Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого
Физико-механический институт

Асимптотическое распределение собственных значений эрмитовых асимметрично распределенных ансамблей случайных матриц

01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
01.04.02 «Математические методы анализа и визуализации данных»

Работу выполнил студент
Долгий Виктор Сергеевич
Научный руководитель
Козлов Константин Николаевич
Консультант
Васильчук Владимир Юрьевич

Санкт-Петербург
2024

Актуальность

Применение ансамблей случайных матриц:
- В физике: моделирование спектров сложных систем, квантовая механика.
- В статистике: анализ больших данных, алгоритмы кластеризации.
- В телекоммуникациях: оценка производительности каналов связи.

Теоретическая значимость:
- Углубление понимания случайных процессов и спектральной теории.
- Важность изучения распределения собственных значений для прогноза и анализа поведения сложных систем.
-

Практическая потребность:
- Разработка методов для анализа асимметричных случайных матриц, которые не охвачены традиционными подходами.
- Улучшение точности численных методов для решения реальных задач в науке и инженерии.

Постановка задач

Основная цель:
Исследовать распределение собственных значений в эрмитовых асимметрично распределенных ансамблях случайных матриц.

Задачи:
- Изучение теоретических основ теории случайных матриц.
- Анализ распределения собственных значений в ансамблях.
- Исследование асимметричных ансамблей случайных матриц.
- Разработка и реализация численных методов.
- Проведение численных экспериментов и анализ результатов.

Проблемы существующих решений

Ограничения классических ансамблей:
Применимость только к симметричным матрицам.
Ограничения в моделировании асимметричных систем.

Необходимость изучения асимметричных ансамблей:
Реалистичное моделирование реальных систем с асимметричными параметрами.

Численные сложности:
Высокие требования к вычислительным ресурсам.
Возможная нестабильность получаемых результатов.
Долгое время работы в процессе вычислений.

Теоретические основы

Обзор гауссовских ансамблей:

Гауссовский унитарный ансамбль (GUE)

Гауссовский ортогональный ансамбль (GOE)

Гауссовский симплектический ансамбль (GSE)

$$P(x_1, x_2, \dots x_N) = C_N \exp\left(-\frac{1}{2}\beta \sum_{1}^{N} x_j^2\right) \prod_{j<k} |x_j - x_k|^\beta$$

Асимметричные Эрмитовы ансамбли:

Ансамбль вещественных асимметричных случайных матриц.

$$P(x_1, x_2, \dots, x_N) = C_N \prod_{i<j} |x_i - x_j|^\beta e^{-NtrV(x)}$$

Ансамбль Жинибра.

$$p(z) = \left(\frac{1}{\pi}\right) * \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} * E[tr[(ZZ^*) - zI]^{-1}].$$

Разработка предлагаемого решения (Генерация матриц)

Генерация случайных матриц

Первый шаг — это генерация случайных матриц для различных ансамблей:

•Для гауссовских ансамблей (GUE, GOE, GSE)* мы генерируем симметричные или эрмитовы матрицы с определенными статистическими свойствами.

•Для асимметричных ансамблей, таких как ансамбль вещественных асимметричных матриц и ансамбль Жинибра, мы учитываем независимость и различное распределение для вещественных и мнимых частей матрицы.

Разработка предлагаемого решения (Численные методы и программная реализация)

Численные методы:
Использование теоретически известных формул.
Логарифмические преобразования.
Подбор сбалансированного количества матриц в ансамбле, а также их размера.
Подбор аналогичного метода нормализации распределения (для асимметричных ансамблей).

