Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт

Работа допущена к защите
Руководитель ОП
___________К.Н. Козлов
«_____»___________2024 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЭРМИТОВЫХ АСИММЕТРИЧНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ АНСАМБЛЕЙ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ

по направлению подготовки:
01.04.02 Прикладная математика и информатика
Направленность (профиль):
01.04.02_02 Математические методы анализа и визуализации данных

Выполнил
студент гр. 5040102/20201 В.С. Долгий

Руководитель
доцент,
к.б.н., доц. К.Н. Козлов

Консультант
доцент,
к.б.н., доц. В.Ю. Васильчук

Санкт-Петербург
2024

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Физико-механический институт

УТВЕРЖДАЮ
Руководитель образовательной программы «Прикладная математика и информатика»
К.Н. Козлов
«__» _______________ 202_ г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту Долгому Виктору Сергеевичу, гр. 5040102/20201

1. Тема работы: «Асимптотическое распределение собственных значений Эрмитовых асимметрично распределенных ансамблей случайных матриц»

2. Срок сдачи студентом законченной работы: июнь 2024 г.

3. Исходные данные по работе:

Литература на русском и иностранным языках по дисциплине «Теория случайных матриц»

Инструментальные средства:

- Microsoft Word
- Microsoft PowerPoint
- DeepL Translate
- IDE Pycharm
- IDE Visual Studio Code

Ключевые источники литературы:

1.Татьяна Щербина (2013). Курс по теории случайных матриц. Математическая лаборатория им. П. Л. Чебышева СПбГУ. https://www.lektorium.tv/course/23004.

2. Pastur, L., Scherbina, M., (2011). Eigenvalue Distribution of Random Matrices. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1090/surv/171.

3. Madan Lal Mehta (2004). Random Matrices. https://www.overdrive.com/media/325355/random-matrices.

4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов):

1) Введение. Обоснование актуальности
2) Постановка задач
3) Понятие случайных матриц
4) Гауссовский унитарный ансамбль
5) Гауссовский ортогональный ансамбль
6) Гауссовский симплектический ансамбль
7) Гауссовский ансамбль Эрмитовских матриц с неравными действительными и мнимыми частями
8) Заключение

5. Дата выдачи задания: 28.11.2023

Руководитель ВКР ____ К.Н. Козлов
(подпись)

Консультант ВКР ____ В.Ю. Васильчук
(подпись)

Задание принял к исполнению

Студент ____ В.С. Долгий
(подпись)

Реферат

На 44 с., 19 рисунков, 2 приложения

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: случайные матрицы, гауссовские ансамбли, полукруговой закон, полиномы Эрмита, полиномы Лагерра, гауссовский унитарный ансамбль, гауссовский ортогональный ансамбль, гауссовский симплектический ансамбль, асимметричные эрмитовы матрицы, ансамбль Жинибра.

Тема выпускной квалификационной работы: «Асимптотическое распределение собственных значений эрмитовых асимметрично распределенных случайных матриц».

Цель работы заключается в исследовании распределения собственных значений в различных ансамблях случайных матриц на основе численных и теоретических методов анализа.

Основные задачи исследования:

1. Исследование теоретических основ теории случайных матриц, включая гауссовские ансамбли (GUE, GOE, GSE) и асимметричные эрмитовы матрицы.
2. Изучение полукругового закона Вигнера и полиномов Эрмита и Лагерра, играющих важную роль в описании корреляционных функций и плотности состояний.
3. Анализ распределения собственных значений в гауссовских ансамблях с использованием численных методов и закона полукруга Вигнера.
4. Исследование асимметричных ансамблей, включая ансамбли вещественных асимметричных матриц и ансамбль Жинибра.
5. Разработка и реализация численных методов для генерации случайных матриц и анализа распределения их собственных значений.

Основные результаты:

- Теоретический анализ свойств гауссовских ансамблей и их влияние на распределение собственных значений.
- Разработка и реализация программного кода для генерации случайных матриц и вычисления их собственных значений.
- Проведение численных экспериментов, подтверждающих теоретические предсказания и выявляющих влияние параметров ансамблей на распределение собственных значений.
- Изучение влияния параметра α, определяющего степень асимметричности матрицы, и параметра β, связанного с модулем Вандермонда.
- Использование логарифмических преобразований и многопроцессорной обработки для повышения точности и эффективности вычислений.
- Полученные результаты могут быть использованы для моделирования и анализа сложных систем в различных областях науки и техники.

Работа вносит значительный вклад в понимание распределения собственных значений в различных ансамблях случайных матриц и предлагает эффективные методы для их численного анализа.

Abstract

48 pages, 19 figures, 2 appendices

KEYWORDS: random matrices, Gaussian ensembles, Wigner semicircle law, Hermite polynomials, Laguerre polynomials, Gaussian Unitary Ensemble, Gaussian Orthogonal Ensemble, Gaussian Symplectic Ensemble, asymmetric Hermitian matrices, Ginibre ensemble.

The topic of the graduation thesis: "Asymptotic distribution of eigenvalues of asymmetrically distributed Hermitian random matrices."

The aim of this work is to study the distribution of eigenvalues in various ensembles of random matrices based on numerical and theoretical methods of analysis.

Main research tasks:

1. Investigation of the theoretical foundations of the theory of random matrices, including Gaussian ensembles (GUE, GOE, GSE) and asymmetric Hermitian matrices.
2. Study of the Wigner semicircle law and Hermite and Laguerre polynomials, which play an important role in describing correlation functions and state densities.
3. Analysis of the distribution of eigenvalues in Gaussian ensembles using numerical methods and the Wigner semicircle law.
4. Investigation of asymmetric ensembles, including ensembles of real asymmetric matrices and the Ginibre ensemble.
5. Development and implementation of numerical methods for generating random matrices and analyzing the distribution of their eigenvalues.

Main results:

- Theoretical analysis of the properties of Gaussian ensembles and their influence on the distribution of eigenvalues

- Development and implementation of software code for generating random matrices and calculating their eigenvalues.
- Conducting numerical experiments confirming theoretical predictions and revealing the influence of ensemble parameters on the distribution of eigenvalues.
- Study of the influence of the parameter α\alphaα determining the degree of asymmetry of the matrix, and the parameter β\betaβ related to the Vandermonde module.
- Use of logarithmic transformations and multiprocessing to increase the accuracy and efficiency of calculations.
- The obtained results can be used for modeling and analyzing complex systems in various fields of science and technology.

This work makes a significant contribution to understanding the distribution of eigenvalues in various ensembles of random matrices and proposes effective methods for their numerical analysis.

Оглавление

Введение

Теория случайных матриц представляет собой одну из ключевых областей математической физики и теории вероятностей, находящую широкое применение в различных научных и инженерных дисциплинах.

В данной работе рассматриваются различные классы случайных матриц и их свойства. Основное внимание уделяется изучению распределению собственных значений в гауссовских ансамблей случайных матриц, обладающих специфическими статистическими свойствами, а также в Эрмитовых асимметрично распределенных ансамблей. В частности, рассматриваются гауссовский унитарный ансамбль (GUE), гауссовский ортогональный ансамбль (GOE), гауссовский симплектический ансамбль (GSE), ансамбль вещественных асимметричных матриц и ансамбль Жинибра. Каждый из этих ансамблей обладает уникальными характеристиками и применим для моделирования различных физических и математических систем.

Актуальность темы данной дипломной работы обусловлена несколькими факторами:

1. Широкий спектр приложений: Ансамбли случайных матриц используются для моделирования сложных систем в физике, статистике, финансовой математике и инженерии. Например, они находят применение в квантовой механике при изучении спектров сложных систем, в теории чисел для исследования распределения нулей функций, а также в телекоммуникациях для анализа каналов передачи данных.
2. Фундаментальные исследования: Понимание свойств гауссовских ансамблей способствует развитию теоретических основ в таких областях, как спектральная теория, теория вероятностей и математическая физика. Исследование распределений собственных

значений в различных ансамблях позволяет глубже понять природу случайных процессов и хаоса.

3. Численные методы и моделирование: Разработка и применение численных методов для анализа ансамблей является важной задачей современной вычислительной математики. Моделирование и численные эксперименты с использованием этих методов позволяют проверять теоретические предсказания и находить новые закономерности.
4. Прогнозирование и оптимизация: Ансамбли и их свойства позволяют создавать более точные модели для прогнозирования различных явлений в науке и технике. Это открывает возможности для оптимизации процессов и улучшения методов анализа данных, что особенно актуально в условиях возрастающих объемов информации и сложности систем.

Целью данной работы является исследование распределения собственных значений в вышеописанных ансамблях случайных матриц что включает создание начального уровня программного кода, который может дать практические результаты моделирования распределения, соответствующие теоретическими данными.

Работа состоит из нескольких глав, каждая из которых посвящена отдельным аспектам теории случайных матриц и их применению. В первой главе приводятся основные понятия, полукруговой Закон Вигнера, а также полиномы Эрмита и Лагерра. В последующих главах рассматриваются гауссовские ансамбли и распределения собственных значений в них. Заключительные главы содержат информацию о ансамбле вещественных асимметричных матриц и ансамбле Жинибра.

Постановка задач

Цель данной дипломной работы заключается в исследовании распределения собственных значений в различных ансамблях случайных матриц, а также разработке и реализации численных методов для анализа этих распределений. Для достижения данной цели были поставлены следующие задачи:

1. Изучение теоретических основ теории случайных матриц:
   1) Исследовать основные свойства и характеристики гауссовских ансамблей случайных матриц, таких как гауссовский унитарный ансамбль (GUE), гауссовский ортогональный ансамбль (GOE) и гауссовский симплектический ансамбль (GSE).
   2) Рассмотреть свойства полиномов Эрмита и Лагерра, которые играют важную роль в описании корреляционных функций и плотности состояний в гауссовских ансамблях.
2. Анализ распределения собственных значений в ансамблях:
   1) Изучить распределение собственных значений в гауссовских ансамблях с использованием закона полукруга Вигнера и других теоретических предсказаний.
   2) Провести численные эксперименты для подтверждения теоретических результатов и выявления особенностей распределения собственных значений.
3. Исследование асимметричных ансамблей случайных матриц:
   1) Рассмотреть свойства и распределение собственных значений в ансамблях вещественных асимметричных матриц.
   2) Проанализировать влияние параметра α, определяющего степень асимметричности матрицы, на распределение собственных значений.

3) Применить формулу Хариша-Чандры/Ицыксона-Зубера (HCIZ) для выражения плотности собственных значений в терминах определителя.

4. Разработка и реализация численных методов:

   1) Разработать функции для генерации случайных матриц различных типов, включая асимметричные матрицы.

   2) Реализовать методы вычисления плотности собственных значений и потенциала $V(x)$ для различных ансамблей.

   3) Внедрить алгоритмы для численного моделирования распределений собственных значений и их анализа.

5. Проведение численных экспериментов и анализ результатов:

   1) Провести численные эксперименты для анализа распределения собственных значений в различных ансамблях случайных матриц.

   2) Исследовать влияние параметров α и β на распределение собственных значений, используя различные значения параметров и визуализируя результаты.

3) Оценить точность численных методов и воспользоваться способами ее повышения, включая логарифмические преобразования и многопроцессорную обработку.

