بسمه تعالی

$$t\begin{cases} q_1, q_2, \dots, q_N \\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N \end{cases} \longrightarrow$$

قوانین نیوتن $\ddot{q}_i = f_i(q, \dot{q})$

$$t+\epsilon \begin{cases} q_i(t+\epsilon) = q_i(t) + \epsilon \dot{q}_i(t) \\ \dot{q}_i(t+\epsilon) = \dot{q}_i(t) + \epsilon \ddot{q}_i(t) \end{cases}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{x}} \Rightarrow -\vec{\nabla}V(x) = m\ddot{\vec{x}}$$

$$L(q,\dot{q}) \to S = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q})\,dt$$

$$L(q+\eta, \dot{q}+\dot{\eta}) \to S' = \int_{t_1}^{t_2} L(q+\eta, \dot{q}+\dot{\eta})\,dt$$

$$\Delta S = S' - S = \int_{t_1}^{t_2} \left(L(q+\eta, \dot{q}+\dot{\eta}) - L(q,\dot{q}) \right) dt = \int_{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{\eta} \right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \eta \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{d}{dt}\left(\eta \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \eta \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right\} dt = \int_{t_1}^{t_2} \eta \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right\} dt = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \qquad P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$H := \sum_i \dot{q}_i P_i - L \; ; \; dH = \sum_i (d\dot{q}_i)P_i + \dot{q}_i dP_i - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) dq_i - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) d\dot{q}_i$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{P}_i \\ \dfrac{\partial H}{\partial P_i} = \dot{q}_i \end{cases}$$

Poisson Bracket

$f(P,q) \quad g(P,q)$

$$\{f,g\} := \sum_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial P_i} - \frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right\}$$

1) $\{f,g\} = -\{g,f\}$

2) $\{f, g+\lambda h\} = \{f,g\} + \lambda\{f,h\}$

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \{q_i, H\} \\ \dot{P}_i = \{P_i, H\} \end{cases}$$ معادلات حرکت

$A(q,P,t)$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial A}{\partial P_i}\dot{P}_i$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial P_i} - \frac{\partial A}{\partial P_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}$$

$$H = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}\frac{P^2}{m}$$

d

$$\{q_i, q_j\} = 0 \qquad \{\vec{r}, H\} = \{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, H\} = \vec{\nabla}_p H$$

$$\{q_i, P_j\} = \delta_{ij} \qquad \{\vec{P}, H\} = -\vec{\nabla}_r H$$

$$\{P_i, P_j\} = 0$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \{H, H\}$$

- تقارن زمانی $\rightarrow H(p,q) \neq H(p,q,t)$

یعنی زمان به صورت صریح در همیلتونی تأثیر ندارد و به عبارت دیگر متوقع دارم که مثلاً $U=mgh$ فردا همین مقدار باشد.

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{\cancel{\frac{\partial H}{\partial t}}}_{\text{فرض ما } 0} + \underbrace{\{H, H\}}_{0} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0$$

پایستگی انرژی

- تقارن مکانی $\rightarrow H(\vec{r}, \vec{p}) = H(\vec{r} + \vec{a}, \vec{p})$

اندازه گیری من در مشهد و تهران مساوی است.

$$H(\vec{r} + \vec{a}, \vec{p}) = H(\vec{r}, \vec{p}) + \vec{a} \cdot \vec{\nabla}_r H(\vec{r}, \vec{p}) = H(\vec{r}, \vec{p}) - \vec{a} \cdot \{\vec{p}, H\}$$

$$\Rightarrow \{\vec{p}, H\} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

پایستگی تکانه خطی

- تقارن زاویه‌ای

$$H(\vec{r}, \vec{P}) = \vec{H}(\vec{r} + \theta\hat{n}\times\vec{r}, \vec{P} + \theta\hat{n}\times\vec{P})$$

$$\vec{H}(\vec{r} + \theta\hat{n}\times\vec{r}, \vec{P} + \theta\hat{n}\times\vec{P}) = H(\vec{r}, \vec{P}) + \underbrace{\sum_{n=1}^{N} (\theta\hat{n}\times\vec{r}_i) \cdot \vec{\nabla}_{r_i} H + \sum_{n=1}^{N} (\theta\hat{n}\times\vec{P}_i) \cdot \vec{\nabla}_{P_i} H}_{=0}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \left[(\theta\hat{n}\times\vec{r}_i) \cdot \{P_i, H\} - (\theta\hat{n}\times\vec{P}_i) \cdot \{r_i, H\} \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \hat{n} \cdot \left(\vec{r}_i \times \{\vec{P}_i, H\} - \vec{P}_i \times \underbrace{\{r_i, H\}}_{0} \right) = \sum_{i=1}^{N} \{r_i \times P_i, H\} = 0$$

$$\{\vec{L}, H\} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

پایستگی تکانه زاویه‌ای

کلاسیک	هایزنبرگ (ماتریس)
$\frac{dx}{dt} = \{x, H\}$	$\frac{dX}{dt} = [X, H]\frac{1}{i\hbar}$
$\frac{dP}{dt} = \{P, H\}$	$\frac{dP}{dt} = [P, H]\frac{1}{i\hbar}$
$\{x, P\} = 1$	$[X, P] = i\hbar I$

$\{\,\} \text{ vs } \frac{1}{i\hbar}[\,]$

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\vec{r}) \qquad E_n \text{ (eigen value)}$$

انرژی مجاز سیستم که گسسته است

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}mX^2 \longrightarrow E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} - e^2/R \longrightarrow E_n = -\frac{1}{n^2}\alpha^2(mc)^2$$

$$\left.\begin{array}{l} tr([X,P]) = 0 \\ tr(Ii\hbar) \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$ X, P بی‌نهایت بعد اند

آقای دبروی لوموور برای ذرات هم موج بودن در نظر گرفت.

ذره ۱.م P, E

۲.م $\lambda = h/p$ $\rightarrow \nu = \frac{E}{h}$ $\quad E = h\nu = \hbar\omega \;;\; p = \hbar k = h/\lambda$

$$\psi(x,t) = A\cos(-kx + \omega t)$$

$$\psi(x,t) = Ae^{-i(\omega t - kx)} = Ae^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{P}{\hbar}x\right)}$$

چه معادله‌ای برای این امواج حاکم است!؟

خب ما می‌دانیم که امواج خواص برهم‌نهی دارند پس می‌توان برای یک ذره آزاد گفت:

$$\psi = \int \phi(p)\, e^{-i\left(\frac{p^2}{2\hbar m}t - \frac{p}{\hbar}x\right)} dp$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial\psi}{\partial t} = i\frac{E}{\hbar}\psi = i\frac{1}{\hbar}\left(\frac{p^2}{2m}\right)\psi \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} = -i\frac{P}{\hbar}\psi \rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\frac{P^2}{\hbar^2}\psi \end{array}\right\} \Rightarrow i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

$$\psi = \int \phi(p)\, e^{-i(E/\hbar\, t - P/\hbar\, x)} dp \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial t} = \left\{\int \phi(p)\left(-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{p^2}{2m} + V(x)\right)\right) e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{P}{\hbar}x\right)} dp\right\}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \left\{\int \phi(p)\left(-\frac{P^2}{\hbar^2}\right) e^{-i(E/\hbar\, t - P/\hbar\, x)} dp\right\}$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi(x) \longrightarrow$$ معادله شرودینگر

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})\right\}\psi(\vec{r},t)}$$

ψ ها بود:

$$\psi(\vec{r},t) = e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{-i\omega t} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

و بعد آقای شرودینگر برای $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$ این عبارت حل کرد و به جواب رسید و این یک اتحاد بین کارهایزنبرگ و شرودینگر بود

$$E_n = \hbar\omega(n + \tfrac{1}{2})$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r},t)$$

$$\psi(\vec{r},t) = \phi(\vec{r})T(t)$$

$$i\hbar\, \partial_t[\phi(\vec{r})T(t)] = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})\right][\phi(\vec{r})T(t)]$$

$$i\hbar\,\phi(\vec{r})\,\partial_t T(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}T(t)\nabla^2\phi(\vec{r}) + V(\vec{r})\phi(\vec{r})T(t)$$

$$i\hbar \frac{\partial_t T(t)}{T(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2\phi(\vec{r})}{\phi(\vec{r})} + V(\vec{r}) = E$$

چرا E؟

خب آقای شرودینگر این موضوع برای دوگانگی ذره و موج بدست آورد یعنی:

$E = h\nu = \hbar\omega \; , \; P = h/\lambda = \hbar k$

$$\psi(x,t) = e^{-i(\omega t - kx)} = e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{P}{\hbar}x\right)} = \underbrace{e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t\right)}}_{T}\;\underbrace{e^{i\left(\frac{P}{\hbar}x\right)}}_{\phi}$$

$$\partial_t T = -i\frac{E}{\hbar}T \Rightarrow \frac{\partial_t T}{T}i\hbar = E$$

$$i\hbar\frac{\partial_t T(t)}{T(t)} = E \Rightarrow T(t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi(\vec{r}) + V(\vec{r})\phi(\vec{r}) = E\phi(\vec{r}) \longrightarrow$$ به این عبارت میگن معادله شرودینگر مستقل از زمان

خب ما که معادله موج می‌دانیم چرا دنبال معادله هستیم؟

کاملاً واضح هست وقتی بجای پارامترهای موج با توجه به قید های مسئله بدست بیاری بازم باید بری سراغ معادله دیفرانسیلی

یک رازی در معادله شرودینگر وجود داره:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r},t)$$

معادله شرودینگر یک معادله دیفرانسیل خطی هست.

پیشنهاد

در نتیجه جواب ψ روی فضای $\mathbb{C}$ تشکیل یک فضای برداری می دهند.

این فضا چند بعدی؟ نبود محدودیت ازش ها بینهایت بعدی هست.

خب اصلاً این ψ چی هست؟

جناب بورن پیشنهاد دادند که $|\psi|^2$ بیانگر چگالی احتمال یافتن ذره می باشد.

چرا؟

بیا step by step بریم جلو:

فرض می کنم بقا ذره دارم پس در نتیجه آن

$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$ ؛ بقا ذره

$$\rho(t) \rightsquigarrow Q(t) = \int_V \rho(\vec{r},t)\,dV$$

$$\frac{dQ}{dt}(t) = \frac{\partial Q}{\partial t}(t) = \int_V \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t)\,dV = \int_V(-\vec{\nabla}\cdot\vec{J})\,dV = -\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{a} = -I$$

$$\rho(\vec{r},t) = |\psi^2(\vec{r},t)|$$

$$\left.\begin{aligned} \psi^* \times \quad & i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right]\psi \\ \psi \times \quad & -i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right]\psi^* \end{aligned}\right\} \Longrightarrow i\hbar\left[\psi^*\partial_t\psi + \psi\partial_t\psi^*\right] = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right]$$

$$\partial_t\underbrace{(\psi^*\psi)}_{\rho} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right]\frac{1}{i\hbar}}_{-\vec{\nabla}\cdot\vec{J}}$$

$$J = \frac{\hbar}{2im}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)$$

$$\rho = \psi^*\psi$$ پس من دارم میگم تعبیر آقای بورن شرط بقای ذره را ارضا می کند

$$P = \int_{-\infty}^{\infty}\psi\psi^*\,dV = 1$$

خب پس حالا من میام برای این فضای برداریم ضرب داخلی تعریف می کنم با الهام از احتمالی که در خط پیش دارم

$$\langle\psi|\phi\rangle = \int\psi^*\phi\,dV$$

و می دانم که این فضا خواص فضای ضرب داخلی را دارد پس الان وارد فضای ضرب داخلی شدم.

complete vector space defined

Definition 7.1.2 A **complete vector space** $\mathcal{V}$ is a normed linear space for which every Cauchy sequence of vectors in $\mathcal{V}$ has a limit vector in $\mathcal{V}$. In other words, if $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ is a Cauchy sequence, then there exists a vector $|a\rangle \in \mathcal{V}$ such that $\lim_{i\to\infty}\|a_i - a\| = 0$.

حالا اگه این شرط رو هم داشته باشه فضای هیلبرت می سازد.

if $L^2[a,b]$ $\int_a^b |f|^2 < \infty$ این فضای هیلبرت است و هر فضای هیلبرت با $L^2[a,b]$ مشخص می شود.