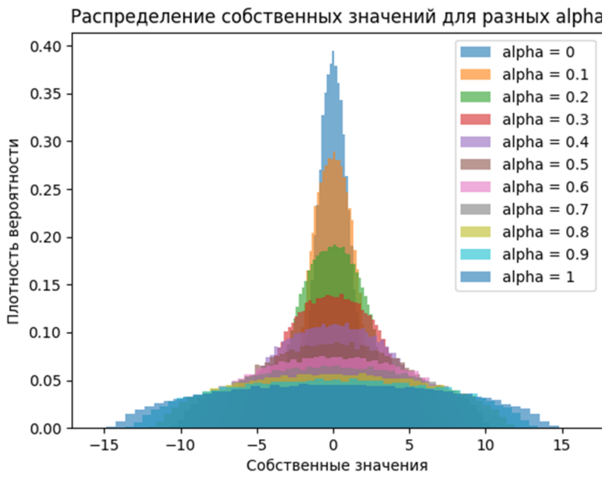
Программная реализация:
Python, NumPy, SciPy, Matplotlib.
Многопроцессорная обработка (модуль multiprocessing).
Разделение данных на отдельные пакеты.
Алгоритм проверки на очень малые или очень большие значения.

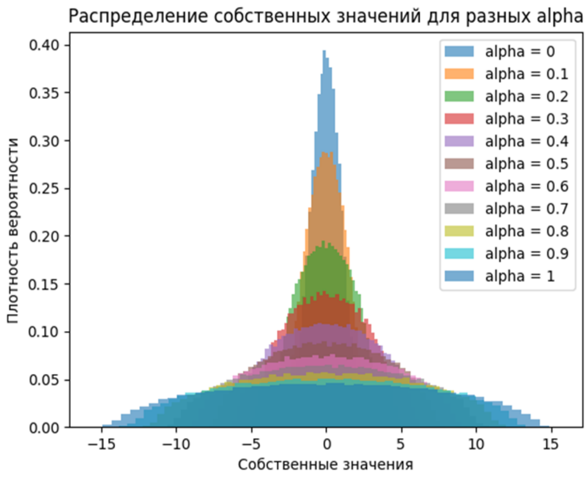
Гауссовские ансамбли

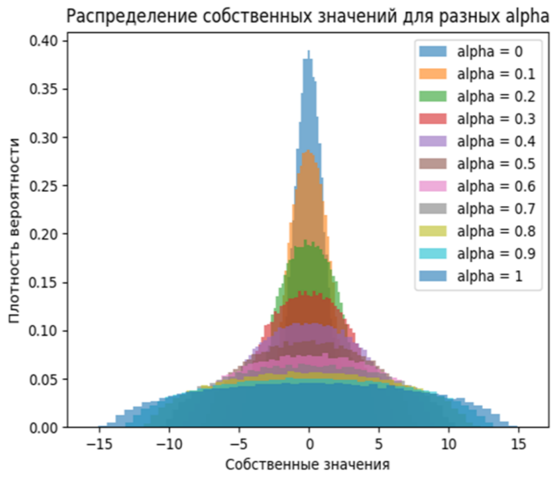
$$P(x_1, x_2, \dots x_N) = C_N \exp\left(-\frac{1}{2}\beta \sum_{1}^{N} x_j^2\right) \prod_{j<k} |x_j - x_k|^{\beta}$$

$$C_{N\beta}^{-1} = (2\pi)^{\frac{2}{N}} \beta^{-\frac{N}{2}-\frac{\beta N(N-1)}{4}} \left[\Gamma\left(1+\frac{\beta}{2}\right)\right]^{-N} \prod_{j=1}^{N} \Gamma\left(1+\frac{\beta_j}{2}\right)$$