1. Понятие случайных матриц

В математике случайная матрица – это матрица, элементы которой являются случайными величинами. Изучая совокупности таких матриц, теория случайных матриц стремится понять статистические свойства их собственных значений и собственных векторов. Случайные матрицы находят применение в различных областях, таких как физика, инженерия, информатика, экономика и статистика.

Существует множество способов определения случайных матриц. Одно из распространенных определений следующее:

Предположим, у нас есть последовательность $\{A(N)\}$, где каждая A(N) – матрица размером $N \times N$. Мы говорим, что эта последовательность является последовательностью случайных матриц, если для каждого n элементы A(i,j) матрицы A(N) являются независимыми случайными величинами с некоторым распределением вероятности. Более того, мы предполагаем, что элементы идентичны по строкам и столбцам; т.е. они имеют одинаковое распределение. Кроме того, предполагается, что элементы центрированы, т.е. имеют нулевое среднее значение[4].

Также принято рассматривать различные типы ансамблей случайных матриц в зависимости от распределения вероятностей элементов. Например, гауссовский ортогональный ансамбль (GOE) – это ансамбль случайных матриц, в котором элементы являются независимыми гауссовскими переменными с нулевым средним и единичной дисперсией, а матрица симметрична. Аналогично, гауссовский унитарный ансамбль (GUE) – это ансамбль случайных матриц, в котором элементы являются независимыми комплексными гауссовскими переменными с нулевым средним и единичной дисперсией, а матрица является эрмитовой. Существуют и другие ансамбли, такие как ансамбль Вишарта, ансамбль Жинибра, ансамбль Якоби и другие.

Также для последующего исследования случайных матриц потребуется рассмотреть несколько важных вещей в предмете.

1.1. Полукруговой закон Вигнера

Полукруговой закон Вигнера – это фундаментальный результат в теории случайных матриц, который характеризует распределение собственных значений в симметричных случайных матрицах. Впервые он был введен Юджином Вигнером в 1955 году в контексте ядерной физики, но с тех пор нашел применение во многих областях, включая квантовый хаос, неупорядоченные системы и беспроводную связь.[18]

Полукруговой закон Вигнера дает описание функции плотности вероятности собственных значений x симметричной N x N случайной матрицы A, взятой из распределения вероятности со следующими свойствами:

1. A симметрична: $A_{ji} = A_{ij}$ для всех *i,j = 1,2,...,N*

2. Элементы A независимы и одинаково распределены с нулевым средним и дисперсией σ^2 в пределе большого *N*.

В этом случае полукруговой закон Вигнера предсказывает, что собственные значения A образуют симметричное распределение вокруг нуля, имеющее форму полукруга. Более точно функция распределения собственных значений дается следующим образом:

$$\xi(x) = (\frac{2}{\pi}\sigma^2)\sqrt{4\sigma^2 - x^2}) \text{ для } -2\sigma \leq x \leq 2\sigma \quad (1.1)$$

где собственные значения масштабированы на коэффициент 2σ. Собственные значения имеют носить предельного распределения на интервале [-2σ , 2σ].

Полукруговой закон Вигнера имеет важные приложения во многих областях, включая ядерную физику, квантовый хаос и неупорядоченные системы. Например, он предсказывает, что среднее расстояние между собственными значениями обращается в ноль как $\frac{1}{N}$ строго внутри носителя предельной меры собственных значений, что соответствует явлению отталкивания уровней. Она также подразумевает, что ковариация пары собственных значений $\frac{1}{N^2}$, что соответствует классу универсальности ансамбля Вигнера.[11]

1.2. Полиномы Эрмита

Полиномы Эрмита – это класс ортогональных полиномов, которые возникают во многих областях математики и физики, включая теорию вероятностей, дифференциальные уравнения, квантовую механику и обработку сигналов. Они были впервые введены Шарлем Эрмитом в середине 19 века и с тех пор были широко изучены и обобщены.[2]

Полиномы Эрмита могут быть определены рекурсивно следующим образом:

- $H_0(x) = 1$
- $H_1(x) = 2x$
- $H_{n+1}(x) = 2x\, H_n(x) - 2n\, H_{n-1}(x)$ (1.2)

Эти полиномы ортогональны относительно весовой функции e^{-x^2}, которая является гауссовской функцией плотности вероятности со средним 0 и дисперсией 1/2. То есть, для любых различных неотрицательных целых чисел m и n имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\ H_n\ (x)\, e^{-x^2} dx\ =\ 0, \text{если } m\ \neq\ n, \quad (1.3)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx\ =\ \pi^{\frac{1}{2}} * 2^n * n!$$

1.3. Полиномы Лагерра

Полиномы Лагерра – это класс ортогональных полиномов, которые возникают в различных областях математики и физики, включая теорию вероятностей, численный анализ и квантовую механику. Они были впервые введены французским математиком Эдмоном Лагерром в 1877 году и с тех пор были широко изучены и обобщены.[2]

Полиномы Лагерра могут быть определены рекурсивно следующим образом:

- $L_{0(x)} = 1$; $L_{1(x)} = 1 - x$
- $L_{n+1}(x) = [(2n + 1 - x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)]/(n + 1)$ (1.5)

Эти полиномы ортогональны относительно весовой функции e^{-x}, которая является убывающей экспоненциальной функцией. То есть, для любых различных неотрицательных целых чисел m и n имеем:

$\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}dx = 0,$ если m ≠ n, и (1.6)

$\int_0^\infty L_n(x)^2 e^{-x}dx = n!$ (1.7)

2. Гауссовский унитарный ансамбль

2.1. Определение гауссовского унитарного ансамбля (GUE)

Гауссовский унитарный ансамбль (GUE) – это тип ансамбля случайных матриц, который обычно изучается в области теории случайных матриц. Матрицы GUE – это эрмитовы матрицы, в которых элементы являются комплексными независимыми случайными величинами с гауссовским распределением.

Ансамбль GUE является частным случаем более общих гауссовских ансамблей, к которым относятся гауссовский ортогональный ансамбль (GOE) и гауссовский симплектический ансамбль (GSE). GOE и GSE также являются типами ансамблей случайных матриц, которые обладают специфическими свойствами симметрии и определяются в терминах элементов, распределенных по Гауссу.

Ансамбль GUE обладает многими важными свойствами, которые были подробно изучены в теории случайных матриц. Например, распределение собственных значений матрицы GUE имеет хорошо известную предельную форму в пределе больших размеров матрицы, известную как закон полукруга Вигнера. Это предельное распределение представляет собой форму полукруга, который описывает плотность собственных значений в пределе при увеличении N до бесконечности.

Формула GUE:

$$\frac{1}{Z_{GUE(n)}} e^{-\frac{n}{2} trH^2} \tag{2.1}$$

2.2. Распределение собственных значений в гауссовском унитарном ансамбле

Для расчета распределения собственных значений в GUE будем использовать формулу совместного распределения собтвенных значений:

$$P(x_1, x_2, \dots x_N) = C_N \exp\left(-\frac{1}{2}\beta\ \sum_1^N x_j^2\right) \prod_{j<k} |x_j - x_k|^\beta \qquad (2.2)$$

где $x_1, x_2, \dots x_N$ – собственные значения $N \times N$ матрицы, $\exp\left(-\frac{1}{2}\beta\ \sum_1^N x_j^2\right)$ – представляет собой гауссовский член, который гарантирует, что распределение собственных значений сосредоточено вокруг 0 и уменьшается для больших абсолютных значений x, $\prod_{j<k} |x_j - x_k|^\beta$ – это член взаимодействия, который предотвращает совпадение собственных значений и обеспечивает их отталкивание друг от друга, C_N – константа нормализации, зависящая от размера N и обеспечивающая, что распределение интегрируется по 1.[3]

Нормализационная константа C_N для GUE может быть вычислена с использованием интеграла Сельберга:

$$C_{N\beta}^{-1} = (2\pi)^{\frac{2}{N}} \beta^{-\frac{N}{\frac{2-\beta N(N-1)}{4}}} \left[\Gamma\left(1 + \frac{\beta}{2}\right)\right]^{-N} \prod_{j=1}^{N} \Gamma\left(1 + \frac{\beta_j}{2}\right) \qquad (2.3)$$

В случае текущего ансамбля степень модуля Вандермонда (β) будет равна 2.

Теоретически известно что распределение собственных значений в матрицах GUE сходится к детерминированной предельной форме в пределе большого размера матрицы, известной как закон полукруга Вигнера. Это предельное распределение представляет собой полукруглую форму , которая описывает плотность собственных значений в пределе, когда N переходит в бесконечность.

```
def joint_distribution_gue(lambdas, beta):
     #Расчет совместного распределения собственных значений
для GUE с учетом переполнений.
    N = len(lambdas)
    log_norm_const = log_selberg_integral(N, beta)
    term1 = -np.sum(lambdas**2) / 2
    pairwise_log_diffs = [np.log(np.abs(lambdas[i] -
lambdas[j])) for i in range(N) for j in range(i+1, N)]
    term2 = beta * logsumexp(pairwise_log_diffs)
# Используем logsumexp для суммирования логарифмов
    log_probability = term1 + term2 - log_norm_const
    # Используем минимальный порог для вероятности
    return max(np.exp(log_probability), 1e-300)
```

Листинг 2.1 – Код распределения собственных значений GUE

Рис. 2.1 – График распределения GUE

3. Гауссовский ортогональный ансамбль

3.1. Определение гауссовского ортогонального ансамбля

Гауссовский ортогональный ансамбль (GOE) – это особый класс случайных матриц, который имеет ряд важных применений в различных областях физики, математики и техники. GOE принадлежит к классу универсальных ансамблей случайных матриц, которые обладают одинаковыми статистическими свойствами в пределе больших размеров матрицы, независимо от конкретной формы элементов матрицы.

Формула GOE:

$$\frac{1}{Z_{GOE(n)}} e^{-\frac{n}{4} trH^2} \tag{3.1}$$

3.2 Распределение собственных значений в гауссовском ортогональном ансамбле

Собственные значения случайной матрицы из гауссовского ортогонального ансамбля (GOE) распределены также согласно полукругового закона Вигнера поэтому будет использоваться формулы (2.2) и (2.3) со степенью модуля Вандермонда (β) равной 1.

```
    def joint_distribution_goe(eigenvalues):
        N = len(eigenvalues)
        log_C = selberg_integral(N)
        log_term1 = -0.5 * np.sum(eigenvalues**2)
        pairwise_log_diffs = [np.log(np.abs(eigenvalues[i] -
eigenvalues[j])) for i in range(N) for j in range(i + 1, N)]
        log_term2 = logsumexp(pairwise_log_diffs)  # Стабилизация
суммы логарифмов
        log_probability = log_term1 + log_term2 - log_C
        return np.exp(log_probability - np.max(log_probability))
# Преобразование обратно в обычную шкалу с предотвращением
переполнения
```

Листинг 3.1 – Код распределения собственных значений GOE

Рис. 3.1 – График распределения GOE

4. Гауссовский симплектический ансамбль

4.1. Определение гауссовского симплектического ансамбля

Гауссовский симплектический ансамбль (GSE) – это класс случайных матриц, которые симметричны при ортогональных и симплектических преобразованиях. Это один из трех ансамблей в классе универсальности гауссовского ортогонального ансамбля (GOE), наряду с гауссовским ортогональным ансамблем (GOE) и гауссовским унитарным ансамблем (GUE). GSE характеризуется функцией плотности вероятности на пространстве вещественных симметричных матриц A размера N x N, которая инвариантна под действием ортогональной группы O(N) и симплектической группы Sp(2N).[7-9]

Подобно двум другим ансамблям, GSE обладает особыми свойствами в пределе больших N. В частности, распределение собственных значений сходится к детерминантному точечному процессу с корреляционным ядром, заданным произведением полиномов Эрмита для четных N и полиномов Лагерра для нечетных N. Этот результат подразумевает, что собственные значения GSE отталкиваются друг от друга со средним расстоянием, которое стремится к нулю как 1/N вблизи краев поддержки собственных значений, как и в других ансамблях.

