sub>	C <sub>4,n</sub>
		C <sub>5,0</sub>	C <sub>5,1</sub>	C <sub>5,2</sub>	C <sub>5,3</sub>	C <sub>5,4</sub>	C <sub>5,5</sub>	C <sub>5,6</sub>	C <sub>5,n-1</sub>	C <sub>5,n</sub>
		C <sub>m-1,0</sub>	C <sub>m-1,1</sub>	C <sub>m-1,2</sub>	C <sub>m-1,3</sub>	C <sub>m-1,4</sub>	C <sub>m-1,5</sub>	C <sub>m-1,6</sub>	C <sub>m-1,n-1</sub>	C <sub>m-1,n</sub>
		C <sub>m,0</sub>	C <sub>m,1</sub>	C <sub>m,2</sub>	C <sub>m,3</sub>	C <sub>m,4</sub>	C <sub>m,5</sub>	C <sub>m,6</sub>	C <sub>m,n-1</sub>	C <sub>m,n</sub>

Gambar 3. 7 Grid Konsentrasi pada posisi terhadap waktu

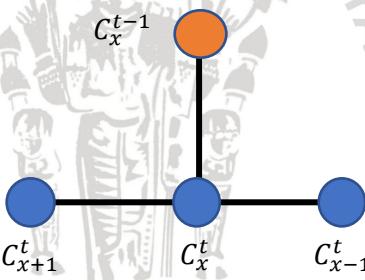
Dimana Persamaan (2.1) diselesaikan dengan menggunakan metode FTCS sehingga persamaan menjadi,

$$C_x^{t+1} = (1 - \sigma)C_x^t + 0.5\sigma(C_{x+1}^t + C_{x-1}^t),$$

Kemudian syarat batas Neuman digunakan dari Persamaan (2.2) dan (2.3).

f. *Backward time central space*

BTCS merupakan metode implisit yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial non-linear yang mengalami perubahan terhadap waktu dan dimensi ruang. Metode implisit ini pada dasarnya mencari nilai pada saat ini dengan menggunakan nilai sebelumnya. Pada metode ini perubahan terhadap waktu menggunakan beda mundur dan perubahan pada dimensi ruang menggunakan beda tengah. Skema BTCS dapat dilihat pada Gambar 3.8.



Gambar 3. 8 Skema Metode BTCS

Persamaan (2.1) diselesaikan menggunakan metode BTCS sehingga persamaannya menjadi,

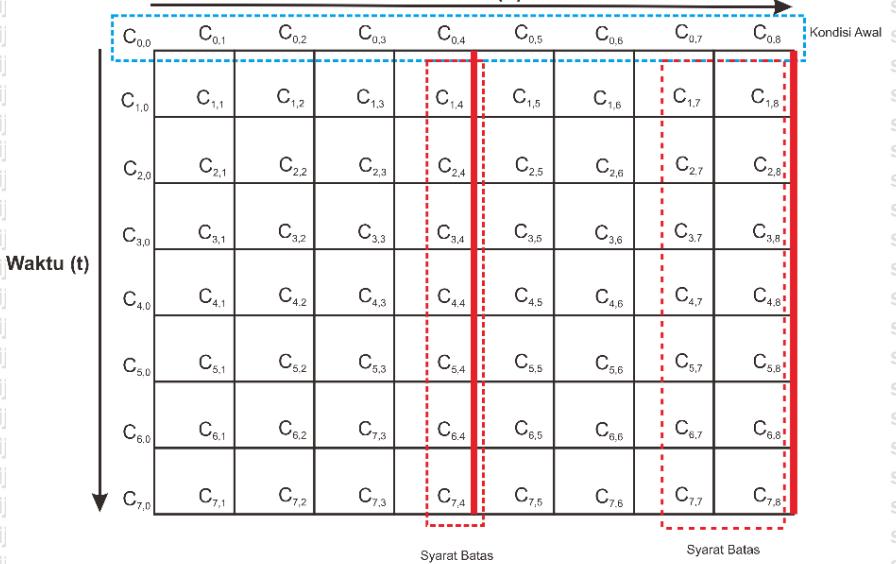
$$C_x^{t-1} = (1 + 2\sigma)C_x^t - \sigma(C_{x+1}^t + C_{x-1}^t),$$

Syarat batas Neuman digunakan dari Persamaan (2.2) dan (2.3) kemudian dimasukkan pada matriks. Kemudian diselesaikan dengan menggunakan matriks tridiagonal untuk mencari nilai  $C_x^{t-1}$ .

$$\begin{bmatrix} 1+2\sigma & -\sigma & & & \\ -\sigma & 1+2\sigma & -\sigma & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\sigma & 1+2\sigma & -\sigma \\ & & & -\sigma & 1+2\sigma \\ & & & & \vdots \\ & & & & C_1^j \\ & & & & C_2^j \\ & & & & \vdots \\ & & & & C_{m-3}^j \\ & & & & C_{m-2}^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^{j-1} \\ C_2^{j-1} \\ \vdots \\ C_{m-3}^{j-1} \\ C_{m-2}^{j-1} \end{bmatrix}$$

Gambar 3. 9 Matriks tridiagonal

Posisi (x)



Gambar 3. 10 Skema Matriks BTCS

#### g. Penggunaan Bahasa Pemrograman

Program model saturasi difusi pada Titanium dibangun menggunakan bahasa pemrograman Python. Namun untuk mempermudah *environment management* digunakan program *MiniConda* yang dapat di unduh melalui website resmi yang sudah tersedia di <https://docs.conda.io/en/latest/miniconda.html>. Selanjutnya Python diunduh melalui *MiniConda*. Sublime Text 3 digunakan sebagai editor.

Model diubah menjadi numerik terlebih dahulu sebelum diselesaikan secara numerik supaya dapat dikenali dengan bahasa komputer. Setelah didapatkan solusi model secara numerik, dibuat *pseudo code* barulah kemudian ditulis dalam bahasa pemrograman.





(Halaman ini sengaja dikosongkan)

## 4.1 Gambaran Fisis Difusi Saturasi Nitrogen pada Titanium

Skema difusi reaktif unsur interstisi nitrogen pada titanium dapat dilihat pada Gambar 4.1. Simbol G adalah media gas nitrogen dan Me adalah titanium. Skema dibawah menjelaskan bahwa nitrogen selain mengalami difusi, nitrogen juga mengalami reaksi dengan titanium pada permukaan titanium. Reaksi nitrogen dengan titanium ini terjadi ketika difusi mengalami saturasi, sehingga nitrogen yang terkumpul pada permukaan titanium bereaksi dengan titanium membentuk TiN. TiN ini membentuk lapisan *layer by layer* sampai ketebalan  $2\delta$ .

Skema difusi reaktif pada Gambar 2.4 dapat ditulis secara matematis sebagai berikut:

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t} \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad C(x, 0) = C_0, \quad (4.1)$$

$$\omega \cdot \frac{dC}{dt} = h(C_{eq} - C) - k(C - C_0) + D \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \quad x = +0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad x = l, \quad (4.3)$$

Dimana  $C_{eq}$  adalah konsentrasi kesetimbangan nitrogen pada permukaan Titanium. Pada syarat batas Persamaan (4.2) berdasarkan asumsi ketebalan *layer*  $2\delta$  diantara Titanium dan medium, terjadi proses reaksi kimia. Pada persamaan (4.2) apabila tidak terjadi kontak ( $\omega = 0$  dan  $k = 0$ ) maka persamaan akan menjadi persamaan berikut,

$$-D \frac{\partial C}{\partial x}_{|x=0} = h[C_{eq} - C(0, t)], \quad (4.4)$$

Ketika difusi mencapai kondisi saturasi, dalam matematis dapat dituliskan  $D/h \rightarrow 0$  maka persamaan dapat dituliskan sebagai berikut,

$$C(0, t) = \lim_{x \rightarrow +0} C(x, t) = C_{eq} = \text{konstan}, \quad (4.5)$$

Apabila  $D \rightarrow 0$  sehingga dapat dikatakan  $C(0, t) = C_{eq}$ . Ini artinya, konsentrasi pada permukaan sama dengan kondisi konsentrasi *equilibrium*. Untuk kondisi  $D \rightarrow 0$ , pada *bulk metal*, berdasarkan Persamaan (4.2) didapatkan Persamaan (4.6) medan konsentrasi pada permukaan terhadap waktu:

$$\omega \cdot \frac{dC}{dt} = h(C_{eq} - C) - k(C - C_0) + 0 \cdot \frac{\partial C}{\partial x},$$

$$\omega \cdot \frac{dC}{dt} = h C_{eq} + k C_0 - C(h + k),$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{(h C_{eq} + k C_0)}{\omega} - \frac{(h + k)}{\omega} C, \quad (4.6)$$

Persamaan (4.6) yang didapat dapat diselesaikan menggunakan persamaan diferensial orde 1.