خب پس

$$P=\int|\psi|^2 dV$$

(۱۱)

$$\langle x\rangle=\int x|\psi^2|\,dx=\int x\psi^*\psi\,dx=\int\psi^* x\,\psi\,dx$$

$$(\psi_1^*,\psi_2^*,\dots)\begin{pmatrix} x & \cdots \\ \vdots & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\end{pmatrix}$$

$$\langle\psi|x|\psi\rangle=\langle x\rangle$$

این شبیه همون کارهای هایزنبرگ ما است.

$$\Longrightarrow \langle\psi|X|\psi\rangle=\langle X\rangle$$

$$\langle p\rangle=m\frac{d}{dt}\langle x\rangle=m\frac{d}{dt}\int\psi^* x\psi\,dx=m\int x\frac{\partial\rho}{\partial t}dx=-m\int x\frac{\partial J}{\partial x}dx$$

توجه به ثابت ها به مفهوم اتال توجه کن.

$$=m\left\{\underbrace{-xJ\Big|_{-\infty}^{\infty}}+\int_{-\infty}^{\infty}J\,dx\right\}=m\int_{-\infty}^{\infty}J\,dx=m\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial x}\psi-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)dx$$

انتظار فیزیکی این است که در طبیعت این جمله در بینهایت ها صفر شود.

$$=\frac{\hbar}{2i}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\frac{\partial}{\partial x}\psi\,dx-\int_{-\infty}^{\infty}\psi\frac{\partial}{\partial x}\psi^*dx\right]=\frac{\hbar}{2i}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\frac{\partial}{\partial x}\psi\,dx-\psi\psi\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\frac{\partial}{\partial x}\psi\,dx\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi\,dx\Rightarrow\langle\psi|P|\psi\rangle\rightsquigarrow\hat{P}=-i\hbar\partial_x$$

$$[\hat{X},\hat{P}]=i\hbar\ ,\ \underbrace{\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\hat{P}^2+V(\hat{X})\right\}}_{\text{عملگر همیلتونی}}\psi=i\hbar\partial_t\psi \rightsquigarrow$$

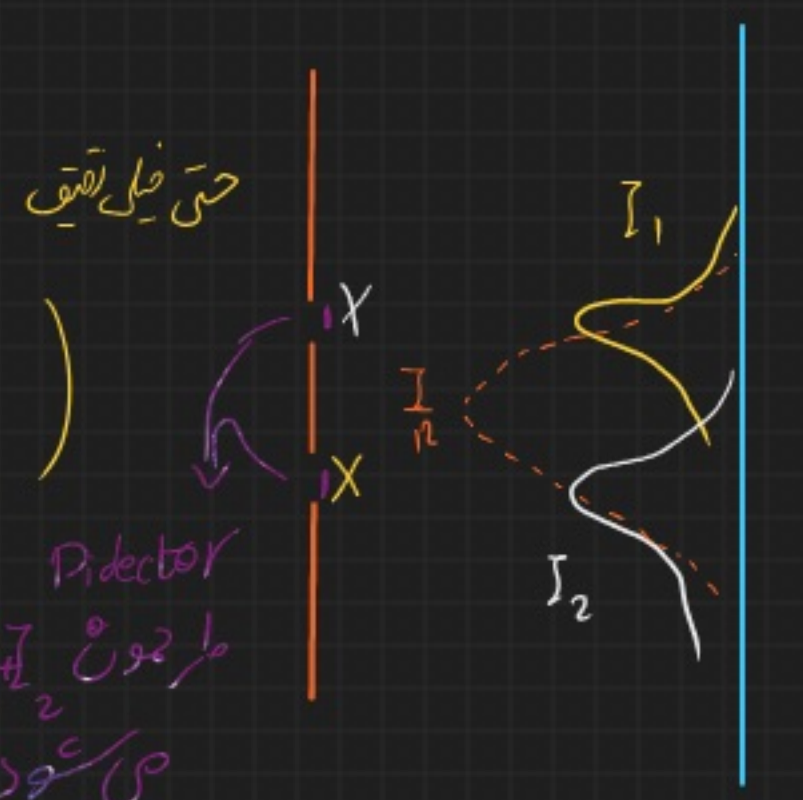
به مکانیک کوانتومی ماتریسی هایزنبرگ رسیدیم

اپتیک

$$\Delta x\sim\frac{\lambda}{\sin\theta}$$

$$\Delta p\sim 2\sin\frac{h}{\lambda}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Delta x\,\Delta p\sim h}$$



طرحهای I_1+I_2 می شود و این همان عدم قطعیات است

خواص موج و ذره

if $I_1=|\psi_1|^2$

$I_2=|\psi_2|^2$

$$I_{12}=|\psi_1+\psi_2|^2=I_1+I_2+\psi_1^*\psi_2+\psi_1\psi_2^*$$

همه اطلاعات در $|\psi\rangle$ ذخیره شده است و صرفاً کافی هست که روش اپراتورهامون بزنیم و از آنجایی که اپراتورهای ما هرمیتی اند ویژه بردارها تشکیل فضای برداری می‌دهند مثلاً برای اپراتور $\hat{A}$ خواهیم داشت:

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle \quad \Big| \quad A|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$$

بعد اندازه‌گیری $|\psi\rangle \to |a_i\rangle$ و مقدار a_i بدست می‌آید که احتمالش برابر با $|c_i|^2$ هست.

$$\langle a_i|\psi\rangle = c_i \Rightarrow |\psi\rangle = \sum_i \langle a_i|\psi\rangle |a_i\rangle$$

$$P(a_i) = |\langle a_i|\psi\rangle|^2 \longrightarrow$$ (توجه این حالت پیوستگی و عدم قطعیت هست)

اگر واگنی داشتیم:

$$A|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle \qquad |\psi\rangle = c_i|a_i\rangle + c'_i|a'_i\rangle + \sum_k c_k|a_k\rangle$$
$$A|a'_i\rangle = a_i|a'_i\rangle$$

زمانی که a_i بدست می‌آید هر دو stat ممکن است و با قاعده جمع داریم:

$$P(a_i) = |\langle a_i|\psi\rangle|^2 + |\langle a'_i|\psi\rangle|^2$$

و حالت سیستم به superposition این دو حالت می‌رود

$$|\psi\rangle \longrightarrow \langle a_i|\psi\rangle|a_i\rangle + \langle a'_i|\psi\rangle|a'_i\rangle$$

ولی نرمال باید کرد

$$|\psi_{new}\rangle = \frac{|\psi_{new}\rangle}{\sqrt{\langle\psi_{new}|\psi_{new}\rangle}} = \frac{\langle a_i|\psi\rangle|a_i\rangle + \langle a'_i|\psi\rangle|a'_i\rangle}{\sqrt{|\langle a_i|\psi\rangle|^2 + |\langle a'_i|\psi\rangle|^2}}$$ (توجه $\langle\psi_{new}|\psi_{new}\rangle = 1$)

حال این استدلالات را با عملگرها می‌توان نشان داد.

$$|\psi\rangle \xrightarrow[\hat{P}_{a_i}]{} |\psi_{new}\rangle$$

$$P_{a_i} = \sum_{|a_i\rangle} |a_i\rangle\langle a_i|$$ معادل هم لحاظ کردن واگنی برای ویژه مقدار a_i

$$P(a_i) = \sum_{|a_i\rangle} |\langle a_i|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|\Big(\sum_{|a_i\rangle}|a_i\rangle\langle a_i|\Big)|\psi\rangle = \langle\psi|P_{a_i}|\psi\rangle$$

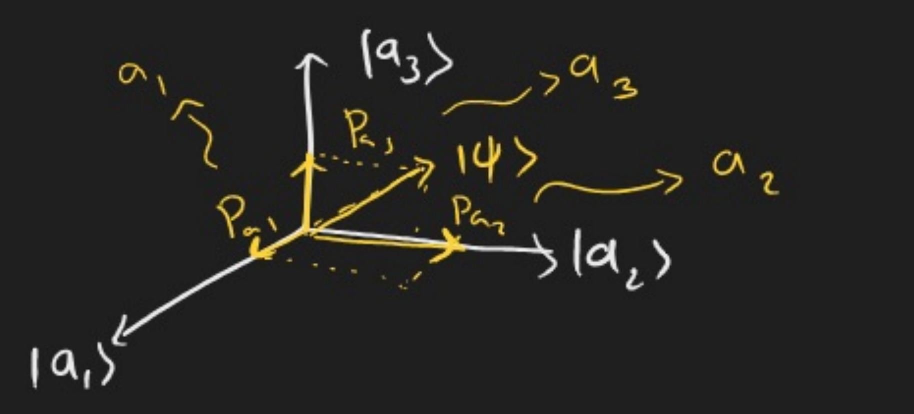
یا بهتر

$$P(a_i|\psi) = \langle\psi|P_{a_i}|\psi\rangle$$

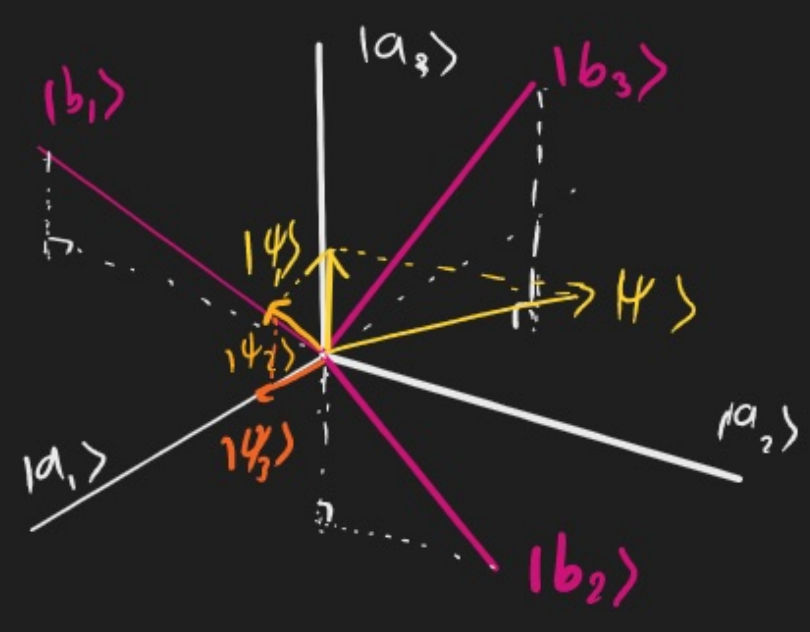
$$|\psi_{new}\rangle \longrightarrow P_{a_i}|\psi\rangle = \sum_{|a_i\rangle}\langle a_i|\psi\rangle|a_i\rangle$$

$$|\psi_{new}\rangle = \frac{P_{a_i}|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P^\dagger_{a_i}P_{a_i}|\psi\rangle}} = \frac{P_{a_i}|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_{a_i}|\psi\rangle}} = \frac{P_{a_i}|\psi\rangle}{\sqrt{P(a_i|\psi)}}$$

خلاصه کار اینکه زمانی که ما اندازه‌گیری انجام می‌دهیم به صورت کاملاً تصادفی یکی از اپراتورهای تصویر $\hat{P}_{a_i}$ که احتمالش اپراتور A و شکل $|\psi\rangle$ تعیین می‌کند روی $|\psi\rangle$ زده می‌شود و تصویر می‌شود و مقدار بعد اندازه‌گیری ویژه مقدار A است.



اگر دو عملگر جابه‌جاپذیر بود که یک set مشترک میشه پیدا کرد و هیچ
ولی اگر جابه‌جاپذیر نبودند 2 set متفاوت دارند.



$$A \longrightarrow B$$

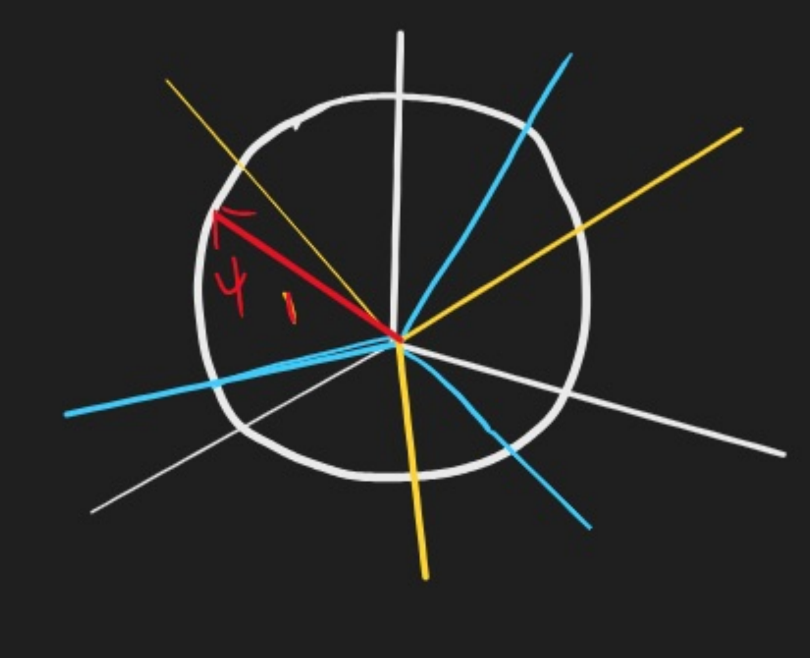
$$|\psi_0\rangle \longrightarrow \frac{P_{a_3}|\psi_0\rangle}{\sqrt{\langle\psi_0|P_{a_3}|\psi_0\rangle}} = |\psi_1\rangle \longrightarrow \frac{P_{b_1}|\psi_1\rangle}{\sqrt{\langle\psi_1|P_{b_1}|\psi_1\rangle}} = |\psi_2\rangle$$

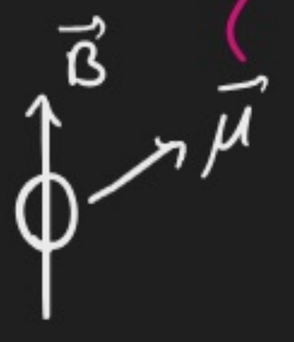
a_3 $\qquad$ b_1

$$\longrightarrow A$$

$$\longrightarrow \frac{P_{a_1}|\psi_2\rangle}{\sqrt{\langle\psi_2|P_{a_1}|\psi_2\rangle}} = |\psi_3\rangle$$

a_1



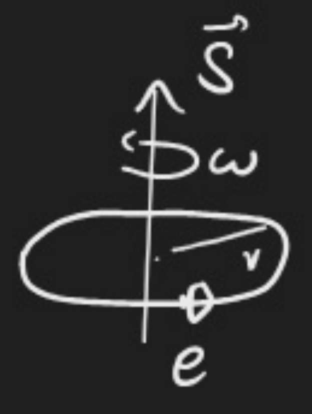


ممان مغناطیسی

$$\vec{\tau}=\vec{\mu}\times\vec{B}$$

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t}=\vec{\tau} \longleftarrow \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}=\vec{F}$$