Матричные элементы матрицы GSE обладают особыми свойствами, обусловленными симплектической инвариантностью. В частности, разности между элементами матрицы при фиксированных индексах (i,j) и (k,l) распределены согласно распределению Коши-Лоренца с хвостом в виде силового закона и расходящейся дисперсией. Совместное распределение элементов матрицы задается в терминах корреляционных функций, которые симметричны при замене индексов i и j или k и l.

4.3. Распределение собственных значений в гауссовском симплектическом ансамбле

Распределение собственных значений в гауссовском симплектическом ансамбле (GSE) определяется теорией случайных матриц. В частности, при приближении размера матриц в ансамбле к бесконечности собственные значения асимптотически распределяются как детерминантный точечный процесс с корреляционным ядром, выраженным в терминах полиномов Эрмита и Лагерра, в зависимости от четности матрицы размера N[12,13].

Для четного N корреляционное ядро задается следующим образом:

$$K(x,y) = \left(\frac{1}{\pi}\right)\left[\frac{H_{\left\{\frac{N}{2}\right\}}(x)H_{\left\{\frac{N}{2}-1\right\}}(y) - H_{\left\{\frac{N}{2}-1\right\}}(x)H_{\left\{\frac{N}{2}\right\}}(y)}{x-y}\right], \tag{4.1}$$

где $H_N(x)$ – N-й полином Эрмита.

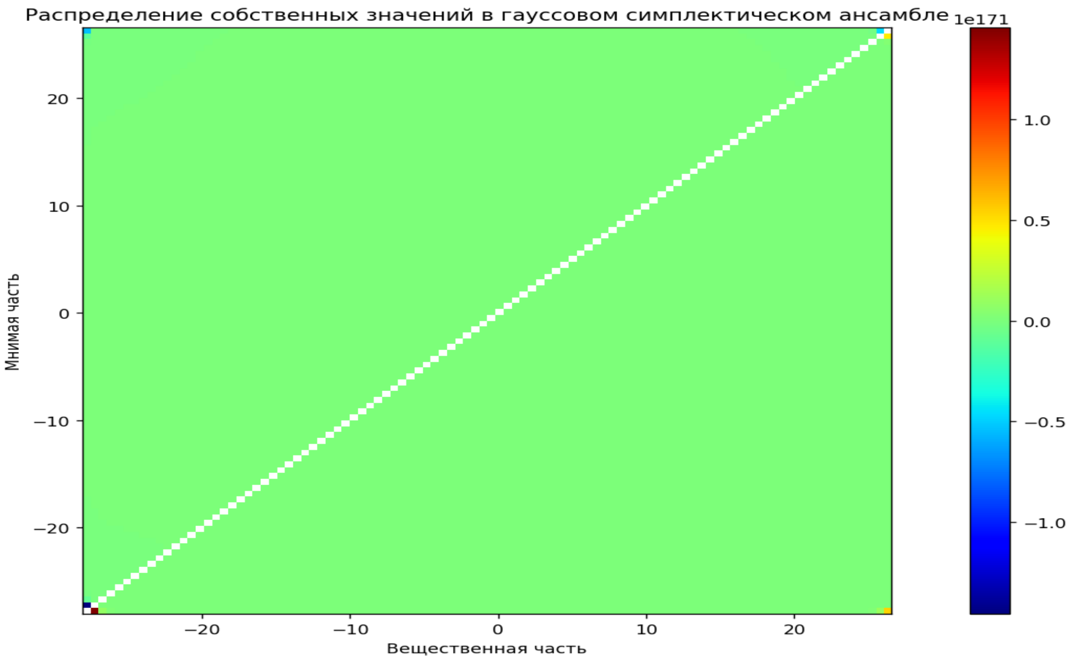

Рис. 4.1 – Распределение с помощью полинома Эрмита

```
#Создание ансамбля
def gaussian_symplectic_ensemble(N):
    A = np.zeros((N, N), dtype=np.complex128)
    for i in range(N):
        for j in range(i, N):
            x = np.random.normal()
            y = np.random.normal()
            A[i, j] = x + 1j*y
            A[j, i] = np.conj(A[i, j])
    return A

#Расчет собственных значений
def gaussian_symplectic_eigenvalues(N):
    A = gaussian_symplectic_ensemble(N)
    eigenvalues = np.linalg.eigvalsh(A)
    return eigenvalues

#Расчет распределения с помощью полинома Эрмита
def gaussian_symplectic_distribution(x, y, N):
    Hx = hermite(N//2)(x)
    Hy = hermite(N//2-1)(y)
    Hx1 = hermite(N//2-1)(x)
    Hy1 = hermite(N//2)(y)
    K = (1/np.pi)*((Hx*Hy1 - Hx1*Hy)/(x-y))
    return K

N = 100
eigenvalues = gaussian_symplectic_eigenvalues(N)
x, y = np.meshgrid(eigenvalues, eigenvalues)
K = gaussian_symplectic_distribution(x, y, N)
```

Листинг 4.1 – Распределение с помощью полинома Эрмита

Для N нечетного числа корреляционное ядро задается следующим образом:

$$K(x,y) = \left(\frac{1}{\pi}\right)\left[\frac{L_{\left\{\frac{N-1}{2}\right\}}(x)H_{\left\{\frac{N-1}{2}\right\}}(y) - H_{\left\{\frac{N-1}{2}\right\}}(x)L_{\left\{\frac{N-1}{2}\right\}}(y)}{x-y}\right], \quad (4.2)$$

где $L_N(x)$ – N-й полином Лагерра.

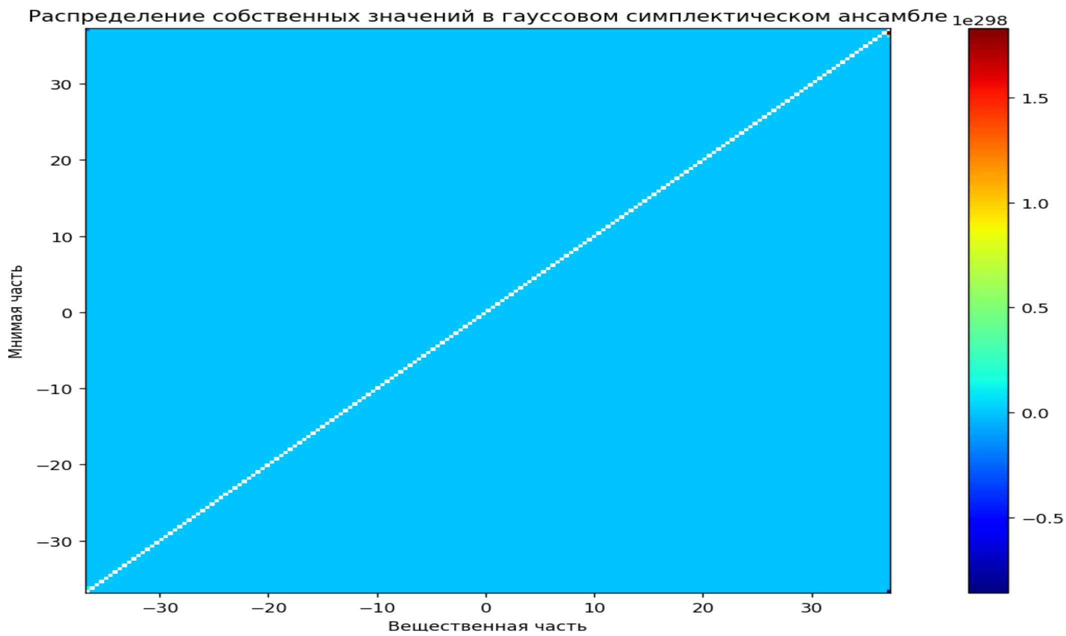

Рис. 4.2 – Распределение с помощью полинома Лаггера

```
#Создание ансамбля
def gaussian_symplectic_ensemble(N):
    A = np.zeros((N, N), dtype=np.complex128)
    for i in range(N):
        for j in range(i, N):
            x = np.random.normal()
            y = np.random.normal()
            A[i, j] = x + 1j*y
            A[j, i] = np.conj(A[i, j])
    return A

#Расчет собственных значений
def gaussian_symplectic_eigenvalues(N):
    A = gaussian_symplectic_ensemble(N)
    eigenvalues = np.linalg.eigvalsh(A)
    return eigenvalues

#Расчет распределения с помощью полинома Лаггера
def gaussian_symplectic_distribution(x, y, N):
    Lx = laguerre(N//2)(x**2)
    Ly = hermite(N//2)(y)
    Lx1 = laguerre(N//2)(x**2 - 2)
    Ly1 = hermite(N//2-1)(y)
    K = (1/np.pi)*((Lx*Ly1 - Lx1*Ly)/(x-y))
    return K
```

```
N = 175
eigenvalues = gaussian_symplectic_eigenvalues(N)
x, y = np.meshgrid(eigenvalues, eigenvalues)
K = gaussian_symplectic_distribution(x, y, N)
```

Листинг 4.2 – Распределение с помощью полинома Лаггера

Также проведем расчет распределения собственных значений GSE по формулам (2.2) и (2.3), но степенью модуля Вандермонда равной 4.

```
def joint_distribution_gse(eigenvalues):
     #Расчет совместного распределения собственных значений
для GSE.
    N = len(eigenvalues)
    log_C = selberg_integral_gse(N // 2)
    log_term1 = -0.5 * np.sum(eigenvalues**2)
    pairwise_log_diffs = [np.log(np.abs(eigenvalues[i] -
eigenvalues[j])) for i in range(N) for j in range(i + 1, N)]
    log_term2 = 4 * logsumexp(pairwise_log_diffs)  #
Стабилизация суммы логарифмов с учетом β=4
    log_probability = log_term1 + log_term2 - log_C
    return np.exp(log_probability - np.max(log_probability))
#Преобразование обратно в обычную шкалу с предотвращением
переполнения
```

Листинг 4.3 – Распределение с помощью формулы совместного распределения

Рис. 4.3 – График распределения GSE

Детерминантный точечный процесс подразумевает, что собственные значения матрицы GSE распределены так, что они отталкиваются друг от друга, со средним расстоянием, которое стремится к нулю вблизи краев носителя предельной плотности собственных значений.