Solusi umum untuk persamaan diferensial orde 1:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$$

Sehingga solusi persamaan diferensial orde 1 untuk Persamaan (4.6) adalah sebagai berikut,

$$\frac{dC}{dt} + \frac{(h + k)}{\omega} C = \frac{(h C_{eq} + k C_0)}{\omega}$$

$$P(x) = \frac{(h + k)}{\omega} \quad Q(x) = \frac{(h C_{eq} + k C_0)}{\omega}$$

$$Ce^{\int \frac{(h+k)}{\omega} dt} = \int \frac{(h C_{eq} + k C_0)}{\omega} e^{\int \frac{(h+k)}{\omega} dt} dt$$

$$Ce^{\frac{(h+k)}{\omega} t} = \int \frac{(h C_{eq} + k C_0)}{\omega} e^{\frac{(h+k)}{\omega} t} dt$$

$$Ce^{\frac{(h+k)}{\omega}t} = \frac{(h C_{eq} + kC_0)}{\omega} \frac{\omega}{h+k} e^{\frac{(h+k)}{\omega}t} + Z \quad (4.7)$$

Dimana Z = konstanta

Persamaan (4.7) kemudian dibagi dengan  $e^{\frac{(h+k)}{\omega}t}$  sehingga persamaan tersebut menjadi,

$$C = \frac{(h C_{eq} + kC_0)}{\omega} \frac{\omega}{h+k} + Ze^{-\frac{(h+k)}{\omega}t}$$

$$C(x, t) = \frac{(h C_{eq} + kC_0)}{h+k} + Ze^{-\frac{(h+k)}{\omega}t}$$

Kemudian nilai konstanta Z dicari ketika nilai t = 0

$$C(x, 0) = \frac{(h C_{eq} + kC_0)}{h+k} + Ze^{-\frac{(h+k)}{\omega}0}$$

$$C_0 = \frac{(h C_{eq} + kC_0)}{h+k} + Z$$

$$Z = C_0 - \frac{(h C_{eq} + kC_0)}{h+k}$$

$$Z = \frac{h C_0 - kC_{eq}}{h+k}$$

Substitusi konstanta Z yang didapatkan pada persamaan (4.7)

$$C(x, t) = \frac{h C_{eq} + kC_0}{h+k} + \frac{h C_0 - kC_{eq}}{h+k} e^{-\frac{(h+k)}{\omega}t}$$

Sehingga persamaan medan konsentrasi nitrogen pada permukaan

kondisi difusi mencapai saturasi adalah sebagai berikut,

$$C(0, t) = \frac{h C_{eq} + kC_0}{h+k} + \frac{h C_0 - kC_{eq}}{h+k} e^{-\frac{(h+k)}{\omega}t} \quad (4.8)$$

Pada kondisi syarat batas Persamaan (4.2) ada hal lain yang harus ditekankan terutama pada operator  $\frac{d}{dt}$  yang menjelaskan

penyimpanan nitrogen di permukaan. Perbedaan antara flukus transport nitrogen  $j_1$  ( $x = -0$ ) dan difusi flukus  $j = j_{diff}$  ke dalam logam ( $x = +0$ ) menentukan laju penyimpanan nitrogen pada permukaan, yang disebabkan oleh reaksi kimia. Pemisahan terjadi di dalam lapisan kontak yang terperangkap. Dalam hal ini, konsentrasi nitrogen yang terikat pada lapisan permukaan dapat ditentukan dari persamaan berikut,

$$C^*(0, \tau) = \left(\frac{k}{\omega}\right) \int_0^\tau [C(0, t) - C_0] dt \quad (4.9)$$

Sehingga persamaan total dari konsentrasi nitrogen disekitar permukaan sebagai berikut,

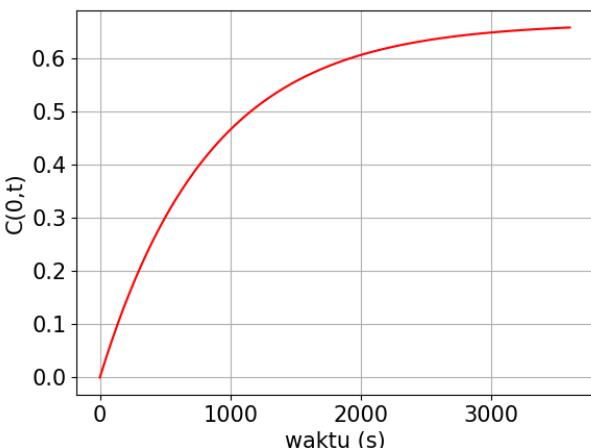
$$C_\Sigma(0, \tau) = C(0, \tau) + C^*(0, \tau) \quad (4.10)$$

## 4.2 Perhitungan Konsentrasi Nitrogen Pada Permukaan Titanium Kondisi Saturasi Difusi

Pada permukaan titanium terdapat dua kondisi konsentrasi yaitu konsentrasi dinamis dan konsentrasi akumulatif. Konsentrasi dinamis merupakan konsentrasi nitrogen pada permukaan titanium pada waktu itu. Sedangkan konsentrasi akumulatif adalah konsentrasi total yang berada pada permukaan di waktu itu.

### 1. Perhitungan konsentrasi dinamis

Pada permukaan titanium ketika kondisi difusi saturasi atau dalam matematis dapat dituliskan  $D \rightarrow 0$ , konsentrasi dinamis dapat dihitung menggunakan Persamaan (4.8). Konsentrasi nitrogen pada permukaan titanium pada kondisi difusi mencapai saturasi dihitung dengan beberapa parameter yang digunakan yaitu waktu maksimum ( $t_{max} = 3600$  s), konsentrasi awal ( $C_0 = 0$ ), konsentrasi saat mencapai kesetimbangan ( $C_{eq} = 0.8$ ), laju perpindahan massa ( $h = 1 \times 10^{-8}$  cm/s), laju reaksi ( $k = 0.2$  h) dan kapasitas massa ( $\omega = 1 \times 10^{-5}$  cm) diperoleh grafik pada Gambar 4.2.



Gambar 4. 1 Solusi analitik konsentrasi nitrogen pada permukaan titanium kondisi difusi mencapai saturasi

## 2. Perhitungan konsentrasi akumulatif

Konsentrasi akumulatif adalah konsentrasi total pada permukaan nitrogen (konsentrasi dinamis + konsentrasi yang terjebak pada permukaan). Konsentrasi nitrogen yang terjebak pada permukaan terjadi karena akibat perbedaan laju antara fluks transport nitrogen  $j_1$  ( $x = -0$ ) dan difusi fluks  $j = j_{diff}$  ke dalam logam ( $x = +0$ ) .

Konsentrasi nitrogen yang terjebak pada permukaan nitrogen dapat dihitung menggunakan Persamaan (4.9) dan konsentrasi akumulatif pada permukaan titanium dapat dihitung menggunakan Persamaan (4.10). Parameter yang digunakan yaitu waktu maksimum ( $t_{max} = 3600$  s), konsentrasi awal ( $C_0 = 0$ ), konsentrasi saat mencapai kesetimbangan ( $C_{eq} = 0.8$ ), laju perpindahan massa ( $h = 1 \times 10^{-8}$  cm/s), laju reaksi ( $k = 0.2 h$ ) dan kapasitas massa ( $\omega = 1 \times 10^{-5}$  cm). Didapatkan hasil konsentrasi pada permukaan yaitu  $0,065780007763837709$ , konsentrasi yang terjebak pada permukaan titanium adalah  $0,370366665202157615$  dan konsentrasi total adalah  $1,028166729659947$ .

### 4.3 Difusi Nitrogen pada Titanium

Permasalahan difusi pada Persamaan (4.1) – (4.3)

diselesaikan dengan operator rata-rata, menggunakan transformasi Laplace. Transformasi Laplace dari Persamaan (4.1) adalah sebagai berikut,

$$\frac{1}{D} \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0, \quad \underline{\underline{\frac{\frac{1}{D} \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial C(x,t)}{\partial t} dt - \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} dt = 0,}{2}} \quad (4.11)}}$$

Integral no 1 dikerjakan terlebih dahulu

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial C}{\partial t} dt = [Ce^{-st}]_0^\infty - (-s) \int_0^\infty Ce^{-st} dt,$$

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial C}{\partial t} dt = -C + s \int_0^\infty Ce^{-st} dt,$$

Syarat batas konsentrasi nitrogen ( $C$ )

$$C = C_0, \quad x = 0, \quad t > 0,$$

Kondisi awal konsentrasi nitrogen ( $C$ )

$$C = 0, \quad x > 0, \quad t = 0,$$

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial C(x,t)}{\partial t} dt = s \int_0^\infty C(x,t) e^{-st} dt = s \tilde{C}(x,s), \quad (4.12)$$

h. Kemudian integral no 2 dikerjakan

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty C(x,t) e^{-st} dt = \frac{\partial^2 \tilde{C}(x,s)}{\partial x^2}, \quad (4.13)$$

Sehingga Persamaan (4.11) menjadi persamaan berikut,

$$D \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x^2} = s \tilde{C},$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x^2} - \frac{s}{D} \tilde{C} = 0, \quad (4.14)$$

Kondisi konsentrasi nitrogen pada  $C(x, 0) = C_0$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty C(x, t) e^{-st} dt &= \int_0^\infty C(x, 0) e^{-st} dt + \int_1^\infty C(x, t) e^{-st} dt, \\ &= \frac{C_0}{s} + \int_1^\infty C(x, t) e^{-st} dt, \\ &= \frac{C_0}{s} + \tilde{C}(x, s), \end{aligned} \quad (4.15)$$

Solusi umum dari persamaan (4.14) adalah sebagai berikut,

$$\tilde{C}(x, s) = A \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} x + B \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} x, \quad (4.16)$$

Persamaan (4.16) substitusi ke Persamaan (4.15) sehingga persamaan menjadi berikut,

$$\tilde{C}(x, s) = \frac{C_0}{s} + A \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} x + B \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} x, \quad (4.17)$$

Nilai konstanta A dan B didapatkan dari syarat batas (4.2) dan (4.3).

Sebelum dilakukan perhitungan terhadap syarat batas, syarat batas dilakukan transformasi Laplace.

Persamaan (4.1) di substitusi ke dalam Persamaan (4.2) sehingga persamaannya menjadi persamaan berikut,

$$\omega D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = h(C_{eq} - C) - k(C - C_0) + D \frac{\partial C}{\partial x},$$

Kemudian di transformasikan Laplace sehingga menjadi persamaan berikut,

$$\begin{aligned} \omega D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} &= hC_{eq} + kC_0 - (h+k)C + D \frac{\partial C}{\partial x}, \\ \omega D \frac{\partial^2 \tilde{C}(x, s)}{\partial x^2} &= \frac{hC_{eq} + kC_0}{s} - (h+k)\tilde{C}(x, s) + D \frac{\partial \tilde{C}(x, s)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