Ансамбль вещественных асимметричных матриц





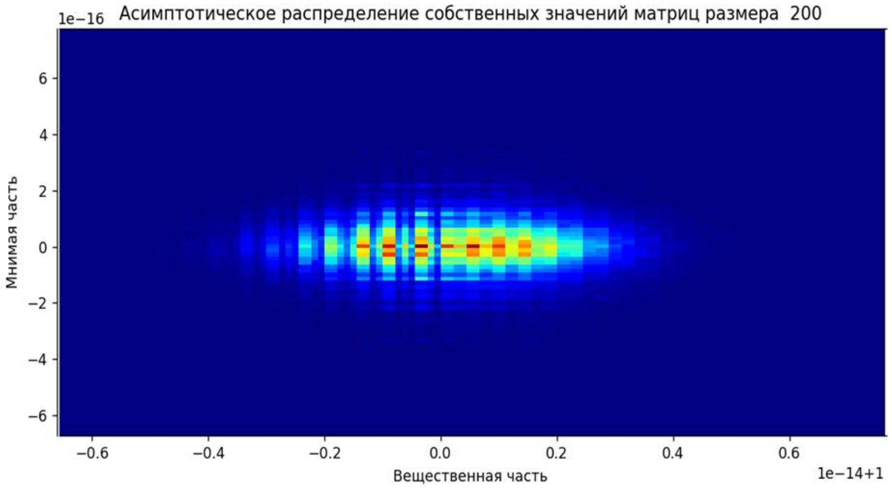


$$P(x_1, x_2, \ldots, x_N) = C_N \prod_{i<j} |x_i - x_j|^{\beta} e^{-NtrV(x)}$$

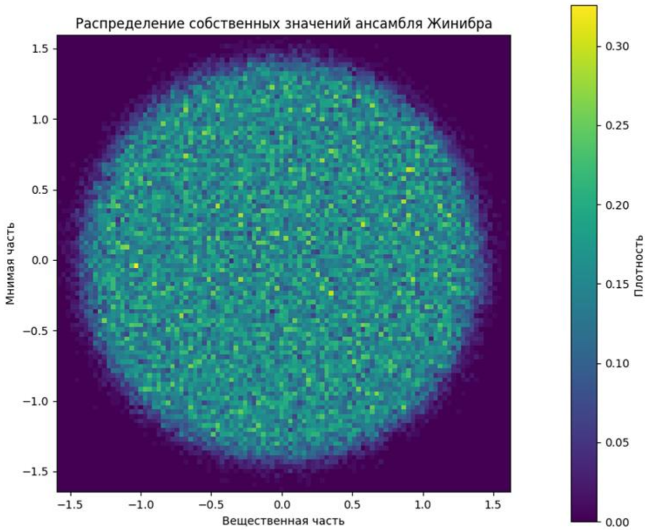
$$V(x) = \alpha^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + (1 - \alpha^2) \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2$$

alpha – параметр асимметрии; beta – степень модуля взаимного отталкивания собственных значений (модуль Вандермонда).

Ансамбль Жинибра



Эллипстичекое распределение



Круговое распределение

$$p(z) = \left(\frac{1}{\pi}\right) * \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} * E[tr[(ZZ^*) - zI]^{-1}].$$

Выводы

- Согласование результатов с теоретическими предсказаниями для симметричных и асимметричных ансамблей.
- Высокая точность численных методов подтверждена экспериментально.
- Универсальность подхода для различных типов ансамблей.
- Новые наблюдения для асимметричных ансамблей, связанные с параметрами асимметрии (альфа) и взаимного отталкивания (степень модуля Вандермонда).
- Методы, разработанные в исследовании, расширяют понимание распределения собственных значений в случайных матрицах.
- Возможности для дальнейшего применения в различных областях науки и техники.
- Основа для будущих исследований в области асимметричных случайных матриц и их приложений.

