

# 数字信号处理第三次作业

闫昊昕

2019210361

2020 年 10 月 18 日

## 第1题

个人编写的  $n$  点 FFT 程序在 `fft.py` 中定义。该函数接受两个参数为函数输入：信号点序列  $x_n$  以及信号点数  $N$ 。该函数要求信号点数严格为 2 的整数次幂。

对一个输入 16384 点信号  $f(n) = \sin(2\pi \times 50n) + \cos(2\pi \times 100n)$ ，个人编写的 `fft` 程序以及 `numpy` 包自带的 `fft` 程序得到的频谱图像如下：

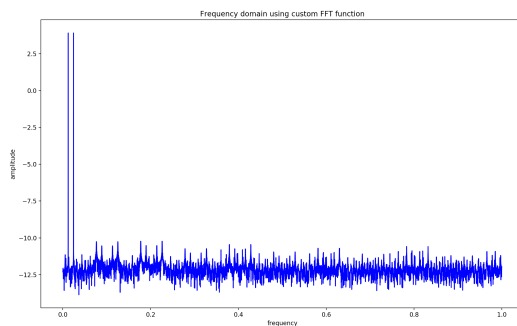


图 1: 个人编写的基 2FFT 程序结果

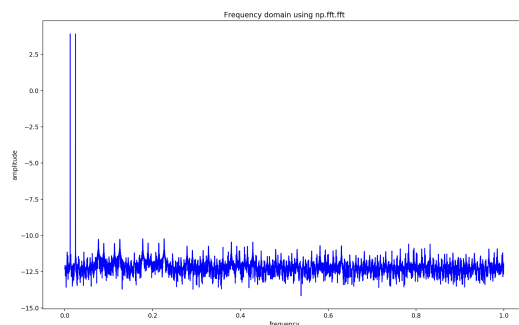


图 2: Numpy 自带的 FFT 程序结果

运行时间方面，个人编写的 FFT 程序可以在 0.2 秒左右的时间内完成对 16384 点信号的 FFT 运算，在运行速度上远远高于 DFT 算法，但和 `np.fft.fft` 函数相比运行速度仍然明显较慢，如下图所示：

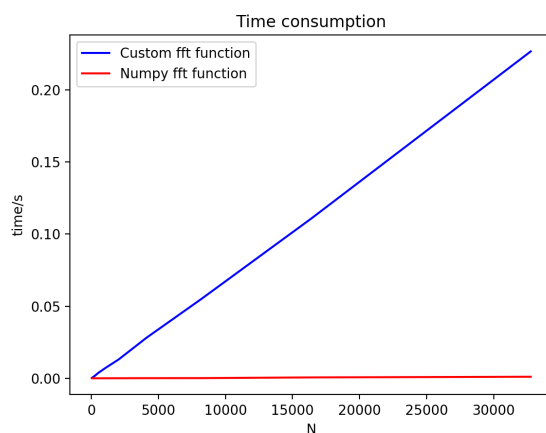


图 3: 两种程序的运行时间比较

同时可以看到随着  $N$  的增加程序运行速度的变化约为线性，这与 FFT 算法的时间复杂度  $O(n \log n)$  相吻合。

## 第2题

可以用两种方式实现函数的自相关，一种是根据定义实现序列的自相关，另一种方式是先对序列进行 FFT 得到其频谱，再做平方运算得到功率谱，最后做 IFFT 得到自相关函数的估计，本题中自相关函数的主要实现方式为定义法，功率谱法做验证使用。