Pada nilai  $x = 0$  persamaan tersebut menjadi,

Persamaan (4.17) diselesaikan dengan menggunakan persamaan (4.18)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{C}(x, s)}{\partial x} &= A \sqrt{\frac{s}{D}} \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} x + B \sqrt{\frac{s}{D}} \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} x, \\ &= \sqrt{\frac{s}{D}} \left( A \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} x + B \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} x \right), \\ \frac{\partial^2 \tilde{C}(x, s)}{\partial x^2} &= A \frac{s}{D} \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} x + B \frac{s}{D} \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} x, \\ &= \frac{s}{D} \left( A \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} x + B \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} x \right), \\ \omega D \left( \frac{s}{D} \left( A \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} x + B \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} x \right) \right) &= \frac{hC_{eq} + kC_0}{s} - (h+k) \left( \frac{C_0}{s} + A \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} x + B \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} x \right), \\ &\quad + D \left( \sqrt{\frac{s}{D}} \left( A \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} x + B \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} x \right) \right), \\ (\omega s + h + k) \left( A \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} x + B \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} x \right) &= \frac{hC_{eq} + kC_0}{s} - (h+k) \frac{C_0}{s} + \sqrt{DS} \left( A \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} x + B \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} x \right), \\ (\omega s + h + k) \left( A \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} x + B \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} x \right) &- \sqrt{DS} \left( A \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} x + B \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} x \right) = \frac{h(C_{eq} - C_0)}{s}, \end{aligned}$$

$$(\omega s + h + k)A - \sqrt{Ds} B = \frac{h(C_{eq} - C_0)}{s},$$

$$s[(\omega s + h + k)A - \sqrt{Ds} B] = h(C_{eq} - C_0),$$

**Persamaan (4.3) di transformasi Laplace**

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} = 0, \quad x = l,$$

**Persamaan (4.17) diselesaikan dengan Persamaan (4.20)**

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{C_0}{s} + A \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} l + B \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} l \right) = 0,$$

$$= A \sqrt{\frac{s}{D}} \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} l + B \sqrt{\frac{s}{D}} \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} l = 0,$$

$$A \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} l + B \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} l = 0,$$

**Persamaan (4.19) dan (4.21) di eliminasi sehingga menjadi,**

$$-s\sqrt{Ds} B \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} l - s(\omega s + h + k) B \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} l \\ = h(C_{eq} - C_0) \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} l,$$

$$-Bs \left[ \sqrt{Ds} \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} l + (\omega s + h + k) \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} l \right]$$

$$= h(C_{eq} - C_0) \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} l,$$

**Sehingga didapatkan nilai konstanta B.**

(4.19)

(4.20)

(4.21)

$$B = -\frac{h(C_{eq} - C_0) \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} l}{s \left[ \sqrt{Ds} \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} l + (\omega s + h + k) \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} l \right]} \quad (4.22)$$

Nilai konstanta A dicari dengan substitusi nilai konstanta B (4.22) ke dalam Persamaan (4.23).

$$A \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} l + B \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} l = 0, \quad (4.23)$$

$$A = -\frac{B \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} l}{\sinh \sqrt{\frac{s}{D}} l}$$

$$= \frac{h(C_{eq} - C_0) \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} l}{s \left[ \sqrt{Ds} \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} l + (\omega s + h + k) \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} l \right]} \frac{\cosh \sqrt{\frac{s}{D}} l}{\sinh \sqrt{\frac{s}{D}} l}$$

$$= \frac{h(C_{eq} - C_0) \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} l}{s \left[ \sqrt{Ds} \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} l + (\omega s + h + k) \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} l \right]}$$

Nilai konstanta A dan B di substitusi ke Persamaan (4.17)



$$\tilde{C}(x, s) - \frac{C_0}{s} = A \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} x + B \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} x$$

$$= \frac{h(C_{eq} - C_0) \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} l}{s \left[ \sqrt{Ds} \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} l + (\omega s + h + k) \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} l \right]} \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} x$$

$$+ \left( \frac{h(C_{eq} - C_0) \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} l}{s \left[ \sqrt{Ds} \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} l + (\omega s + h + k) \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} l \right]} \right) \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} x,$$

$$\tilde{C}(x, s) - \frac{C_0}{s} = \frac{h(C_{eq} - C_0) \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} (l - x)}{s \left[ (s\omega + h + k) \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} l + \sqrt{Ds} \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} l \right]}, \quad (4.24)$$

$$\tilde{C}(x, s) - \frac{C_0}{s}$$

$$= \frac{h(C_{eq} - C_0) \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} x}{s \left[ (s\omega + h + k) \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} l + \sqrt{Ds} \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} l \right]} = \frac{\phi(x, s)}{\psi(s)}, \quad (4.25)$$

Persamaan (4.24) merupakan hasil dari solusi analitik dan persamaan (4.25) merupakan hasil solusi analitik pada jurnal yang mana hasilnya berbeda. Perbedaan ini berada pada adanya variabel  $l$  pada cosh pada penyebut Persamaan (4.24) dan pada Persamaan (4.25) tidak terdapat variabel  $l$  pada cosh pada penyebut.

Kemudian dari Persamaan (4.25)  $\phi(s)$  dan  $\psi(s)$  didekomposisi terhadap deret taylor sehingga,

$$C(x, \tau) = C_0 + \frac{\phi(x, 0)}{\psi'(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(x, s_n)}{\psi'(s_n)} e^{s_n \tau}, \quad (4.26)$$

dimana  $S_n$  adalah akar dari persamaan transcendental

$$(sw + h + k) \cdot \cosh \sqrt{\frac{s}{D}} + \sqrt{Ds} \cdot \sinh \sqrt{\frac{s}{D}} l = 0, \quad (4.27)$$

Dari persamaan (4.26) dan untuk  $l \rightarrow \infty$  solusi dari permasalahan difusi pada *semi-infinite space* dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\tilde{C}(x, \tau) = \frac{c(x, \tau) - C_0}{C_{eq} - C_0},$$

Sehingga solusi dari distribusi pada *solid solution* pada titanium adalah sebagai berikut,

$$\tilde{C}(x, \tau) = \frac{h}{h+k} \operatorname{erfc} \left[ \frac{x}{2\sqrt{D\tau}} \right] - \frac{h \left[ \frac{F_2(x, \tau)}{q_2} - \frac{F_1(x, \tau)}{q_1} \right]}{D\Delta}, \quad (4.28)$$

dimana,

$$F_1(x, \tau) = e^{(q_1 x + q_1^2 D \tau)} \operatorname{erfc} \left[ q_1 \sqrt{D\tau} + \frac{x}{2\sqrt{D\tau}} \right],$$

$$F_2(x, \tau) = e^{(q_2 x + q_2^2 D \tau)} \operatorname{erfc} \left[ \sqrt{D\tau} + \frac{x}{2\sqrt{D\tau}} \right],$$

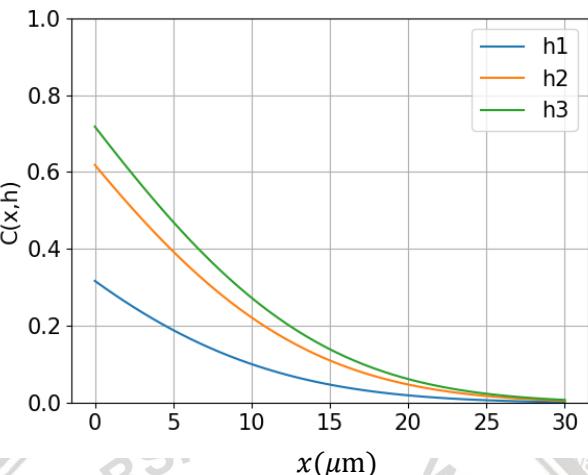
$$q_1 = \frac{1+\Delta}{2\omega}, \quad q_2 = \frac{1-\Delta}{2\omega}, \quad \Delta = \sqrt{1 - \frac{4\omega(h+k)}{D}},$$

Dengan menggunakan parameter variasi konstanta  $h$ ,  $D$ , dan waktu sehingga dapat diplot grafik solusi analitik dari difusi nitrogen pada titanium.

### i. Variasi Koefisien Laju Perpindahan Massa ( $h$ )

Parameter yang digunakan pada variasi koefisien transformasi massa yaitu waktu maksimum ( $t_{max} = 3600$  s), konsentrasi awal ( $C_0 = 0$ ), variasi laju perpindahan massa ( $h_1 = 1 \times 10^{-8}$  cm/s,  $h_2 = 4 \times 10^{-8}$  cm/s,  $h_3 = 8 \times 10^{-8}$  cm/s), laju reaksi ( $k = 0.2 h$ ), koefisien difusi ( $D = 2.1 \times 10^{-11}$  cm<sup>2</sup>/s) dan kapasitas massa ( $\omega = 1 \times 10^{-5}$  cm).

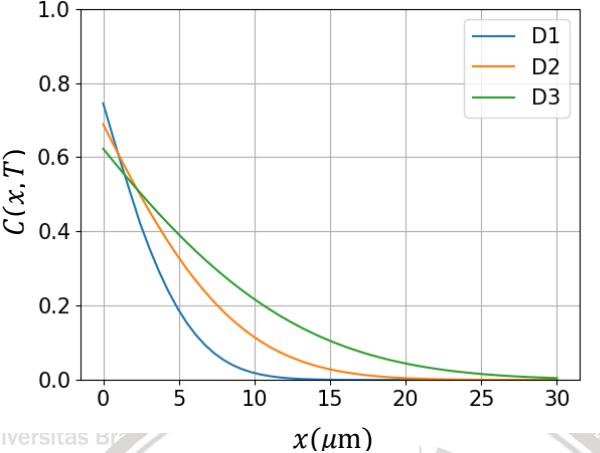
Didapatkan hasil seperti pada Gambar 4.3.



Gambar 4. 2 Difusi nitrogen pada titanium dengan variasi laju perpindahan massa ( $h$ )

#### j. Variasi Koefisien Difusi ( $D$ )

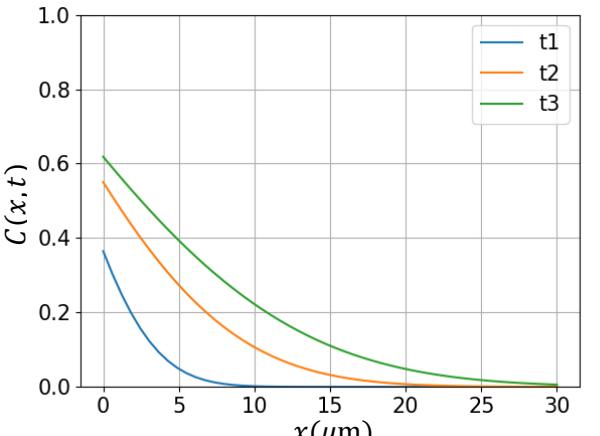
Parameter yang digunakan pada variasi koefisien difusi yaitu waktu maksimum ( $t_{max} = 3600\text{ s}$ ), konsentrasi awal ( $C_0 = 0$ ), laju perpindahan massa ( $h = 4 \times 10^{-8}\text{ cm/s}$ ), laju reaksi ( $k = 0.2\text{ h}$ ), Variasi koefisien difusi ( $D_1 = 3 \times 10^{-12}\text{ cm}^2/\text{s}$ ,  $D_2 = 8 \times 10^{-12}\text{ cm}^2/\text{s}$ ,  $D_3 = 2.1 \times 10^{-11}\text{ cm}^2/\text{s}$ ) dan kapasitas ( $\omega = 1 \times 10^{-5}\text{ cm}$ ). Didapatkan hasil seperti pada Gambar 4.4.