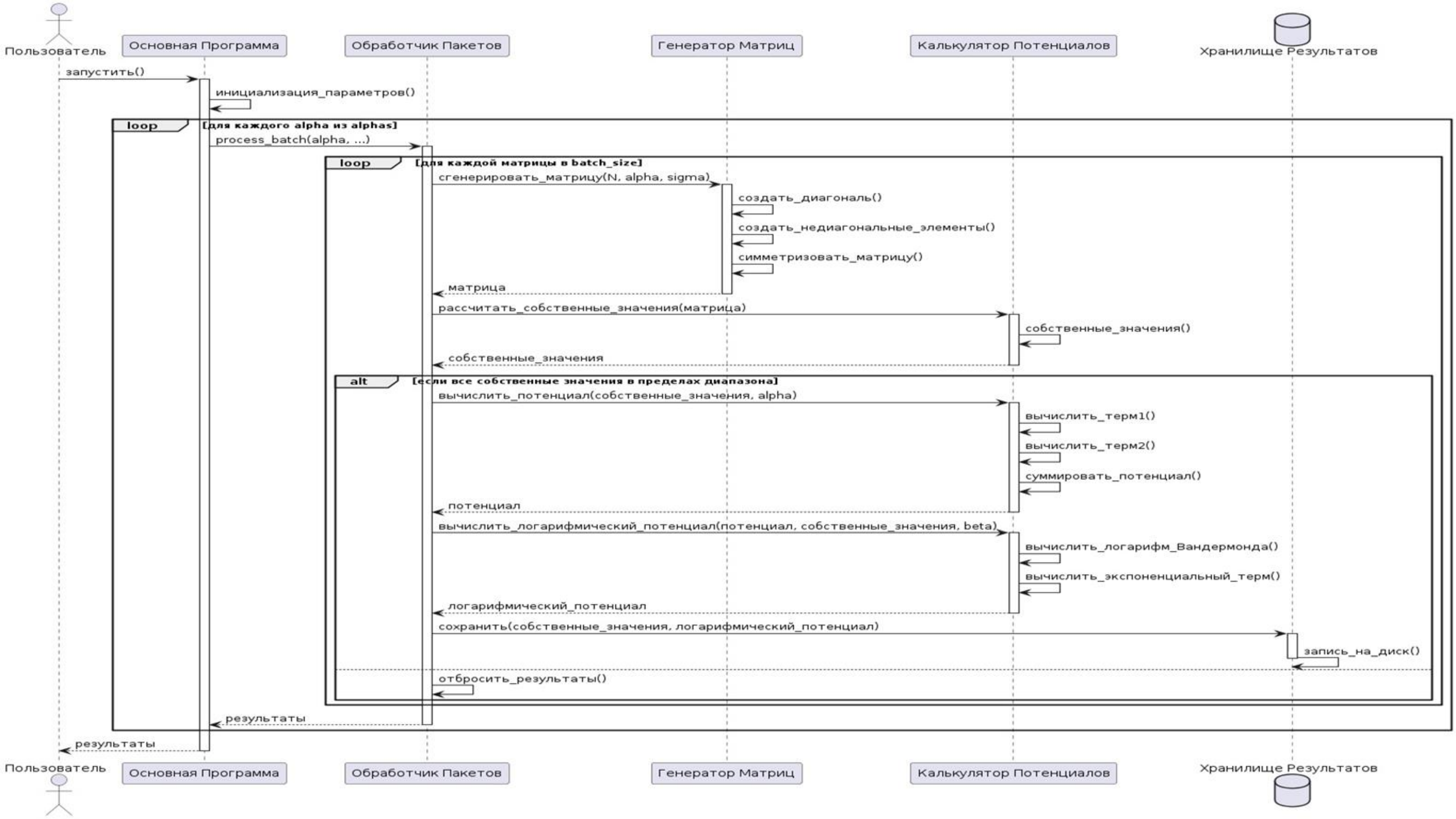
Выводы

Физика:
1. Моделирование спектров сложных систем в квантовой механике.
2. Теория хаоса.
3. Модели твердого тела.

Статистика:
1. Анализ больших данных.
2. Анализ ковариационных матриц.

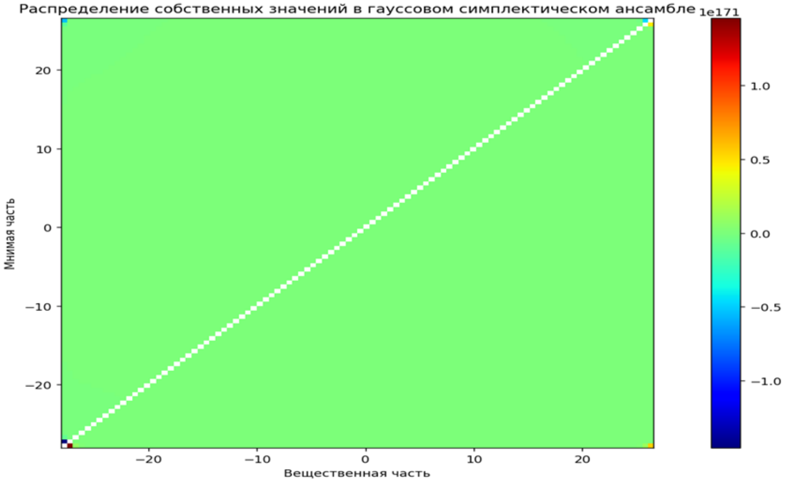
Телекоммуникации:
1. Оценка производительности каналов связи.
2. Анализ и оптимизация сетей связи.