5. Ансамбли Эрмитовых матриц с неравными вещественными и мнимыми частями

Эрмитовые асимметрично распределенные ансамбли – это ансамбли случайных матриц, в которых элементы матрицы имеют независимые и неидентично распределенные действительные и мнимые части. Эти ансамбли, впервые изученные Метой и Пандеем, представляют собой обобщение классических симметричных ансамблей случайных матриц, в которых элементы матрицы имеют одинаковые распределения для их действительных и мнимых частей.

Ансамбли Эрмита относятся к ансамблям случайных матриц, в которых элементы матрицы являются комплекснозначными и имеют независимые, нулевые средние гауссовские распределения для действительной и мнимой частей. В случае асимметричных ансамблей Эрмита элементы матрицы могут иметь различные распределения для своих действительных и мнимых частей. В частности, действительные и мнимые части каждого элемента матрицы могут иметь различные дисперсии, а совместное распределение действительных и мнимых частей может быть асимметричным.

Существует несколько типов асимметричных ансамблей Эрмита, которые были изучены в литературе. Один класс ансамблей, введенный Метой и Пандеем, - это ансамбль вещественных асимметричных случайных матриц. Эти матрицы имеют вещественные значения, каждое из которых выбирается независимо из гауссовского распределения со средним нулевым значением и, возможно, различными дисперсиями для диагональных и недиагональных значений.

Другим классом асимметричных ансамблей Эрмита является ансамбль комплексных матриц Жинибра. Эти матрицы имеют комплекснозначные элементы, которые выбираются независимо из гауссовского распределения со средним нулевым значением и одинаковой дисперсией для действительной и мнимой частей. В асимметричном случае действительная и мнимая части могут иметь разные дисперсии.

5.1. Ансамбль вещественных асимметричных случайных матриц

Ансамбль вещественных асимметричных случайных матриц – это класс асимметричных эрмитовых ансамблей случайных матриц, введенный Метой и Пандеем в 1990 году. Эти матрицы имеют вещественные значения, каждое из которых выбирается независимо из гауссовского распределения со средним нулевым значением и, возможно, различными дисперсиями для диагональных и недиагональных значений.

В общем случае ансамбль вещественных асимметричных случайных матриц характеризуется двумя параметрами: размером матрицы N и параметром α, определяющим дисперсию внедиагональных элементов относительно дисперсии диагональных элементов. В частности, если диагональные элементы имеют дисперсию σ^2, а внедиагональные - $\alpha\sigma^2$, то ансамбль обозначается Rα. При $\alpha = 1$ ансамбль сводится к реальному симметричному гауссовскому ансамблю, который является частным случаем ансамбля Эрмита. При $\alpha = 0$ ансамбль сводится к диагональной матрице с независимыми гауссовскими записями на диагонали. В общем случае ансамбль вещественных асимметричных гауссовских матриц интерполирует между этими двумя пределами.

Статистические свойства собственных значений и собственных векторов матриц из ансамбля вещественных асимметричных случайных матриц были подробно изучены в теории случайных матриц. Например, Мета и Пандей показали, что плотность собственных значений для матриц из этого ансамбля имеет гауссову форму в пределе большого размера матрицы, $N \to \infty$. Они также вывели распределение расстояний между собственными значениями и экспоненту отталкивания уровней для больших матриц.

5.1.1. Распределение собственных значений в ансамбле вещественных асимметричных гауссовских матриц

Плотность собственных значений для ансамбля вещественных асимметричных гауссовых матриц может быть выражена в терминах формулы Хариша-Чандры/Ицыксона-Зубера (HCIZ), которая принимает форму определителя. Плотность может быть записана следующим образом:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_N) = C_N \prod_{i<j} |x_i - x_j|^{\beta} e^{-NtrV(x)}. \quad (5.1)$$

Здесь $P(x_1, x_2, \dots, x_N)$ представляет собой функцию плотности вероятности для собственных значений $x_1, x, \dots, x_N$, а C_N – константа нормировки. Член $|x_i - x_j|^{\beta}$ представляет собой модуль Вандермонда, который обеспечивает отталкивание между собственными значениями, причем большие значения этого члена указывают на большую вероятность больших различий между собственными значениями. Член $e^{-NtrV(x)}$ представляет весовой коэффициент, где $trV(x)$ – след матрично-значной функции *V(x)*.

Для реального асимметричного гауссовского ансамбля функция *V(x)* имеет вид:

$$V(x) = \alpha^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + (1 - \alpha^2) \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2 \quad (5.2)$$

Здесь α – параметр, определяющий степень асимметричности матрицы. Когда α = 1, ансамбль симметричен и сводится к гауссовскому ортогональному ансамблю (GOE). По мере уменьшения α распределение собственных значений становится более асимметричным.

```
# Функция для генерации асимметричной матрицы
def generate_asymmetric_matrix(N, alpha, sigma, triu_indices):
```

```
        diagonal = np.random.normal(0, sigma, N)  # Генерация диагональных элементов
        off_diagonal = np.random.normal(0, alpha * sigma, len(triu_indices[0]))  # Генерация внедиагональных элементов
        A = np.zeros((N, N))  # Инициализация матрицы нулями
        np.fill_diagonal(A, diagonal)  # Заполнение диагонали
        A[triu_indices] = off_diagonal  # Заполнение верхнего треугольника
        A += A.T - np.diag(A.diagonal())  # Создание симметричной матрицы
        return A

    # Функция для вычисления потенциала V
    def V(lambdas, alpha):
        term1 = alpha ** 2 * np.sum(lambdas ** 2)  # Первая часть потенциала
        term2 = (1 - alpha ** 2) * np.sum(np.subtract.outer(lambdas, lambdas) ** 2)  # Вторая часть потенциала
        return term1 + term2

    # Функция для вычисления логарифма потенциала
    def potential_log(V_func, eigenvalues, alpha, beta, epsilon, N):
        diffs = np.subtract.outer(eigenvalues, eigenvalues)  # Разности собственных значений
        log_vandermonde = beta * np.sum(np.log(np.abs(diffs) + epsilon), where=(diffs != 0))  # Вычисление логарифма определителя Вандермонда
        log_exp_term = -N * V_func(eigenvalues, alpha)  # Экспоненциальный член
        return log_vandermonde + log_exp_term  # Общий логарифм потенциала
```

Листинг 5.1 – Распределение по формулам (5.2) и (5.3)

Графики распределения со степенями Вандермонда гауссовой группы (1,2,4):