Gambar 4. 3 Difusi nitrogen pada titanium dengan variasi suhu yang mempengaruhi nilai koefisien difusi ( $D$ )

#### k. Variasi Waktu

Parameter yang digunakan pada variasi koefisien waktu yaitu waktu ( $time_1 = 3600 \text{ s}$ ,  $time_2 = 18000 \text{ s}$ ,  $time_3 = 36000 \text{ s}$ ), konsentrasi awal ( $C_0 = 0$ ), laju perpindahan massa ( $h = 4 \times 10^{-8} \text{ cm/s}$ ), laju reaksi ( $k = 0.2 h$ ), koefisien difusi ( $D_I = 2.1 \times 10^{-11} \text{ cm}^2/\text{s}$ ) dan kapasitas massa ( $\omega = 1 \times 10^{-5} \text{ cm}$ ). Didapatkan hasil seperti pada Gambar 4.5.



Gambar 4. 4 Difusi nitrogen pada titanium dengan variasi waktu

## BAB V

### SOLUSI NUMERIK

#### 5.1 Perhitungan Konsentrasi Nitrogen Pada Permukaan Titanium Kondisi Saturasi Difusi

Pada permukaan titanium terdapat dua kondisi konsentrasi yaitu konsentrasi dinamis dan konsentrasi akumulatif. Konsentrasi dinamis merupakan konsentrasi nitrogen pada permukaan titanium pada waktu itu. Sedangkan konsentrasi akumulatif adalah konsentrasi total yang berada pada permukaan di waktu itu. Konsentrasi total merupakan jumlah konsentrasi dinamis dan konsentrasi yang terjebak pada permukaan titanium.

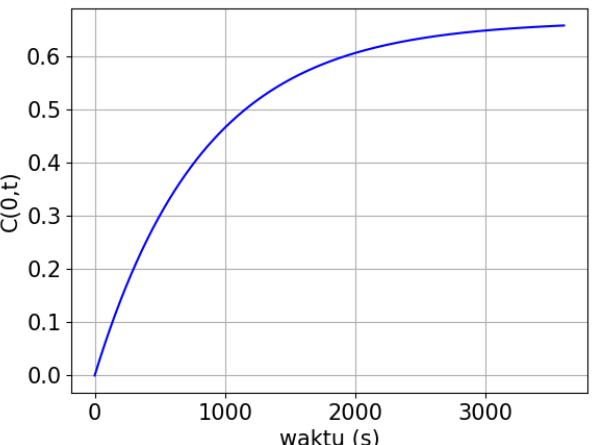
##### • Konsentrasi Dinamis

Konsentrasi dinamis pada permukaan titanium pada saat kondisi difusi mencapai saturasi dapat dihitung dengan menggunakan Persamaan (2.2) ketika difusi mencapai saturasi atau dalam matematis dapat dituliskan ( $D \rightarrow 0$ ). Sehingga Persamaan yang didapat,

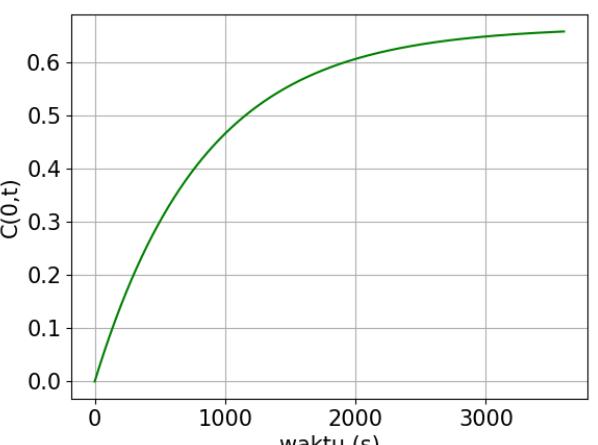
$$\omega \cdot \frac{dC}{dt} = h(C_{eq} - C) - k(C - C_0) + 0 \cdot \frac{\partial C}{\partial x}$$
$$\frac{dC}{dt} = \frac{(h C_{eq} + k C_0)}{\omega} - \frac{(h + k)}{\omega} C \quad (5.1)$$

Persamaan (5.1) menyatakan perubahan konsentrasi nitrogen pada permukaan titanium pada kondisi difusi saturasi ( $D \rightarrow 0$ ). Pada pekerjaan ini Persamaan (5.1) dapat diselesaikan dengan menggunakan lima metode yang berbeda yaitu metode Euler beda maju seperti pada Gambar 5.1., Heun seperti pada Gambar 5.2., Runge-Kutta orde 2 seperti pada Gambar 5.3., Runge-Kutta orde 3 seperti pada Gambar 5.4., dan Runge-Kutta orde 4 seperti pada Gambar 5.5. Pada Gambar 5.6 merupakan hasil gabungan dari lima metode yang telah dikerjakan. Hasil yang didapat menggunakan beberapa parameter yaitu waktu maksimum ( $time_{je} = 36000$  s),

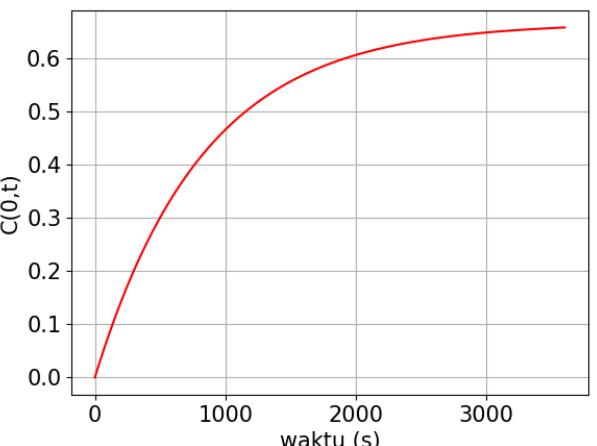
konsentrasi awal ( $C_0 = 0$ ), laju perpindahan massa ( $h = 1 \times 10^{-8}$  cm/s), laju reaksi ( $k=0.2 h$ ), dan omega ( $\omega = 1 \times 10^{-5}$  cm).



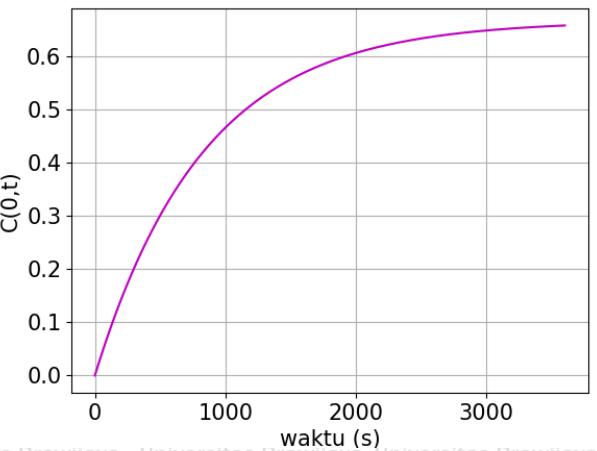
Gambar 5. 1 Metode Euler Beda Maju



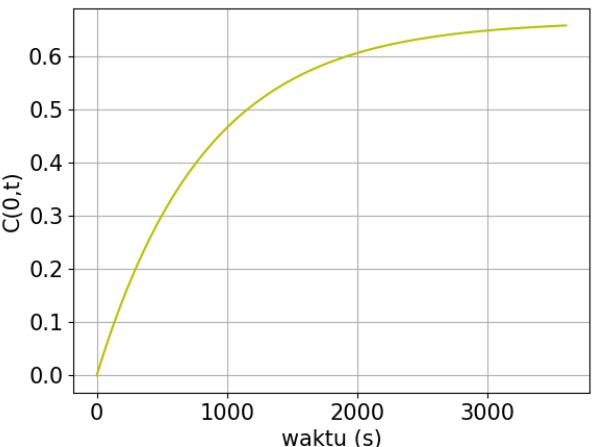
Gambar 5. 2 Metode Heun



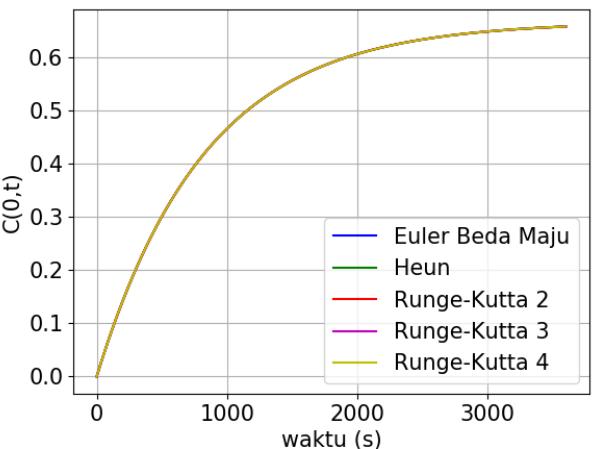
Gambar 5. 3 Metode Runge-Kutta Orde 2



Gambar 5. 4 Metode Runge-Kutta Orde 3



Gambar 5. 5 Metode Runge-Kutta Orde 4



Gambar 5. 6 Perbandingan lima metode

Berdasarkan dari lima metode yang digunakan, hasil yang didapat adalah sama. Hal ini membuktikan untuk menyelesaikan Persamaan (5.1) dengan menggunakan metode yang paling sederhana yaitu metode Euler beda maju sudah cukup. Sehingga tidak perlu

menggunakan metode lain yang lebih akurat untuk menyelesaikan persamaan (5.1) seperti metode Heun, Runge-Kutta Orde 2, Runge-Kutta Orde 3, dan Runge-Kutta Orde 4.