تکانه زاویه‌ای الکترون



$$S=rp=rmv=mr^2\omega$$

$$\mu=iA=\frac{e}{T}A=\frac{\omega}{2\pi}er^2\pi=\frac{e}{2m}\omega r^2 m=\frac{e}{2m}S$$

$$\gamma m r^2\omega B=2mr\omega$$

برای اتم

$$\underbrace{\vec{\mu}}_{\text{اتم}}=g\frac{e}{2m}\underbrace{\vec{S}}_{\text{الکترون}}\sim\underbrace{\vec{\mu}}_{\text{اتم}}=\gamma\underbrace{\vec{S}}_{\text{الکترون}}$$

تکانه زاویه‌ای الکترون

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t}=\vec{\tau}=\vec{\mu}\times\vec{B}=\gamma\vec{S}\times\vec{B}\Rightarrow\boxed{\frac{\partial \vec{S}}{\partial t}=\gamma\vec{S}\times\vec{B}}\to\omega=\gamma B$$

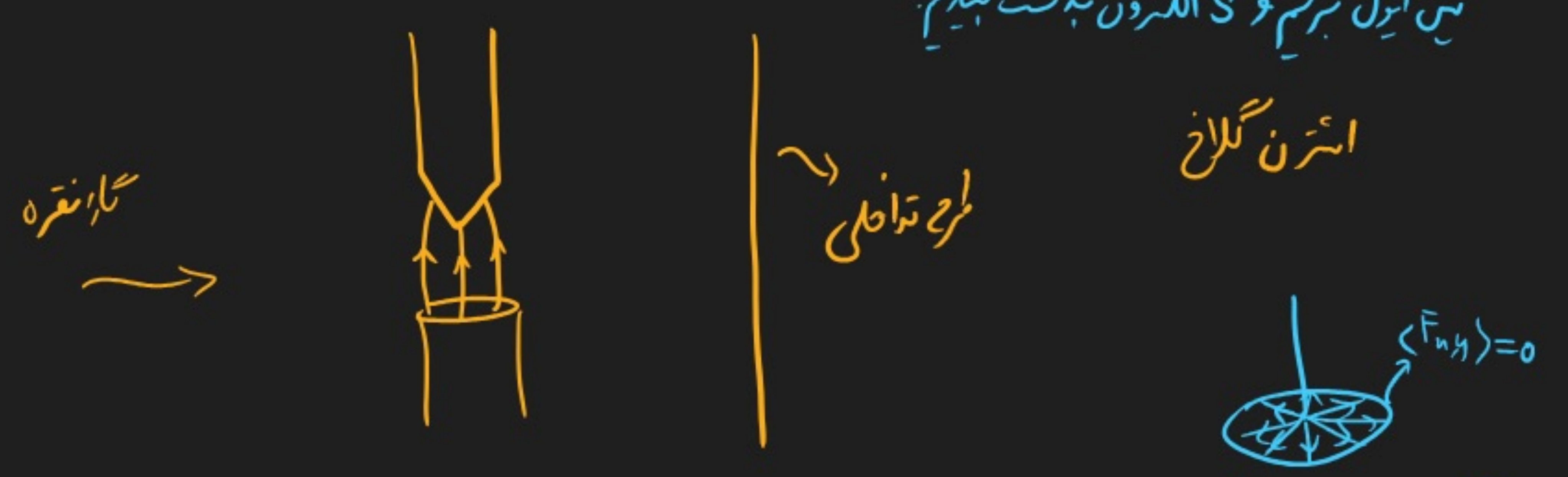
پس می‌توانم بگم که B باعث چرخیدن مدار الکترون می‌شود

(فرض کردم الکترون به صورت مداری می‌چرخه چرا که من اینجا اتم دیده بودم (الکی))

$$U=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$
$$\vec{F}=-\vec{\nabla}U=\vec{\nabla}(\vec{\mu}\cdot\vec{B})$$

μ که یک خاصیت اتم کار ندارم ولی اگر $\vec{B}$ تابعی از مکان باشه علاوه بر چرخش اتم جابه‌جایی هم خواهیم داشت

پس اول بریم و $\vec{S}$ الکترون به دست بیاریم.

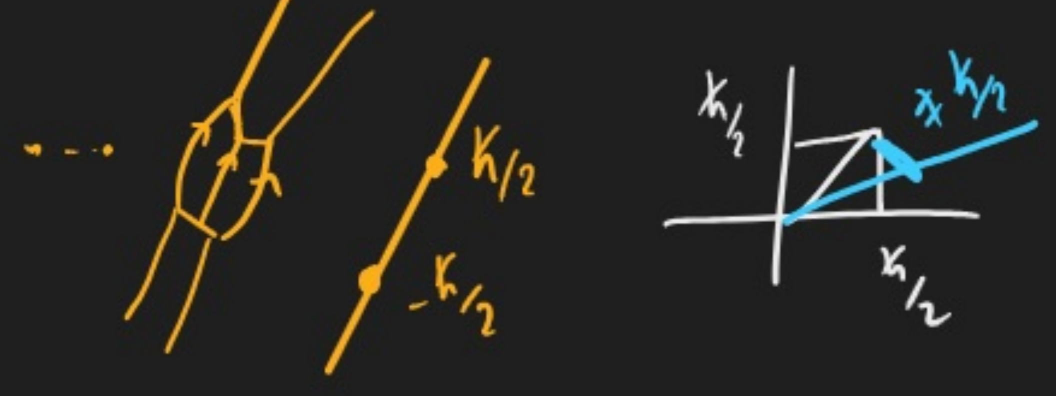


$$\vec{F}=\vec{\nabla}(\vec{\mu}\cdot\vec{B})=\mu_x\partial_z B_x+\mu_y\partial_z B_y+\mu_z\partial_z B_z$$

چون الکترون به شدت می‌چرخه اثرش صفر می‌شه.

$$\langle\vec{F}\rangle=\partial_z\langle\mu_x B_x\rangle+\partial_z\langle\mu_y B_y\rangle+\mu_z\partial_z B_z$$
$$=0+0+\mu_z\partial_z B_z$$

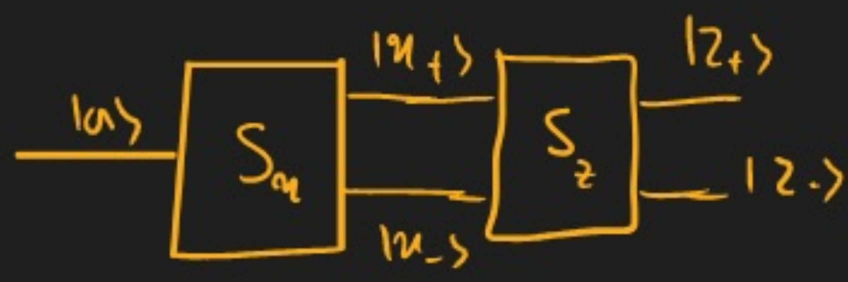
حالا اومدیم میدان رو چرخوندیم



خب بدیهی زمانی که میدان رو می‌چرخونیم مؤلفه‌ها تغییر کنه

اما همچنان $\frac{\hbar}{2}$ و $-\frac{\hbar}{2}$ میده گویی با اندازه‌گیری

این مقادیر به الکترون‌ها داده می‌شود.



$$P(z_+|a)=P(x_+|a)\,P(z_+|x_+)+P(x_-|a)\,P(z_+|x_-)$$

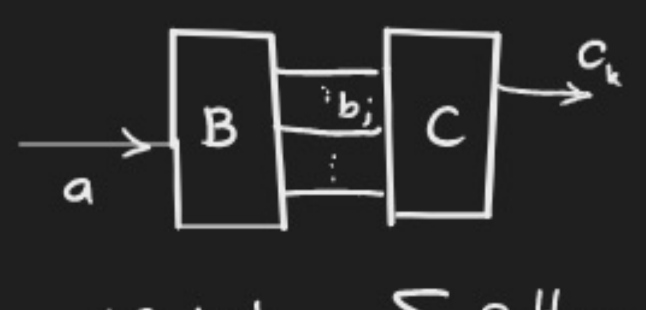
اما این تساوی در کوانتوم برقرار نمی‌باشد.

چرا؟ چون زمانی که S_z زده می‌شود $|x_+\rangle \rightleftarrows |x_-\rangle$ علت این است.

اما خوشبختانه یک رابطه وجود دارد. (منظورم از 2 باز بودن خروجی x_+, x_- است)

$$\left.\begin{aligned}P_1(z_+|a)&=|\psi_1|^2\\P_2(z_+|a)&=|\psi_2|^2\\P_{12}(z_+|a)&=|\psi_{12}|^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\psi_{12}=\psi_1+\psi_2$$

هر جا یک نمادگذاری است.



$$P(b_j|a)=|\langle b_j|a\rangle|^2$$
$$P(c_k|a)=|\langle c_k|a\rangle|^2\qquad P(c_k|b_j)=|\langle c_k|b_j\rangle|^2$$

$$\langle c_k|a\rangle=\sum_{a\Rightarrow c_k}\text{Path}=\sum_j\langle c_k|b_j\rangle\langle b_j|a\rangle$$

کشف بزرگ!

$$\left.\begin{aligned}\vec{v}&=\sum_i v_i\hat{e}_i\\\vec{v}&=\sum_j v'_j\hat{e}'_j\end{aligned}\right\}\Rightarrow v'_j=\hat{e}'_j\cdot\vec{v}=\hat{e}'_j\cdot\left(\sum_i v_i\hat{e}_i\right)=\sum_i(v_i\cdot\hat{e}_i)e_j$$

$$\langle e'_j|\vec{v}\rangle=\sum_i\langle e'_j|e_i\rangle\langle e_i|v\rangle$$

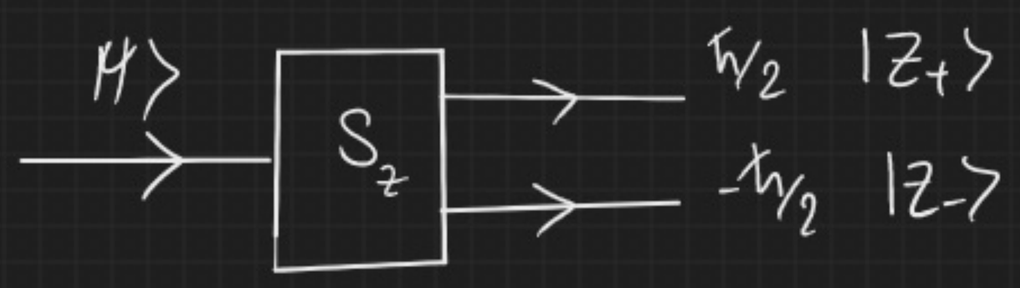
یعنی بردار $|a\rangle$ وارد فضای برداری $|c_k\rangle$ می‌شود

برای همین که می‌گفتیم مجذور ضریب احتمال است و اسم فضای برداری نام می‌بریم.

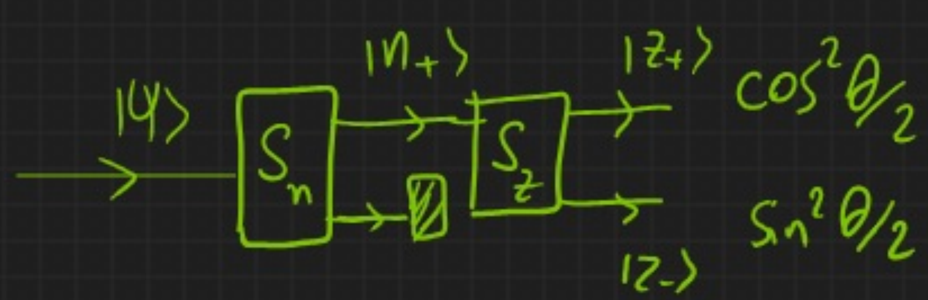
$$\langle A\rangle=\sum_i a_i P(a_i|\psi)=\sum a_i|\langle a_i|\psi\rangle|^2=\langle\psi|\left(\sum_i a_i|a_i\rangle\langle a_i|\right)|\psi\rangle$$

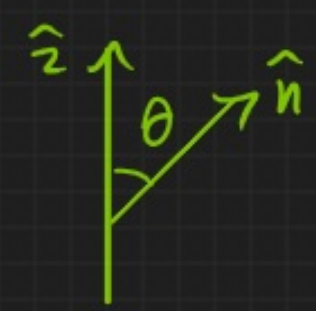
$$=\langle\psi|A|\psi\rangle$$

برای همین که می‌گیم میشه eigen value و eigenvector.



$$P(Z_+|\psi) = |\langle Z_+|\psi\rangle|^2 \qquad P(Z_+|Z_+) = 1$$
$$P(Z_-|\psi) = |\langle Z_-|\psi\rangle|^2 \qquad P(Z_+|Z_-) = 0$$
$$P(Z_+|x_+) = 1/2$$

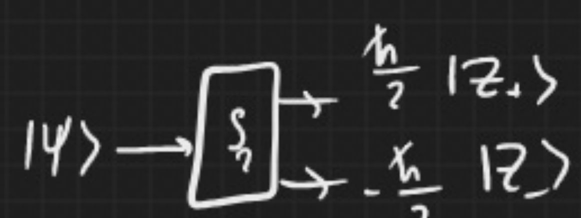




$$P(Z_+|n_+) = \cos^2\frac{\theta}{2}$$
$$P(Z_-|n_+) = \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$P(C_k|\psi) = |\langle C_k|\psi\rangle|^2$$
$$\langle C_k|\psi\rangle = \sum_j \langle b_j|\psi\rangle\langle C_k|b_j\rangle = \sum_j \langle C_k|b_j\rangle\langle b_j|\psi\rangle$$

پس اول |ψ⟩ را در یک سری پایه می‌نویسیم.



