

**SOLUSI ANALITIK DAN NUMERIK UNTUK MODEL  
TRANSFER RADIASI SATU DIMENSI DENGAN  
MENGUNAKAN METODE KISI BOLTZMANN**

**SKRIPSI**

**Oleh:  
BAGAS ADI SAPUTRA  
155090300111008**



**JURUSAN FISIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2019**



**SOLUSI ANALITIK DAN NUMERIK UNTUK MODEL  
TRANSFER RADIASI SATU DIMENSI DENGAN  
MENGUNAKAN METODE KISI BOLTZMANN**

**SKRIPSI**

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Meraih Gelar  
Sarjana Sains dalam Bidang Fisika

Oleh:  
**BAGAS ADI SAPUTRA**  
**155090300111008**



**JURUSAN FISIKA**  
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**  
**UNIVERSITAS BRAWIJAYA**  
**MALANG**  
**2019**





## LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

### SOLUSI ANALITIK DAN NUMERIK UNTUK MODEL TRANSFER RADIASI SATU DIMENSI DENGAN MENGUNAKAN METODE KISI BOLTZMANN

Oleh:

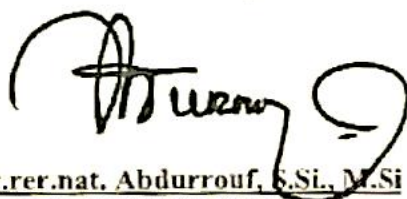
**BAGAS ADI SAPUTRA**

155090300111008

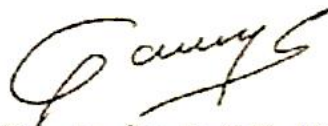
Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji  
pada tanggal **1.7 DEC 2019**  
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang fisika

Pembimbing I

Pembimbing II



Dr. rer. nat. Abdurrouf, S.Si., M.Si  
NIP. 197209031994121001



Gancang Saroja, S.Si., M.T.  
NIP. 197711182005011001

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Fisika  
Fakultas IPA Universitas Brawijaya



Prof. Dr. rer. nat. Mohammad Nurhuda  
NIP. 196409101990021001



## LEMBAR PERNYATAAN

**Saya yang bertanda tangan di bawah ini :**

**Nama : Bagas Adi Saputra**

**NIM : 155090300111008**

**Jurusan : Fisika**

**Penulis Skripsi Berjudul :**

**SOLUSI ANALITIK DAN NUMERIK UNTUK MODEL  
TRANSFER RADIASI SATU DIMENSI DENGAN  
MENGUNAKAN METODE KISI BOLTZMANN**


**Dengan ini menyatakan bahwa :**

1. Isi dari skripsi yang saya tulis dan saya buat adalah benar-benar karya saya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam skripsi ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil menjiplak, maka saya akan bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

**Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.**

**Malang, 10 Desember 2019**

**Yang menyatakan,**



**Bagas Adi Saputra**

**155090300111008**





## **SOLUSI ANALITIK DAN NUMERIK UNTUK MODEL TRANSFER RADIASI SATU DIMENSI DENGAN MENGGUNAKAN METODE KISI BOLTZMANN**

### **ABSTRAK**

Radiasi adalah salah satu bidang kajian fisika yang memiliki banyak aplikasi. Tetapi, untuk menyelesaikan persamaan transfer radiasi secara analitik tidaklah mudah, karena dibutuhkan penyelesaian persamaan yang memiliki hingga tujuh variabel (tiga variabel ruang, dua variabel arah radiasi foton, satu variabel frekuensi, dan satu variabel waktu). Oleh karena itu, diperlukan cara untuk dapat menyelesaikan persamaan tersebut dengan mudah. Salah satu alternatif yang dapat dilakukan yaitu dengan menggunakan metode numerik. Dalam skripsi ini, metode kisi Boltzmann digunakan untuk menyelesaikan persamaan transfer radiasi secara numerik. Model fisis yang digunakan dalam skripsi ini adalah transfer radiasi dalam satu dimensi dan mengabaikan efek penyebaran. Hasil solusi numerik kemudian dibandingkan dengan hasil solusi analitik. Perbandingan kedua hasil menunjukkan kesesuaian antara solusi numerik dan solusi analitik.

**Kata kunci :** Transfer Radiasi, Kisi Boltzmann





# ANALYTICAL AND NUMERICAL SOLUTION FOR ONE DIMENSIONAL RADIATIVE TRANSFER MODEL USING LATTICE BOLTZMANN METHOD

## ABSTRACT

Radiation is a field of physics that has many applications. However, it's difficult to solve radiation transport equation analytically, because it requires to solve equations that have up to seven variables (three variables for space, two variables for direction of photon transfer, one variable for frequency of radiation and one variable for time). Therefore, we need a way to be able to solve these equations easily. One alternative that can be done is by using numerical methods. In this thesis, lattice Boltzmann method is used to solve radiation transfer problem numerically. The physical model used in this thesis is the transfer of radiation in one dimension and neglect scattering effect. The results of numerical solutions are then compared with the results of analytic solutions. Comparison of the two results shows the compatibility between numerical solutions and analytical solutions.

**Keywords:** Radiation Transport, Lattice-Boltzmann





## KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim, Alhamdulillah robbil ‘alamin. Segala puji dan syukur kepada Allah Subhanahu wa Ta’ala, Tuhan semesta alam yang telah mencurahkan karunia dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **“SOLUSI ANALITIK DAN NUMERIK UNTUK MODEL TRANSFER RADIASI SATU DIMENSI DENGAN MENGGUNAKAN METODE KISI BOLTZMANN”** sebagai salah satu persyaratan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Fisika.

Dengan selesainya karya tulis ini, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang memberikan banyak masukan dan dorongan :

1. Orang tua tercinta, Ibu Sariaty dan Bapak Manan Hadi Santoso dan Adikku, Arya Hadi Wicaksono dan seluruh keluarga besar yang senantiasa mendoakan dan mendukung penulisnya.
2. Dr.rer.nat. Abdurro’uf, S.Si., M.Si., sebagai dosen pembimbing pertama dan Gancang Saroja, S.Si., M.T., selaku pembimbing kedua yang telah memberikan pengarahan dan masukan kepada penulis selama penyusunan skripsi.
3. Segenap Dosen Jurusan Fisika Universitas Brawijaya yang telah memberikan banyak ilmu selama penulis menempuh pendidikan sarjana.
4. Teman-teman Satu Perjuangan Fisika Angkatan 2015, teman-teman Penghuni Rumah Tercinta (*Student Activity Center*), dan semua sahabat saya serta semua pihak-pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu atas kebersamaan, dorongan dan bantuan kepada penulis.
5. Pembaca yang telah meluangkan waktunya untuk membaca skripsi ini.

Penulis sadar bahwa setiap karya manusia tidak ada yang sempurna, sehingga penulis yakin bahwa dalam pembuatan karya tulis ini masih terdapat banyak kekurangan. Penulis berharap bahwa dari para pembaca untuk memberikan kritik dan saran yang bersifat membangun.

Semoga karya tulis ini dapat memberikan manfaat dan inspirasi yang dapat memberikan sumbangan bagi kemajuan ilmu pengetahuan serta peradaban manusia yang baik.



Malang, 10 Desember 2019

Penulis



## DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI.....	i
LEMBAR PERNYATAAN.....	iii
ABSTRAK.....	v
ABSTRACT.....	vii
KATA PENGANTAR.....	ix
DAFTAR ISI.....	xi
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR LAMPIRAN.....	xv
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1. Latar Belakang.....	1
1.2. Rumusan Masalah.....	3
1.3. Batasan Masalah.....	3
1.4. Tujuan Penelitian.....	3
1.5. Manfaat Penelitian.....	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	5
2.1. Radiasi.....	5
2.2. Transfer Radiasi.....	6
2.2.1. Kajian Gelombang.....	9
2.2.2. Kajian Partikel.....	10
2.3. Persamaan Transport Boltzmann.....	11
2.4. Metode Kisi Boltzmann.....	13
BAB III METODE PENELITIAN.....	15
3.1. Waktu dan Tempat Pelaksanaan.....	15
3.2. Alat.....	15
3.3. Tahapan Penelitian.....	15
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN.....	19
4.1. Model Fisis.....	19
4.2. Solusi Analitik.....	21
4.3. Solusi Numerik.....	24
4.4. Hasil.....	28
BAB V PENUTUP.....	33
5.1. Kesimpulan.....	33



5.2. Saran.....33

DAFTAR PUSTAKA.....35

LAMPIRAN.....37





## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Relasi sudut ruang dan setengah bola.....	7
Gambar 2.2 Intensitas radiasi menjalar melewati suatu volume .....	8
Gambar 2.3 Spektrum radiasi elektromagnetik dalam panjang gelombang.....	10
Gambar 2.4 Vektor posisi dan kecepatan gerak partikel .....	12
Gambar 3.1 Flowchart metode kisi Boltzmann.....	16
Gambar 4.1 Skema geometri model fisis .....	19
Gambar 4.2 Skema diskrit model fisis .....	20
Gambar 4.3 Geometri arah radiasi terhadap koordinat ruang .....	23
Gambar 4.4 Skema proses <i>colliding</i> .....	26
Gambar 4.5 Skema proses <i>streaming</i> .....	26
Gambar 4.6 Grafik intensitas spesifik (a) hasil penelitian dan (b) hasil literatur (Ma, Dong and Tan, 2011) untuk $ka = 0,1 \text{ m}^{-1}$ .....	28
Gambar 4.7 Grafik intensitas spesifik (a) hasil penelitian dan (b) hasil literatur (Ma, Dong and Tan, 2011) untuk $ka = 1 \text{ m}^{-1}$ .....	29
Gambar 4.8 Grafik intensitas spesifik (a) hasil penelitian dan (b) hasil literatur (Ma, Dong and Tan, 2011) untuk $ka = 10 \text{ m}^{-1}$ .....	29
Gambar 4.9 Grafik perbandingan hasil analitik dan numerik untuk $ka = 0,1; 1, \text{ dan } 10 \text{ m}^{-1}$ pada arah gerak radiasi $\mu$ positif .....	30



## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Hasil Penelitian .....	37
Lampiran 2. Kode Program .....	38







## **SOLUSI ANALITIK DAN NUMERIK UNTUK MODEL TRANSFER RADIASI SATU DIMENSI DENGAN MENGUNAKAN METODE KISI BOLTZMANN**

### **ABSTRAK**

Radiasi adalah salah satu bidang kajian fisika yang memiliki banyak aplikasi. Tetapi, untuk menyelesaikan persamaan transfer radiasi secara analitik tidaklah mudah, karena dibutuhkan penyelesaian persamaan yang memiliki hingga tujuh variabel (tiga variabel ruang, dua variabel arah radiasi foton, satu variabel frekuensi, dan satu variabel waktu). Oleh karena itu, diperlukan cara untuk dapat menyelesaikan persamaan tersebut dengan mudah. Salah satu alternatif yang dapat dilakukan yaitu dengan menggunakan metode numerik. Dalam skripsi ini, metode kisi Boltzmann digunakan untuk menyelesaikan persamaan transfer radiasi secara numerik. Model fisis yang digunakan dalam skripsi ini adalah transfer radiasi dalam satu dimensi dan mengabaikan efek penyebaran. Hasil solusi numerik kemudian dibandingkan dengan hasil solusi analitik. Perbandingan kedua hasil menunjukkan kesesuaian antara solusi numerik dan solusi analitik.