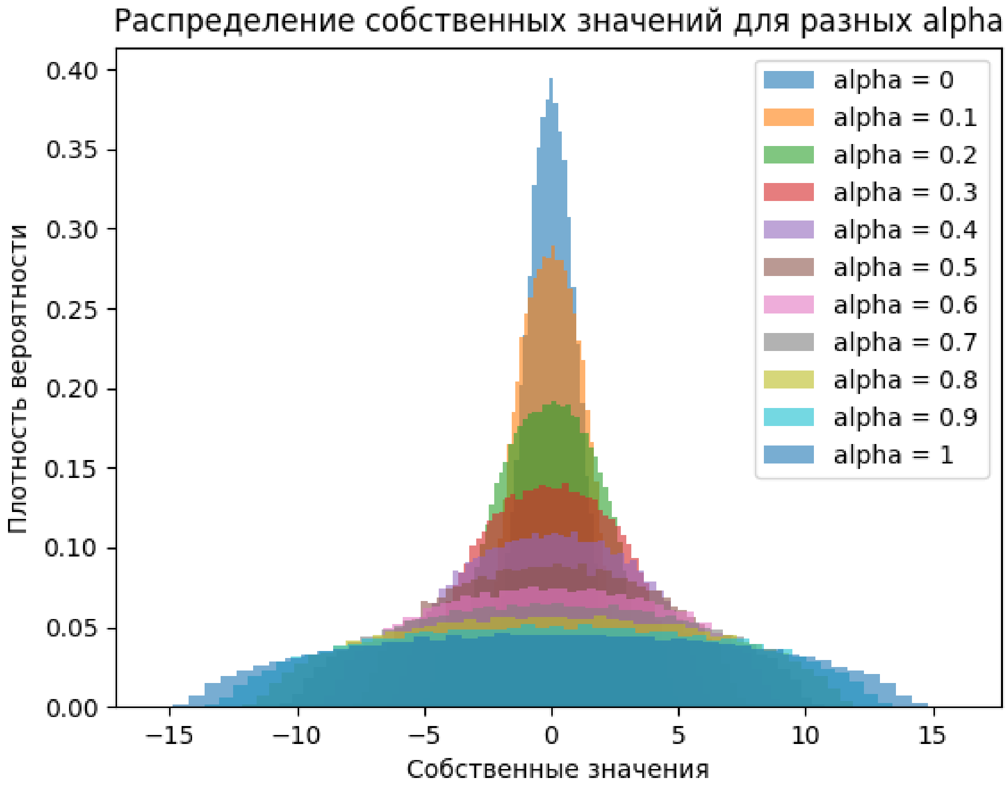

Рис. 5.1 – β =1

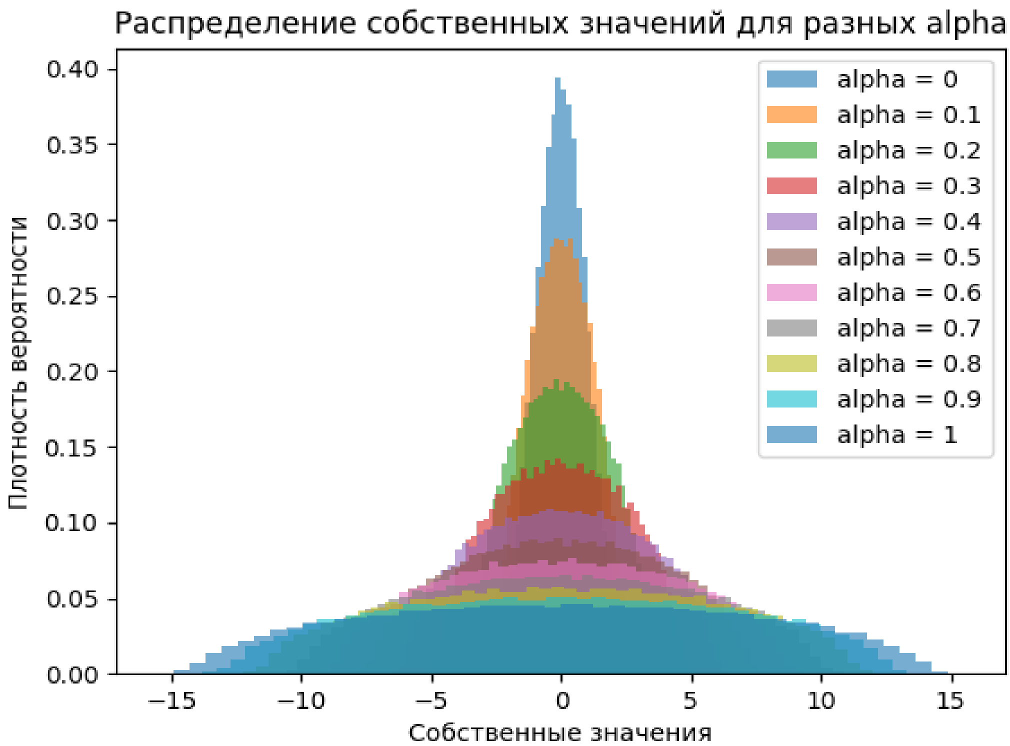

Рис. 5.2 – β = 2

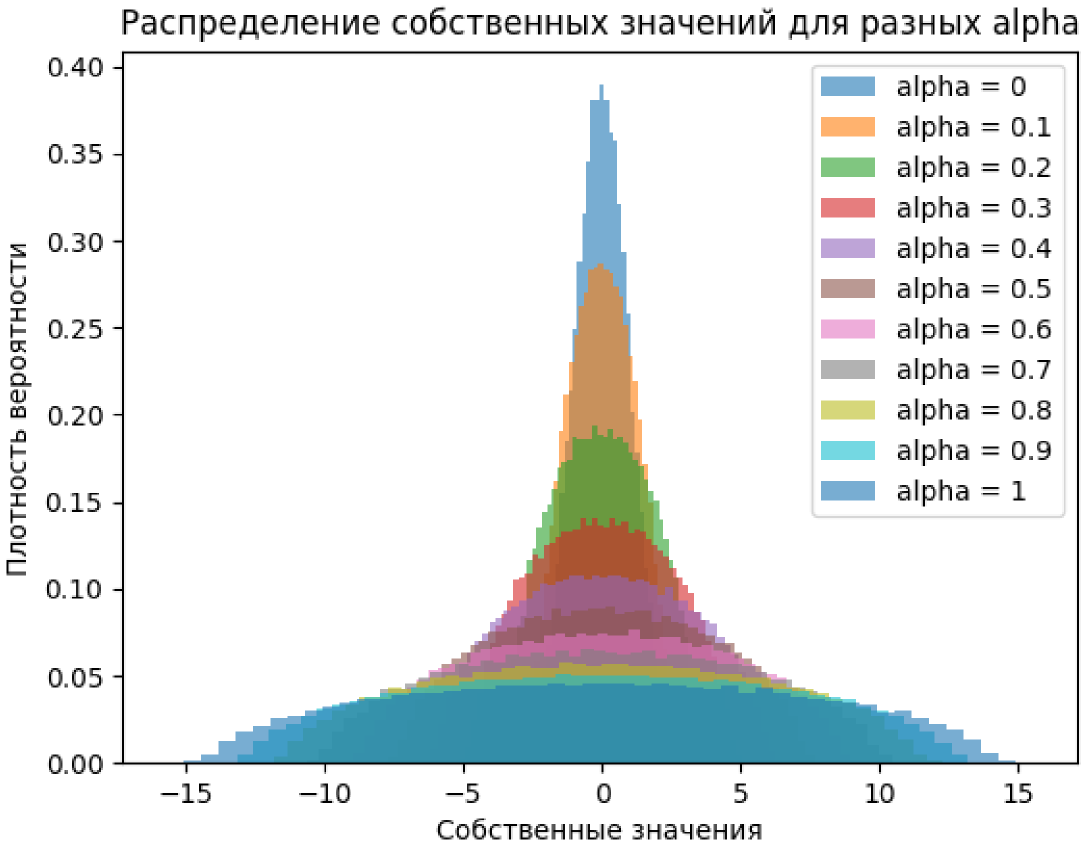

Рис. 5.3 – β = 4

Графики распределения со степенями Вандермонда от 5 до 10:

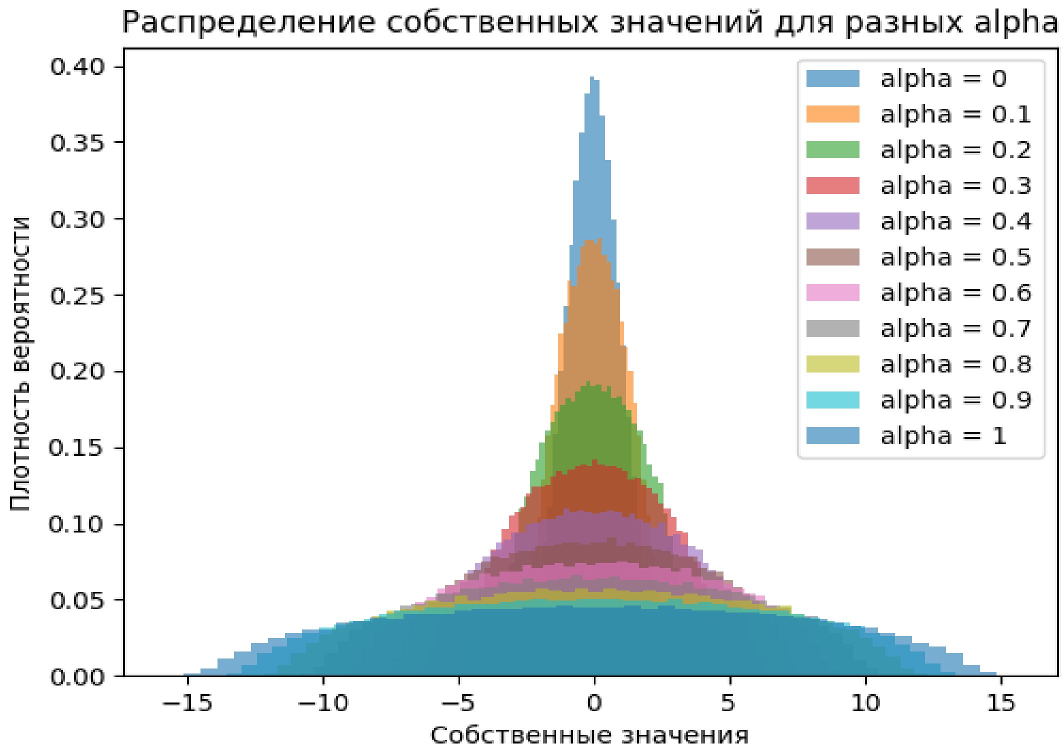
Распределение собственных значений для разных alpha
Плотность вероятности
Собственные значения
alpha = 0
alpha = 0.1
alpha = 0.2
alpha = 0.3
alpha = 0.4
alpha = 0.5
alpha = 0.6
alpha = 0.7
alpha = 0.8
alpha = 0.9
alpha = 1
0.40
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
−15
−10
−5
0
5
10
15

Рис. 5.4 – β = 5

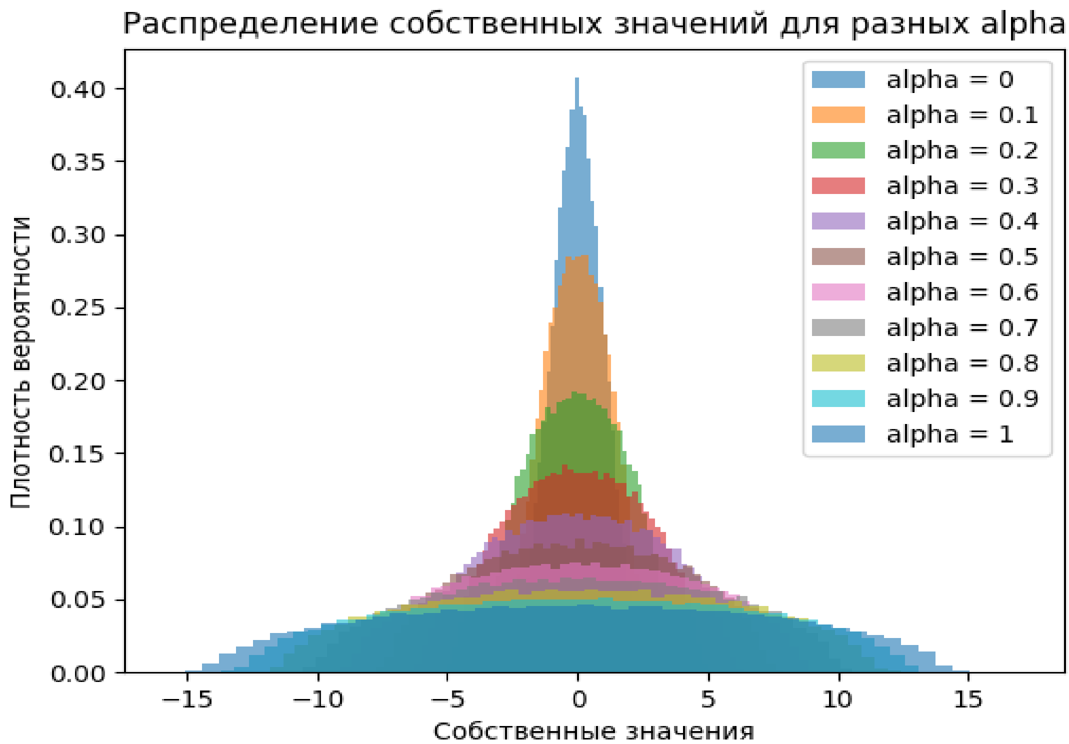
Распределение собственных значений для разных alpha
Плотность вероятности
Собственные значения
alpha = 0
alpha = 0.1
alpha = 0.2
alpha = 0.3
alpha = 0.4
alpha = 0.5
alpha = 0.6
alpha = 0.7
alpha = 0.8
alpha = 0.9
alpha = 1
0.40
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
−15
−10
−5
0
5
10
15