نمایش آرایه‌ای

$$|Z_+\rangle = \begin{pmatrix} \langle Z_+|Z_+\rangle \\ \langle Z_-|Z_+\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$|Z_-\rangle = \begin{pmatrix} \langle Z_+|Z_-\rangle \\ \langle Z_-|Z_-\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|x_+\rangle = \begin{pmatrix} \langle Z_+|x_+\rangle \\ \langle Z_-|x_+\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \rightsquigarrow |x_+\rangle = \alpha|Z_+\rangle + \beta|Z_-\rangle$$

می‌دانیم که

$$\left.\begin{array}{l} \langle Z_+|x_+\rangle = \frac{1}{\sqrt2} \\ \langle Z_+|x_-\rangle = \frac{1}{\sqrt2} \\ \langle x_+|x_-\rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow |x_+\rangle = \frac{1}{\sqrt2}\left(e^{i\alpha}|Z_+\rangle + e^{i\beta}|Z_-\rangle\right) = \boxed{\frac{1}{\sqrt2}\left(|Z_+\rangle + |Z_-\rangle\right)}$$

$$|x_-\rangle = \frac{1}{\sqrt2}\left(\alpha'|Z_+\rangle + \beta'|Z_-\rangle\right) \to \frac{1}{\alpha'}|x_-\rangle = \frac{1}{\sqrt2}\left(|Z_+\rangle + \frac{\beta'}{\alpha'}|Z_-\rangle\right)$$

$$|x_-\rangle = \frac{1}{\sqrt2}\left(|Z_+\rangle + e^{i\theta}|Z_-\rangle\right)$$

$$\langle x_+|x_-\rangle = 0 \Rightarrow e^{i\theta} = -1 \Rightarrow \theta = \pi \Rightarrow \boxed{|x_-\rangle = \frac{1}{\sqrt2}\left(|Z_+\rangle - |Z_-\rangle\right)}$$

$$|y_+\rangle = \frac{1}{\sqrt2}\left(\alpha''|Z_+\rangle + \beta''|Z_-\rangle\right) \Rightarrow \frac{1}{\alpha''}|y_+\rangle = |y_+\rangle = \frac{1}{\sqrt2}\left(|Z_+\rangle + e^{i\phi}|Z_-\rangle\right)$$
$$|y_-\rangle = \frac{1}{\sqrt2}\left(\alpha'''|Z_+\rangle + \beta'''|Z_-\rangle\right) \Rightarrow \frac{1}{\alpha'''}|y_-\rangle = |y_-\rangle = \frac{1}{\sqrt2}\left(|Z_+\rangle + e^{i\phi'}|Z_-\rangle\right)$$
$$\langle y_+|y_-\rangle = 0 \Rightarrow e^{i(\phi'-\phi)} = -1 \Rightarrow \phi - \phi' = \pi$$
$$|\langle x_+|y_+\rangle|^2 = \frac12 \Rightarrow \left|\frac12\left(1 + e^{i\phi}\right)\right|^2 = \frac12$$
$$\frac14\left|\left(1 + e^{i\phi}\right)\right|^2 = \frac12 \Rightarrow |1 + e^{i\phi}|^2 = 2 \Rightarrow \left(1 + e^{i\phi}\right)\left(1 + e^{-i\phi}\right) = 1 + e^{i\phi} + e^{-i\phi} + 1 = 2$$

$$2\cos\phi = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi' = -\pi/2$$

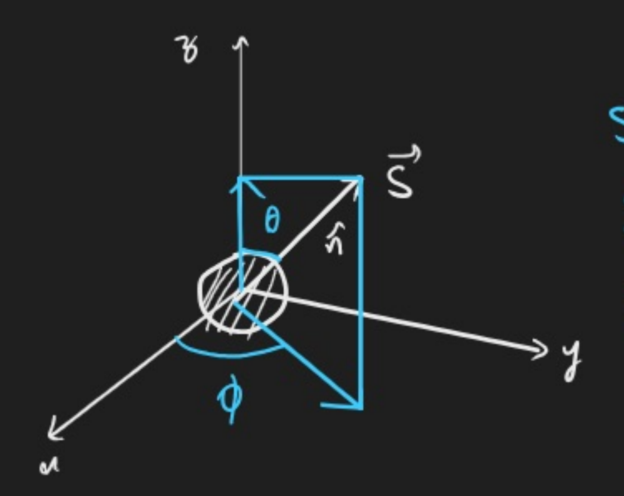
$$\left.\begin{array}{l} |y_+\rangle = \frac{1}{\sqrt2}\left(|Z_+\rangle + i|Z_-\rangle\right) \\ |y_-\rangle = \frac{1}{\sqrt2}\left(|Z_+\rangle - i|Z_-\rangle\right) \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} S_z = \frac{\hbar}{2}|Z_+\rangle\langle Z_+| - \frac{\hbar}{2}|Z_-\rangle\langle Z_-| = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \\ S_x = \frac{\hbar}{2}|x_+\rangle\langle x_+| - \frac{\hbar}{2}|x_-\rangle\langle x_-| = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ S_y = \frac{\hbar}{2}|y_+\rangle\langle y_+| - \frac{\hbar}{2}|y_-\rangle\langle y_-| = \hbar/2\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow [\hat S_x, \hat S_y] = i\hbar\hat S_z$$

اگر ابهامی داری برو لکچر قبلی

$\hat S$ مانند تکانه زاویه‌ای است.

دیدگاه کلاسیکی



$S_z = S\cos\theta$

$S_x = S\sin\theta\cos\phi$

$S_y = S\sin\theta\sin\phi$

$\hat{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$

دیدگاه کوانتومی

فرض

$|n_+\rangle = \hat{n}$

$\langle \hat{S}_z\rangle = \langle n_+|\hat{S}_z|n_+\rangle = \left(\cos\frac{\theta}{2} \quad \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\right)\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\end{pmatrix}$

$= \frac{\hbar}{2}\cos\theta$

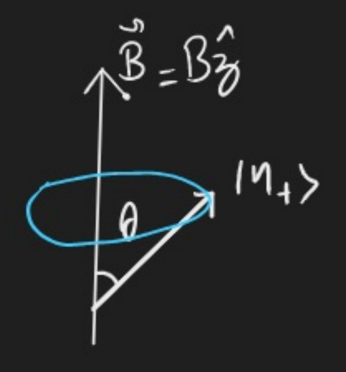
و به همین ترتیب:

$\langle \hat{S}_x\rangle = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\cos\phi \quad , \quad \langle \hat{S}_y\rangle = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\sin\phi$

که این مقادیر با مکانیک کلاسیک همخوانی دارد

یعنی زمانی که ما با میانگین و مجموعه کار داریم به مکانیک کلاسیک تقلیل می یابیم.

دینامیک:



$\hat{H}|\psi\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle$

$\hat{H} = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -\gamma\vec{S}\cdot\vec{B} = -\gamma S_z B_z = -\gamma B_z\frac{\hbar}{2}\sigma_z = -\omega\frac{\hbar}{2}\sigma_z$

$-\omega\frac{\hbar}{2}\sigma_z|\psi\rangle = i\hbar\partial_t|\psi\rangle$

نتیجه جواب چرخش $|n_+\rangle$ حول z است.

واین به شدت جالب است.

هایزنبرگ کبیر

$[\hat{X},\hat{P}] = i\hbar$

$[\hat{X},\hat{P}] = i\hbar$

$e^{\frac{ia}{\hbar}\hat{P}}\hat{X}e^{-\frac{ia}{\hbar}\hat{P}}$

$\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle$

$\langle x|x'\rangle = \delta(x-x')$

چون فضای بی‌نهایت بعدی است و پیوسته

$\int |x\rangle\langle x|\,dx = I$

$e^{i\frac{a}{\hbar}\hat{P}}\hat{X}\underbrace{e^{-i\frac{a}{\hbar}\hat{P}}}_{T_a} = \hat{X}+a$

$\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle$

$\hat{X}(T_a|x\rangle) = \hat{X}(e^{-i\frac{a}{\hbar}\hat{P}})|x\rangle = e^{-i\frac{a}{\hbar}\hat{P}}(\hat{X}+a)|x\rangle = \underbrace{(x+a)}_{\text{eigen Value } \hat{X}}T_a|x\rangle$

a می‌تونه پیوسته باشه پس فضای بردار ویژه های $\hat{X}$ پیوسته است.

به این نتیجه هم رسیدیم که $\hat{P}$ مولد جابجایی خطی است.

پس فرمان آخر اوکی اند

$|\psi\rangle = \int dx|x\rangle\langle x|\psi\rangle = \int dx|x\rangle\psi(x)$

$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$

$e^{i\frac{a}{\hbar}\hat{X}}|p\rangle = |p+a\rangle$

$\hat{P}|p\rangle = p|p\rangle$

$|\psi\rangle = \int dp|p\rangle\langle p|\psi\rangle = \int dp|p\rangle\psi(p)$

$\langle p|p'\rangle = \delta(p-p')$

$\langle x|p\rangle = ? \quad \langle x|e^{i\frac{a}{\hbar}\hat{P}}|p\rangle = e^{i\frac{a}{\hbar}p}\langle x|p\rangle$

$\int |p\rangle\langle p|\,dp = I$

$e^{-i\frac{a}{\hbar}\hat{P}}|x\rangle = |x+a\rangle$

$(*)\ \langle x+a|p\rangle = e^{\frac{ia}{\hbar}p}\langle x|p\rangle$

$(*) \Rightarrow f(x+a) = e^{\frac{ia}{\hbar}p}f(x)$

$\Rightarrow f(x) = Ae^{\frac{i}{\hbar}xp} \Rightarrow \langle x|p\rangle = Ae^{\frac{i}{\hbar}xp}$

$\langle x|x'\rangle = \delta(x-x') \Rightarrow \int\langle x|p\rangle\langle p|x'\rangle dp = \delta(x-x')$

$\int A^2 e^{\frac{i}{\hbar}(x-x')p}dp = A^2\, 2\pi\hbar\,\delta(x-x') = \delta(x-x') \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$

$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}xp}$

$|\langle x|p\rangle|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar}$

احتمال پیدا کردن $|p\rangle$ در بازه x, $x+dx$ ثابت شده!

$\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}px}$

هایزنبرگ $\rightleftarrows$ شرودینگر

$p/\hbar = k \Rightarrow p = \hbar k \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p}$

$\psi(p) = \langle p|\psi\rangle = \int\langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle dx = \int\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}px\right)\psi(x)dx$

$i\hbar\partial_t|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$

$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle \Rightarrow \partial_t|\psi(t)\rangle = \partial_t U(t)|\psi(0)\rangle = \partial_t U(t)U^\dagger(t)|\psi(t)\rangle$

$= \dot{U}U^\dagger|\psi(t)\rangle$

$A = \dot{U}U^\dagger$

$A + A^\dagger = \dot{U}U^\dagger + U\dot{U}^\dagger = \partial_t(UU^\dagger) = \partial_t I = 0 \Rightarrow A = -A^\dagger \Rightarrow (iA) = (iA)^\dagger \ ,\ A = iB$

$\partial_t|\psi(t)\rangle = i\hat{B}|\psi(t)\rangle$

$\langle Q(t)\rangle_\psi = \langle\psi|Q|\psi\rangle \quad , \quad \partial_t\langle Q(t)\rangle = \langle\dot{\psi}|\hat{Q}|\psi\rangle + \langle\psi|\hat{Q}|\dot{\psi}\rangle$

$\partial_t(\langle Q(t)\rangle) = \langle\psi|-i\hat{B}\hat{Q}|\psi\rangle + \langle\psi|i\hat{Q}\hat{B}|\psi\rangle = i\langle[\hat{Q},\hat{B}]\rangle$

کوانتوم باید به کلاسیک ارتباط پیدا بکند.