**Kata kunci :** Transfer Radiasi, Kisi Boltzmann

# **ANALYTICAL AND NUMERICAL SOLUTION FOR ONE DIMENSIONAL RADIATIVE TRANSFER MODEL USING LATTICE BOLTZMANN METHOD**

## **ABSTRACT**

Radiation is a field of physics that has many applications. However, it's difficult to solve radiation transport equation analytically, because it requires to solve equations that have up to seven variables (three variables for space, two variables for direction of photon transfer, one variable for frequency of radiation and one variable for time). Therefore, we need a way to be able to solve these equations easily. One alternative that can be done is by using numerical methods. In this thesis, lattice Boltzmann method is used to solve radiation transfer problem numerically. The physical model used in this thesis is the transfer of radiation in one dimension and neglect scattering effect. The results of numerical solutions are then compared with the results of analytic solutions. Comparison of the two results shows the compatibility between numerical solutions and analytical solutions.

**Keywords:** Radiation Transport, Lattice-Boltzmann

## BAB I PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang

Radiasi merupakan salah satu cara penyaluran energi panas. Berbeda dengan cara penyaluran energi panas yang lain, yaitu konduksi dan konveksi, radiasi dapat berlangsung meskipun tidak ada medium sebagai perantara perpindahan panas, karena energi panas dibawa oleh gelombang elektromagnetik, atau foton, yang dapat berjalan sangat jauh tanpa berinteraksi dengan medium. Semua benda secara terus menerus memancarkan dan menyerap gelombang elektromagnetik, atau foton, dengan cara menurunkan atau menaikkan tingkat energi molekulernya. Kekuatan dan panjang gelombang pancaran bergantung pada temperatur benda. Karena sifat ini, radiasi memiliki banyak aplikasi dalam berbagai bidang fisika, seperti pada aplikasi pembakaran (tungku pembakaran, mesin, nozzle roket, dll.), reaksi nuklir (matahari, reaktor nuklir, dan bom nuklir), analisis pemanasan global dan panel surya.

Tetapi, untuk menganalisis radiasi tidaklah mudah. (Modest, 2013) dalam bukunya mengatakan persamaan yang digunakan untuk menganalisis radiasi memerlukan hingga tujuh variabel (frekuensi radiasi, tiga koordinat ruang, dua koordinat untuk mendeskripsikan arah berjalan foton, dan waktu). Untuk memperoleh solusi analitik dari fungsi yang memiliki banyak variabel tentu tidaklah mudah, bahkan kemungkinan besar solusi analitik tidak bisa diperoleh karena pertimbangan waktu yang diperlukan. Oleh karena itu, diperlukan metode lain untuk menyelesaikan solusi dari persamaan transfer radiasi. Salah satu caranya yaitu menggunakan metode numerik. Metode numerik merupakan metode yang digunakan untuk menyelesaikan kasus fisis dengan menggunakan bantuan alat hitung otomatis atau



komputer. Metode numerik merupakan metode alternatif pengganti metode analitik, sehingga diharapkan dapat diperoleh solusi dari suatu permasalahan fisika yang tidak diselesaikan oleh metode analitik. Keunggulan dari penggunaan metode numerik yaitu dapat meningkatkan efektifitas dalam menyelesaikan masalah fisika.

Keunggulan dari penggunaan metode numerik akan dirasakan maksimal ketika pemilihan jenis metode numerik yang akan digunakan mendapat perhatian khusus dan kajian mendalam. Berbagai macam jenis metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah transfer radiasi. Salah satu cara yang biasa digunakan yaitu metode volume hingga (*finite volume method/FVM*) seperti yang digunakan pada penelitian yang dilakukan oleh Mishra dan Roy (Mishra and Roy, 2007), dan Mondal dan Mishra (Mondal and Mishra, 2009). Metode lain yang biasa digunakan yaitu metode elemen hingga (*finite element method/FEM*), metode DOM, dan metode Monte Carlo (Tan *et al.*, 2009) (Modest, 2013). Akhir – akhir ini, muncul metode baru yang masih jarang digunakan peneliti untuk menyelesaikan kasus transfer radiasi. Metode tersebut adalah metode kisi Boltzmann (*lattice Boltzmann method/LBM*). Asalnya, metode kisi Boltzmann merupakan metode yang digunakan untuk menyelesaikan kasus dinamika fluida (Mohamad, 2019), tetapi penelitian terbaru menunjukkan bahwa metode kisi Boltzmann juga dapat digunakan untuk menyelesaikan kasus transfer radiasi. Contoh yaitu penelitian yang dilakukan oleh Mishra dan Lankadasu (Mishra and Lankadasu, 2005), Mishra, Lankadasu dan Beronov (Mishra, Lankadasu and Beronov, 2005), Mishra dan Roy (Mishra and Roy, 2007), dan Ma, Dong, dan Tan (Ma, Dong and Tan, 2011).

Dalam penelitian ini, metode numerik yang digunakan adalah metode kisi Boltzmann. Metode kisi Boltzmann merupakan metode untuk menyelesaikan kasus fisika dinamis, seperti transfer panas dan dinamika fluida. Metode ini diturunkan dari



persamaan transfer Boltzmann, dengan mendefinisikan operator tumbukannya menggunakan pendekatan Bhatnagar, Gross, dan Krook (BGK). Metode ini dikatakan memiliki keunggulan daripada metode klasik untuk pemecahan kasus transfer radiasi, oleh karena itu, pada penelitian ini akan digunakan metode kisi Boltzmann sebagai metode yang digunakan untuk menyelesaikan solusi numerik.

## 1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimanakah solusi analitik untuk model fisis transfer radiasi satu dimensi?
2. Bagaimanakah solusi numerik untuk model fisis transfer radiasi satu dimensi dengan menggunakan metode kisi Boltzmann?
3. Bagaimanakah perbandingan solusi analitik dan numerik untuk model fisis transfer radiasi satu dimensi?

## 1.3. Batasan Masalah

Model fisis yang digunakan dalam penelitian ini adalah kasus transfer radiasi satu dimensi sederhana. Oleh karena itu, solusi analitik dan numerik pada penelitian ini hanya menganalisis model fisis transfer radiasi satu dimensi, frekuensi seragam, mengabaikan efek relativistik (indeks bias medium seragam) dan mengabaikan proses penyebaran (*scattering*).

## 1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian yang dilakukan adalah:

1. Mendapatkan solusi analitik dan numerik dalam memecahkan kasus model fisis transfer radiasi satu dimensi.
2. Mendapatkan perbandingan dari solusi analitik dan numerik.

## 1.5. Manfaat Penelitian

Diharapkan dapat terbentuk pemahaman proses fisika terkait kasus model fisis transfer radiasi dan dapat mencari solusi analitik dan numerik pada setiap kasus fisis yang serupa.



## BAB II TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1. Radiasi

Energi diradiasikan oleh seluruh benda setiap saat. Radiasi tersebut berasal dari kombinasi antara osilasi elektron dan molekular, dan juga vibrasi kisi benda yang memancarkan radiasi, yang kemudian disebut sebagai peristiwa pancaran radiasi (*emission*). Energi yang telah diradiasikan menjalar dalam bentuk gelombang elektromagnetik (GEM), tanpa memperhatikan apakah ada materi (medium) atau tidak (vakum) dalam perjalanannya. Ketika gelombang ini berinteraksi dengan benda lain, gelombang tersebut akan kehilangan sebagian energinya dan memberikan energi tersebut untuk meningkatkan osilasi elektron dan molekular atau vibrasi kisi benda yang menerima radiasi. Hal ini yang disebut sebagai penyerapan (*absorption*). Interaksi antara penyerapan dan pemancaran radiasi melalui gelombang elektromagnetik merupakan esensi dari transfer radiasi. (Howell, Menguc and Siegel, 2016)

Untuk sistem yang memiliki jarak transfer radiasi lebih besar daripada panjang gelombang radiasi, maka energi radiasi dapat dinyatakan dalam bentuk quanta, partikel tanpa massa yang disebut sebagai foton. Foton atau bentuk partikel dari cahaya didefinisikan oleh Albert Einstein pada tahun 1905 untuk menjelaskan efek fotolistrik. Besar energi foton mengacu pada rumusan kuantisasi yang dinyatakan oleh Max Planck, bahwa setiap foton dengan frekuensi  $\nu$  membawa energi sebesar

$$e = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad (2.1)$$

dimana  $h$  merupakan konstanta Planck yang bernilai  $6,626069 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ . Perlu diketahui bahwa frekuensi gelombang elektromagnetik berbanding terbalik terhadap panjang gelombang, sehingga radiasi dengan panjang gelombang pendek



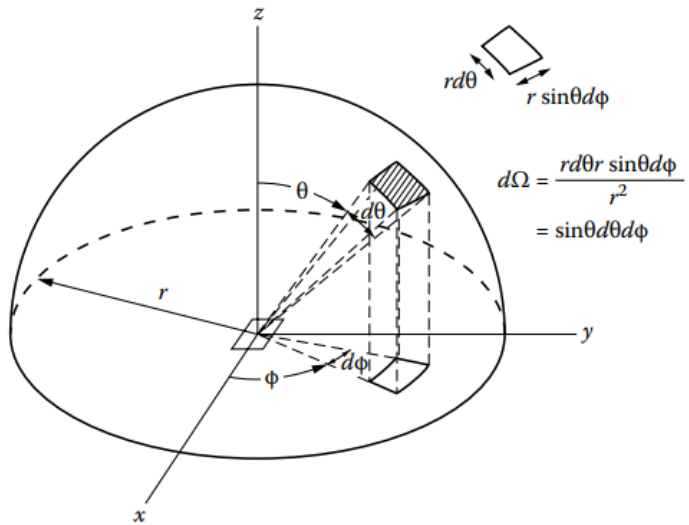
membawa energi foton lebih besar, seperti sinar gamma dan sinar  $x$  (Cengel and Ghajar, 2015).