- Konsentrasi yang terjebak pada permukaan titanium

Dalam hal ini, konsentrasi terikat (yang terjebak) pada lapisan permukaan dapat ditentukan dari persamaan:

$$C^*(0, \tau) = \left(\frac{k}{\omega}\right) \int_0^\tau [C(0, t) - C_0] dt \quad (5.2)$$

- Konsentrasi akumulatif di sekitar permukaan

Perhitungan konsentrasi akumulatif bisa didapatkan dengan menjumlahkan konsentrasi dinamis dan konsentrasi yang terjebak pada permukaan titanium. Sehingga persamaan konsentrasi akumulatif adalah sebagai berikut,

$$C_{\Sigma}(0, \tau) = C(0, \tau) + C^*(0, \tau) \quad (5.3)$$

Didapatkan hasil konsentrasi pada nitrogen pada permukaan adalah 0,6578000776383709, konsentrasi nitrogen yang terjebak pada permukaan adalah 0,37036665202157615 dan konsentrasi total pada permukaan titanium yang didapat adalah 1,028166729659947.

## 5.2 Difusi Nitrogen Pada Titanium

Persamaan (2.1) diselesaikan dengan metode FTCS (*Forward Time Central Space*) dan BTCS (*Backward Time Central Space*) dengan menggunakan syarat batas Neuman dari Persamaan (2.2) dan (2.3). Dalam menyelesaikan solusi dari persamaan ini parameter konsentrasi setimbang  $C_{eq} = 1$  dan nilai dari  $C_0 = 0$  (diasumsikan bahwa konsentrasi awal nitrogen pada titanium adalah nol).

### 1. FTCS (Forward Time Central Space)

Persamaan (2.1) diselesaikan menggunakan metode FTCS sehingga persamaan numerik nya menjadi,

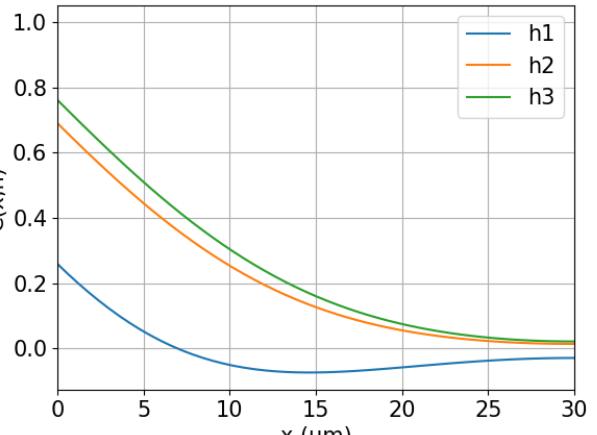
$$C_x^{t+1} = (1 - 2\sigma)C_x^t + \sigma(C_{x+1}^t + C_{x-1}^t), \quad (5.4)$$

$$\text{dimana } \sigma = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$$

Persamaan (5.4) merupakan persamaan yang sudah di diskritisasi menggunakan metode FTCS. Persamaan ini diselesaikan menggunakan syarat batas (2.2) dan (2.3). Solusi numerik dengan metode FTCS dilakukan beberapa variasi parameter yang digunakan diantaranya variasi koefisien laju perpindahan massa ( $h$ ), variasi koefisien difusi ( $D$ ), dan variasi waktu yang diberikan.

- Variasi koefisien laju perpindahan massa ( $h$ )

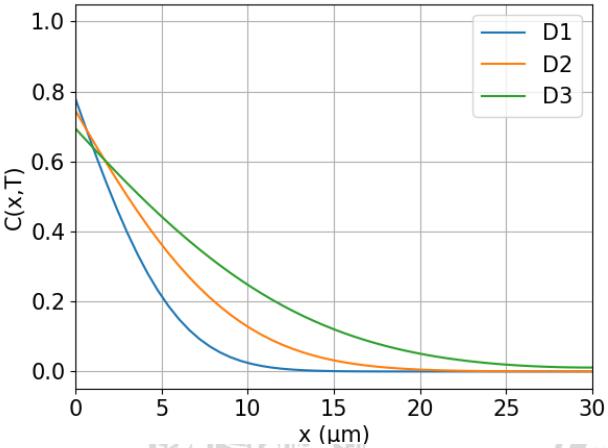
Parameter yang digunakan dalam variasi koefisien laju perpindahan massa adalah waktu maksimum (*time* = 36000 s), konsentrasi awal ( $C_0 = 0$ ), variasi laju perpindahan massa ( $h_1 = 1 \times 10^{-8}$  cm/s,  $h_2 = 4 \times 10^{-8}$  cm/s,  $h_3 = 8 \times 10^{-8}$  cm/s), laju reaksi ( $k = 0.2$   $h$ ), dan kapasitas massa ( $\omega = 1 \times 10^{-5}$  cm). Didapatkan hasil seperti pada Gambar 5.7.



Gambar 5.7 Metode FTCS variasi koefisien transport massa ( $h$ )

### - Variasi koefisien difusi ( $D$ )

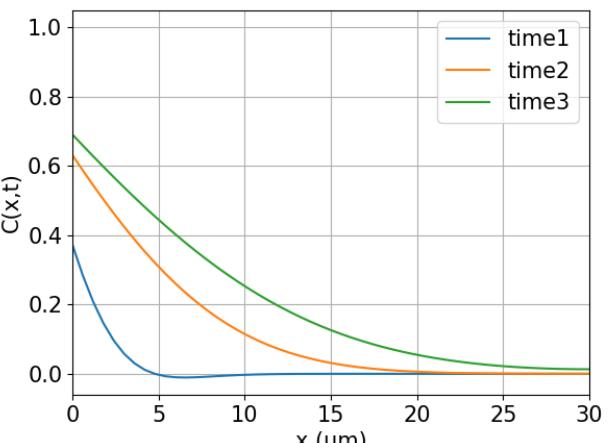
Parameter yang digunakan dalam variasi koefisien difusi adalah waktu maksimum ( $time = 36000$  s), konsentrasi awal ( $C_0 = 0$ ), laju perpindahan massa ( $h = 4 \times 10^{-8}$  cm/s), laju reaksi ( $k = 0.2$  h), variasi koefisien difusi ( $D_1 = 3 \times 10^{-12}$  cm $^2$ /s,  $D_2 = 8 \times 10^{-12}$  cm $^2$ /s,  $D_3 = 2.1 \times 10^{-11}$  cm $^2$ /s) dan kapasitas massa ( $\omega = 1 \times 10^{-5}$  cm). Didapatkan hasil seperti pada Gambar 5.8.



Gambar 5. 8 Metode FTCS variasi koefisien Difusi ( $D$ )

### Variasi Waktu

Parameter yang digunakan dalam variasi waktu sebagai berikut waktu ( $time_1 = 3600$  s,  $time_2 = 18000$  s,  $time_3 = 36000$  s), konsentrasi awal ( $C_0 = 0$ ), laju perpindahan massa ( $h = 4 \times 10^{-8}$  cm/s), laju reaksi ( $k = 0.2$  h), koefisien difusi ( $D = 2.1 \times 10^{-11}$  cm $^2$ /s) dan omega ( $\omega = 1 \times 10^{-5}$  cm). Didapatkan hasil seperti pada Gambar 5.9.



Gambar 5. 9 Metode FTCS variasi waktu

- BTCS (Backward Time Central Space)

Persamaan (2.1) diselesaikan menggunakan metode BTCS sehingga persamaan numerik nya menjadi,

$$C_x^{t-1} = (1 + 2\sigma)C_x^t - \sigma(C_{x+1}^t + C_{x-1}^t),$$

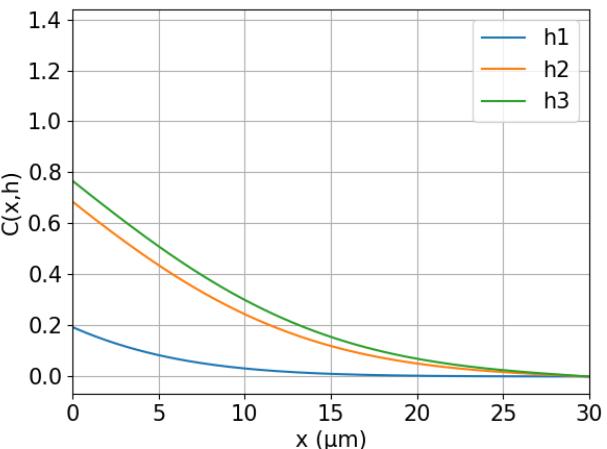
$$\text{dimana } \sigma = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2},$$

(5.5)

Persamaan (5.5) merupakan persamaan yang sudah dilakukan diskritisasisit dengan menggunakan metode BTCS. Selanjutnya, Persamaan ini diselesaikan menggunakan syarat batas (2.2) dan (2.3). Solusi numerik dengan metode BTCS dilakukan beberapa variasi parameter yang digunakan diantaranya variasi koefisien transformasi massa ( $h$ ), variasi koefisien difusi ( $D$ ), dan variasi waktu yang diberikan.

- Variasi Koefisien Transformasi Massa ( $h$ )

Parameter yang digunakan pada variasi koefisien transformasi massa ( $h$ ) sebagai berikut waktu maksimum ( $time = 36000$  s), konsentrasi awal ( $C_0 = 0$ ), variasi laju perpindahan massa ( $h_1 = 1 \times 10^{-8}$  cm/s,  $h_2 = 4 \times 10^{-8}$  cm/s,  $h_3 = 8 \times 10^{-8}$  cm/s), laju reaksi ( $k = 0.2$

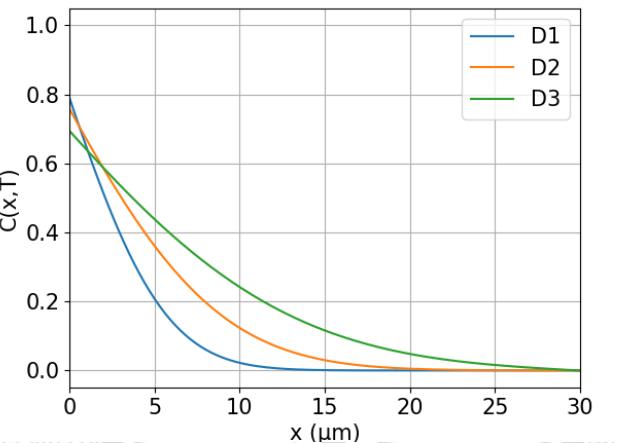


Gambar 5. 10 Metode BTCS variasi koefisien laju perpindahan massa ( $h$ )

#### Variasi koefisien difusi ( $D$ )

Parameter yang digunakan pada variasi koefisien difusi sebagai berikut waktu maksimum ( $time = 3600 \text{ s}$ ), konsentrasi awal ( $C_0 = 0$ ), laju perpindahan massa ( $h = 4 \times 10^{-8} \text{ cm/s}$ ), laju reaksi ( $k = 0.2 \text{ h}$ ), variasi koefisien difusi ( $D_1 = 3 \times 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{s}$ ,  $D_2 = 8 \times 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{s}$ ,  $D_3 = 2.1 \times 10^{-11} \text{ cm}^2/\text{s}$ ) dan kapasitas massa ( $\omega = 1 \times 10^{-5} \text{ cm}$ ).