$\frac{d}{dt}\langle Q\rangle = \{Q,H\}$

$\frac{d}{dt}\langle Q\rangle = i\left(\frac{i\hbar}{i\hbar}\{Q,B\}\right) \Rightarrow B = \frac{H}{\hbar}$

واین هم اثبات معادله شرودینگر از مکانیک ماتریسی

$$[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar \hat{I}$$

$$\langle x|\hat{p}|x'\rangle = ?$$

$$= \int \langle x|p\rangle\langle p|\hat{p}|x'\rangle dp = \int \frac{1}{2\pi\hbar} e^{\frac{ixp}{\hbar}} p e^{-\frac{ix'p}{\hbar}} dp = \frac{1}{2\pi\hbar}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\int e^{\frac{i(x-x')p}{\hbar}} dp$$

$$= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x')$$

$$\langle p|\hat{X}|p'\rangle = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\delta(p-p')$$

$$\langle x|\hat{X}|\psi\rangle = x\langle x|\psi\rangle = x\psi(x)$$

$$\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = \int \langle x|\hat{p}|x'\rangle\langle x'|\psi\rangle dx' = \int \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x')\psi(x')dx' = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)$$

$\hat{X} \longleftrightarrow x$ or $\hat{X} \longleftrightarrow -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}$

$\hat{p} \longleftrightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ $\quad$ $\hat{p} \longleftrightarrow p$

فضای مکان $\qquad$ فضای تکانه

$$\sigma_x^2 = \langle \hat{X}^2\rangle - \langle \hat{X}\rangle = \langle\psi|\hat{X}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{X}|\psi\rangle$$

$$\sigma_p^2 = \langle\psi|\hat{P}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{P}|\psi\rangle$$

$$|\alpha\rangle := (\hat{X} - \langle X\rangle)|\psi\rangle \longrightarrow \langle\alpha|\alpha\rangle = \sigma_x^2$$

$$|\beta\rangle := (\hat{p} - \langle p\rangle)|\psi\rangle \longrightarrow \langle\beta|\beta\rangle = \sigma_p^2$$

$$\| |\alpha\rangle - i\lambda|\beta\rangle \| \geq 0$$

$$\langle\alpha|\alpha\rangle + i\lambda\langle\beta|\alpha\rangle - i\lambda\langle\alpha|\beta\rangle + \lambda^2\langle\beta|\beta\rangle \geq 0$$

$$i\langle\beta|\alpha\rangle - i\langle\alpha|\beta\rangle + 2\lambda\langle\beta|\beta\rangle = 0$$

$$\lambda = \frac{i(\langle\alpha|\beta\rangle - \langle\beta|\alpha\rangle)}{2\langle\beta|\beta\rangle} = -\frac{\hbar}{2\langle\beta|\beta\rangle}$$

$$\sigma_x^2 + \frac{\hbar^2}{4\sigma_y^2} + i(i\hbar)\frac{\hbar}{2\sigma_y^2} = \sigma_x^2 - \frac{\hbar^2}{4\sigma_y^2} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\sigma_x\sigma_y \geq \hbar/2}$$

$$\langle\alpha|\beta\rangle - \langle\beta|\alpha\rangle = \langle\psi|(\hat{X}-\langle X\rangle)(\hat{p}-\langle p\rangle)|\psi\rangle$$
$$- \langle\psi|(\hat{p}-\langle p\rangle)(\hat{X}-\langle X\rangle)|\psi\rangle$$
$$= \langle\psi|[\hat{X},\hat{P}]|\psi\rangle$$
$$= i\hbar\langle\psi|\psi\rangle$$
$$= i\hbar$$

$[X,P] = i\hbar$

در اینجا من به دنبال پایه های مناسب برای دو ذره در یک بعد می‌گردم.

$$X_1|?\rangle = x_1|?\rangle$$
$$X_2|?\rangle = x_2|?\rangle$$
$$|?\rangle = |x_1\rangle \otimes |x_2\rangle = |x_1, x_2\rangle$$
$$X_1 = X_1 \otimes I \ , \ X_2 = I \otimes X_2$$

حالا من همین سوال برای یک ذره در سه بعد بکار می‌برم.

$$X_1|?\rangle = x_1|?\rangle$$
$$X_2|?\rangle = x_2|?\rangle$$
$$X_3|?\rangle = x_3|?\rangle$$

$$|?\rangle = |x_1\rangle|x_2\rangle|x_3\rangle$$

$$\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle = \langle x_1|p_1\rangle\langle x_2|p_2\rangle\langle x_3|p_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^{\,3}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

1) دینامیک

$H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$

$|\psi(0)\rangle = \sum C_n|\psi_n\rangle$

$|\psi(t)\rangle = \exp(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar})|\psi(0)\rangle = \exp(-\frac{iHt}{\hbar})\left(\sum_n C_n|\psi_n\rangle\right) = \sum_n C_n \exp(-\frac{iHt}{\hbar})|\psi_n\rangle$

$= \sum_n C_n \exp(-\frac{iEt}{\hbar})|\psi_n\rangle$

2) $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle \Rightarrow \left(\frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{X})\right)|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ $\quad \psi(x) = ?$

$\langle x|\frac{\hat{P}^2}{2m}|\psi\rangle + \langle x|V(\hat{X})|\psi\rangle = E\psi(x) \longrightarrow \frac{1}{2m}\langle x|\hat{P}^2|\psi\rangle + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$

$\langle x|\hat{P}^2|\psi\rangle = \int \langle x|\hat{P}^2|x'\rangle\langle x'|\psi\rangle dx' = \int \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \psi(x')\,\delta(x-x')\,dx' = \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi(x)$

$\frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + V(x)\psi(x)\right) = E\psi(x)$

---

① if $V(x) = V(-x)$

پس اگر $V(x)$ زوج باشد می‌توانیم ψهای زوج و فرد پیدا کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x)\\ \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(-x) = E\psi(-x)\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\psi_1(x) = \psi(x) + \psi(-x)\\ \psi_2(x) = \psi(x) - \psi(-x)\end{array}\right.$$

② $V(x) \to$ Real

پس اگر $V(x) \in \mathbb{R}$ باشد می‌توان ψهای حقیقی پیدا کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x)\\ \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi^*(x) = E\psi^*(x)\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\psi_1(x) = \psi(x) + \psi^*(x)\\ \psi_2(x) = \frac{1}{i}\left(\psi(x) - \psi^*(x)\right)\end{array}\right.$$

③ واگنی در یک بعد نداریم

$\psi_1'\psi_2' + \cancel{\psi_1\psi_2''} - \cancel{\psi_1'\psi_2'} - \psi_1''\psi_2$

$$\begin{array}{l}\psi_2\left(-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi_1(x) = E\psi_1(x)\\ \psi_1\left(-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi_2(x) = E\psi_2(x)\end{array} \Rightarrow -\frac{\hbar}{2m}\left(\psi_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_1 - \psi_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_2\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi_1\psi_2' - \psi_1'\psi_2\right) = 0$$

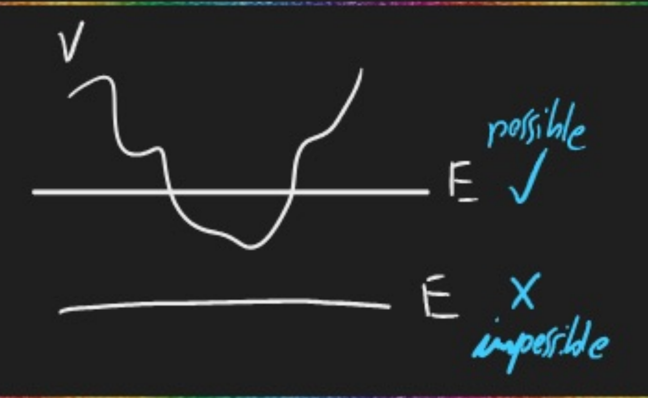
$\underbrace{\psi_1\psi_2' - \psi_1'\psi_2}_{\text{تابع } x} = \underbrace{C}_{\text{ثابت}} \Rightarrow \psi_1\psi_1' = \psi_1'\psi_2 \Rightarrow \psi_1\frac{1}{d\psi_1} = \psi_2\frac{1}{d\psi_2} \Rightarrow \frac{\psi_2}{\psi_1} = k, \quad \left.\begin{array}{l}H\psi_1 = E\psi_1\\ H\psi_2 = E\psi_2\end{array}\right\} \Rightarrow k = 1$

∞ تابع $= 0 \Rightarrow C = 0$

پس قضایای ①، ② جامع‌اند برای یک بعد حالا از یک بعد به بالا چی؟

$$\begin{array}{l}\left[-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 + V(r)\right]\psi_1(r) = E\psi_1(r)\\ \left[-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 + V(r)\right]\psi_2(r) = E\psi_2(r)\end{array} \Rightarrow \psi_2\nabla^2\psi_1 - \psi_1\nabla^2\psi_2 = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\left(\psi_2\nabla\psi_1 - \psi_1\nabla\psi_2\right) = 0$$

این می‌تونه هر $f(x)$ ای که $\nabla\cdot f = 0$ باشه پس واگنی ایجاد داریم ، $f(x) = \frac{1}{2}x$



$\left(\frac{P^2}{2m} + V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x) \Rightarrow \left(\frac{P^2}{2m}\right)\psi(x) = \left(E - V(x)\right)\psi(x)$

$\underbrace{\langle\psi|\frac{P^2}{2m}|\psi\rangle}_{+} = \underbrace{\langle\psi|(E-V)|\psi\rangle}_{-}$

$E < V, \forall E$
غیرممکن است

$E < V, \exists E$
ممکن است چون $\langle\psi|(E-V)|\psi\rangle$ می‌تواند مثبت شود.

Π به صورت زیر رو تعریف می‌کنم.

$\Pi|x\rangle = |-x\rangle$

$\Pi|p\rangle = ?$

$= \Pi\int|x\rangle\langle x|p\rangle dx = \int|-x\rangle\underbrace{\langle -x|-p\rangle}_{=\langle x|p\rangle}dx = |-p\rangle$

یعنی چی؟

از لحاظ سینماتیک که به نظر مانمی‌توانیم بگیم تصویر آینه درسته یا واقعیت

$\left.\begin{array}{l}\Pi X|x\rangle = x\Pi|x\rangle = x|-x\rangle\\ X\Pi|x\rangle = X|-x\rangle = -x|-x\rangle\end{array}\right\} \Rightarrow \Pi X + X\Pi = 0$

$\quad\text{"}\qquad\qquad\text{"}\qquad \Rightarrow \Pi P + P\Pi = 0$

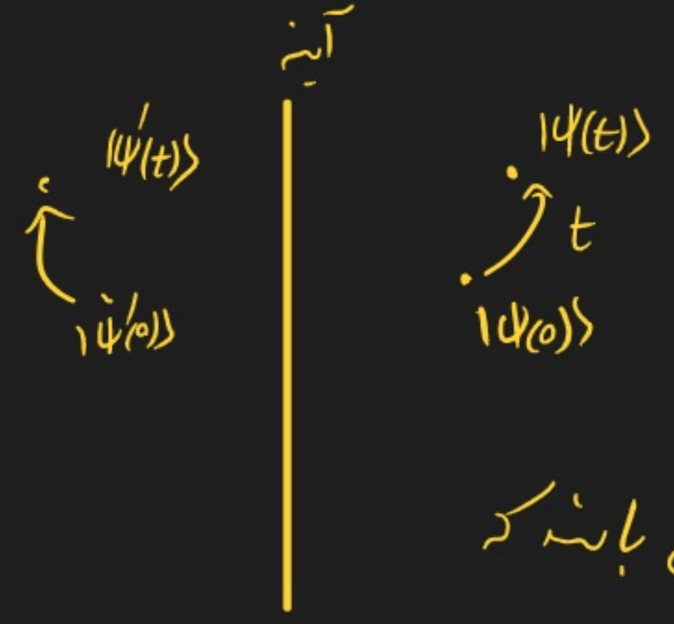
if $V(x) = V(-x)$

$\Pi\left(\frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{X})\right) = +\frac{\Pi PP}{2m} + \Pi V(X) = +\frac{P^2}{2m}\Pi + V(-X)\Pi = \left[\frac{P^2}{2m} + V(x)\right]\Pi = H\Pi$

$\left.\begin{array}{l}[\Pi, H] = 0\\ \Pi^2 = I\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle\\ \Pi|\psi_n\rangle = \pm|\psi_n\rangle\end{array}\right.$

خب این نتیجه اولی بود چون ما قبلاً هم نشون دادیم که اگر $V(x)$ زوج باشد ψها یا فرد اند یا زوج.