## 2.2. Transfer Radiasi

Sebelumnya telah diketahui bahwa radiasi merupakan bentuk pancaran energi. Energi tersebut kemudian menjalar keluar dari sumber. Penjalaran dan interaksinya dengan medium merupakan kajian pada bab transfer radiasi. Tujuan proses perhitungan transfer radiasi adalah untuk menentukan besar energi yang meninggalkan suatu permukaan/emitor dan mengenai permukaan yang lain setelah melewati suatu medium, seperti gas, partikel lain, atau bahkan vakum. Jika medium tersebut merubah jumlah radiasi yang mencapai permukaan selanjutnya, maka medium tersebut disebut “*participating*” (Howell, Menguc and Siegel, 2016).

Dalam analisisnya, terdapat dua besaran yang sangat berpengaruh dan dibutuhkan dalam menyelesaikan kasus transfer radiasi. Besaran tersebut yaitu sudut ruang (*solid angle*) dan intensitas radiasi (*radiative intensity*). Sudut ruang merupakan besaran yang menyatakan sudut radiasi pada ruang 3 dimensi. Untuk memahami sudut radiasi, dapat dibayangkan suatu radiasi pada arah  $S$  yang keluar dari permukaan  $dA$ , yang dikelilingi oleh setengah bola dengan radius  $R$  seperti pada Gambar 2.1.





Gambar 2.1 Relasi sudut ruang dan setengah bola

Setengah bola tersebut memiliki luas permukaan  $2\pi R^2$ , membatasi sudut ruang sebesar  $2\pi$  steradian (sr). Untuk  $R = 1$ , maka sudut ruang sama dengan luas permukaan setengah bola. Arah diukur dari sudut zenit dan sudut azimut. Sudut zenit  $\theta$  diukur dari arah normal terhadap  $dA$ , dan sudut azimut  $\phi$  diukur dari sumbu  $x$ . Secara definisi, sebuah sudut ruang dimanapun diatas  $dA$  sama dengan luas area yang terkena pada ruang setengah bola. Seperti yang ditunjukkan pad Gambar 2.1, luas yang terkena pada permukaan setengah bola dinyatakan dalam persamaan

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi. \quad (2.2)$$

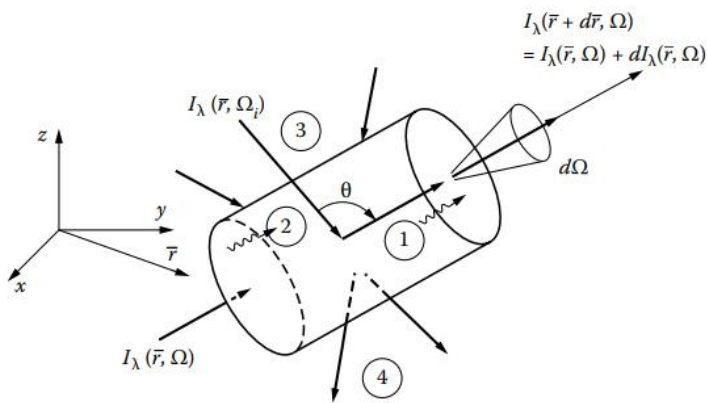
Besar sudut yang keluar dari luas  $dA$  (sudut ruang) dinyatakan oleh  $d\Omega$ . Integral  $d\Omega$  pada semua sudut yang melingkupi permukaan setengah bola memberikan hasil  $4\pi$  steradian (sr) (Howell, Menguc and Siegel, 2016).

Intensitas radiasi didefinisikan sebagai energi radiasi  $dQ$  per satuan luas  $dA$  dalam arah  $S$ , per satuan sudut ruang  $d\Omega$  disekitar

$\Omega$ , per interval waktu  $dt$  dalam satuan waktu  $t$ , dan dalam rentang kecil panjang gelombang  $d\lambda$  disekitar  $\lambda$ . Persamaannya dituliskan dalam bentuk

$$I(S, \Omega, t) = \frac{dQ(S, \Omega, t)}{dAd\lambda d\Omega dt} \quad (2.3)$$

Satuan intensitas radiasi adalah  $W/(m^2.sr)$ . Intensitas merupakan fungsi yang memiliki hingga tujuh variabel yang berbeda, yaitu tiga koordinat ruang ( $x, y, z$ ), dua koordinat angular ( $\theta, \phi$ ), panjang gelombang ( $\lambda$ ), dan waktu ( $t$ ).



Gambar 2.2 Intensitas radiasi menjalar melewati suatu volume

Gambar 2.2 merupakan skema proses transfer radiasi yang dinyatakan dalam besaran intensitas. Energi radiasi dapat berkurang karena proses penyerapan oleh medium (1) dan juga oleh penyebaran (4), tetapi energi juga dapat bertambah oleh peristiwa penyebaran arah  $\Omega$  (3) dan proses emisi (2). Melalui skema tersebut dapat diketahui perubahan energi radiasi akibat interaksi dengan medium. Skema ini yang kemudian menjelaskan proses transfer radiasi, dan dapat diturunkan persamaan transfer radiasi dalam besaran intensitas (Howell, Menguc and Siegel, 2016).

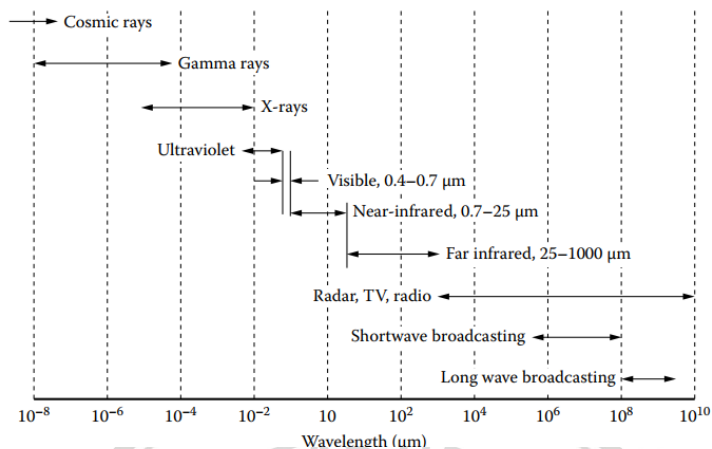
Sebelumnya telah diketahui bahwa radiasi dibawa oleh suatu materi yang memiliki sifat gelombang dan partikel. Sehingga dalam memahami peristiwa radiasi, terdapat dua jenis kajian tentang materi pembawa radiasi, yaitu kajian gelombang, dan kajian partikel. Kajian gelombang menyatakan bahwa materi pembawa radiasi adalah bersifat gelombang, yang memiliki properti temperatur, dan panjang gelombang atau frekuensi. Kajian partikel menyatakan bahwa materi pembawa radiasi adalah foton, suatu partikel tanpa massa yang memiliki properti momentum.

## 2.2.1. Kajian Gelombang

Kajian secara gelombang menganalisis bentuk transfer radiasi dalam bentuk gelombang. Kajian ini akan dibahas secara ringkas karena bukan menjadi sumber pada penelitian ini. Konsep kajian ini semakin berkembang sejak Maxwell menemukan persamaan gelombang elektromagnetik pada akhir abad 19. Radiasi gelombang elektromagnetik (GEM) mengikuti hukum untuk osilasi gelombang yang tegak lurus terhadap arah rambat. Energi yang dipancarkan oleh objek merupakan gabungan antara medan listrik dan medan magnet gelombang. Dua medan ini selalu tegak lurus terhadap yang lain, dan tegak lurus terhadap arah rambat. Persamaan Maxwell menyatakan bahwa sinar merupakan gelombang, dan begitu juga energi radiasi.

Properti radiasi dalam kajian ini harus ditetapkan dalam suatu panjang gelombang atau frekuensi. Radiasi GEM dapat diklasifikasikan berdasarkan panjang gelombang  $\lambda$ , atau frekuensi  $\nu$ , yang memiliki relasi  $\nu = c/\lambda$ . Klasifikasi GEM ditunjukkan oleh Gambar 2.3 (Howell, Menguc and Siegel, 2016).





Gambar 2.3 Spektrum radiasi elektromagnetik dalam panjang gelombang

### 2.2.2. Kajian Partikel

Kajian partikel dimulai dengan memahami konsep medan radiasi, dan analisis transfer radiasi. Medan radiasi merupakan suatu daerah yang dilewati oleh radiasi dalam bentuk apapun. Sebelumnya telah diketahui bahwa foton pada frekuensi  $\nu$  membawa energi sebesar  $h\nu$ , dengan  $h$  adalah konstanta Planck. Foton tersebut memiliki momentum sebesar  $h\nu/c$ , dimana  $c$  adalah kecepatan cahaya pada ruang hampa.

Diperlukan setidaknya enam variabel untuk mengetahui posisi foton pada waktu  $t$ , yaitu tiga variabel posisi dan tiga variabel momentum. Tiga variabel posisi dinyatakan dalam bentuk vektor  $\mathbf{r}$ . Sedangkan untuk variabel momentum, digunakan tiga variabel yang setara, yaitu variabel frakuensi dan dua variabel arah perjalanan foton yang dinyatakan dalam bentuk vektor  $\mathbf{\Omega}$ . Kemudian, dari variabel-variabel tersebut dapat didefinisikan posisi foton dengan fungsi distribusi.

$$f \equiv f(\mathbf{r}, \nu, \mathbf{\Omega}, t) \quad (2.4)$$

dan



$$dn = f dr dv d\Omega \quad (2.5)$$

dimana  $dn$  adalah jumlah foton (pada waktu  $t$ ) pada suatu titik  $r$  dalam rentang volume  $dr$ , dengan frekuensi  $\nu$  dalam rentang frekuensi  $d\nu$ , dan menjalar dalam arah  $\Omega$  pada sudut ruang  $d\Omega$ . Kemudian didefinisikan besaran intensitas spesifik radaiasi, untuk menggantikan besaran fungsi distribusi dengan relasi

$$I(r, \nu, \Omega, t) = ch\nu f(r, \nu, \Omega, t). \quad (2.6)$$

Kemudian didefinisikan densitas energi

$$E_\nu = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I(r, \nu, \Omega, t) d\Omega, \quad (2.7)$$

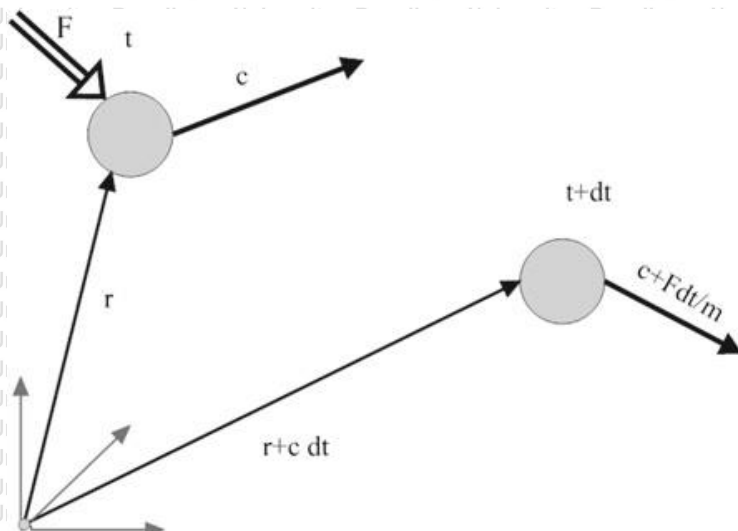
dan fluks radiasi

$$F_\nu = \int_{4\pi} \Omega I(r, \nu, \Omega, t) d\Omega \quad (2.8)$$

(Pomraning, 1973).