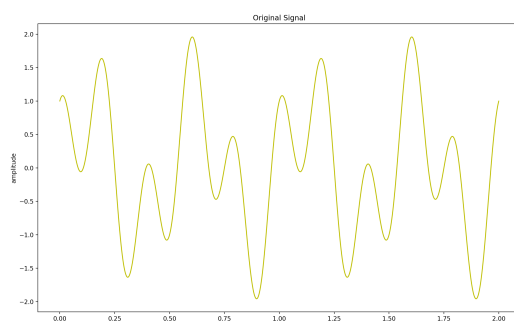


图 4: 原信号的时域表示

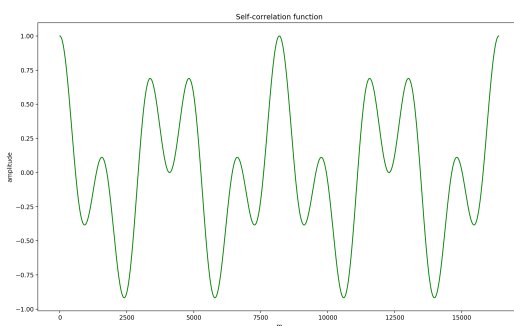


图 5: 根据定义实现的自相关函数

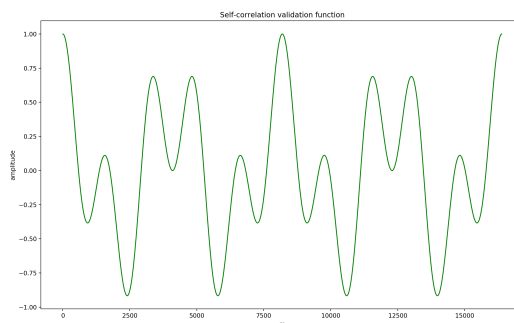


图 6: 根据功率谱原理得到的自相关函数

图 4为原信号的时域表示，图 5为通过根据定义计算的自相关函数得到的自相关函数谱，图 6为通过功率谱方法估计的自相关函数。可以看到原信号的自相关函数关于频谱中心对称，与理论相符合。

### 第3题

定义原信号序列为：

$$f(n) = 0.8 \sin(2\pi \times 20n) + \cos(2\pi \times 50n) + 1.5 \sin(2\pi \times 100n) + \epsilon$$

其中  $\epsilon$  为满足标准正太分布的随机噪声。信号长度为 2s，采样点数为 1024 点，即采样频率为 512Hz。该信号在时域的图像如下图所示：