$\left.\begin{array}{l}\text{if } \langle x|\Pi|\psi_n\rangle = (\pm)\psi(x)\\ \langle -x|\psi_n\rangle = (\pm\psi(x))\end{array}\right\} \Rightarrow \psi_n(-x) = \pm\psi(x)$



$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}|\psi(0)\rangle$

$|\psi'(0)\rangle = \Pi|\psi(0)\rangle$

$|\psi'(t)\rangle = e^{i\frac{Ht}{\hbar}}|\psi'(0)\rangle = \Pi|\psi(t)\rangle$

پس واقعاً ما نمی‌توانیم تفاوتی بین تصویر آینه و واقعیت پیدا کنیم اگر $V(x)$ زوج باشه که نیروهای اصلی اینگونه اند مگر نیروهای ضعیف.

$$V(x)=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi=E\psi \rightsquigarrow$$ راه‌حل شرودینگر

$$H=\frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

$$H|\psi\rangle=E|\psi\rangle\ ;\ H=\frac{\hat{P}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2$$

$$[a,a^\dagger]=1$$

$$\omega=1,\ \hbar=1,\ m=1\ ,\ a=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+iP)\ ,\ a^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-iP)$$

$$\hat{H}=\hat{a}\hat{a}^\dagger+\frac{1}{2}$$

$$\hat{N}\equiv\hat{a}^\dagger\hat{a}$$

$$\hat{H}=\hat{N}+\frac{1}{2}$$

$$\hat{N}|\lambda\rangle=\lambda|\lambda\rangle$$

$$(\hat{N}+\tfrac{1}{2}\hat{I})|\lambda\rangle=(\lambda+\tfrac{1}{2})|\lambda\rangle$$

$$\hat{H}|\lambda\rangle=(\lambda+\tfrac{1}{2})|\lambda\rangle$$

پس ویژه بردارهای $\hat{N}$ ویژه بردارهای $\hat{H}$ هم هستند.

$$[N,a]=-a$$

$$[N,a^\dagger]=a^\dagger$$

$$\hat{N}|\psi\rangle=\lambda|\psi\rangle,\ \hat{N}(\hat{a}|\psi\rangle)=(\hat{a}\hat{N}-\hat{a})|\psi\rangle=(\lambda-1)(\hat{a}|\psi\rangle)$$

$$\hat{N}(\hat{a}^\dagger|\psi\rangle)=(\hat{a}^\dagger\hat{N}+\hat{a}^\dagger)|\psi\rangle=(\lambda+1)(\hat{a}^\dagger|\psi\rangle)$$

پس عملگرهای $a^\dagger$ سازنده باید کاری کنند

$$\hat{a}|\psi_0\rangle=0$$

توجه

$$\hat{N}|\psi_0\rangle=\hat{a}^\dagger\hat{a}|\psi_0\rangle=0$$

$$\hat{N}|\psi_n\rangle=n|\psi_n\rangle$$

$$|\psi_{n+1}\rangle=\hat{a}^\dagger|\psi_n\rangle$$

$$[A^N,B^M]=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}A^nB^m[A,B]A^{N-n-1}B^{M-m-1}$$

$$|\psi_n\rangle=\hat{a}^{\dagger n}|\psi_0\rangle$$

$$a|\psi_n\rangle\sim|\psi_{n-1}\rangle$$

بررسی چون $N=a^\dagger a$ ، N مساوی I است.

$$\langle\psi_n|\psi_n\rangle=\langle\psi_0|\hat{a}^n\hat{a}^{\dagger n}|\psi_0\rangle=\langle\psi_0|\hat{a}^{n-1}\,\hat{a}\hat{a}^{\dagger n}|\psi_0\rangle$$

$$[a,a^{\dagger n}]=\sum_{m=0}^{n-1}a^{\dagger m}\,a^{\dagger\, n-m-1}=n\hat{a}^{\dagger\, n-1}$$

$$aa^{\dagger n}=n\hat{a}^{\dagger\, n-1}+a^\dagger\hat{a}$$

$$\langle\psi_n|\psi_n\rangle=\langle\psi_0|\hat{a}^{n-1}n\,\hat{a}^{\dagger\, n-1}|\psi_0\rangle=n\langle\psi_{n-1}|\psi_{n-1}\rangle$$

$$=(n!)\langle\psi_0|\psi_0\rangle$$

$$=n!$$

ما برای $|\psi_n\rangle$ قید گذاشتیم پس می‌تونیم $|\psi\rangle$ را نرمال کنیم.

$$|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}|\psi_n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}a^{\dagger n}|0\rangle$$

$$|0\rangle=|\psi_0\rangle$$

$$N|n\rangle=n|n\rangle$$

$$\hat{H}=(\hat{N}+\tfrac{1}{2})\qquad \hbar\omega\neq1$$

$$\hat{H}|n\rangle=(n+\tfrac{1}{2})|n\rangle\to(n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega|n\rangle$$

$$E_n=(n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{a}^\dagger|\psi_n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}|\psi_{n+1}\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\sqrt{(n+1)!}\right)|n+1\rangle=\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$\hat{a}|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{a}|\psi_n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{a}\hat{a}^{\dagger n}|\psi_0\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}(n\hat{a}^{\dagger\, n-1})|\psi_0\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}n|\psi_{n-1}\rangle$$

$$=\frac{n}{\sqrt{n!}}\sqrt{(n-1)!}\,|n-1\rangle=\sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

حال اگر شکل موجی می‌خواستیم کافی $\langle x|a|\psi\rangle=0$ حل کنیم و تمام

تعریف گروه تبدیلات

$G = \{g_1, g_2, \dots\}$

1) $g_1 g_2 \in G \quad \forall g_1, g_2$

2) $\exists e \in G \quad eg = ge = g$

3) $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3$

4) $\forall g\ \exists g^{-1} \quad gg^{-1} = g^{-1}g = e$

دوران حول یک بردار دلخواه اندازه r که تغییر نمی کند

$r \to r' \to r' = Ar \to r'^t = r^t A^t$

$r^t r = r'^t r' = r^t A^t A r, \quad \forall r$

$\Rightarrow A^t A = I$

$\Rightarrow \det(A^t) = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1$

پس A باید متعامد باشد.

$A_i A_i \notin G$

$(-1)(-1) \quad (+1)$

این مجموعه تشکیل گروه نمی ده

پس A هم متعامد و دترمینالش یک هست.

بیایم و چرخش خیلی کوچک در نظر بگیریم

$$\left.\begin{aligned} A &= I + L \\ A^t &= I + L^t \end{aligned}\right\} \Rightarrow A^t A = (I + L^t)(I + L) = I + L^t + L = I$$

$$\Rightarrow L^t + L = 0 \Rightarrow$$ L پادهرمیتی

چون پادهرمیتی قطر اصلی صفر هست و در سه بعد:

$$A = I + \epsilon_3 \begin{pmatrix} & 1 & \\ -1 & & \\ & & \end{pmatrix} + \epsilon_2 \begin{pmatrix} & & -1 \\ & & \\ 1 & & \end{pmatrix} + \epsilon_1 \begin{pmatrix} & & \\ & & 1 \\ & -1 & \end{pmatrix} = I + \epsilon_1 T_1 + \epsilon_2 T_2 + \epsilon_3 T_3 = I + \epsilon \hat{n} \cdot \vec{T}$$

حال این A چرخش کوچک حول چه محوری هست؟ و چقدر؟

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{r} + \varepsilon \hat{n}' \times \vec{r} \\ \vec{r}' &= (I + \epsilon \hat{n} \cdot \vec{T}) \vec{r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{n}' = \hat{n}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} (n_1', n_2', n_3') \\ (x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} z n_2' - y n_3' \\ n_3' x - n_1' z \\ n_1' y - n_2' x \end{pmatrix}$$

$$I + \epsilon \hat{n} \cdot \vec{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_3 & -\epsilon_2 \\ -\epsilon_3 & 0 & \epsilon_1 \\ \epsilon_2 & -\epsilon_1 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_3 y - \epsilon_2 z \\ -\epsilon_3 x + \epsilon_1 z \\ \epsilon_2 x - \epsilon_1 y \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \hat{n} = \hat{n}'$

امضای منفی مهم نیست منفی اش خواستیم بین حول کدوم محوری چرخه و به اندازه ϵ.

$\vec{r}' = \vec{r} + (\vec{r} \times \hat{n}) \epsilon$

و از آنجایی که $g_1^2 \in G$ برای دوران خواهد است:

$$R_{\hat{n}}(\theta) = \lim_{N \to \infty} \left(I + \frac{\theta}{N} \hat{n} \cdot \vec{T}\right)^N = e^{\theta \hat{n} \cdot \vec{T}}$$

حال اگر محاسبات جابه جایی را انجام دهیم خواهیم داشت:

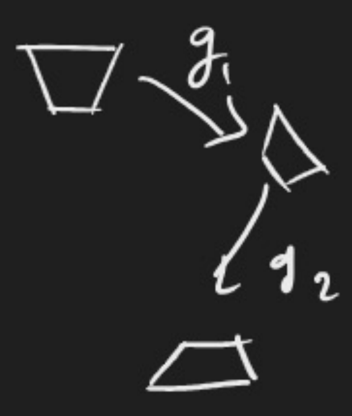
$[T_1, T_2] = T_3$

نکته: بیا e^A دلخواه حساب کنیم

$SAS^{-1} = D \Rightarrow A = S^{-1} D S$

$$e^A = e^{S^{-1}DS} = \sum_n \frac{(S^{-1}DS)^n}{n!} = S^{-1} \left(\sum_n \frac{D^n}{n!} \right) S = S^{-1} e^D S$$

ما این g ها را در فضای خودمان گفتیم بیایم و بریم توی فضای هیلبرت ببینیم.



$|\psi'\rangle = U(g_1)|\psi\rangle$

$|\psi''\rangle = U(g_2)|\psi'\rangle = U(g_2)U(g_1)|\psi\rangle = U(g_1 g_2)|\psi\rangle$

بریم سراغ نمایش

مثال:

$G = \{e, \pi\} \quad e|x\rangle = |x\rangle$

$\pi|x\rangle = |-x\rangle$

$U(e)|\psi\rangle = |\psi\rangle \rightsquigarrow U(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, U(\pi)^2 = U(e), U(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

فرضاً فضای هیلبرتم 2 مولفه ای باشه

اما ما میگیم که این سه نمایش $U(\pi)$ معادل هستند. چرا که با یک تغییر پایه بهم می رسند

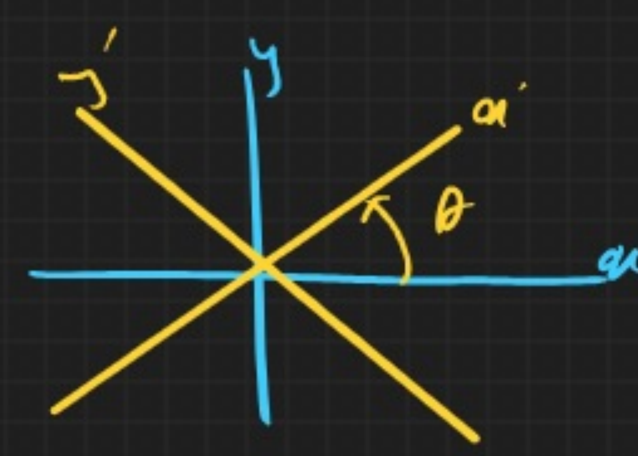
$SU(g)S^{-1} = U'(g)$

حال نمایش جابه‌جایی چی؟

$U(T_a)|x\rangle = |x+a\rangle$

$\hookrightarrow U(T_a) = e^{-\frac{i}{\hbar} a P_x}$ or $U(T_a) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\vec{P}}$

و چرخش چی؟ بیایم چرخش حول z در نظر بگیریم (توجه کن که $|x,y\rangle$ ریاضیات بعدی پیوسته‌اند)



$U|x,y\rangle = |x',y'\rangle$

$XU|x,y\rangle = X|x',y'\rangle = x'|x',y'\rangle = (x\cos\theta + y\sin\theta)|x',y'\rangle$

$= U(x\cos\theta + y\sin\theta)|x,y\rangle = U(\hat{X}\cos\theta + \hat{Y}\sin\theta)|x,y\rangle$

$U^{-1}XU = \hat{X}\cos\theta + \hat{Y}\sin\theta$

$YU|x,y\rangle = y'|x',y'\rangle = (y\cos\theta - x\sin\theta)|x',y'\rangle$

$U^{-1}YU = \hat{Y}\cos\theta - \hat{X}\sin\theta$

پس ۲ ویژگی آن را بدست آوردیم حال به سراغ چرخش کوچک می‌رویم

$\left.\begin{array}{l} U = I + \theta L \\ UU^\dagger = I \end{array}\right\} \Rightarrow L$ پادهرمیتی $\qquad L^\dagger = -L \qquad L \sim T$

$(iL)^\dagger = -i(-L) = iL$

$U = I + i\underset{\text{هرمیتی}}{L}$

$(I - i\theta L)\,\hat{X}\,(I + i\theta L) = \hat{X} + \hat{Y}\theta$

$(\hat{X} - i\theta L\hat{X})(I + i\theta L) = \hat{X} - i\theta L\hat{X} + i\theta\hat{X}L = \hat{X} - i\theta[L,\hat{X}] = \hat{X} + \hat{Y}\theta \Rightarrow [L,\hat{X}] = -i\hat{Y}$

$\Rightarrow [L,\hat{Y}] = i\hat{X}$

و فقط تکانه زاویه‌ای این ویژگی را دارد.

$U = e^{-i\theta L_z/\hbar}, \quad U = e^{-i\theta\hat{n}\cdot\vec{L}/\hbar}$

و از قسمت قبل می‌دانم پس

$U_z U_x U_y \in G$

حال اگر ما تقارن داشته باشیم یعنی:

$H(x,p) = H(x',p') = H(U^{-1}XU, U^{-1}PU) = UH(x,p)U^{-1}$

رابطه تبدیلش معلومه

$H(x,p)U = UH(x,p) \Rightarrow [U,H] = 0$

حال اگر مولد U را T باشد

$U = e^{i\theta T} \longrightarrow [T,H] = 0$

حال اگر نسبت به چرخش تقارن داشته باشیم:

$\left.\begin{array}{l} [H,L_z] = 0 \\ [H,L_x] = 0 \\ [H,L_y] = 0 \end{array}\right\} \hookrightarrow \left\{\begin{array}{l} H|\psi_{E,m}\rangle = E|\psi_{E,m}\rangle \\ L_z|\psi_{E,m}\rangle = m|\psi_{E,m}\rangle \end{array}\right. \Rightarrow$ (مثال سیب یادت باید) پس من واگنی دارم در انرژی E

(این حالت کلی)

$\langle T_a\rangle = \langle\psi(t)|T_a|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)|e^{i\frac{H}{\hbar}t}\, T_a\, e^{-i\frac{H}{\hbar}t}|\psi(0)\rangle = \langle\psi(0)|T_a|\psi(0)\rangle$

$\langle T_a\rangle(t) = \langle T_a\rangle(0)$

یعنی مولد تبدیلی که تقارن دارد میانگینش با زمان تغییر نمی‌کند.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle \;,\; i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U|\psi\rangle = HU|\psi\rangle \Rightarrow i\hbar(HU)^{-1}dU = dt \Rightarrow i\hbar H^{-1}\ln(U) = t$$

$$\Rightarrow U = e^{\frac{Ht}{i\hbar}}$$ ⟸ این اثبات ایراد فنی دارد ولی کار راه انداز است

$t' = n\epsilon$

$$U(t) = e^{i\int_0^t H(t')dt'} = e^{i\sum_n H(n\epsilon)\epsilon} \neq e^{i\{H(0)\epsilon + H(\epsilon)\epsilon + \dots + H(n\epsilon)\epsilon\}}$$

باید چجوری شود و به دست آید

$$\hookrightarrow = \prod_n e^{iH(n\epsilon)\epsilon}$$ (این در معادله شرودینگر صادق هست)

این خواص روبه‌رو برای L صادق هست.