### 2.3. Persamaan Transport Boltzmann

Tahun 1868, fisikawan Ludwig Eduard Boltzmann menjelaskan bahwa properti molekul dan atom (properti mikroskopik) dari suatu materi dapat menentukan properti makroskopiknya. Boltzmann mendefinisikan suatu fungsi distribusi, yaitu probabilitas untuk menemukan partikel dalam rentang kecepatan tertentu dan rentang lokasi tertentu pada waktu yang ditentukan, untuk menggantikan proses pelabelan masing-masing partikel seperti yang terjadi pada simulasi dinamika molekuler. Fungsi ditribusi dinyatakan dalam  $f(r, c, t)$  yang menyatakan jumlah molekul pada waktu  $t$ , yang terletak antara  $r + dr$  dan memiliki kecepatan antara  $c$  dan  $c + dc$ . Jika materi tersebut dikenai gaya luar  $F$ , maka kecepatan materi akan berubah dari  $c$  menjadi  $c + Fdt$  dan posisinya juga berubah dari  $r$  menjadi  $r + cdt$ .



Gambar 2.4 Vektor posisi dan kecepatan gerak partikel

Jumlah molekul  $f(r, c, t)$  sebelum dikenai gaya luar sama dengan jumlah molekul setelah terjadi gangguan,  $f(r + c dt, c + F dt, t + dt)$ , jika tidak ada tumbukan (*collisions*) antar molekul. Sehingga

$$f(r + c dt, c + F dt, t + dt) dr dc - f(r, c, t) dr dc = 0 \quad (2.9)$$

Tetapi jika terjadi tumbukan, maka akan ada perbedaan antara jumlah molekul antara interval  $dr dc$ . Tingkat perubahan fungsi distribusi antara keadaan akhir dengan keadaan awal disebut dengan operator tumbukan (*collision operator*),  $\Omega$ . Persamaan (2.9) berubah menjadi

$$f(r + c dt, c + F dt, t + dt) dr dc - f(r, c, t) dr dc = \Omega(f) dr dc dt \quad (2.10)$$

Persamaan (2.10) dibagi dengan  $dr dc dt$  menghasilkan

$$\frac{df}{dt} = \Omega(f) \quad (2.11)$$

Persamaan tersebut menyatakan bahwa tingkat perubahan fungsi distribusi ditentukan oleh proses tumbukan. Karena  $f$  merupakan fungsi terhadap  $r, c$ , dan  $t$ , maka  $df$  dapat dituliskan dalam bentuk

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial c} dc + \frac{\partial f}{\partial t} dt \quad (2.12)$$

Sehingga persamaan (2.11) menjadi

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial f}{\partial c} \frac{dc}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \Omega \quad (2.13)$$

$dc/dt$  merupakan percepatan,  $a$ , dapat dihubungkan dengan gaya yang bekerja pada benda melalui Hukum Newton kedua,  $a = F/m$ . Persamaan (2.13) menjadi

$$\frac{\partial f}{\partial r} c + \frac{\partial f}{\partial c} \frac{F}{m} + \frac{\partial f}{\partial t} = \Omega \quad (2.14)$$

Persamaan (2.14) merupakan bentuk umum persamaan transport Boltzmann.

## 2.4. Metode Kisi Boltzmann

Metode Kisi Boltzmann merupakan salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan transport (panas, massa, dan momentum) secara numerik, seperti difusi, adveksi, aliran fluida, dll. Sistem transport dilihat dari sudut pandang mesoskopis (rentang antara mikroskopis dan makroskopis), yaitu pergerakan sekumpulan partikel yang dinyatakan dalam bentuk distribusi partikel. Sekumpulan partikel tersebut terus berinteraksi dengan sekumpulan partikel yang lain.

Metode ini didasarkan pada persamaan transport Boltzmann, yang mendeskripsikan perilaku statistik dari sistem yang tidak berada dalam keadaan setimbang. Untuk sistem yang tidak memiliki gaya luar, persamaan (2.14) dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \cdot \nabla f = \Omega \quad (2.15)$$

dimana  $f$  adalah fungsi distribusi partikel, yang bergerak pada kecepatan  $c$ . Untuk menyelesaikan persamaan tersebut,  $\Omega$  atau collision operator perlu diketahui.



Pada tahun 1954, Bhatnagar, Gross, dan Krook (BGK) mengenalkan model sederhana untuk operator tumbukan.

Operator tumbukan,  $\Omega$ , dinyatakan dalam bentuk

$$\Omega = \omega(f^{eq} - f) = \frac{1}{\tau}(f^{eq} - f) \quad (2.16)$$

dimana  $\tau$  merupakan faktor relaksasi (atau disebut waktu relaksasi). Fungsi distribusi setimbang dinyatakan oleh  $f^{eq}$  yang merupakan fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann. Kemudian persamaan Boltzmann berubah menjadi

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \cdot \nabla f = \frac{1}{\tau}(f^{eq} - f) \quad (2.17)$$

ruas kiri persamaan merupakan proses penalaran dan ruas kanan persamaan merupakan proses tumbukan. Dalam metode kisi Boltzmann, persamaan diatas didiskritkan sehingga persamaannya menjadi

$$\begin{aligned} & \frac{f_i(r + c_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(r, t)}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{\tau} [f_i^{eq}(r, t) - f_i(r, t)] \\ & f_i(r + c_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(r, t) \\ &= \frac{\Delta t}{\tau} [f_i^{eq}(r, t) - f_i(r, t)] \end{aligned} \quad (2.18)$$

Persamaan tersebut merupakan persamaan umum dalam metode Kisi Boltzmann. Untuk kasus dengan gaya luar, maka Persamaan 2.18 berubah menjadi

$$\begin{aligned} & f_i(r + c_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(r, t) \\ &= \frac{\Delta t}{\tau} [f_i^{eq}(r, t) - f_i(r, t)] + Q(r) \end{aligned} \quad (2.19)$$

(Mohamad, 2019).



## BAB III METODE PENELITIAN

### 3.1. Waktu dan Tempat Pelaksanaan

Penelitian ini dilaksanakan pada Oktober 2019 sampai Desember 2019 di Laboratorium Komputasi, dan di kediaman penulis di Desa Wonokerso, Kecamatan Pakisaji, Kabupaten Malang.

### 3.2. Alat

Alat yang digunakan dalam penelitian adalah Laptop ACER E5-475G dengan spesifikasi prosesor Intel Core i5-7200U Quad Core @ 2.50 GHz, RAM 4 GB, NVMe ADATA SX8200NP 240 GB, dan VGA NVIDIA GeForce 940MX 2 GB.

### 3.3. Tahapan Penelitian

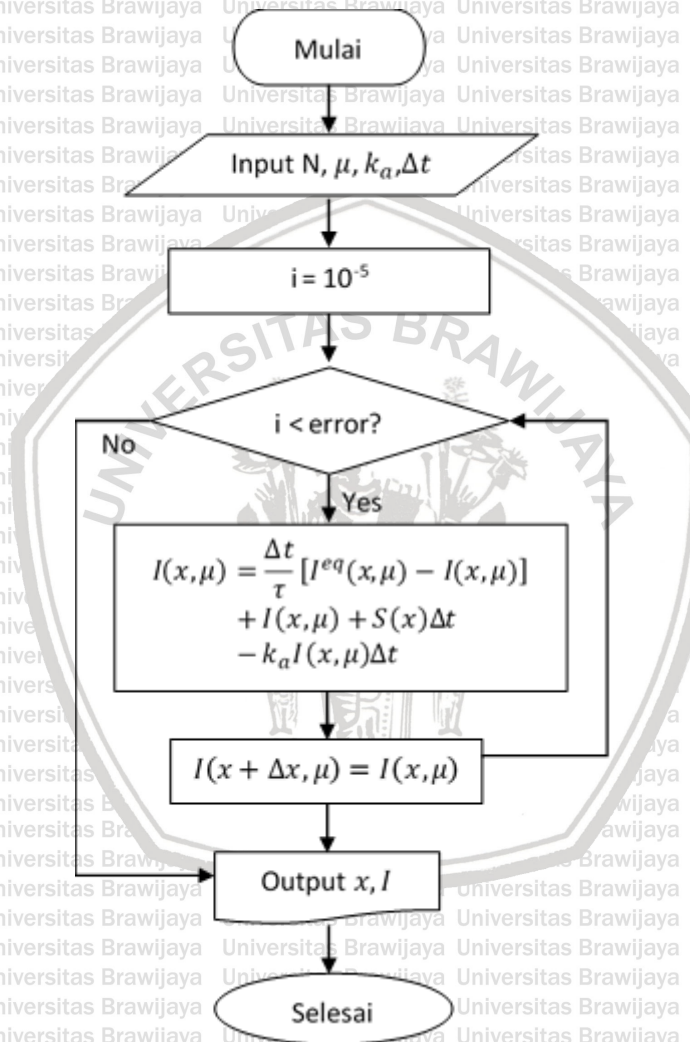
Penelitian ini dilakukan dengan tahapan sebagai berikut:

1. Menentukan model fisis
2. Mencari solusi analitik
3. Mencari solusi numerik
4. Membandingkan hasil solusi analitik dengan solusi numerik

Tahapan penelitian pertama adalah penentuan model fisis. Model fisis ditentukan sesuai dengan kasus fisika yang ingin diteliti. Dalam penelitian ini, model fisis yang digunakan adalah peristiwa radiasi foton dalam satu dimensi dengan mengabaikan efek penyebaran. Asumsi yang diperlukan yaitu foton bergerak dalam satu dimensi sumbu  $x$ , dengan arah radiasi  $\mu = \cos \theta$ , memiliki fungsi sumber  $S(x)$ , dan mengalami proses penyerapan sebesar  $k_a$ . Besaran yang dicari adalah  $I(x, \mu)$  yang merupakan intensitas spesifik foton pada titik  $x$  dan arah  $\mu$ .