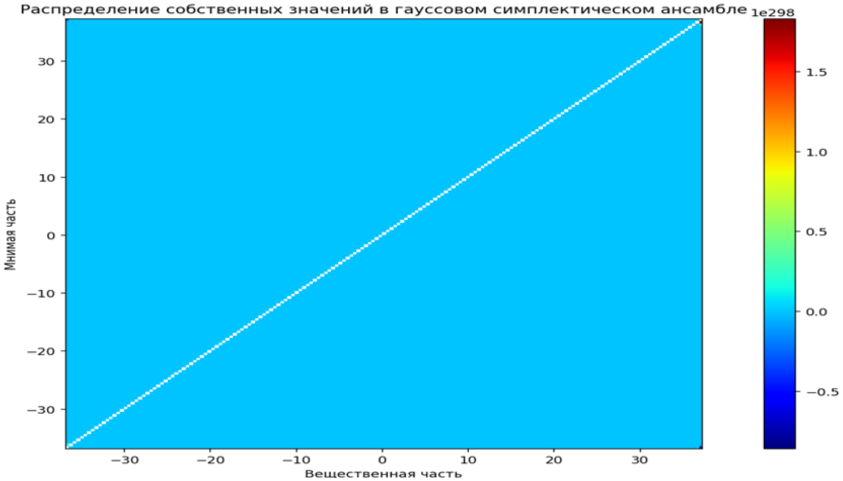
Спасибо за внимание!!!



Пользователь
Основная Программа
Обработчик Пакетов
Генератор Матриц
Калькулятор Потенциалов
Хранилище Результатов
запустить()
инициализация_параметров()
loop [для каждого alpha из alphas]
process_batch(alpha, ...)
loop [для каждой матрицы в batch_size]
сгенерировать_матрицу(N, alpha, sigma)
создать_диагональ()
создать_недиагональные_элементы()
симметризовать_матрицу()
матрица
рассчитать_собственные_значения(матрица)
собственные_значения()
собственные_значения
alt [если все собственные значения в пределах диапазона]
вычислить_потенциал(собственные_значения, alpha)
вычислить_терм1()
вычислить_терм2()
суммировать_потенциал()
потенциал
вычислить_логарифмический_потенциал(потенциал, собственные_значения, beta)
вычислить_логарифм_Вандермонда()
вычислить_экспоненциальный_терм()
логарифмический_потенциал
сохранить(собственные_значения, логарифмический_потенциал)
запись_на_диск()
отбросить_результаты()
результаты
результаты

Приложение 2. Распределение GSE при помощи полиномов Эрмита и Лаггера





$$K(x,y) = \left(\frac{1}{\pi}\right)\left[\frac{H_{\left\{\frac{N}{2}\right\}}(x)H_{\left\{\frac{N}{2}-1\right\}}(y) - H_{\left\{\frac{N}{2}-1\right\}}(x)H_{\left\{\frac{N}{2}\right\}}(y)}{x-y}\right],$$

$$K(x,y) = \left(\frac{1}{\pi}\right)\left[\frac{L_{\left\{\frac{N-1}{2}\right\}}(x)H_{\left\{\frac{N-1}{2}\right\}}(y) - H_{\left\{\frac{N-1}{2}\right\}}(x)L_{\left\{\frac{N-1}{2}\right\}}(y)}{x-y}\right],$$