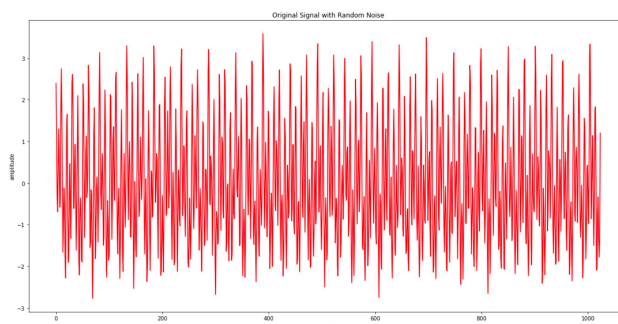


图 7: 原信号的时域表示

对原信号进行补 0 操作，再求得自相关函数谱如下图：

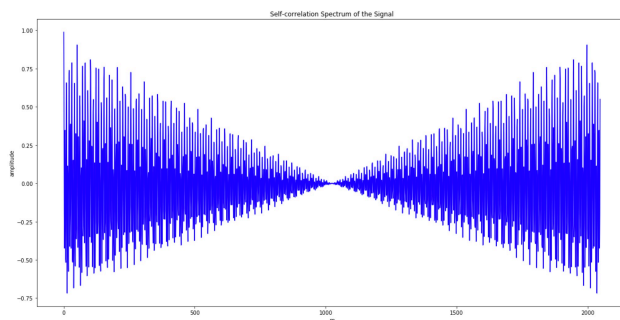


图 8: 原信号的自相关谱

对该自相关谱做 FFT，得到信号的功率谱图如下：

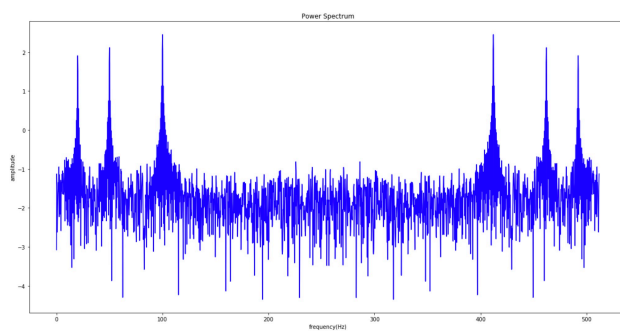


图 9: 自相关法得到的信号功率谱

可以清楚地看到功率谱在  $f = 20, 50, 100Hz$  处出现峰值，这与原始信号的定义一致。接着对自相关谱进行时域加窗，窗长为 1884 点，即滤去两侧各 100 点的自相关谱信号，得到新的功率谱如下：

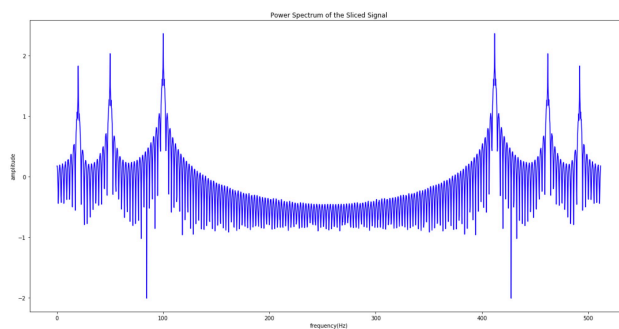


图 10: 加窗后的信号功率谱

信号的功率谱变得更为平滑，且出现了 *sinc* 函数特征，这是加矩形窗的结果。加窗前的功率谱方差为 0.594，而加窗后的功率谱方差为 0.287，功率谱方差有较大改善，但频谱分辨率也有降低。

## 第4题

实现了对信号的 Welch 平滑改进，原信号长度为 1024 点，程序中对信号进行分段操作，每一段的长度为 128 点，两端信号的重合长度为 64 点，信号共被分为 15 段。得到的功率谱如下图：

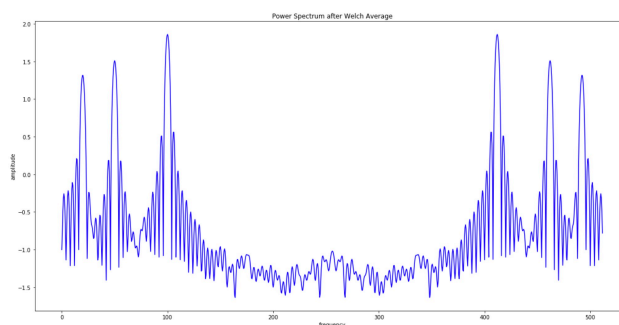


图 11: Welch 平滑改进后的功率谱

该频谱的方差为 0.536，对比原始的功率谱方差有一定改进但同时功率谱的分辨率变得较差。

## 第5题

假设某信号具有两个极为接近的频率峰值  $f_1 = 100Hz$ ,  $f_2 = 100.2Hz$ , 设该信号的表达式为:

$$f(n) = 0.8 \sin(2\pi \times 100n) + 1.2 \cos(2\pi \times 100.2n) + \epsilon$$

该信号的时域图像如下:

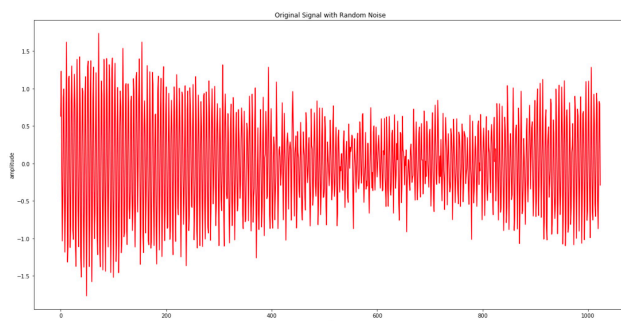


图 12: 原信号的功率谱

根据周期图法得到信号的功率谱如下, 可见两个频谱峰无法分辨:

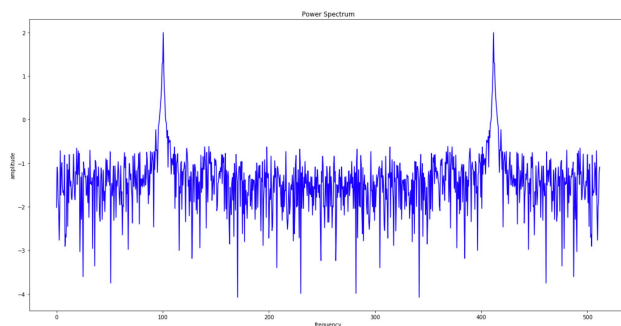


图 13: 原信号的功率谱

现试着从以下三个方面对时域信号进行操作, 探讨能否分辨两个频率峰:

### 1. 增加采样频率

对信号的采样频率增加 16 倍，即采样频率为 8192Hz，得到新的功率谱在 90 到 110Hz 的图像如下：

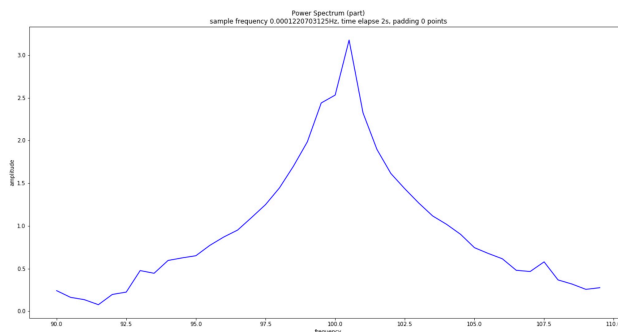


图 14: 增加采样频率后的信号功率谱

可见两个峰值仍无法分辨，改种方法并不能提高频谱分辨率。

### 2. 维持采样频率，增加信号实际长度

设定采样的信号长度为原信号的 16 倍，维持采样频率不变，得到的功率谱在 90Hz 到 110Hz 的图像如下：

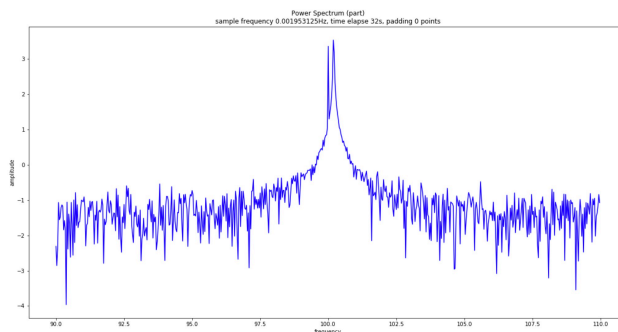


图 15: 增加信号长度后的功率谱

这种方法成功地将两个谱峰分辨开，说明该方法可以有效地提高频



谱分辨率。通过对两个峰值的解算可以得到两个峰值对应的频率正是 100Hz 和 100.2Hz，说明改种方法可以准确地表征频率。

3. 维持采样频率，用补 0 增加信号实际长度  
将信号补 0 至原信号长度的 16 倍，得到新的功率谱在 90Hz 到 110Hz 的图像如下：

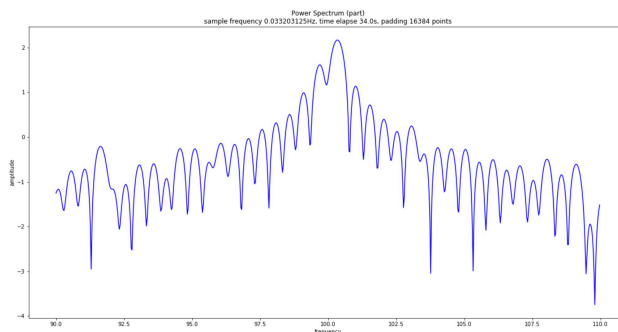


图 16: 时域补 0 后得到的功率谱

该方法得到的频谱图更为光滑，分辨率更低，因而无法分辨两个十分接近的谱峰。