Tahapan penelitian kedua yaitu mencari solusi analitik. Solusi analitik diperoleh dengan cara menurunkan persamaan umum transfer radiasi, kemudian menambahkannya dengan asumsi —

asumsi, sehingga dihasilkan persamaan khusus untuk model. Persamaan khusus model kemudian diselesaikan menggunakan metode persamaan diferensial orde 1 sehingga didapatkan solusi analitik untuk model.



Gambar 3.1 Flowchart metode kisi Boltzmann

Tahapan penelitian ketiga yaitu mencari solusi numerik. Solusi analitik diperoleh dengan cara memecah bentuk persamaan khusus model dalam bentuk diskrit, dan kemudian menyelesaikannya menggunakan metode kisi Boltzmann seperti pada Gambar 3.1

Tahapan penelitian keempat yaitu membandingkan hasil solusi analitik dengan solusi numerik. Model divariasikan pada 3 nilai konstanta penyerapan ( $k_a$ ) yang berbeda, yaitu  $k_a = 0,1, 1$  dan  $10 \text{ m}^{-1}$ , dan juga nilai arah ( $\mu$ ) yang berbeda, yaitu  $\mu = 0,5773503$  dan  $\mu = -0,5773503$ . Solusi analitik dan numerik yang sudah diperoleh kemudian di plot pada satu grafik yang sama untuk masing – masing nilai  $k_a$ .

Simulasi dilakukan menggunakan program komputer Google Colaboratory, yaitu suatu program yang disediakan Google untuk mengeksekusi perintah dengan bahasa pemrograman Python 3. Banyak keunggulan program ini daripada program yang lain yang serupa. Dari segi biaya, program ini murah karena program ini disediakan secara gratis oleh Google. Dari segi keamanan, program ini juga aman karena tersambung dengan *cloud* sehingga program yang telah dibuat dapat langsung tersimpan dengan aman. Dari segi kemudahan, program ini sangat memudahkan pengguna karena menggunakan bahasa pemrograman Python 3 memang mudah dalam segi perintah – perintah dan juga banyaknya *library* yang disediakan. Hasil dari program ini juga dapat diakses dengan mudah.



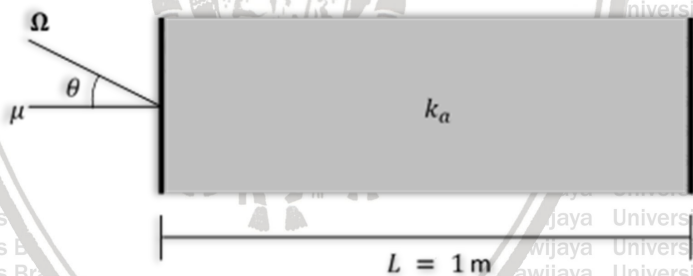


**(Halaman ini sengaja dikosongkan)**

## BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

### 4.1. Model Fisis

Tahap pertama yaitu memodelkan kasus fisisnya. Kasus fisis yang dimodelkan merupakan proses radiasi, dengan input merupakan pancaran sinar oleh suatu pemancar radiasi, kemudian pancaran tersebut dilewatkan pada *participating media*, yaitu medium yang dapat berintraksi dengan pancaran tersebut. Besarnya energi radiasi dinyatakan oleh intensitas spesifik radiasi,  $I$ , yang merupakan fungsi terhadap koordinat ruang dan koordinat sudut radiasi. Kemudian, model dibuat hanya memiliki satu dimensi ruang, yaitu pada arah sumbu  $x$ . Hanya dua interaksi radiasi yang diamati, yaitu proses penyerapan, dan pemancaran. Interaksi yang terjadi akan mempengaruhi nilai  $I$  pada setiap titik. Nilai  $I$  tersebut kemudian yang akan dicari menggunakan solusi analitik dan solusi numerik.



Gambar 4.1 Skema geometri model fisis

Secara geometri, model ditunjukkan oleh Gambar 4.1. Dua plat hitam diletakan sejajar, dengan jarak pisah antara dua plat sebesar 1 meter. Medium yang berinteraksi berada diantara kedua plat. Medium di set memiliki koefisien penyerapan,  $k_a$ , yang sama untuk setiap titik dimensi ruang.  $S(x)$  merupakan sumber

pancaran setiap titik  $x$ , dan  $k_a$  merupakan koefisien penyerapan dengan satuan  $\text{m}^{-1}$ .

Arah radiasi dinyatakan oleh variabel  $\Omega$ , yang mendefinisikan koordinat sudut rambatan radiasi. Arah radiasi membentuk sudut  $\theta$  terhadap koordinat ruang sumbu  $x$ . Besar sudut  $\theta$  ditentukan bernilai  $54,74^\circ$  atau  $0,955$  rad, sehingga  $\mu = \cos \theta = 0,5773503$ . Karena kasus model merupakan kasus satu dimensi, maka radiasi hanya merambat pada dua arah, yaitu arah rambat ke kanan ( $x$  positif) dan arah rambat ke kiri ( $x$  negatif).



Gambar 4.2 Skema diskrit model fisis

Gambar 4.2 menggambarkan skema diskrit dari model fisis. Setiap lingkaran merupakan sebuah kisi yang memiliki nilai. Lingkaran hitam merupakan representasi kisi pada batas, yang memiliki nilai tertentu sesuai syarat batas yang ditentukan. Sedangkan lingkaran putih merupakan representasi kisi pada medium, dimana proses interaksi antara sumber radiasi dengan medium terjadi. Setiap kisi ditentukan memiliki nilai pancaran sumber radiasi,  $S(x)$ , yang berbentuk fungsi tangga Heaviside. Fungsi tangga Heaviside,  $H(x)$ , merupakan fungsi yang menghasilkan nilai 0 untuk  $x < 0$  atau 1 untuk  $x \geq 0$ .  $S(x)$  dinyatakan dalam bentuk

$$S(x) = H(x - 0,5). \quad (4.1)$$

Angka 0,5 menunjukkan bahwa perubahan nilai fungsi tangga dimulai pada  $x$  sama dengan 0,5. Untuk nilai dibawah 0,5 maka akan bernilai 0, dan untuk nilai di atas sama dengan 0,5 akan bernilai 1.



Syarat batas diperlukan untuk mendefinisikan fungsi pada batas model. Syarat batas mendefinisikan besar intensitas spesifik pada daerah batas model. Besar intensitas spesifik pada batas model dinyatakan oleh persamaan

$$I(x_b, \mu) = S(x_b)/k_a \quad (4.2)$$

dengan  $x_b$  bernilai 0 untuk arah rambat radiasi ke kanan ( $x$  positif) dan bernilai 1 untuk arah rambat radiasi ke kiri ( $x$  negatif).

## 4.2. Solusi Analitik

Sebelumnya telah diketahui bahwa foton dapat dinyatakan dalam fungsi distribusi,  $f(\mathbf{r}, \Omega, t)$ . Persamaan transfer radiasi untuk foton tanpa gaya luar dapat dituliskan dalam bentuk persamaan transport Boltzmann sebagai berikut

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, \Omega, t)}{\partial t} + \nabla[\mathbf{v}f(\mathbf{r}, \Omega, t)] + \nabla_v[\mathbf{a}f(\mathbf{r}, \Omega, t)] = Q(\mathbf{r}, \Omega, t), \quad (4.3)$$

dimana  $Q(\mathbf{r}, \Omega, t)$  merupakan laju perubahan yang terjadi akibat efek interaksi radiasi. Untuk medium yang memiliki indeks bias seragam, faktor relativistik dapat diabaikan,  $\mathbf{a} = 0$ . Kecepatan  $\mathbf{v}$  didefinisikan bernilai  $c\Omega$ , sehingga Persamaan 4.3 dapat disederhanakan sebagai berikut

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, \Omega, t)}{\partial t} + c\nabla \cdot [\Omega f(\mathbf{r}, \Omega, t)] = Q(\mathbf{r}, \Omega, t). \quad (4.4)$$

Kasus dimodelkan dengan mengabaikan proses interaksi penyebaran (*scattering*), sehingga transfer radiasi hanya akan melibatkan proses pancaran dan serapan. Ruas kanan persamaan kemudian dapat dirubah untuk mendefinisikan proses pancaran dan proses serapan. Proses pancaran didefinisikan oleh variabel  $q(\mathbf{r}, \Omega, t)$ . Sedangkan proses penyerapan yaitu, jumlah foton yang terserap didefinisikan oleh persamaan  $k = ck_a f(\mathbf{r}, \Omega, t)$ . Substitusikan asumsi di atas pada persamaan, maka dihasilkan bentuk persamaan transfer radiasi

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, \Omega, t)}{\partial t} + c\Omega \cdot \nabla f(\mathbf{r}, \Omega, t) = q(\mathbf{r}, \Omega, t) - ck_a f(\mathbf{r}, \Omega, t). \quad (4.5)$$

Untuk kasus transfer radiasi oleh cahaya, maka fungsi distribusi dinyatakan dalam bentuk intensitas spesifik radiasi  $I(\mathbf{r}, \Omega, t) = chvf(\mathbf{r}, \Omega, t)$ . Bentuk ini disubstitusikan pada Persamaan (4.5) sehingga rumusnya berubah menjadi

$$\frac{1}{hv} \left[ \frac{\partial I(\mathbf{r}, \Omega, t)}{c \partial t} + \Omega \cdot \nabla I(\mathbf{r}, \Omega, t) \right] = q(\mathbf{r}, \Omega, t) - \frac{1}{hv} [k_a I(\mathbf{r}, \Omega, t)] \quad (4.6)$$

dimana  $h$  merupakan konstanta Planck. Kemudian didefinisikan besaran  $S(\mathbf{r}, \Omega, t)$  yang merupakan laju pancaran radiasi pada proses spontan, yang bernilai  $S(\mathbf{r}, \Omega, t) = hvq(\mathbf{r}, \Omega, t)$ . Substitusi pernyataan tersebut pada Persamaan (4.6)

$$\frac{1}{hv} \left[ \frac{\partial I(\mathbf{r}, \Omega, t)}{c \partial t} + \Omega \cdot \nabla I(\mathbf{r}, \Omega, t) \right] = \frac{S(\mathbf{r}, \Omega, t)}{hv} - \frac{k_a I(\mathbf{r}, \Omega, t)}{hv}, \quad (4.7)$$

kemudian seluruh ruas dikalikan dengan  $hv$ , Persamaan 4.8 disederhanakan menjadi bentuk

$$\frac{\partial I(\mathbf{r}, \Omega, t)}{c \partial t} + \Omega \cdot \nabla I(\mathbf{r}, \Omega, t) = S(\mathbf{r}, \Omega, t) - k_a I(\mathbf{r}, \Omega, t). \quad (4.8)$$

Persamaan 4.8 merupakan persamaan spesifik untuk transfer radiasi dengan mengabaikan proses perubahan percepatan akibat indeks bias, dan mengabaikan proses penyebaran.