Рис. 5.5 – β = 6

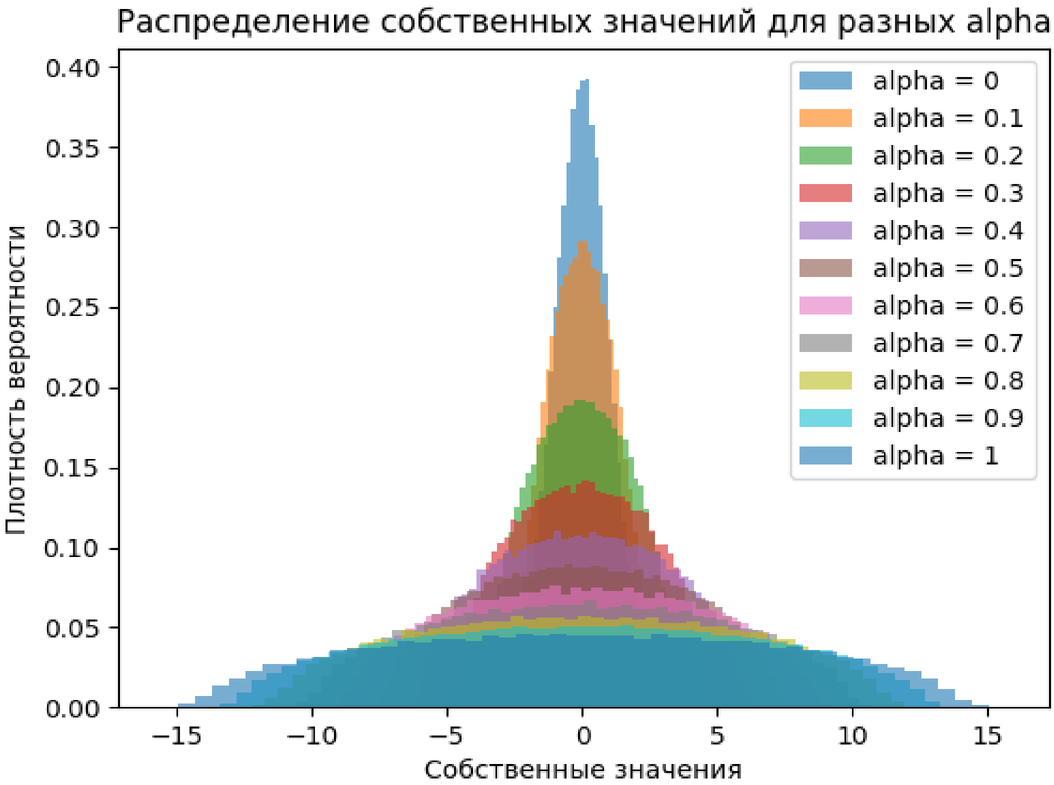

Рис. 5.6 – β = 7

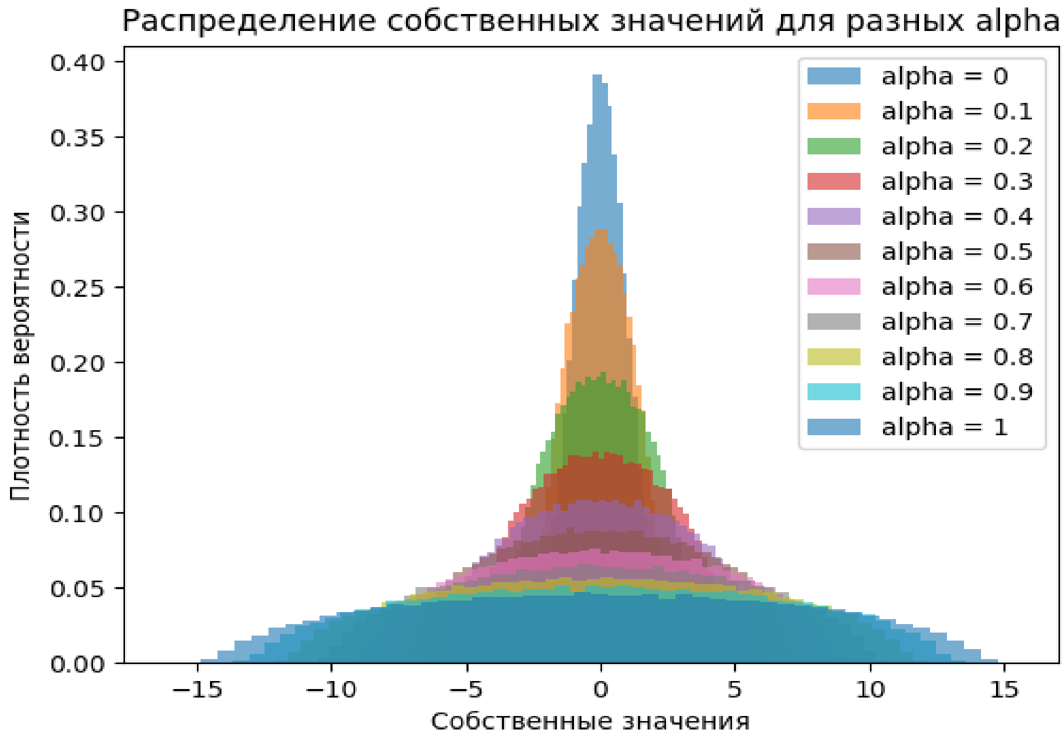

Рис. 5.7 – β = 8

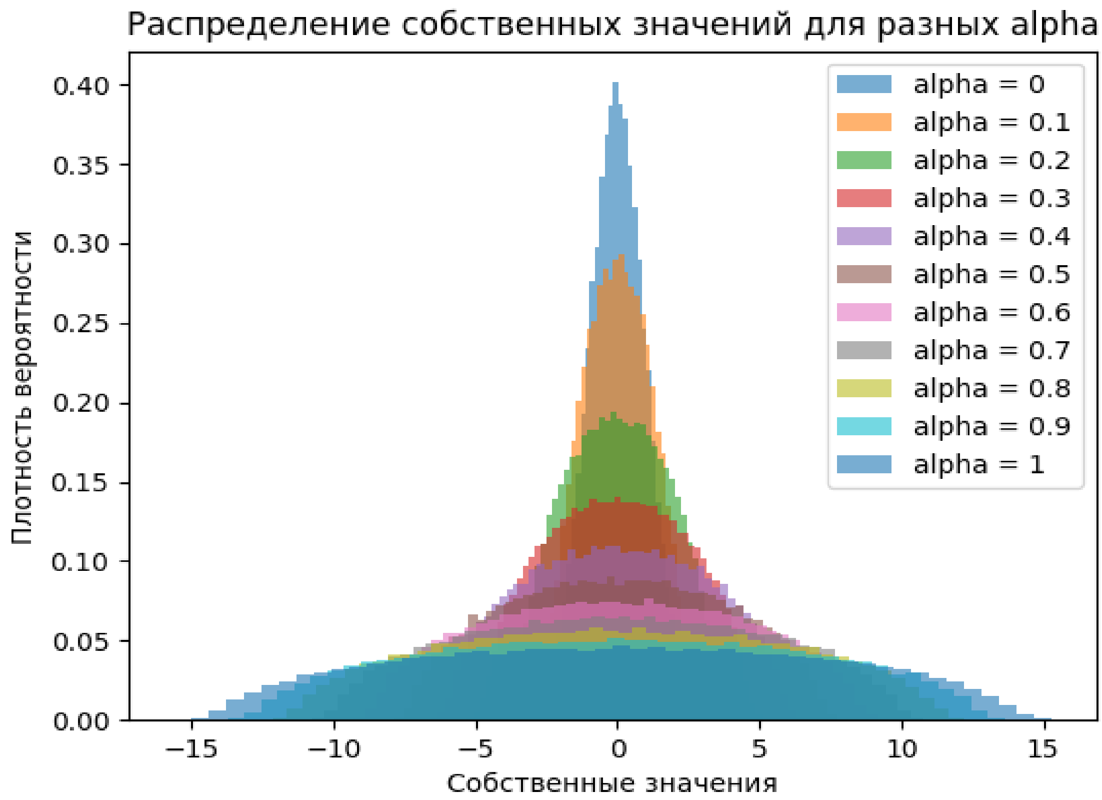

Рис. 5.8 – β = 9

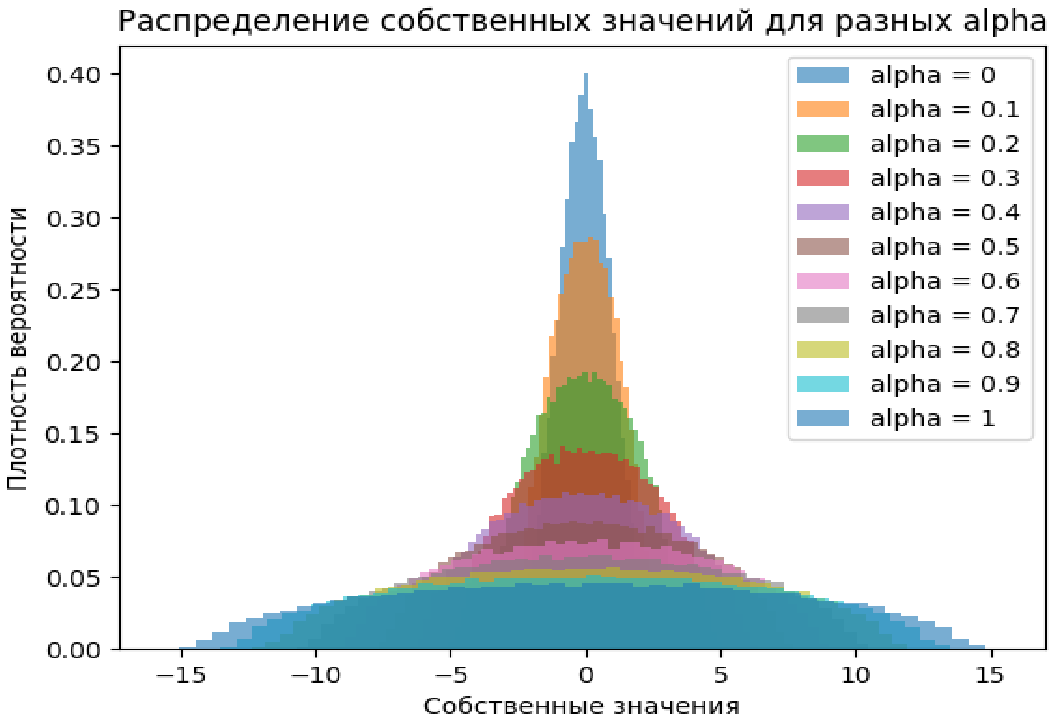

Рис. 5.9 – $\beta = 10$

Графики распределения со степенями Вандермонда меньше 1 (0.1, 0.5, 0,7):