$U = U^\dagger$

$UU^\dagger = I$

$U^2 = I$

$$R_z(\theta) = e^{i\theta L_z} = \cos\theta I + i\sin\theta L_z = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} + i\sin\theta L_z$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R_z(\theta) \Rightarrow L_z = \begin{pmatrix} 0 & i \\ j & 0 \end{pmatrix} = \sigma_y$$

$$L_z = XP_y - YP_x \underset{\text{فضای مکان}}{\Rightarrow} L_z = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

می‌بینیم ما $\langle x,y|\hat{L}_z|\psi\rangle$ بلدیم چون $L_z = XP_y - YP_x$:

Quantum M9

$$\frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x,y) \overset{\text{کلاسیک}}{=} \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}\psi(r,\theta)$$

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}\psi(r,\theta) = \lambda\psi(r,\theta)$$

$$\underline{\psi(r,\theta) = R(r)\chi(\theta)} \Rightarrow \frac{\hbar}{i}R(r)\frac{\partial\chi(\theta)}{\partial\theta} = \lambda R(r)\chi(\theta) \Rightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{1}{\chi(\theta)}\partial\chi(\theta) = \lambda\partial\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar}{i}\ln(\chi) = \lambda\theta \Rightarrow \chi = e^{+\frac{i\lambda\theta}{\hbar}}$$

$m \in \mathbb{Z}$

$$\chi(\theta) = \chi(\theta + 2m\pi) \Rightarrow e^{\frac{i\lambda\theta}{\hbar}} = e^{\frac{i\lambda(\theta+2\pi)}{\hbar}} = e^{\frac{i\lambda\theta}{\hbar} + \frac{2\pi i\lambda}{\hbar}} \Rightarrow \frac{2\pi i\lambda}{\hbar} = i2\pi m \Rightarrow \frac{\lambda}{\hbar} = m$$

$$\boxed{\begin{matrix} \lambda = m\hbar \;,\; m\in\mathbb{Z} \\ \chi_m(\theta) = e^{im\theta} \end{matrix}}$$

در حالت کلی پس پایه‌های $\chi_m(\theta)$ برای R مشخص فضای کامل تشکیل می‌دهند. (ویژه مقادیر $m\hbar$ دارند)

ولی اگر L_z بسط بدیم پایه‌ها $\chi_m(\theta)$ و ویژه مقادیر $R(r)$

اگر تقارن H داشته باشد.

$$[H, L_a] = 0 \;,\; U(\theta) = e^{-\frac{i}{\hbar}\theta L_a} \;,\; L_a - L_x L_y L_z$$

$[L_a, L_b] = i\hbar\epsilon_{abc}L_c$

$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = L_a L_a$

$[H, L^2] = 0$ ✓

$[L^2, L_z] = 0 \Rightarrow [L_x^2, L_z] + [L_y^2, L_z] = 0$ ✓

$[H, L_z] = 0$ ✓

$\langle a|B|b\rangle = \langle B^\dagger a|b\rangle$

$H|\psi\rangle = \lambda_E|\psi\rangle \qquad |\psi\rangle \doteq |\psi_{E\ell m}\rangle$

$L_z|\psi\rangle = \lambda_m|\psi\rangle$

$L^2|\psi\rangle = \lambda_\ell|\psi\rangle$

حال می‌ریم به سراغ نمایش بردارهای ویژه و ویژه مقادیر در فضای مکان.

$$L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi} \qquad L_+L_- = L_x^2 + L_y^2 + \hbar L_z \Rightarrow L^2 = L_+L_- + L_z^2 - \hbar L_z \;✓$$

$$L_+ = L_x + iL_y = \hbar e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \qquad H\,✓$$

$$L_- = L_x - iL_y = \hbar e^{-i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

فعلاً ویژه بردارهای مشترک L^2 و L_z را به صورت حل معادله دیفرانسیل به دست می‌آوریم.

$$L_z Y(\theta,\phi) = \underline{m\hbar}\,Y(\theta,\phi) \qquad -\ell \leq m \leq \ell \qquad Y(\theta,\phi) = e^{im\phi}P_\ell^m(\theta)$$

$$L^2 Y(\theta,\phi) = \underline{\hbar^2\ell(\ell+1)}\,Y(\theta,\phi)$$

حالا میریم سراغ H :

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\underset{\text{در فضای مکانی}}{\hat{R}})$$

ما میخوایم که پایه‌های مشترک برای هر سه اپراتور استخراج کنیم و برای همین اپراتورها را برحسب هم نوشتیم (L^2 را برحسب پا را اضافات) حال باید بریم سراغ $\hat{P}$

$L = r \times P$

$L^2 = (r\times P)^2 = r^2p^2 - (r\cdot p)^2$ کلاسیک

$L^2 = \hat{r}^2\hat{p}^2 - (\vec{r}\cdot\vec{p})^2 + i\hbar\,\vec{r}\cdot\vec{p}$

توجه داشته باش که برای اثبات دقیق می‌بایست r, p بازی می‌کردم و $[x, P_x] = i\hbar$ جلو می‌رفتم به این می‌رسیدم.

$$L^2 = r^2\hat{p}^2 + \hbar^2\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \hbar^2\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

و از اینجا $\hat{p}^2$ به دست می‌آید برحسب L^2 که L^2 هم برحسب L_z ها گفته شد.

پس در کل بردار ویژه

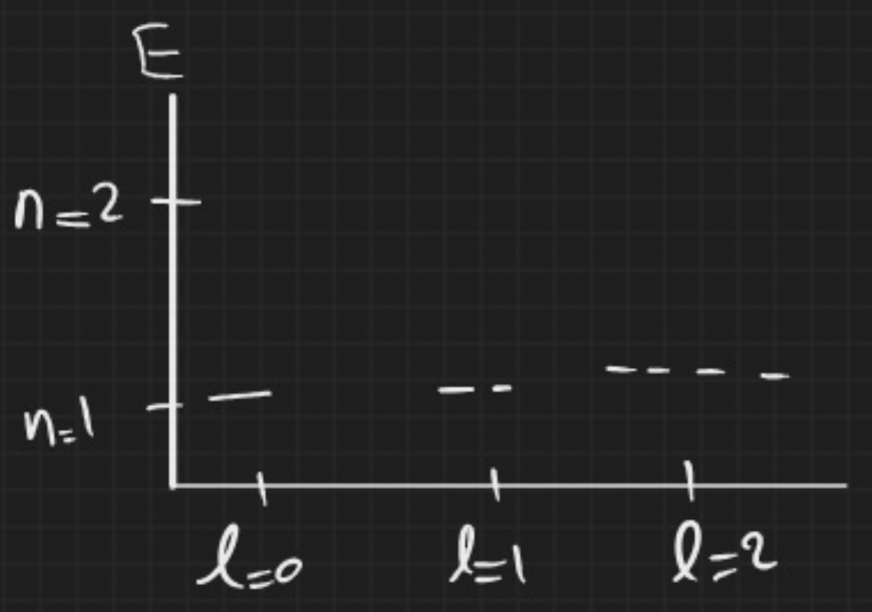
$$\psi_{E\ell m}(r,\theta,\phi) = f_{E\ell}(r)\,Y_{\ell m}(\theta,\phi)$$

چون ما H صریحاً برحسب L^2 بیان می‌کنیم f تابعی صریح از m نمی‌باشه

و رابطه غیر ضمنی H با m به این صورت است که $|\ell| \geq m$

$$[L_z, L_+] = L_+$$
$$[L_z, L_-] = L_-$$

$$H L_+ |\psi_{nlm}\rangle = E_{nl} L_+ |\psi_{nlm}\rangle$$
$$L_z L_+ |\psi_{nlm}\rangle = [L_+ + L_+ L_z] |\psi_{nlm}\rangle = [L_+ + L_+ m] |\psi_{nlm}\rangle$$
$$= \underline{(1+m)} L_+ |\psi_{nlm}\rangle$$



نمایش ماتریسی برای L

$$[L_x, L_y] = iL_z$$
$$[L_y, L_z] = iL_x$$
$$[L_z, L_x] = iL_y$$

z ↻ x y

Lie Algebra

$V: \text{span}\{|lm\rangle ; -l \leq m \leq l\}$

بعد $2l+1$:

$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$

$L_z |l,m\rangle = m|l,m\rangle$

$L^2 |l,m\rangle = l(l+1)|l,m\rangle$

$|l,l\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ldots |l,-l\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$$L_\pm |l,m\rangle = C^\pm_{lm} |l, m\pm 1\rangle$$
$$(L_\pm |l,m\rangle)^\dagger (L_\pm |l,m\rangle) = |C^\pm_{lm}|^2$$
$$\langle l,m| L_\mp L_\pm |l,m\rangle = \langle l,m| L^2 - L_z^2 \mp \hbar L_z |l,m\rangle$$
$$= \hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 m^2 \mp \hbar^2 m$$

پس با به دست آوردن شکل $|l,m\rangle$ ما قادریم که برای تمام L ها نمایش ماتریسی ارائه کنیم.

و از آن پس می توان نمایش های معادل استخراج کرد $S L S^{-1} = L'$

$$C^\pm_{lm} = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}$$

$$L_z = \begin{pmatrix} l & & \\ & \ddots & \\ & & -l \end{pmatrix}, \quad L^2 = l(l+1) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$L_x |l,m\rangle$ ✓

$L_y |l,m\rangle$ ✓

$|P_1\rangle , |P_2\rangle$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{P} = \hat{P}_1 + \hat{P}_2 \\ \hat{P}_1 = \hat{P}_1 \otimes \hat{I} \\ \hat{P}_2 = \hat{I} \otimes \hat{P}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{P}|P_1 P_2\rangle = (\hat{P}_1 + \hat{P}_2)|P_1 P_2\rangle = (P_1 + P_2)|P_1 P_2\rangle$$

حال بریم سراغ تکانه زاویه‌ای

$\vec{L}_1 = \vec{L} \otimes I$ $\quad [L_x, L_y] = iL_z$

$\vec{L}_2 = I \otimes \vec{L}$, $\quad \vdots$

$\mathcal{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$

ادعا می‌کنم که $\mathcal{L}$ هم که از جمع $L \otimes I$ و $I \otimes L$ ساخته شده است تکانه زاویه‌ای هست.

$$[\underline{L_x \otimes I} + \underline{I \otimes L_x}, \underline{L_y \otimes I} + \underline{I \otimes L_y}] = iL_z \otimes I + i I \otimes L_z = i\mathcal{L}_z$$

حال ادعا می‌کنم که بردارهای ویژه $\mathcal{L}_z$ $|j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$

$$\mathcal{L}_z = (L_{1z} \otimes I) + (I \otimes L_{2z}) \to \mathcal{L}_z |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = (m_1 + m_2)|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

ولی $\mathcal{L}^2$ چی؟

(L_1 و L_2 با هم جا به جا نمی‌شوند)

$$\mathcal{L}^2 = (L_1 + L_2)^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2$$

$$\mathcal{L}^2 |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \Big(j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1) + 2\big(\underbrace{L_{1x}L_{2x} + L_{1y}L_{2y}}_{?} + \overbrace{L_{1z}L_{2z}}^{m_1 m_2}\big)\Big)|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

پس باید بازی روی $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ ها بردار ویژه برای $\mathcal{L}^2$ بسازیم.