Persamaan 4.8 kemudian digunakan untuk menentukan persamaan khusus model fisis. Model diamati pada  $t$  tertentu (tidak ada perubahan dalam variabel  $t$ ), sehingga suku pertama ruas kiri Persamaan 4.8 dapat dihilangkan. Model fisis merupakan model transfer radiasi satu dimensi, sehingga  $\mathbf{r}$  dirubah untuk mengacu pada satu sumbu koordinat saja. Pada model fisis dipilih sumbu  $x$  sebagai sumbu koordinat ruang model fisis. Persamaan 4.8 berubah menjadi

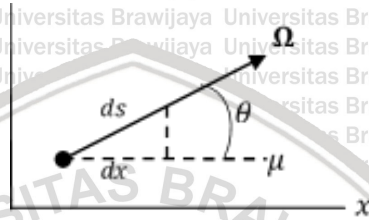
$$\Omega \cdot \nabla I(x, \Omega) = S(x, \Omega) - k_a I(x, \Omega). \quad (4.9)$$



Kemudian suku kedua ruas kiri Persamaan 4.9 dapat direpresentasikan dalam bentuk

$$\Omega \cdot \nabla I(x, \Omega) = \frac{\partial I(x, \Omega)}{\partial s} \quad (4.10)$$

dimana  $s$  merupakan jarak sepanjang arah  $\Omega$ . Model fisis menyatakan intensitas spesifik hanya bergantung pada koordinat ruang  $x$  dan koordinat sudut  $\theta$ , sudut antara  $\Omega$  dengan sumbu  $x$ .



Gambar 4.3 Geometri arah radiasi terhadap koordinat ruang

Gambar 4.3 menjelaskan relasi antara arah radiasi dengan koordinat ruang. Didefinisikan  $\mu = \cos \theta$ , dan besar intensitas spesifik dinyatakan pada koordinat ruang  $x$  dan koordinat sudut  $\mu$  yang merupakan representasi  $\Omega$  pada koordinat ruang. Ruas kanan Persamaan 4.11 dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{\partial I(x, \mu)}{\partial s} = \frac{\partial I(x, \mu)}{\partial x} \left( \frac{dx}{ds} \right) + \frac{\partial I(x, \mu)}{\partial \mu} \left( \frac{d\mu}{ds} \right) \quad (4.11)$$

Gambar 4.3 menunjukkan bahwa  $\frac{dx}{ds} = \cos \theta = \mu$ , dan  $\frac{d\mu}{ds} = 0$ . Substitusi Persamaan 4.11 ke Persamaan 4.10 sehingga Persamaan 4.9 menjadi

$$\mu \frac{dI(x, \mu)}{dx} = S(x) - k_a I(x, \mu) \quad (4.12)$$

Persamaan 4.12 merupakan persamaan khusus transfer radiasi model fisis. Persamaan ini yang akan digunakan untuk didapatkan solusi analitik untuk model fisis.



Solusi analitik untuk model fisis diselesaikan oleh Ma, et al pada penelitiannya tahun 2011. Hasilnya ditunjukkan oleh persamaan berikut

$$I(x, \mu) = I_b e^{-\frac{k_a}{\mu}(x-x_b)} + \frac{1}{k_a} \left[ 1 - e^{-\frac{k_a}{\mu}(x-0,5)} \right] H(x - 0,5) + \frac{1}{k_a} \left[ e^{-\frac{k_a}{\mu}(x-0,5)} - e^{-\frac{k_a}{\mu}(x-x_b)} \right] H(x_b - 0,5). \quad (4.13)$$

Dengan memasukkan variabel – variabel yang telah ditentukan pada model fisis ( $k_a, \mu, x_b$  dan  $I_b$ ), hasil solusi analitik kemudian dinyatakan dalam bentuk grafik untuk dibandingkan dengan solusi numerik.

### 4.3. Solusi Numerik

Solusi numerik diperoleh dengan cara mendiskritkan persamaan khusus model dan kemudian menyelesaikannya dengan metode kisi Boltzmann untuk kasus satu dimensi dua vektor kecepatan (D1Q2). Dari Persamaan 2.19 didapatkan persamaan umum metode kisi Boltzmann

$$f_i(r + c_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(r, t) = \frac{\Delta t}{\tau} [f_i^{eq}(r, t) - f_i(r, t)] + Q(r, t) \Delta t \quad (4.14)$$

Fungsi distribusi  $f_i(r, t)$  dirubah menjadi besaran intensitas spesifik,  $I_\Omega(r, t) = chv f_i(r, t)$  dan  $Q(r, t) = q(r, t) + w_\Omega f(r, t)$  sehingga Persamaan 4.14 menjadi

$$\frac{1}{chv} [I_\Omega(r + c\Omega \Delta t, t + \Delta t) - I_\Omega(r, t)] = \frac{\Delta t}{chv\tau} [I_\Omega^{eq}(r, t) - I_\Omega(r, t)] + \frac{\Delta t}{chv} [S(r, t) + w_\Omega I_\Omega(r, t)], \quad (4.15)$$

dimana  $S(\mathbf{r}, t) = chvq(\mathbf{r}, t)$  yang merupakan laju pancaran radiasi. Persamaan 4.15 dapat disederhanakan dan untuk kasus satu dimensi pada sumbu  $x$ , maka

$$\begin{aligned} I_{\Omega}(x + c\Omega\Delta t, t + \Delta t) - I_{\Omega}(x, t) \\ = \frac{\Delta t}{\tau} [I_{\Omega}^{eq}(x, t) - I_{\Omega}(x, t)] \\ + S_{\Omega}(x, t)\Delta t + w_{\Omega}I_{\Omega}(x, t)\Delta t, \end{aligned} \quad (4.16)$$

variabel  $\Omega$  merupakan arah rambat radiasi, bernilai 1 untuk arah rambat ke kanan dan bernilai -1 untuk arah rambat ke kiri.

Variabel  $\tau$  yang merupakan besaran yang menunjukkan waktu yang diperlukan untuk mencapai titik setimbang. Nilai  $I_{\Omega}^{eq}(x, t)$

merupakan besar intensitas spesifik setimbang, yang besarnya telah ditentukan oleh penelitian Ma, Dong dan Tan pada tahun 2011 sebagai berikut

$$I_{v,1}^{eq}(x, t) = \frac{cE_v + F_v}{2}, \quad (4.17)$$

$$I_{v,-1}^{eq}(x, t) = \frac{cE_v - F_v}{2}, \quad (4.18)$$

$$w_1 = w_{-1} = -k_a. \quad (4.19)$$

Persamaan 2.7 telah mendefinisikan densitas energi,  $E_v = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, v, \Omega, t) d\Omega$ , dan fluks radiasi telah didefinisikan oleh

Persamaan 2.8,  $F_v = \int_{4\pi} \Omega I(\mathbf{r}, v, \Omega, t) d\Omega$ .  $w$  merupakan

koefisien bobot pada masing – masing kisi. Substitusi

Persamaan 2.7 dan Persamaan 2.8 ke Persamaan 4.17 dan

Persamaan 4.18, maka didapatkan hasil sebagai berikut

$$I_{(1)}^{eq}(x, t) = \frac{c \left[ \frac{1}{c} I(x, t) \right] + I(x, t)}{2} = I(x, t), \quad (4.20)$$

$$I_{(-1)}^{eq}(x, t) = \frac{c \left[ \frac{1}{c} I(x, t) \right] - [-I(x, t)]}{2} = I(x, t). \quad (4.21)$$

Jika Persamaan 4.20 dan 4.21 disubstitusikan pada persamaan

4.16, maka suku  $\frac{\Delta t}{\tau} [I_{\Omega}^{eq}(x, t) - I_{\Omega}(x, t)]$  akan bernilai 0.

Persamaan 4.16 kemudian disederhanakan menjadi

$$I_{\Omega}(x + c\Omega\Delta t, t + \Delta t) - I_{\Omega}(x, t) = S_{\Omega}(x, t)\Delta t - k_a I_{\Omega}(x, t)\Delta t. \quad (4.22)$$

Persamaan 4.22 merupakan persamaan numerik metode kisi Boltzmann untuk model fisis.

Terdapat dua proses komputasi untuk menyelesaikan Persamaan 4.22, yaitu proses *colliding* dan proses *streaming*. Proses *colliding* yaitu penentuan besar nilai intensitas masing – masing kisi. Skema proses *colliding* digambarkan oleh Gambar 4.4.

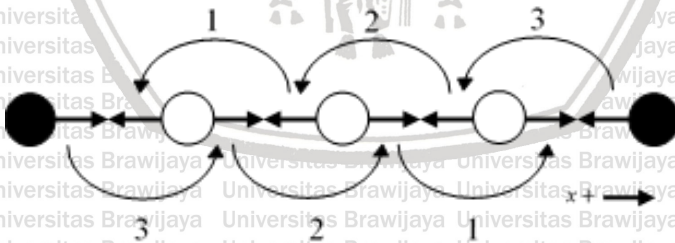


Gambar 4.4 Skema proses *colliding*

Pada setiap kisi terjadi interaksi antara sumber radiasi dengan medium, interaksi tersebut dinyatakan oleh persamaan

$$I_{\Omega}(x, t + \Delta t) = I_{\Omega}(x, t) + S_{\Omega}(x, t)\Delta t - k_a I_{\Omega}(x, t)\Delta t, \quad (4.23)$$

Kemudian proses *streaming* yaitu perpindahan nilai intensitas dari satu kisi ke kisi yang lain atau dengan kata lain menggambarkan proses dinamika radiasi. Skema *streaming* digambarkan oleh Gambar 4.5.