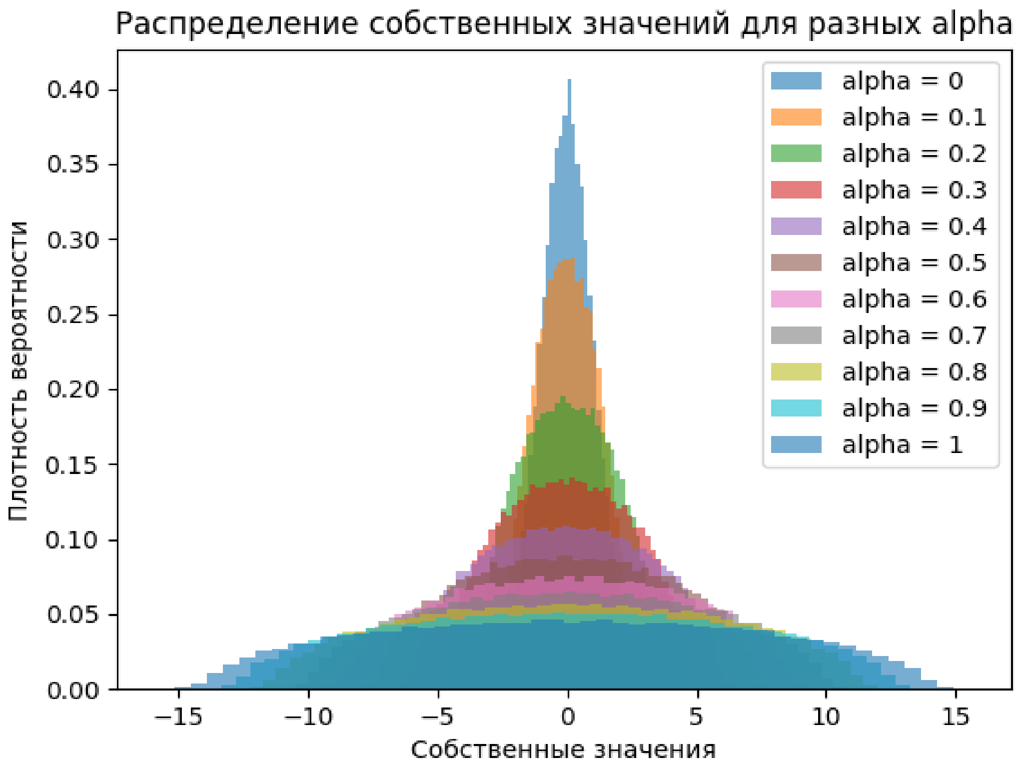

Рис. 5.10 – β = 0.7

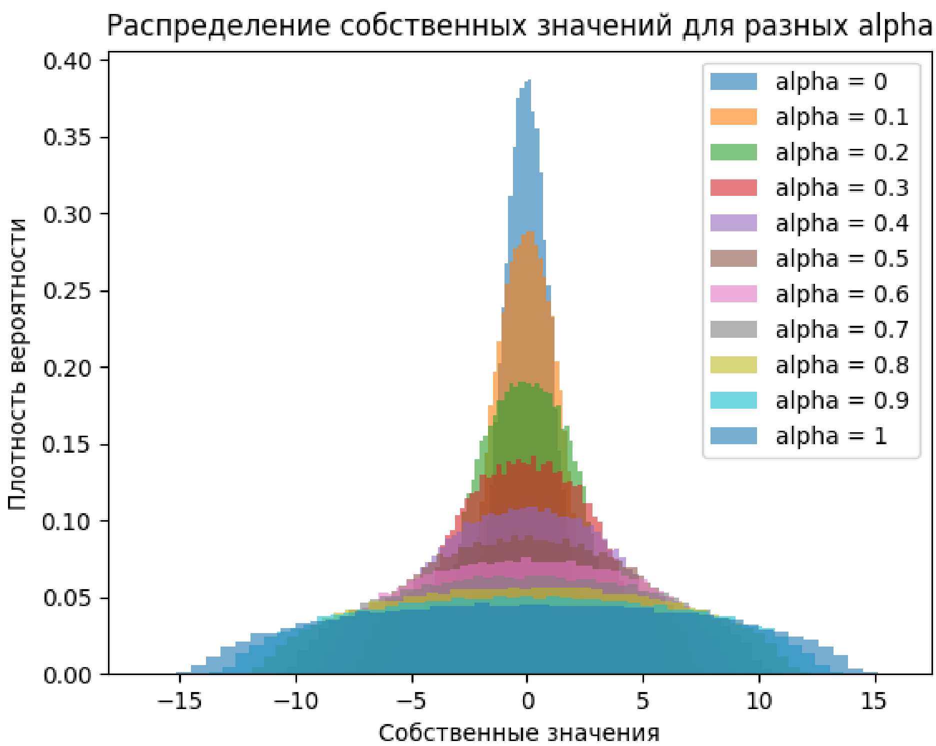

Рис. 5.11 – β = 0.5

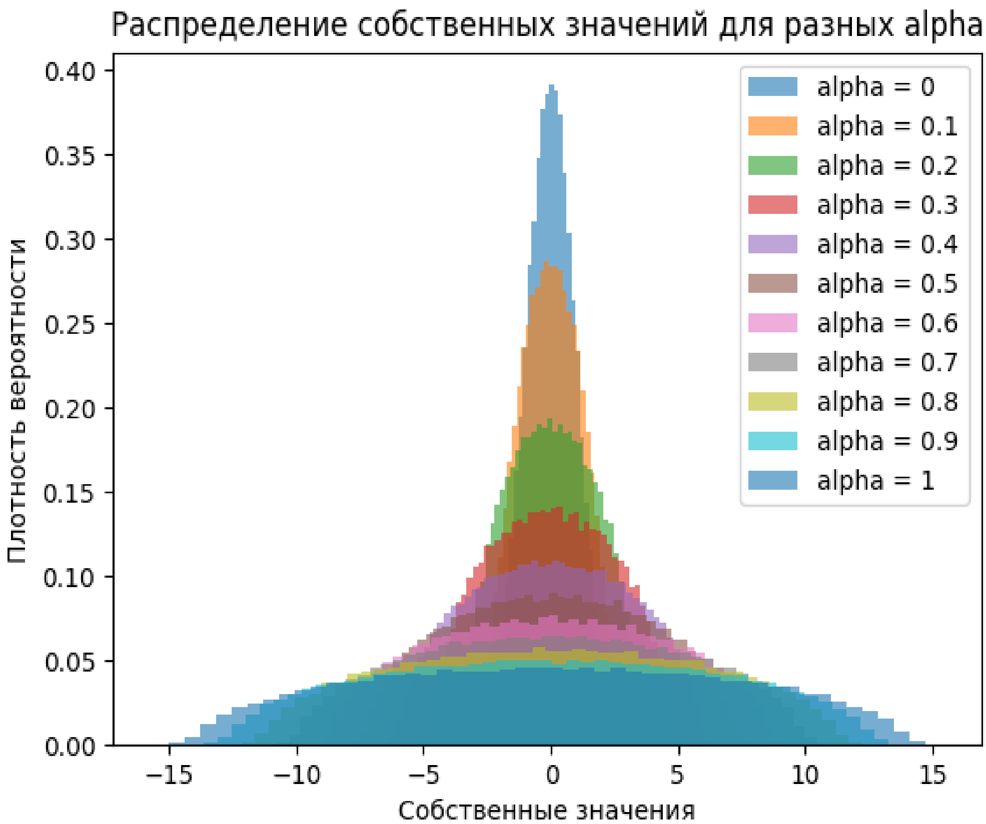

Рис. 5.12 – β = 0.1

Насколько влияет степень модуль Вандермонда (β) и степень асимметрии матрицы (α) можно наблюдать на графиках выше. Влияние α подтверждает теоретические данные и распределение правда сужается при изменение этого параметра в промежутке от 1 до 0. Влияние β заметно на верхушках графиков подтверждая то, что обеспечивает отталкивание собственных значений друг от друга.

Для повышения точности этих результатов было использовано несколько методов:

1. Для стабилизации вычислений по формулам было применен логарифм и эпсилон подходящего числового значения.
2. Из-за технической невозможности вычислений для всего пространства собственных значений ансамбля, связанной с большим

объемом данных, и учитывая, что при слабых ограничениях функции *V(x)*, рост которой превышает логарифмический на бесконечности, носителем предельной меры является компакт, а максимальные и минимальные собственные значения сходятся к границам этого компакта с вероятностью равной единице[1,2], было решено ограничить само пространство гиперкубом с длиной ребра 40.

3. Также из-за отсутствия аналитической формы нормализационной константы было принято решение уравнять веса собственных значений по единице что аналогично роли самой константы[6].
4. Для оптимизации, сокращения времени работы программы и эффективности использования ресурсов вычислительной машины была применена многопроцессорная обработка с делением количества матриц на пакеты данных.

Формула HCIZ для плотности собственных значений асимметричного гауссовского ансамбля может быть получена с помощью методов алгебраической геометрии и подтверждена численным моделированием с использованием методов Монте-Карло.

5.2. Комплексный ансамбль Жинибра

Комплексный ансамбль Жинибра – это матричный ансамбль, состоящий из N x N матриц с комплексными гауссовыми записями. Элементы независимы и одинаково распределены со стандартным нормальным распределением, где действительная и мнимая части каждой элементы независимы и нормально распределены со средним 0 и дисперсией $\frac{1}{2}$. Комплексный ансамбль Жинибра также известен как комплексная версия гауссовского унитарного ансамбля (GUE), поскольку его распределение собственных значений такое же, как и у GUE[5,6].

Функция плотности вероятности для комплексного ансамбля Жинибра дается следующим образом:

$$P(X) = C * \exp\left(-Tr(XX^H)\right), \qquad (5.4)$$

где X^H – сопряженное транспонирование X, Tr – оператор следа, а C – константа нормализации. Функция плотности вероятности может быть использована для вычисления любых моментов ансамбля Жинибра.

На практике с совместной функцией плотности вероятности может быть трудно работать из-за сложных взаимодействий между собственными значениями. Однако существует множество численных методов для вычисления распределения собственных значений, включая моделирование Монте-Карло и методы численного интегрирования.

5.2.1. Распределение собственных значений ансамбля комплексных матриц Жинибра

Распределение собственных значений ансамбля комплексных матриц Жинибра характеризуется свойством, известным как круговой закон. Закон круга гласит, что эмпирическое распределение собственных значений большой комплексной матрицы Жинибра сходится по вероятности к равномерному распределению на единичном диске с центром в начале координат по мере того, как размер матрицы стремится к бесконечности. Более точно, плотность эмпирического распределения собственных значений сходится к следующей формуле:

$$p(z) = \left(\frac{1}{\pi}\right) * \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} * E[tr[(ZZ^*) - zI]^{-1}]. \qquad (5.5)$$

где Z – комплексная матрица Жинибра N x N, Z^* – ее сопряженное транспонирование, tr[.] обозначает след матрицы, I – матрица тождества N x N, а ρ(z) – предельная плотность собственных значений в точке z в комплексной плоскости.

```
def ginibre_matrix(N):
    #Создаем ансамбль Жинибра
    z    =    np.random.normal(size=(N,    N))    +    1j    *
np.random.normal(size=(N, N))
    q, r = np.linalg.qr(z)
    return q

def asymptotic_eigenvalue_distribution(N, num_samples=1000):
    # Проводим расчет распределения
    eigenvalues = []
    for i in range(num_samples):
        z = ginibre_matrix(N)
        zz = np.dot(z, np.conj(z.T))
        eigenvalues.extend(np.linalg.eigvals(zz))
    return np.array(eigenvalues)
```