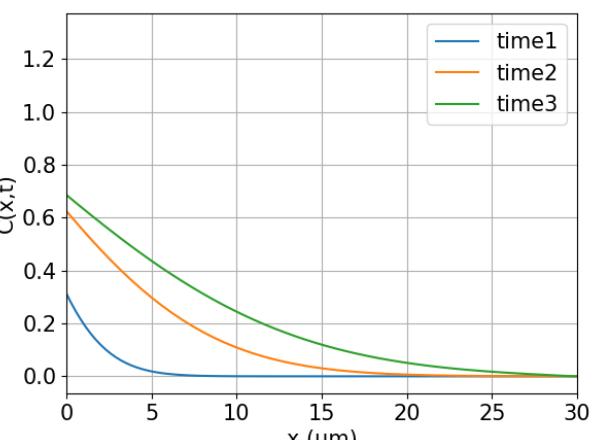
Didapatkan hasil seperti pada Gambar 5.11.



Gambar 5. 11 Metode BTCS variasi koefisien Difusi ( $D$ )

#### Variasi waktu

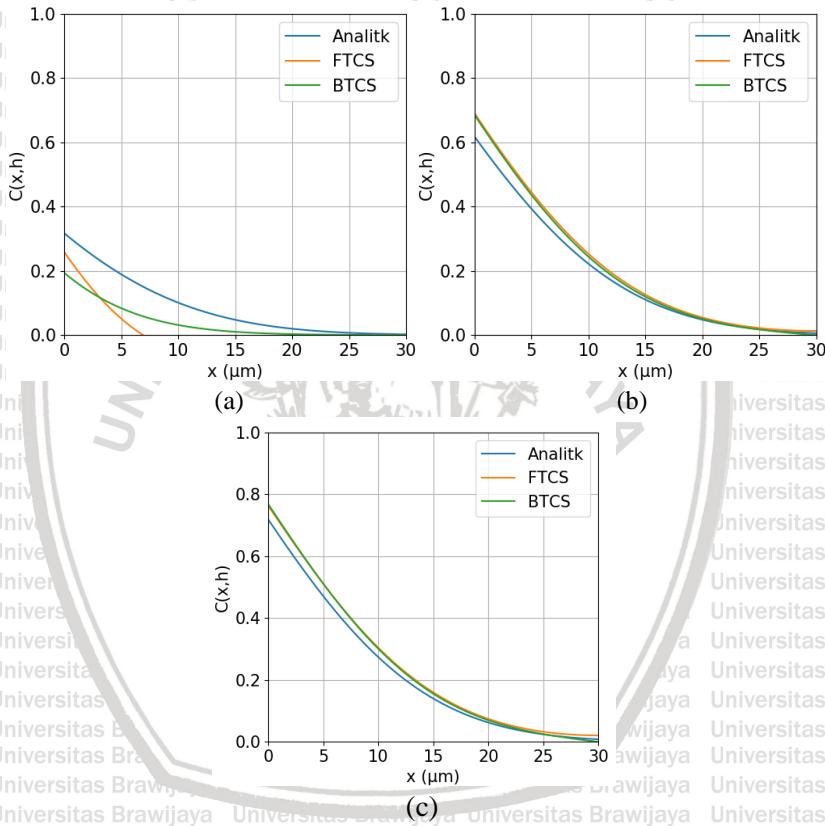
Parameter yang digunakan pada variasi waktu sebagai berikut waktu ( $time_1 = 3600 \text{ s}$ ,  $time_2 = 18000 \text{ s}$ ,  $time_3 = 36000 \text{ s}$ ), konsentrasi awal ( $C_0 = 0$ ), laju perpindahan massa ( $h = 4 \times 10^{-8} \text{ cm/s}$ ), laju reaksi ( $k = 0.2 h$ ), koefisien difusi ( $D = 2.1 \times 10^{-11} \text{ cm}^2/\text{s}$ ) dan kapasitas massa ( $\omega = 1 \times 10^{-5} \text{ cm}$ ). Didapatkan hasil seperti pada Gambar 5.13.



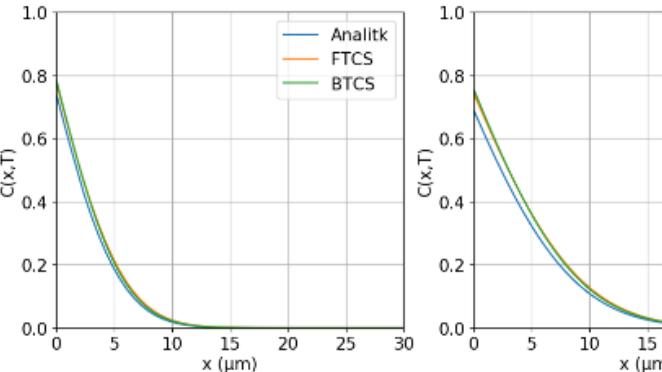
Gambar 5. 12 Metode BTCS variasi waktu

### 5.3 Perbandingan Solusi Numerik dan Analitik

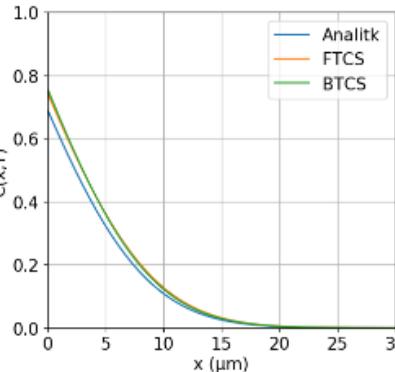
Hasil dari metode FTCS dan BTCS dibandingkan dengan solusi analitik dengan menggunakan kapasitas massa ( $\omega = 1 \times 10^{-5} \text{ cm}$ ) untuk variasi koefisien transport massa ( $h$ ), koefisien difusi ( $D$ ), dan waktu yang disajikan pada Gambar 5.13, Gambar 5.14, dan Gambar 5.15.



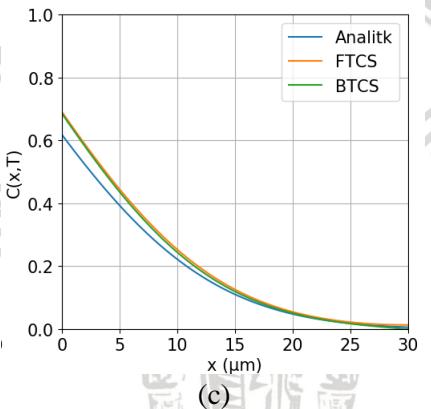
Gambar 5.13 Parameter yang digunakan  $D = 2.1 \times 10^{-11} \text{ cm}^2/\text{s}$  waktu  $= 36000\text{s}$  dengan variasi laju perpindahan (a)  $h_1 = 1 \times 8^{-11} \text{ cm}^2/\text{s}$  (b)  $h_2 = 4 \times 8^{-11} \text{ cm}^2/\text{s}$  (c)  $h_3 = 8 \times 8^{-11} \text{ cm}^2/\text{s}$



(a)



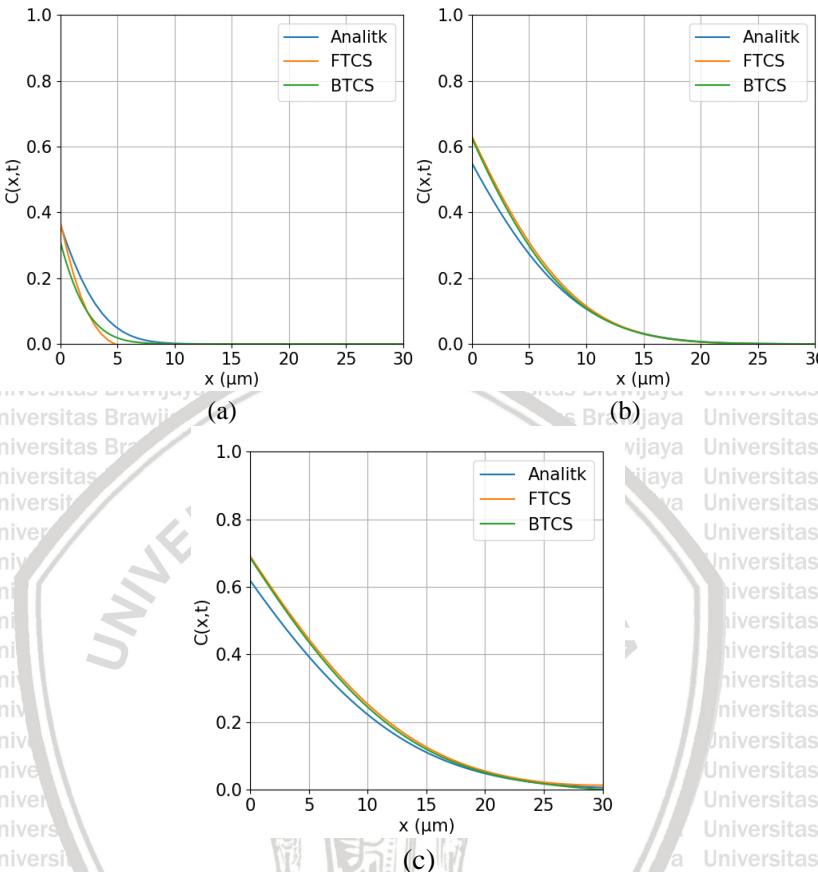
(b)



(c)

Gambar 5. 14 Parameter yang digunakan  $h = 4 \times 10^{-8} \text{ cm/s}$ , waktu  $= 36000 \text{ s}$ , dengan variasi koefisien difusi (a)  $D_1 = 3 \times 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{s}$

(b)  $D_2 = 8 \times 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{s}$  (c)  $D_3 = 2,1 \times 10^{-11} \text{ cm}^2/\text{s}$



Gambar 5. 15 Parameter yang digunakan  $D = 2.1 \times 10^{-11} \text{ cm}^2/\text{s}$ ,  $h = 4 \times 10^{-8} \text{ cm/s}$ , dengan variasi waktu (a) waktu = 3600s (b) waktu = 18000s (c) waktu = 36000s

Hasil analitik dari Gambar 5.13 dengan menggunakan parameter koefisien difusi ( $D = 2.1 \times 10^{-11} \text{ cm}^2/\text{s}$ ), waktu ( $waktu = 36000 \text{ s}$ ), dan variasi laju perpindahan massa ( $h_1 = 1 \times 10^{-8} \text{ cm/s}$ ,  $h_2 = 3 \times 10^{-8} \text{ cm/s}$ ,  $h_3 = 8 \times 10^{-8} \text{ cm/s}$ ) didapatkan bahwa trend dari grafik yang terbentuk dari metode analitik dan numerik (FTCS dan BTCS) sudahlah mirip. Terdapat perbedaan pada solusi FTCS pada variasi  $h_1$  grafik memotong sumbu x. Nilai awal dari grafik dari metode BTCS, FTCS dan analitik berbeda, grafik yang paling

mendekati adalah dari metode BTCS. Perbedaan *slope* dari solusi analitik dan solusi numerik tidak terlalu jauh. Slope metode FTCS dan BTCS cukup dekat, bahkan beberapa kondisi nilainya mendekati sama. Nilai yang paling mendekati hasil analitik adalah nilai dari hasil metode BTCS.