Gambar 4.5 Skema proses *streaming*

Untuk menghindari kehilangan data, maka proses *streaming* dilakukan dengan mengupdate data yang berada paling kanan



(nilai  $x$  maksimum) untuk arah rambat positif, sedangkan untuk arah rambah negatif, update data dilakukan pada data paling kiri terlebih dahulu (nilai  $x$  minimum), sesuai pada nomor pada Gambar 4.5. Proses *streaming* dinyatakan dalam bentuk

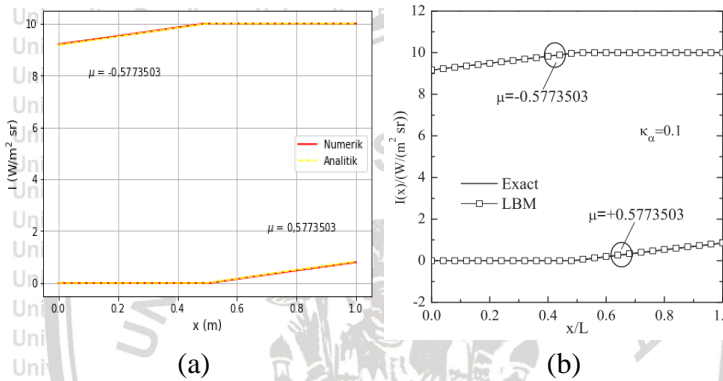
$$I_{\Omega}(x + \Delta x, t + \Delta t) = I_{\Omega}(x, t + \Delta t). \quad (4.24)$$

Hal yang perlu diketahui, bahwa untuk mencari solusi melalui metode numerik diperlukan beberapa variabel tambahan, yaitu jumlah kisi ( $N$ ), jarak antar tiap kisi ( $\Delta x$ ), dan waktu antar tiap proses ( $\Delta t$ ). Jumlah kisi diperlukan untuk mendefinisikan banyaknya kisi yang dapat berinteraksi dan dapat diisi dengan data intensitas. Umumnya, semakin besar jumlah kisi, maka hasil akan lebih akurat, tetapi tentu akan memakan waktu yang lebih lama. Untuk itu, diperlukan jumlah kisi optimum sehingga didapatkan hasil yang akurat tetapi tidak memakan waktu yang terlalu lama. Variabel selanjutnya adalah  $\Delta x$  yang menyatakan besarnya jarak antar setiap kisi.  $\Delta x$  dapat diketahui melalui rumus  $\Delta x = 1/N$ , yang berarti nilainya bergantung pada jumlah kisi yang diatur. Selisih waktu atau  $\Delta t$  adalah besaran yang menyatakan besar perbedaan waktu untuk setiap proses, khususnya proses *collision*.  $\Delta t$  dapat diketahui melalui rumus  $\Delta t = \Delta x/c$ , yang mana  $c$  merupakan kecepatan gerak partikel. Dalam kasus ini,  $\Delta t$  tidak terlihat pada persamaan transfer radiasi, karena variabel  $I$  hanya merupakan fungsi terhadap  $x$  dan  $\mu$ . Tetapi, nilai  $\Delta t$  tetap diperlukan untuk proses *collision*.

Jumlah kisi yang ditentukan harus konsisten terhadap  $\Delta t$ , yang mana nilainya bergantung terhadap  $\tau$  atau waktu relaksasi. Probabilitas terjadi serapan yang berbanding terbalik terhadap waktu relaksasi, akan semakin besar jika koefisien serap semakin besar. Untuk menjaga waktu relaksasi, maka jumlah kisi harus diperbesar untuk koefisien serap yang semakin besar. Untuk koefisien serapan  $k_a = 0,1; 1$ , dan  $10 \text{ m}^{-1}$ , jumlah kisi yang digunakan adalah  $N = 50$  untuk  $k_a = 0,1 \text{ m}^{-1}$ ,  $N = 500$  untuk  $k_a = 1 \text{ m}^{-1}$ , dan  $N = 5000$  untuk  $k_a = 10 \text{ m}^{-1}$ .

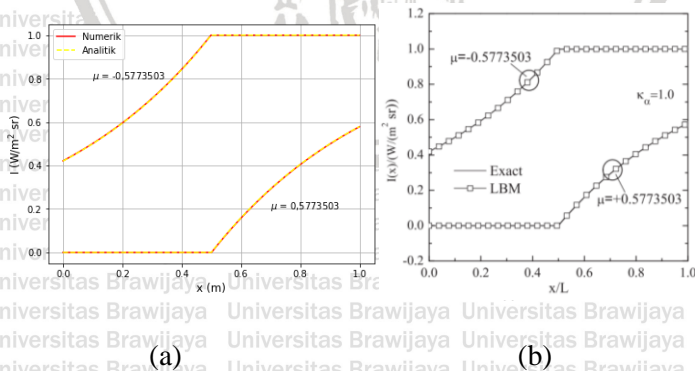
#### 4.4. Hasil

Telah didapatkan hasil analitik dan hasil numerik untuk model fisis. Hasil disajikan dalam bentuk grafik hubungan antara  $x$  dan  $I$ . Hasil yang telah ditampilkan oleh program kemudian disimpan dan dianalisis. Untuk setiap metode, hasilnya bervariasi pada nilai  $k_a$  yang berbeda, yaitu  $k_a = 0,1, 1$  dan  $10 \text{ m}^{-1}$ . Setiap grafik untuk masing – masing  $k_a$  terdapat dua variasi  $\mu$  yaitu  $\mu = 0,5773503$  dan  $\mu = -0,5773503$ .



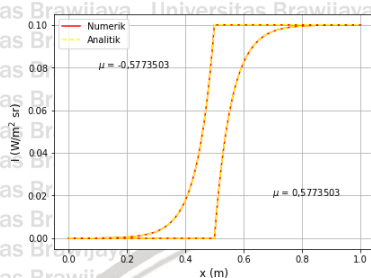
Gambar 4.6 Grafik intensitas spesifik (a) hasil penelitian dan (b) hasil literatur (Ma, Dong and Tan, 2011) untuk

$$k_a = 0,1 \text{ m}^{-1}$$

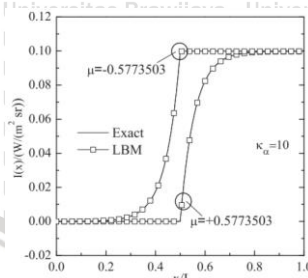


Gambar 4.7 Grafik intensitas spesifik (a) hasil penelitian dan (b) hasil literatur (Ma, Dong and Tan, 2011) untuk

$$k_a = 1 \text{ m}^{-1}$$



(a)



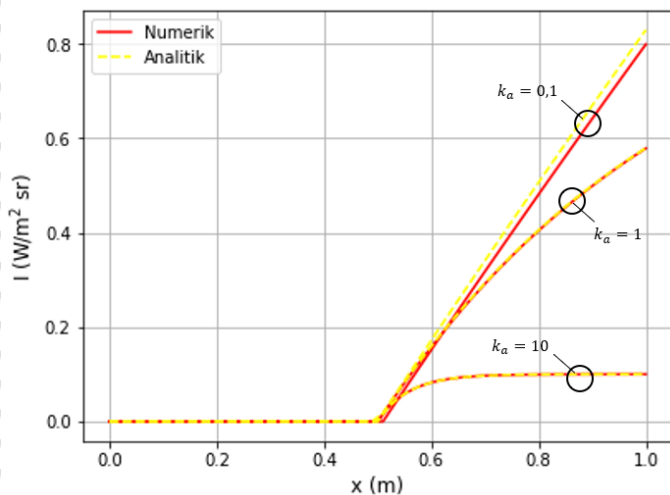
(b)

Gambar 4.8 Grafik intensitas spesifik (a) hasil penelitian dan (b) hasil literatur (Ma, Dong and Tan, 2011) untuk

$$k_a = 10 \text{ m}^{-1}$$

Gambar 4.6 menunjukkan grafik intensitas spesifik untuk solusi analitik dan solusi numerik dari hasil penelitian dan hasil pada literatur untuk  $k_a = 0,1 \text{ m}^{-1}$ . Terlihat bahwa grafik solusi analitik dan solusi numerik berhimpit, menunjukkan bahwa hasil solusi numerik sesuai dengan hasil analitik. Hasil penelitian juga menunjukkan kesesuaian dengan hasil dari literatur. Kesamaan hasil ini juga terlihat pada Gambar 4.7 yang merupakan grafik intensitas spesifik untuk solusi analitik dan solusi numerik dari hasil penelitian dan hasil pada literatur untuk  $k_a = 1 \text{ m}^{-1}$  dan Gambar 4.8 yang merupakan grafik intensitas spesifik untuk solusi analitik dan solusi numerik dari hasil penelitian dan hasil pada literatur untuk  $k_a = 10 \text{ m}^{-1}$ .





Gambar 4.9 Grafik perbandingan hasil analitik dan numerik untuk  $k_a = 0,1; 1$ , dan  $10 \text{ m}^{-1}$  pada arah gerak radiasi  $\mu$  positif

Sumber radiasi merupakan sumber yang berbentuk fungsi tangga Heaviside,  $H(x - 0,5)$ . Fungsi tersebut menunjukkan bahwa fungsi hanya valid ketika nilai  $x$  lebih besar sama dengan 0,5. Ketika  $x$  lebih besar sama dengan 0,5, fungsi Heaviside bernilai 1, dengan kata lain akan terjadi penambahan intensitas radiasi oleh sumber radiasi pada setiap titik yang berada lebih besar dari 0,5. Dalam aplikasinya, fungsi tangga Heaviside dapat dijumpai pada sistem reaktor nuklir, dimana sumber radiasi hanya terdapat pada titik tertentu (Bindra and Patil, 2012).

Gambar 4.9 menunjukkan perbandingan hasil analitik dengan numerik untuk nilai  $k_a$  yang berbeda pada arah gerak positif. Ketiga grafik menggambarkan penjalaran radiasi dari  $x = 0$  ke arah  $x$  positif. Nilai intensitas ketiga grafik pada  $x = 0$  sama, karena merupakan nilai yang telah ditentukan pada syarat batas, yaitu

$$I(x, \mu) = I(0, +\mu) = \frac{S(0 - 0,5)}{k_a} \quad (4.25)$$

$$= \frac{0}{0,1} = 0 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ sr}}$$

Penjalaran radiasi memiliki nilai intensitas yang sama hingga  $x = 0,5$ , yang mana pada titik ini sudah terjadi interaksi radiasi, yaitu penambahan intensitas radiasi disebabkan oleh sumber pancaran dan pengurangan intensitas radiasi disebabkan oleh serapan medium, yang nilainya berbeda untuk ketiga radiasi. Besarnya serapan berbanding lurus terhadap konstanta serapan yang dimiliki oleh medium. Konstanta serap untuk model fisis pada penelitian ini memiliki nilai yang berbeda – beda, yaitu  $0,1; 1$ , dan  $10 \text{ m}^{-1}$ . Ketiga radiasi terus menjalar hingga batas akhir yang didefinisikan berada pada  $x = 1$ . Untuk radiasi yang melewati medium dengan  $k_a = 0,1 \text{ m}^{-1}$ , intensitas radiasi pada  $x = 1$  didapat hingga sebesar  $0,8 \text{ W/m}^2 \text{ sr}$ . Untuk radiasi yang melewati medium dengan  $k_a = 1 \text{ m}^{-1}$ , intensitas radiasi pada  $x = 1$  didapat hingga sebesar  $0,58 \text{ W/m}^2 \text{ sr}$ . Hasil intensitas radiasi pada titik  $x = 1$  untuk medium dengan  $k_a = 1 \text{ m}^{-1}$  lebih kecil daripada hasil radiasi pada medium dengan  $k_a = 0,1 \text{ m}^{-1}$ . Peristiwa ini menunjukkan bahwa semakin besar nilai konstanta serap maka semakin besar peristiwa penyerapan sehingga dapat memperkecil intensitas radiasi. Fakta ini diperkuat oleh peristiwa radiasi yang melewati medium dengan  $k_a = 10 \text{ m}^{-1}$ , yang mana intensitas radiasi pada  $x = 1$  didapat hanya sebesar  $0,1 \text{ W/m}^2 \text{ sr}$ .