Листинг 5.2 – Код для распределения Жинибра

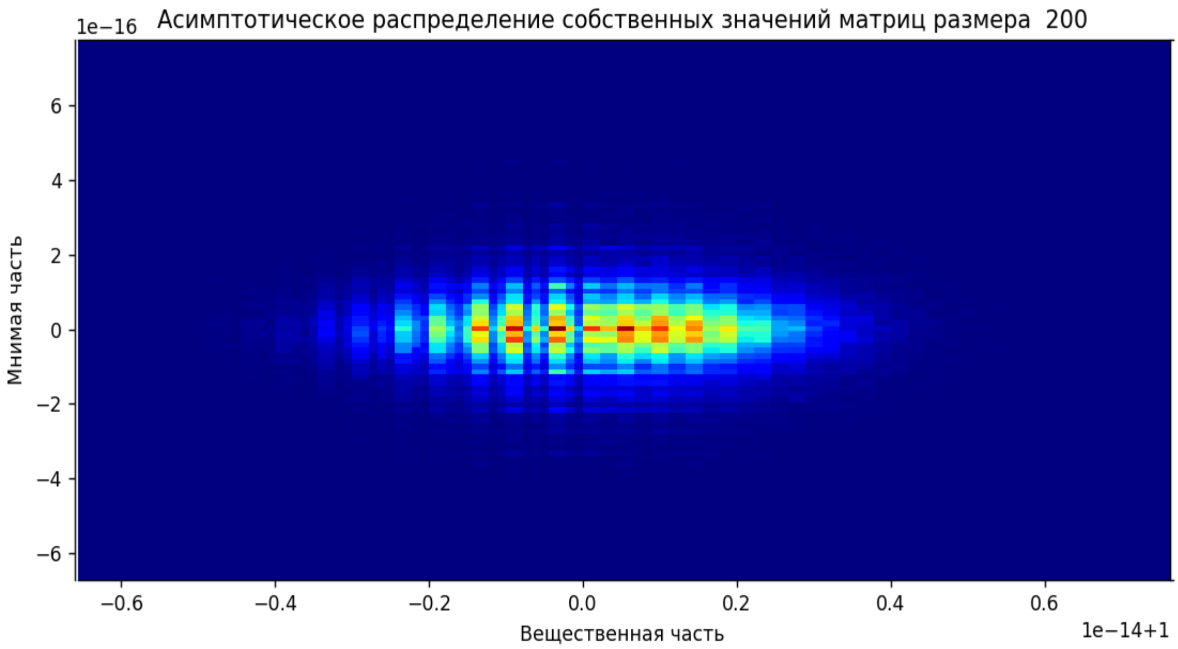

Рис. 5.13 – График распределения Жинибра

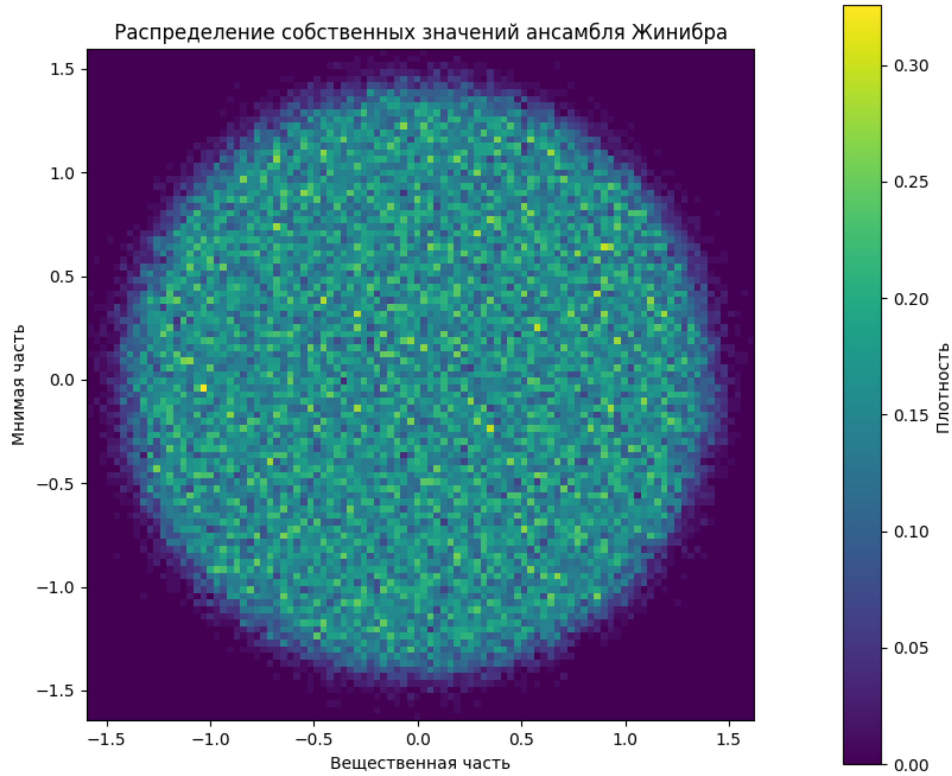

Рис. 5.14 – График распределения Жинибра

На двух графиках выше заметно различия в форме распределения собственных значениях (круг и эллипс).

Первый случай объясняется эллиптическим законом. Закон эллипса является обобщением кругового закона и описывает распределение собственных значений для случайных матриц, элементы которых имеют разные дисперсии вещественной и мнимой частях. Рассмотрим случайную комплексную матрицу G размером $N \times N$, элементы которой распределены следующим образом:

$$G_{ij} = X_{ij} + Y_{ij}$$

где X_{ij} и Y_{ij} — независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым средним и дисперсиями σ_τ^2 и σ_i^2 соответственно:

$$X \sim \mathrm{N}(0, \frac{\sigma_\tau^2}{\mathrm{N}})$$

$$X \sim \mathrm{N}(0, \frac{\sigma_i^2}{\mathrm{N}})$$

В этом случае собственные значения матрицы G в пределе $N \to \infty$ распределяются внутри эллипса с полуосями $\sigma_\tau + \sigma_i$ и $|\sigma_\tau - \sigma_i|$.

Второй случай соответствует круговому закону где дисперсия элементов является одинаковой в вещественной и мнимой частях.

В итоге получается что модель распределения в первом графике является ассиметричной из-за разной дисперсии элементов матриц.

Заключение

В данной работе были рассмотрены основные классы случайных матриц и их свойства. Особое внимание было уделено гауссовским ансамблям случайных матриц, таким как гауссовский унитарный ансамбль (GUE), гауссовский ортогональный ансамбль (GOE) и гауссовский симплектический ансамбль (GSE). Также были изучены ансамбли вещественных асимметричных матриц и ансамбль Жинибра.

Основные результаты работы включают следующие выводы и наблюдения:

1. Теоретический анализ:

   Изучены основные свойства гауссовских ансамблей и их влияние на распределение собственных значений;

   Для каждого из рассмотренных ансамблей была определена плотность собственных значений, что позволило получить аналитические выражения и численные результаты.

2. Численное моделирование:

   Разработан и реализован программный код для генерации случайных матриц различных типов и вычисления их собственных значений;

   Проведены численные эксперименты, подтвердившие теоретические предсказания и выявившие влияние параметров ансамбля на распределение собственных значений.

3. Влияние параметров:

   Исследовано влияние параметра α, определяющего степень асимметричности матрицы, на распределение собственных значений. Показано, что при уменьшении α распределение становится более асимметричным;

   Проанализировано влияние параметра β, связанного с модулем Вандермонда, на отталкивание собственных значений. Установлено, что увеличение β приводит к увеличению отталкивания между собственными значениями.

4. Методы повышения точности:

Для стабилизации вычислений применены логарифмические преобразования и использование малого значения ϵ;

Ограничение пространства собственных значений гиперкубом позволило сократить объем вычислений и повысить точность результатов;

Использование многопроцессорной обработки обеспечило эффективное выполнение численных экспериментов.

5. Практическая значимость:

Полученные результаты могут быть использованы для моделирования и анализа сложных систем в различных научных и инженерных дисциплинах, таких как физика, статистика, теория информации и финансовая математика;

Разработанный программный код и методы могут служить основой для дальнейших исследований и практических приложений, связанных с теорией случайных матриц.

Работа вносит значительный вклад в понимание распределения собственных значений в различных ансамблях случайных матриц и предлагает эффективные методы для их численного анализа. Будущие исследования могут быть направлены на расширение изучаемых классов случайных матриц, исследование их динамических свойств и разработку новых численных методов для более глубокого понимания случайных процессов и сложных систем.

Список использованных источников:

1. Татьяна Щербина (2013). Курс по теории случайных матриц. Математическая лаборатория им. П. Л. Чебышева СПбГУ [Электронный ресурс]. URL: https://www.lektorium.tv/course/23004 . – (дата обращения: 25.01.2023)
2. Leonid Pastur, Mariya Shcherbina Eigenvalue Distribution of Large Random Matrices. Mathematical Surveys and Monographs, –2011. – V. 171. – P. 632.
3. Khorunzhy A., Khoruzhenko B., Pastur L. Asymptotic properties of large random matrices with independent entries //Journal of Mathematical Physics. – 1996. – V.37. - P. 5033-5060.
4. Khorunzhy A. On a property of strong selfaverageness in Wigner and Wegner ensembles of random matrices //Random Operators and Stochastic Equations. – 1994. – V.2. – P. 163-174.
5. Klyachko A. Stable bundles, representation theory and Hermitian operators //Selecta Mathematica. – 1998. – V.4. – P. 419-445.
6. Silverstein J.W. Strong Convergence of the Empirical Distribution of Eigenvalues of Large Dimensional Random Matrices// Journal of Multivariate Analysis. – 1995. – V.55. – P. 331-339.
7. Voiculescu D. A strengthened asymptotic freeness result for random matrices with applications to free entropy //International Mathematics Research Notices. – 1998. – V.1. – P. 41-63.
8. Zee A. Law of addition in random matrix theory //Nuclear Physics B – 1996. – V.474. – P. 726-744.
9. Voiculescu D. Limit laws for Random matrices and free products //Inventiones mathematicae – 1991. – V.104. – P. 201-220.
10. Orlov A. Deformed Ginibre ensembles and integrable systems //Physics Letters A. – 2014. – V.378. – P. 319-328.

11. Ye Bin, Qui Liang, Wang Xuesong. Spectral statistics in directed complex networks and universality of the Ginibre ensemble //Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2015. – V.20. – P. 1026-1032.
12. Mangazeev Vladimir, Forrester Peter. Integrable structure of products of finite complex Ginibre random matrices //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2018. – V.384-385. – P. 39-63.
13. Xie Junshan. Precise asymptotics on spectral statistics of random matrices //Journal of the Korean Statistical Society. – 2014. – V.43. – P. 293-302.
14. Male Camille. The limiting distributions of large heavy Wigner and arbitrary random matrices //Journal of Functional Analysis. – 2017. – V.272. – P. 1-46.
15. Lenczewski Romuald. Limit distributions of random matrices //Advances in Mathematics. – 2014. – V.263. – P. 253-320.
16. Chiani Marco. Distribution of the largest eigenvalue for real Wishart and Gaussian random matrices and a simple approximation for the Tracy–Widom distribution //Journal of Multivariate Analysis. – 2014. – V.129. – P. 69-81.
17. Haagerup Uffe, Thorbjørnsen Steen. Random matrices with complex Gaussian entries //Expositiones Mathematicae. – 2003. – V.21. – P. 293-337.
18. Vyas Manan, Kota V.K.B. Spectral properties of embedded Gaussian unitary ensemble of random matrices with Wigner's SU(4) symmetry //Annals of Physics. – 2010. – V.325. – P. 2451-2485.
19. Vagov A.V., Vorov O.K. Gaussian ensemble of tridiagonal symmetric random matrices //Physics Letters A. – 1997. – V.232. – P. 91-98.

Приложение 1. Ссылки на полный код из данной работы.

1. Глава 2. Гауссовский унитарный ансамбль:
   https://github.com/Ragnarok7861/Diplom-Random-Matrices/blob/main/GUE.py
2. Глава 3. Гауссовский ортогональный ансамбль:
   https://github.com/Ragnarok7861/Diplom-Random-Matrices/blob/main/GOE.py
3. Глава 4. Гауссовский симплектический ансамбль:
   https://github.com/Ragnarok7861/Diplom-Random-Matrices/blob/main/GSE.py
4. Глава 5.Ансамбли Эрмитовых матриц с неравными вещественными и мнимыми частями:

(Ансамбль вещественных асимметричных гауссовых матриц)

https://github.com/Ragnarok7861/Diplom-Random-Matrices/blob/main/Ensemble.py

(Ансамбль Жинибра)

https://github.com/Ragnarok7861/Diplom-Random-Matrices/blob/main/Ginibre.py

Полный код из листингов 4.1 и 4.2 был потерян в связи с техническими проблемами в процессе работы. Он будет загружен на репозиторий позднее.

Ссылка на весь репозиторий:

https://github.com/Ragnarok7861/Diplom-Random-Matrices/tree/main

Приложение 2. Схема UML по работе кода для ансамбля вещественных асимметричных гауссовых матриц