Gambar 5.14 digunakan parameter yaitu laju perpindahan massa ( $h = 4 \times 10^{-8} \text{ cm/s}$ ), waktu ( $waktu = 36000 \text{ s}$ ) dengan variasi koefisien difusi ( $D_1 = 3 \times 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{s}$ ,  $D_2 = 8 \times 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{s}$ ,  $D_3 = 2.1 \times 10^{-11} \text{ cm}^2/\text{s}$ ). Trend grafik yang dihasilkan dari ketiga Metode tersebut mirip. Nila awal dari ketiga grafik sedikit berbeda. Pada variasi koefisien difusi  $D_1$  grafik yang didapatkan dari ketiga grafik hampir sama, tetapi variasi  $h$  dan waktu grafik yang didapatkan dari ketiga grafik sedikit berbeda. Hasil solusi numerik yang paling mendekati dengan hasil analitik adalah metode BTCS. Hasil dari solusi BTCS sangatlah mirip. Sedangkan hasil dari solusi FTCS memiliki perbedaan *slope* yang sedikit.

Hasil analitik dari Gambar 5.15 dengan menggunakan parameter koefisien difusi ( $D = 2.1 \times 10^{-11} \text{ cm}^2/\text{s}$ ), laju perpindahan massa ( $h = 4 \times 10^{-8} \text{ cm/s}$ ) dengan variasi waktu ( $waktu_1 = 3600 \text{ s}$ ,  $waktu_2 = 18000 \text{ s}$ ,  $waktu_3 = 36000 \text{ s}$ ) didapatkan bahwa trend dari grafik yang terbentuk mirip namun, nilai awal dari grafik berbeda. *Slope* solusi analitik dan numerik sedikit berbeda. Dari kedua metode numerik, hasil solusi yang paling mendekati dengan solusi analitik adalah metode BTCS.

## 6.1 Kesimpulan

Telah dilakukan penelitian untuk mendapatkan solusi analitik dan numerik dari model saturasi difusi tekanan rendah unsur interstisi terhadap titanium yang dapat disimpulkan bahwa:

1. Solusi analitik didapatkan dengan cara transformasi Laplace. Syarat batas dimasukkan untuk mencari nilai konstanta. Nilai konstanta ini dimasukkan ke dalam persamaan.
2. Penyelesaian solusi secara numerik untuk menghitung konsentrasi nitrogen pada permukaan kondisi difusi saturasi menggunakan lima metode, yaitu: metode Euler beda maju, Heun, Runge-Kutta orde 2, Runge-Kutta orde 3, dan Runge-Kutta orde 4. Kelima metode tersebut menghasilkan nilai yang sama sehingga penggunaan metode yang cukup sederhana seperti Euler beda maju dapat digunakan dalam menyelesaikan kasus yang penulis hadapi. Selanjutnya, penyelesaian difusi nitrogen pada titanium digunakan dua metode, yaitu FTCS dan BTCS.
3. Hasil dari solusi analitik dan numerik untuk kasus perhitungan konsentrasi nitrogen pada permukaan kondisi difusi saturasi menghasilkan trend dan nilai yang sama. Sedangkan hasil dari solusi analitik dan numerik untuk difusi nitrogen pada titanium didapatkan trend grafik yang mirip. Namun, nilai awal dari grafik berbeda. Metode numerik yang hasilnya lebih mendekati solusi analitik adalah metode BTCS. Kurangnya informasi mengenai nilai dari konsentrasi setimbang ( $C_{eq}$ ) dan konsentrasi awal ( $C_0$ ) mengakibatkan solusi numerik tidak sama persis dengan solusi analitik.

## 6.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya, saran yang dapat dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Nilai dari konsentrasi setimbang ( $C_{eq}$ ) dan konsentrasi awal ( $C_0$ ) dapat dicari terlebih dahulu.
2. Domain ruang dapat dikembangkan menjadi 2D ataupun 3D.



(Halaman ini sengaja dikosongkan)

## DAFTAR PUSTAKA

- Abdulrahman, A., 2019. Comparison of Euler and Range-Kutta methods in solving ordinary differential equations of order two and four. *Leonardo Journal of Sciences*. Isue 32,p. 10-37
- Aghajani, H., Behrangi, S., 2016. *Plasma Nitriding of Steels*. Tabriz :Springer
- Boas, Mary L. 2006. *Mathematical Methods in The Physical Sciences Third Edition*. New York : John Wiley & Sons, Inc
- Crank, J. 1975. *The Mathematics of Diffusion Second Edition*. London: Oxford University Press
- Inagaki, I., 2014. Current Status of Titanium Applications for Air-craft 2.1 Titanium for airframes Starting with fabric. *Nippon Steel & Sumitomo Metal Technical*. Isue 106,p. 22-27
- Matychak, Y., Fedirko, V., Prytula, A., Pohreljuk, I., 2007. Modeling of diffusion saturation of titanium by interstitial elements under rarefied atmospheres. *Defect Diffus. Forum* 295–296, 47–54.
- Mohammad, A.A. 2011. *Lattice Boltzmann Method Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes Second Edition*. London :Springer
- Petter, Hans Langtangen. 2017. *Finite Difference Computing with PDEs*. Lysaker: SpringerOpen
- Piel, A., 2017. *Plasma Physics An Introduction to Laboratory, Space, and Fusion Plasmas, Second Edition*. Kield :Spinger
- Prytula, A.O., Fedirko, V.M., Pohreliuk, Y.M., Matychak, Y.S., 2005. Surface chemical reactions in processes of diffusion mass transfer. *Defect Diffus. Forum* 237–240, 1312–1318.
- Puri, R.K., Babbar, V.K., 2000. *Solid State Physics*. New Delhi : S. Chand & Company LTD, Ram Nagar
- Simon, T dan Purnachandra R.R. 2016. Application of Some Finite Difference Schemes for Solving One Dimensional Diffusion Equation. *American Scientific Research Journal for*

*Engineering, Technology, and Sciences.* 140–154.

- Windajanti, J.M., Santjojo, D.J.D.H., Abdurrouf, A., 2017. Microstructure and Phase Transformation of Pure Titanium During Nitriding Process By High Density Plasma. *Journal Sains Material Indonesia.* 18, 116.
- Yoshida, M., Ichiki, R., Utsumi, N., 2013. Surface hardening of titanium using gas nitriding. *Int. J. Precis. Eng. Manuf.* 14, 971–976.
- Zarlis, M., 2007. *Pemodelan Algoritma Gerakan Berdimensi : Satu Tinjauan Metode Komputasi Dalam Fisika.* Br. Universitas Sumatera Utara, Medan.



## LAMPIRAN

### Lampiran 1. 1 Source Code perhitungan analitik konsentrasi dinamis pada permukaan

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def fungsi_asli(x):
    h=1e-8
    Ceq=0.8
    k=h/5
    C0=0
    w=1e-5

    return (h*Ceq +k*C0)/(h+k) + h*(C0-Ceq)/(h+k)*np.exp(-
x*(h+k)/w)

time=3600
x = np.linspace(0,time,81)
plt.plot(x,fungsi_asli(x),'rx', label='Analitik')
```

## Lampiran 1. 2 Source Code Metode numerik Euler beda maju

```
# Metode Euler Beda Maju
def Euler_forward(time,x0,y0,step):

    yy=[]
    xx=[]
    yy.append(y0)
    xx.append(x0)
    xb=time
    xa=0
    n=int((xb-xa)/step)

    for i in range(1,n+1):
        y1=y0+step*dydx(x0,y0)
        yy.append(y1)
        x0+=step
        xx.append(x0)
        y0=y1

    plt.plot(xx,yy, label='Euler Beda Maju')
```

### Lampiran 1. 3 Source Code Metode numerik heun

```
# Metode heun
def Heun(time,x0,y0,step):

    xa=0
    xb=time
    n=int((xb-xa)/step)
    xx=[]
    yy=[]
    xx.append(x0)
    yy.append(y0)

    for i in range(1,n):
        p1 = y0 + step*dydx(x0,y0)
        y1 = y0 + step*(dydx(x0,y0) + dydx(x0+step,p1))/2
        x0 = x0+step
        y0=y1
        xx.append(x0)
        yy.append(y1)

    plt.plot(xx,yy, label='Heun')
```

## Lampiran 1. 4 Source Code Metode Runge-Kutta orde 2

```
# Runge-Kutta 2
def RK2(time,x0,y0,step):
    xa=0
    xb=time
    n=int((xb-xa)/step)
    xx=[]
    yy=[]
    xx.append(x0)
    yy.append(y0)

    for i in range(1,n+1):
        k1 = dydx(x0,y0)
        k2 = dydx(x0+step,y0+step*k1)
        y1 = y0 + step*(k1+k2)/2
        x0 = x0+step
        y0 = y1
        xx.append(x0)
        yy.append(y1)

    plt.plot(xx,yy, label='Runge-Kutta 2')
```

## Lampiran 1. 5 Source Code Metode Runge-Kutta orde 3