32



## BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

### 5.1. Kesimpulan

Solusi analitik dan solusi numerik dengan menggunakan metode kisi Boltzmann untuk kasus transfer radiasi satu dimensi telah berhasil didapatkan. Solusi analitik dan solusi numerik yang telah diperoleh diterjemahkan dalam bentuk grafik. Hasil solusi numerik menunjukkan kesesuaian dengan hasil solusi analitik, dibuktikan oleh bentuk grafik solusi numerik yang membentuk pola yang sama seperti grafik solusi analitik. Solusi analitik dan solusi numerik pada penelitian ini juga menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil yang ditunjukkan oleh literatur.

### 5.2. Saran

Saran untuk penelitian selanjutnya yaitu dapat dicoba untuk menggunakan metode kisi Boltzmann untuk menganalisis transfer radiasi pada dimensi yang lebih tinggi, yaitu 2 dimensi atau 3 dimensi ruang, atau dengan memperhitungkan efek penyebaran (*scattering*) dalam persamaan transfer radiasi.

34

## DAFTAR PUSTAKA

- Bindra, H. and Patil, D. V. (2012) 'Radiative or neutron transport modeling using a lattice Boltzmann equation framework', (July). doi: 10.1103/PhysRevE.86.016706.
- Cengel, Y. A. and Ghajar, A. J. (2015) *Heat and Mass Transfer: Fundamentals and Applications*. 5th ed. New York: McGraw-Hill Education.
- Howell, J. R., Menguc, M. P. and Siegel, R. (2016) *Thermal Radiation Heat Transfer*. Sixth ed. doi: 10.1533/9780857096081.73.
- Ma, Y., Dong, S. and Tan, H. (2011) 'Lattice Boltzmann method for one-dimensional radiation transfer', *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 84(1), pp. 1–5. doi: 10.1103/PhysRevE.84.016704.
- Mishra, S. C. and Lankadasu, A. (2005) 'Transient Conduction-Radiation Heat Transfer in Participating Media Using the Lattice Boltzmann Method and the Discrete Transfer Method', *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications: An International Journal of Computation and Methodology*, 47(2005), pp. 935–954. doi: 10.1080/10407780590921935.
- Mishra, S. C., Lankadasu, A. and Beronov, K. N. (2005) 'Application of the lattice Boltzmann method for solving the energy equation of a 2-D transient conduction – radiation problem', 48, pp. 3648–3659. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2004.10.041.
- Mishra, S. C. and Roy, H. K. (2007) 'Solving transient conduction and radiation heat transfer problems using the lattice Boltzmann method and the finite volume method', m, pp. 89–107. doi: 10.1016/j.jcp.2006.08.021.
- Modest, M. F. (2013) *Radiative Heat Transfer*. 3rd ed. Oxford: Academic Press.
- Mohamad, A. A. (2019) *Lattice Boltzmann Method Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes*. 2nd ed. London: Springer.
- Mondal, B. and Mishra, S. C. (2009) 'Simulation of Natural Convection in the Presence of Volumetric Radiation Using the Lattice Boltzmann Method', *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications: An International Journal of Computation and Methodology*, 55(2009), pp. 18–41. doi: 10.1080/10407780802603121.





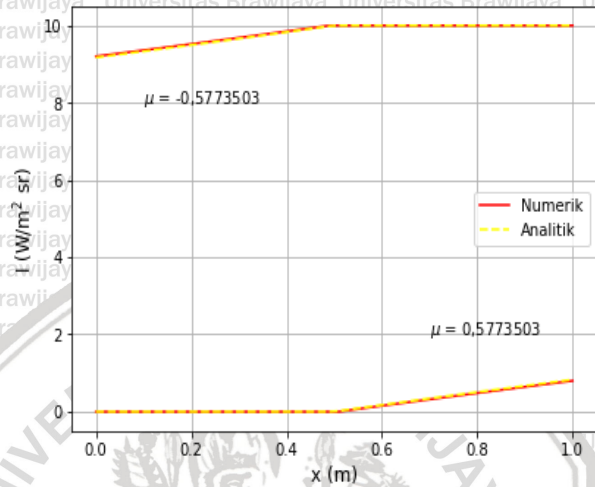
Pomraning, G. C. (1973) *The Equations of Radiation Hydrodynamics*.  
Oxford: Pergamon Press.

Tan, H. P. *et al.* (2009) 'Recent progress in computational thermal  
radiative transfer', *Chinese Science Bulletin*, 54(22), pp. 4135–  
4147. doi: 10.1007/s11434-009-0625-1.

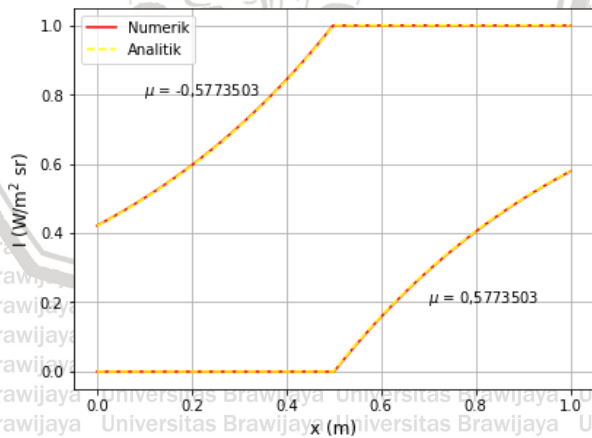


## LAMPIRAN

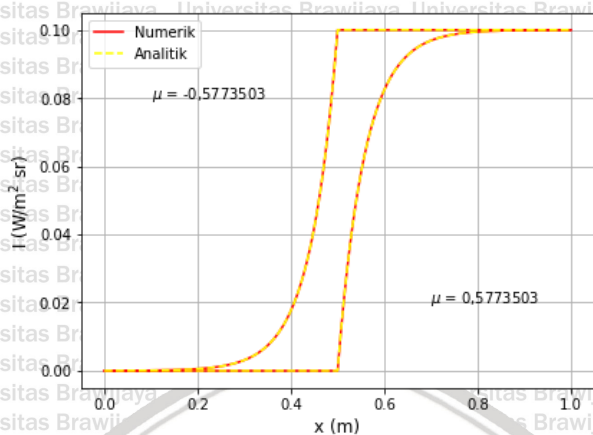
Lampiran 1. Data Hasil Penelitian



Gambar A.1 Grafik intensitas spesifik untuk  $k_a = 0,1$  m<sup>-1</sup>



Gambar A.2 Grafik intensitas spesifik untuk  $k_a = 0,1$  m<sup>-1</sup>



Gambar A.3 Grafik intensitas spesifik untuk  $k_a = 0,1 \text{ m}^{-1}$

## Lampiran 2. Kode Program

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

mu = 0.5773503
mu1 = mu
mu2 = (-1)*mu
c = 0.5

def analitik(N,k,miu) :
    if miu < 0.0 :
        xw = 1
    else :
        xw = 0
    s = np.heaviside(xw-c,1)
    iw = s/k
    x = np.linspace(0, 1, N)
    s1 = iw*np.exp(-k*(x-xw)/miu)
    s2 = (1/k)*(1-np.exp(-k*(x-c)/miu))*np.heaviside(x-c,1)
```





```

s3 = (1/k)*(np.exp(-k*(x-c)/miu)-np.exp(-k*(x-
xw)/miu))*np.heaviside(xw-c,1)

i = s1+s2+s3

return i

def numerik(N,ka,iter):
    dt = (1/N)/mu
    x = np.linspace(0, 1, N)
    I1 = np.zeros(N)
    I2 = np.zeros(N)
    S = np.heaviside(x-c,1)
    for iterasi in range (0, iter):
        #Colliding
        for i in range (0, N):
            I1[i]=I1[i]+(S[i]*dt)-(ka*I1[i]*dt)
            I2[i]=I2[i]+(S[i]*dt)-(ka*I2[i]*dt)
        #Streaming
        #Positif
        for j in range (N-1, 0, -1):
            I1[j]=I1[j-1]
            I1[0]=S[0]/ka
        #Negatif
        for k in range (0, N-1):
            I2[k]=I2[k+1]
            I2[N-1]=S[N-1]/ka
    return [x,I1,I2]

def plot(N,ka,iter):
    I = numerik(N,ka,iter)
    x = I[0]
    Inp = I[1]
    Inn = I[2]
    Iap = analitik(N,ka,mu1)
    Ian = analitik(N,ka,mu2)
    plt.figure(figsize=(6.4,4.8))

```



```
plt.grid()
plt.xlabel('x (m)', size=12)
plt.ylabel(r'I (W/m$^{2}$ sr)', size=12)
plt.plot(x, Inp, color='grey')
plt.plot(x, Iap, 'x', color='red')
plt.plot(x, Inn, color='grey')
plt.plot(x, Ian, 'x', color='red')
plt.annotate('$\mu$ = -0,5773503', (0.1, max(Inn)*0.8))
plt.annotate('$\mu$ = 0,5773503', (0.7, max(Ian)*0.2))
plt.legend(['Numerik', 'Analitik'])
return plt.show()

plot(50,0.1,50)
plot(500,1,500)
plot(5000,10,2655)

IapA = analitik(50,0.1,mu1)
IapB = analitik(500,1,mu1)
IapC = analitik(5000,10,mu1)
IA = numerik(50,0.1,50)
xA = IA[0]
InpA = IA[1]
IB = numerik(500,1,500)
xB = IB[0]
InpB = IB[1]
IC = numerik(5000,10,5000)
xC = IC[0]
InpC = IC[1]
plt.figure(figsize=(6.4,4.8))
plt.grid()
plt.xlabel('x (m)', size=12)
plt.ylabel(r'I (W/m$^{2}$ sr)', size=12)
plt.plot(xA, InpA, color='red')
plt.plot(xA, IapA, linestyle='dashed', color='yellow')
plt.plot(xB, InpB, color='red')
```



```
plt.plot(xC, InpC, color='red')
```

```
plt.plot(xB, IapB, linestyle='dashed', color='yellow')
```

```
plt.plot(xC, IapC, linestyle='dashed', color='yellow')
```

```
plt.legend(['Numerik', 'Analitik'])
```