$S_z|z\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|z\rangle$

$[S_x, S_y] = i\hbar S_z$

$\mathcal{L}^2 = S^2 , \mathcal{L}_z = S_z$

بیا به Spin نگاه کنیم. ما در Quantum M 8.1 دیدیم که از نمایش ماتریسی که برای S_x, S_y, S_z درآوردیم می‌شه فهمید که $j = \frac{1}{2}$ $m = \pm\frac{1}{2}$

بریم و برای 2 ذره غیرمشابه ویژه بردارهای مشترک $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}_z$ را به دست بیاوریم

$$L_z|j_1m_1j_2m_2\rangle = (m_1+m_2)|j_1m_1j_2m_2\rangle$$

$$|j_1 j_2 (m_1+m_2)\rangle$$

$|j_1m_1j_2m_2\rangle$ ویژه‌بردار برای L_z می‌باشه.

$$|+\rangle \equiv |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle$$
$$|-\rangle \equiv |\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$|+\rangle|+\rangle = |1\,1\rangle$$
$$|+\rangle|-\rangle = |?\,0\rangle$$
$$|-\rangle|+\rangle = |?\,0\rangle$$
$$|-\rangle|-\rangle = |1\,-1\rangle$$

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_{1z}L_{2z} + (L_{1+}L_{2-} + L_{1-}L_{2+}) \longrightarrow$$ خیلی راحت می‌توان اثبات کرد

$$L^2|++\rangle = \left(\frac{1}{2}\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\frac{3}{2} + 2\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)|++\rangle = \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)|++\rangle = 2|++\rangle = 1(1+1)|++\rangle \Rightarrow ? = 1$$

$$L^2|--\rangle = \text{—} \quad \text{—} \quad \Rightarrow ? = 1$$

$$L^2|+-\rangle = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)\right)|+-\rangle - \frac{1}{2}|+-\rangle + |-+\rangle = |+-\rangle + |-+\rangle$$

$$(L_-\otimes I)(I\otimes L_+)|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle = |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$L^2|-+\rangle = \text{———} = |+-\rangle + |-+\rangle$$

$$L^2\left(\frac{|+-\rangle+|-+\rangle}{\sqrt{2}}\right) = 2\left(\frac{|+-\rangle+|-+\rangle}{\sqrt{2}}\right) = 1(1+1)\left(\frac{|+-\rangle+|-+\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$|10\rangle = \frac{|+-\rangle+|-+\rangle}{\sqrt{2}}$$

اوکی $|10\rangle$ ویژه‌بردار L^2 هست اما با این تغییرات ویژه‌بردار L_z هم هست؟

$$L_z|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(L_z|+-\rangle + L_z|-+\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left[(L_z\otimes I)+(I\otimes L_z)\right]|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle + \left[(L_z\otimes I)+(I\otimes L_z)\right]|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

$$= 0|10\rangle$$

$$\left.\begin{matrix} L^2|+-\rangle \\ L^2|-+\rangle \end{matrix}\right\downarrow \oplus \quad , \quad \left.\begin{matrix} L^2|+-\rangle \\ L^2|-+\rangle \end{matrix}\right\downarrow \ominus$$

$$\frac{|+-\rangle+|-+\rangle}{\sqrt{2}} \quad , \quad \frac{|+-\rangle-|-+\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$L^2\left(\frac{|+-\rangle-|-+\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{|+-\rangle+|-+\rangle-|+-\rangle-|-+\rangle}{\sqrt{2}}\right) = 0\left(\frac{|+-\rangle-|-+\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$L_z\left(\frac{|+-\rangle-|-+\rangle}{\sqrt{2}}\right) = 0\left(\frac{|+-\rangle-|-+\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} |00\rangle &= \frac{|+-\rangle-|-+\rangle}{\sqrt{2}} \checkmark \\ |10\rangle &= \frac{|+-\rangle+|-+\rangle}{\sqrt{2}} \checkmark \\ |11\rangle &= |++\rangle \checkmark \\ |1\,-1\rangle &= |--\rangle \checkmark \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

اینها پایه‌های کامل برای L^2 و L_z می‌باشند در جایی که $l_2=\frac{1}{2}$, $l_1=1/2$

$$|j_1m_1j_2m_2\rangle \xrightarrow[\text{برای حالات مختلف}]{\text{تاثیر } L^2}$$ ترکیب خطی { ✓ ، ✗

$$L_z|a\rangle = a|a\rangle$$
$$L_z|b\rangle = a|b\rangle$$
$$L_z(\alpha|a\rangle+\beta|b\rangle) = a(\alpha|a\rangle+\beta|b\rangle)$$

همین رونه برای H هم می‌ریم

$$|j_1m_1j_2m_2\rangle \xrightarrow[\text{برای حالات مختلف}]{\text{تاثیر } H}$$ ترکیب خطی { ✓ ، ✓

زمانی که اومدیم برای spin مسأله را حل کردیم دیدیم:

$$|11\rangle = |++\rangle$$
$$|1\,-1\rangle = |--\rangle$$
$$\underbrace{|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right)}_{j=1} \qquad \underbrace{|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)}_{j=0}$$

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \otimes 0$$

حال اگر مثلاً یک الکترون با $\frac{1}{2}$ spin و تکانه زاویه‌ای با $l=1$ را در نظر بگیریم

ماکسیمم حالت اینکه j_1 و j_2 با هم جهت باشن

و مینیمم حالت " " خلاف جهت باشن

$$\frac{1}{2} \otimes 1 = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2}$$

2×3 → 6 بعد   4 بعد   2 بعد

$$j_1 \otimes j_2 = (j_1 + j_2) \oplus \cdots \oplus (|j_1 - j_2|)$$

$(2j_1+1)(2j_2+1)$ بعد $2(j_1+j_2)+1$ بعد $2(|j_1-j_2|)+1$ بعد

$j_1 j_2$

$$(2j_1+1)(2j_2+1) = \frac{4j_1+2}{2}n = (2j_1+1)n$$
$$n = (2j_2+1)$$
$$a_n = a_0 + (n-1)d$$
$$2(j_1+j_2)+x = 2(j_1-j_2)+x+4j_2 d$$
$$d = 2$$

$$\Longrightarrow \quad j_1+j_2,\ j_1+j_2-1,\ \dots,\ |j_1-j_2|$$

$$\frac{1}{2} \otimes 1 = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2}$$

$$|\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\rangle = |11\rangle|+\rangle \quad L_-$$
$$|\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle$$
$$|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle \quad L_+$$
$$|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}\rangle = |1\,-1\rangle|-\rangle$$

$$|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle = \alpha|11\rangle|-\rangle + \beta|10\rangle|+\rangle \xrightarrow{L_+} 0 \ ; \ L_+ = (L_+ \otimes I) + (I \otimes L_+)$$
$$|\tfrac{1}{2}\, -\tfrac{1}{2}\rangle = \gamma|1\,-1\rangle|+\rangle + \delta|10\rangle|-\rangle \xrightarrow{L_-} 0 \ ; \ L_- = (L_- \otimes I) + (I \otimes L_-)$$

$$|J, M, j_1 j_2\rangle = \sum_{m_1, m_2} C(J, M, j_1, j_2 | j_1 m_1, j_2 m_2)\, |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$$

$$J \to j_1, j_2$$
$$m_1 m_2 \to j_1 j_2$$

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J_z - J_{z_1} - J_{z_2} | J, M\rangle = 0$$
$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | M - m_1 - m_2 | J, M\rangle = 0$$
$$(M - m_1 - m_2)\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | J, M\rangle = 0$$
$$\underbrace{(M - m_1 - m_2)}_{\neq 0}\ \underbrace{C(J, M, j_1 j_2 | j_1 m_1, j_2 m_2)}_{=0} = 0$$

$$1 \otimes 1 = 2 \oplus 1 \oplus 0$$

$$|22\rangle = |11\rangle|11\rangle \quad L_-$$
$$|21\rangle \quad L_-$$
$$|20\rangle \quad L_+$$
$$|2\,-1\rangle \quad L_+$$
$$|2\,-2\rangle = |1\,-1\rangle|1\,-1\rangle$$

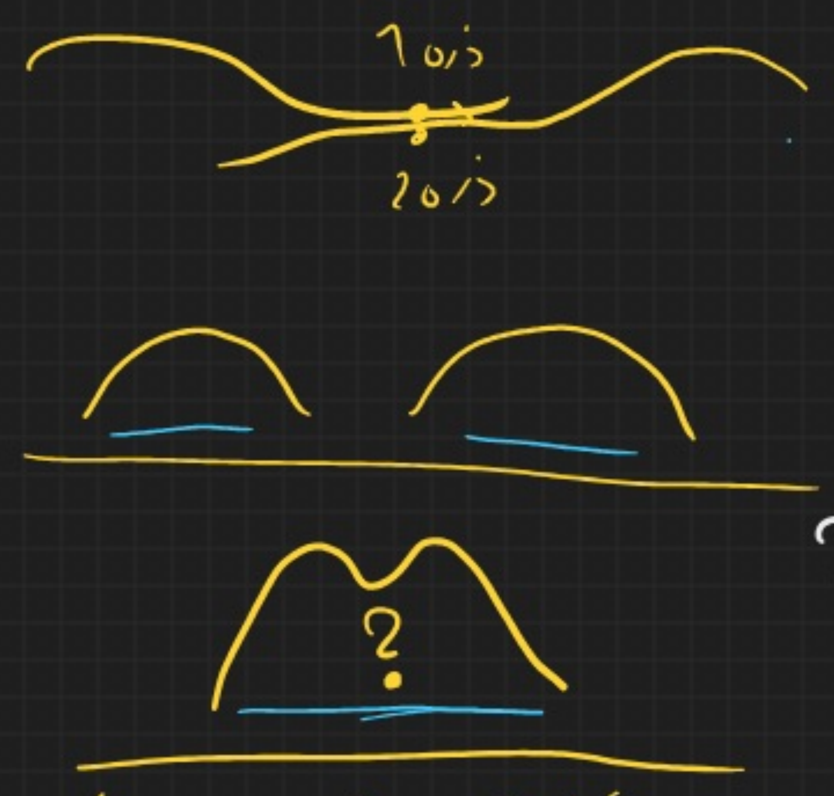
$$V = V_{spin} \otimes V_{space}$$

$$\begin{cases} X = I \otimes X \\ P = I \otimes P \end{cases} \qquad |x, \alpha\rangle$$
$$\{ S = S \otimes I \qquad |\psi\rangle = \sum_\alpha \int |x, \alpha\rangle\langle \alpha, x|\psi\rangle\, dx$$

$$|+x\rangle\langle +x| = |+\rangle\langle +| \otimes |x\rangle\langle x| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes |x\rangle\langle x| = \begin{pmatrix} |x\rangle\langle x| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

تمایزپذیری :

ما در فیزیک کلاسیک می توانیم x, p دقیقا برای یک ذره بدست آوریم پس اگر دو ذره مثلاً بهم نزدیک بشوند می توانیم آن ۲ را ازهم تشخیص بدهیم



ولی در کوانتوم $[X,P]=i\hbar$ و $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ پس من نمی توانم دقیقا در مورد مکان دو ذره حرف بزنم. و با احتمال حرف می زنم.

زمانی که دو ذره ازهم دور هستند و احتمال بینابین نمی باشد می توانم ۲ ذره ازهم تفکیک کنم. ولی زمانی که نزدیک بهم هستند نمی توانم!

اینجا هم ؟ داریم ولی خیلی کمتر

صرفا برای درک شهودی رسم شده

پس تنها حرفی که می توان زد این است که احتمال پیدا کردن یک ذره در r_1 و یک ذره در r_2 چقدر هست.

توجه ما برای این رابطه در نظر گرفتیم که برهمکنشی بین ۲ ذره وجود ندارد

$$|\Psi(r,r')|^2 = |\Psi(r',r)|^2$$

$$\left.\begin{aligned} \Psi(r,r') &= e^{i\phi}\,\Psi(r',r) \\ \Rightarrow \Psi(r',r) &= e^{i\phi}\,\Psi(r,r') \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Psi(r,r') = e^{i2\phi}\,\Psi(r,r') \Rightarrow e^{i2\phi} = 1 \Rightarrow 2\phi = 2m\pi \Rightarrow \phi = m\phi$$

if m odd $\Psi(r,r') = -\Psi(r',r)$

if m even $\Psi(r,r') = \Psi(r',r)$

$E, \ell, m, \ldots$

می دانیم که یک ذره به صورت $|\psi\rangle|s,s_z\rangle$ بیان می گردد

پس $\Psi_\alpha(x) = \langle x|\psi\rangle\langle s|s,s_z\rangle$

$$|\Psi_{\alpha,\beta}(r,r')|^2 = |\Psi_{\beta,\alpha}(r',r)|^2$$

اما مثلاً ما دو الکترون داریم که از دو آزمایش گشتران بالایی اومده بیرون مثلاً یکی $+1$ و یکی -1 می تونم بگم حالا ذره یک و دو مشخص ام از ذره یک $+1$ است و از ذره ۲ -1 اونوقت تمایز پذیرند؟!

خیر

$e_r\, e_{r'} \rightarrow e_{r'}\, e_r \rightarrow$ ادعا منسوخ
چون اصل عدم قطعیت داریم
نکات بالا؟

$\overset{r}{e} \rightarrow \overset{r'}{e} \rightarrow \overset{r}{e}\ \overset{r'}{e}$ ✓

$\overset{r}{e_\alpha} \rightarrow \overset{r'}{e_\beta} \rightarrow \overset{r}{e_\beta}\ \overset{r'}{e_\alpha} \rightarrow$

منسوخ است می دانیم که برای آنکه $|\psi\rangle$ به فضای مکان بیاوریم $\langle x|\psi\rangle$ و I در فضای مکان $\int |x\rangle\langle x|\,dx$.

از طرف دیگر ما spin غیرممکن است که از X, P ساخته شده باشد. (سرعت تغییر برای بی نور)

پس $[S,X]=0$, $[S,P]=0$.

پس V کل من $V = V_{space} \otimes V_{spin}$ پس هر مکان دارای خاصیت آزادی اسپین

$\overset{r}{\underset{\alpha}{e}} \rightarrow \overset{r'}{\underset{\beta}{e}} \rightarrow \overset{r}{\underset{\alpha}{e}}\ \overset{r'}{\underset{\beta}{e}}$

برگردیم به درسمون

$$\Psi_{\alpha\beta}(r,r') = \pm\Psi_{\beta,r}(r',r)$$

اینکه + یا - برگزینیم در دامنه فیزیک کوانتومی نمی باشد.

به + ها بوزون می گوییم و به - ها فرمیون

حال اگر سه ذره داشته باشیم

$$|\Psi_{\alpha\beta\gamma}(r,r',r'')|^2 = |\Psi_{P(\alpha\beta\gamma)}P(r\,r'\,r'')|^2$$

$$\Psi_{\alpha\beta\gamma}(r,r',r'') = (\pm 1)^{|\sigma|}\,\Psi_{\alpha\beta\gamma}(r,r',r'')$$

$|\sigma|$ تعداد جابجایی ها می باشد.