```
# Runge-Kutta 3
def RK3(time,x0,y0,step):

    xa=0
    xb=time
    n=int((xb-xa)/step)
    xx=[]
    yy=[]
    xx.append(x0)
    yy.append(y0)

    for i in range(1,n+1):
        k1 = dydx(x0,y0)
        k2 = dydx(x0+0.5*step,y0+0.5*step*k1)
        k3 = dydx(x0+step,y0-step*k1+2*step*k2)
        y1 = y0 + step*(k1+4*k2+k3)/6
        x0 = x0+step
        y0 = y1
        xx.append(x0)
        yy.append(y1)

    plt.plot(xx,yy, label='Runge-Kutta 3')
```

## Lampiran 1. 6 Source Code Metode Runge-Kutta orde 4

```
# Runge-Kutta 4
def RK4(time,x0,y0,step):
    xa=0
    xb=time
    n=int((xb-xa)/step)
    xx=[]
    yy=[]
    xx.append(x0)
    yy.append(y0)

    for i in range(1,n+1):
        k1 = dydx(x0,y0)
        k2 = dydx(x0+0.5*step,y0+0.5*step*k1)
        k3 = dydx(x0+0.5*step,y0+0.5*step*k2)
        k4 = dydx(x0+step,y0+step*k3)
        y1 = y0 + step*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6
        x0 = x0+step
        y0 = y1
        xx.append(x0)
        yy.append(y1)

    plt.plot(xx,yy,'y-',label='Runge-Kutta 4')
```

## Lampiran 1. 7 Source Code perhitungan konsentrasi dinamis dan total

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def fungsi_asli(t):
    h=1e-8
    Ceq=0.8
    k=h/5
    C0=0
    w=1e-5

    return (h*Ceq +k*C0)/(h+k) + h*(C0-Ceq)/(h+k)*np.exp(-t*(h+k)/w)

# menghitung pada waktu 1 jam
test1 = fungsi_asli(3600)
print('Konsentrasi pada permukaan : ',test1)

# yang terjebak selama 1 jam
t0=0
tF=3600
n=10000
dt=(tF-t0)/(n-1)

t1=t0
t2=t1+dt
sum1=0
for i in range(1,n):
    sum1+= (fungsi_asli(t1)+fungsi_asli(t2))*dt/2
    t1=t2
    t2=t2+dt
```

```
h=1e-8  
k=h/5  
w=1e-5  
sum1 = sum1*k/w  
print('Konsentrasi yang terjebak pada permukaan: ',sum1)  
print('Konsentrasi total: ',sum1+test1)
```



## Lampiran 1. 8 Source Code perhitungan Analitik difusi pada titanium

```
from scipy import special
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def cons(x,h=4e-8,d=2.1e-11,time=10):
    x*=1e-4
    w=1e-5
    k=h/5
    waktu=time*3600
    jarak=30
    dell = 4*w*(h+k)/d
    dell = np.sqrt(1-dell)
    q1 = (1+dell)/(2*w)
    q2 = (1-dell)/(2*w)

    dw= np.sqrt(d*waktu)
    xx=x/(2*dw)

    f1 = np.log(special.erfc(q1*dw + xx))
    tes=q1*x+q1*q1*d*waktu

    # Digunakan len
    f1 = f1 + tes

    f2 = np.log(special.erfc(q2*dw + xx))
    tes2=q2*x+q2*q2*d*waktu
    f2 = f2 + tes2

    c = h/(h+k)*special.erfc(xx)
    c1 = h*((np.exp(f2)/q2)-(np.exp(f1)/q1))/(d*dell)
    c = c - c1

    return c
```

## i) Grafik 1:

```
def grafik1():
    xy=np.linspace(0,30)
    y=[]
    y1=[]
    y2=[]
    x=[]
    for i in xy:
        print(i)
        x.append(i)
        y.append(cons(i,1e-8))
        y1.append(cons(i,4e-8))
        y2.append(cons(i,8e-8))

    print(x)
    print(y)

    plt.ylim(0,1)
    plt.ylabel('C(x,h)')
    plt.xlabel('X, miu m')
    plt.plot(x,y, label="h1")
    plt.plot(x,y1,label="h2")
    plt.plot(x,y2, label="h3")
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()
```

```
ii) Grafik 2

def grafik2():
    xy=np.linspace(0,30)
    y=[]
    y1=[]
    y2=[]
    x=[]
    for i in xy:
        print(i)
        x.append(i)
        y.append(np.cos(i,4e-8,3e-12))
        y1.append(np.cos(i,4e-8,8.4e-12))
        y2.append(np.cos(i,4e-8,2e-11))

    print(x)
    print(y)
    plt.ylim(0,1)
    plt.ylabel('C(x,h)')
    plt.xlabel('X, miu m')
    plt.plot(x,y,label="T1")
    plt.plot(x,y1,label="T2")
    plt.plot(x,y2,label="T3")
    plt.grid()
    plt.legend()
    plt.show()
```

### iii) Grafik 3

```
def grafik3():
    xy=np.linspace(0,30)
    y=[]
    y1=[]
    y2=[]
    x=[]
    for i in xy:
        print(i)
        x.append(i)
        y.append(cons(i,4e-8,2.1e-11,1))
        y1.append(cons(i,4e-8,2.1e-11,5))
        y2.append(cons(i,4e-8,2.1e-11,10))

    print(x)
    print(y)
    plt.ylim(0,1)
    plt.ylabel('C(x,h)')
    plt.xlabel('X, miu m')
    plt.plot(x,y, label='t1')
    plt.plot(x,y1, label='t2')
    plt.plot(x,y2, label='t3')
    plt.grid()
    plt.legend()
    plt.show()
```

**Lampiran 1. 9 Metode FTCS**

```
def difusi_num(time=36000, h=4e-8,D=2.1e-11,key=""):  
    # Parameter  
    # ======  
    L1=30  
    L0=-30  
    w=1e-5  
    k=h*0.2  
    ceq=1  
    c0=0  
    nx=101  
    nx2=50  
    dt=10  
    # ======  
  
    L = L1*1e-4  
    L01 = L0*1e-4  
  
    # step x  
    dx=(L-L01)/(nx+1)  
  
    sigma=0.1  
    dt = sigma*(dx*dx)/(D)  
  
    nt1 = np.arange(0,time,dt)  
    nt =len(nt1)  
  
    c=np.zeros(nx)  
    # Initialisasi kondisi  
    c[int(0/dx):int(3e-3/dx)] = 1  
    cn=np.zeros(nx)  
    dw =dx/(2*w)  
    dxx = dx*dx  
    wd = w*D
```

```
for n in range(nt):
    cn=c.copy()
    for i in range(1,nx-1):
        c[i]=(1-2*sigma)*cn[i]+sigma*(cn[i+1]+cn[i-1])
        c[nx2] = cn[nx2] + dt/w*(h*ceq+k*c0)-
dt/w*(h+k)*cn[nx2]+D*dt/(2*dx*w)*(cn[nx2+1]-cn[nx2-1])
        c[nx-1]=(1-2*sigma)*c[nx-1]+sigma*(c[nx-2]+c[nx-2])
    if key == 'time':
        label = 'waktu = '+str(time)+' s'
    elif key == 'h':
        label = 'h = '+str(h)+' cm/s'
    elif key == 'D':
        label = 'D = '+str(D)+' cm/s'

    return [np.linspace(L0,L1,nx),c,label]
```

**Lampiran 1. 10 Source Code Metode BTCS**

```
def BTCS(time=36000, h=4e-8,D=2.1e-11,key=""):  
    # parameter  
    # =====  
    L = 30  
    T=time  
    Nx =201  
    nx2=100  
    Nt=50  
    k=0.2*h  
    c0=0  
    ceq=1  
    w=1e-5  
    xmin=D/h  
    xminskal = xmin*1e4  
    # =====  
    # Diskritisasi dimensi x  
    # =====  
    x = np.linspace(-30*1e-4, L*1e-4, Nx+1)  
    x_skala = np.linspace(-30, L, Nx+1)  
    # x = np.linspace(-30*1e-4, L*1e-4, Nx+1)  
    # x_skala = np.linspace(-30, L, Nx+1)  
    dx = x[1] - x[0]  
    dx_skala = x_skala[1]-x_skala[0]  
  
    pergeseran = int(np.floor(xmin/dx))  
    Nx=Nx+pergeseran  
    x = np.linspace(-30*1e-4, L*1e-4+xmin,Nx+1)  
    x_skala = np.linspace(-30,L+xminskal,Nx+1)  
    # print(pergeseran)  
    # nx2=nx2-pergeseran+1  
    # =====  
    # Diskritisasi waktu
```

```
# =====
t = np.linspace(0, T, Nt+1)
dt = t[1] - t[0]
# =====

# Deklarasi variabel
c = np.zeros(Nx+1)
cn = np.zeros(Nx+1)
c_new = np.zeros(Nx+1)
x_new = np.zeros(Nx+1)

A = np.zeros((Nx+1, Nx+1))
b = np.zeros(Nx+1)

F = D*dt/dx**2
AB = (h+k)*dt/w
AC = D*dt/(2*w*dx)
AD = h*dt/(2*w)

# Membuat matriks tridiagonal
for i in range(1, Nx):
    A[i,i-1] = -F
    A[i,i+1] = -F
    A[i,i] = 1 + 2*F
# Syarat batas dc/dx=0
A[Nx-1,Nx] = -2*F
A[Nx-1,Nx-2] = 0
# syarat batas 2
A[nx2,nx2] = (1+AB)
A[nx2,nx2+1] = AC
A[nx2,nx2-1] = -AC

A[0,0] = A[Nx,Nx] = 1
```

```
# Kondisi awal
cn[0:int(3e-3/dx)]=1

for n in range(0, Nt):

    # menghitung nilai b dan diselesaikan secara linear
    for i in range(1, Nx):
        b[i] = cn[i]
        b[0] = 0
        b[nx2] = b[nx2] + dt*(h*ceq+k*c0)/w
        c[:] = scipy.linalg.solve(A, b)
        cn[:] = c

    for i in range(0,Nx-pergeseran):
        c_new[i] = c[i+pergeseran]

    if key == 'time':
        label = 'waktu = '+str(time)+' s'
    elif key == 'h':
        label = 'h = '+str(h)+' cm/s'
    elif key == 'D':
        label = 'D = '+str(D)+' cm2/s'

    return [x_skala,c_new,label]
```