T.D. Semaine 21/11/2022

(1)

8.4 (a) $y''+y'-6y=1-8t-30t^2$ (E)

Étape #1 Le (PC) associé à (E) est r^2+r-6. On a $\Delta=1+24=25>0$. Les racines du (PC) sont

$$r_1=-\frac{1-5}{2}=-3 \quad \text{et} \quad r_2=-\frac{1+5}{2}=2$$

Les solutions de l'équa. homo. deviennent

$$y_h(t)=c_1e^{-3t}+c_2e^{2t}$$

Étape #2 $f(t)=1-8t-30t^2=e^{\alpha t}(P_1(t)\cos(\beta t)+P_2(t)\sin(\beta t))$

avec $\alpha=\beta=0$, $P_2(t)=0$ et $P_1(t)=1-8t-30t^2$.

$\alpha+i\beta=0$ n'est pas racine du (P.C.)

$$\Rightarrow y_p(t)=e^{\alpha t}(Q_1(t)\cos(\beta t)+Q_2(t)\sin(\beta t))$$

avec $\deg Q_1=\deg Q_2=\max\{\deg P_1, \deg P_2\}=2$

$$\Rightarrow y_p(t)=Q_1(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma$$

On veut $y_p''+y_p'-6y_p=1-8t-30t^2$

$$\Leftrightarrow 2\alpha+(2\alpha t+\beta)-6(\alpha t^2+\beta t+\gamma)=1-8t-30t^2$$

$$\Leftrightarrow -6\alpha t^2 + (2\alpha - 6\beta)t + 2\alpha + \beta - 6\gamma = 1 - 8t - 30t^2 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6\alpha = -30 \\ 2\alpha - 6\beta = -8 \\ 2\alpha + \beta - 6\gamma = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 3 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow y_p(t) = 5t^2 + 3t + 2$ est sol. particulière de (E)

Étape#3 : La solution générale de (E) est

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$
$$= C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t} + 5t^2 + 3t + 2$$

où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$ (E)

Étape#1 Le (PC) associé à (E) est $r^2 + 2r + 1$.

On a $\Delta = 0$. Le (PC) possède une racine double

$$r_0 = \frac{-b}{2a} = -1$$

$\Rightarrow y_h(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

Étape #2 : $f(t) = 2e^{-t} = e^{\alpha t}\left(P_1(t)\cos(\beta t) + P_2(t)\sin(\beta t)\right)$ ③

avec $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $P_1(t) = 2$, $P_2(t) = 0$.

$\alpha + i\beta = -1$ est une racine double de (P.C).

$$\Rightarrow y_p(t) = t^2 e^{\alpha t}\left(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t)\right)$$

avec $\deg Q_1 = \deg Q_2 = \max\{\deg P_1, \deg P_2\} = 0$.

$$\Rightarrow y_p(t) = t^2 e^{-t} Q_1(t)$$

$Q_1(t) = A$

$$= A t^2 e^{-t}$$

On veut $y_p'' + 2y_p' + y_p = 2e^{-t}$

On a $y_p' = 2Ate^{-t} - At^2e^{-t} = (2At - At^2)e^{-t}$

$$y_p'' = (2A - 2At)e^{-t} - (2At - At^2)e^{-t}$$

$$= (At^2 - 4At + 2A)e^{-t}$$

$\Rightarrow y_p'' + 2y_p' + y_p = 2e^{-t}$

$\Leftrightarrow (At^2 - 4At + 2A)e^{-t} + 2(2At - At^2)e^{-t} + At^2e^{-t} = 2e^{-t}$

$\Leftrightarrow 2Ae^{-t} = 2e^{-t} \Leftrightarrow \underline{A = 1}$

$\Rightarrow y_p(t) = t^2 e^{-t}$ est sol. part. de (E). 4

<u>Étape #3</u> : La sol. générale de (E) est

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$= (C_1 + C_2 t)e^{-t} + t^2 e^{-t} \quad \text{où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

(e) $y'' - 2y' + y = te^t \sin t$. (E)

<u>Étape #1</u> : Le (P.C.) associé à (E) est $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$

D'où $r = 1$ est racine double du (PC).

$$\Rightarrow y_h(t) = (C_1 + C_2 t)e^t$$

<u>Étape #2</u> :

$f(t) = te^t \sin t = e^{\alpha t}(P_1(t)\cos(\beta t) + P_2(t)\sin(\beta t))$

avec $\alpha = \underline{1}$, $\beta = \underline{1}$, $P_1(t) = 0$, $P_2(t) = t$

$\alpha + i\beta = 1 + i$ n'est pas racine du (PC).

$\Rightarrow y_p(t) = e^{\alpha t}(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t))$

avec $\deg Q_1 = \deg Q_2 = \max\{\deg P_1, \deg P_2\} = \underline{1}$

$\Rightarrow Q_1(t) = At + B$ et $Q_2(t) = Ct + D$.

$$\Rightarrow y_p(t) = e^t\left((At+B)\cos(t) + (Ct+D)\sin(t)\right)$$
$$= e^t g(t) \quad \text{où } g(t) = (At+B)\cos(t) + (Ct+D)\sin(t)$$

On veut $y_p'' - 2y_p' + y_p = te^t \sin t$

où $y_p' = e^t g(t) + e^t g'(t) = e^t(g+g')$

$$y_p'' = e^t(g+g') + e^t(g'+g'') = e^t(g+2g'+g'')$$

$$\Rightarrow e^t(g+2g'+g'') - 2e^t(g+g') + e^t g = te^t \sin t$$

$$\Leftrightarrow g + 2g' + g'' - 2g - 2g' + g = t\sin t$$

$$\Leftrightarrow g'' = t\sin t$$

$$g' = A\cos t - (At+B)\sin t + C\sin t + (Ct+D)\cos t$$
$$= (Ct+A+D)\cos t + (-At+C-B)\sin t$$

$$g'' = C\cos t - (Ct+A+D)\sin t - A\sin t + (-At+C-B)\cos t$$

$= (-At + 2C - B)\cos t + (-Ct - 2A - D)\sin t$

Ainsi $g'' = t\sin t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -A = 0 \\ 2C - B = 0 \\ -C = 1 \\ -2A - D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ C = -1 \\ B = -2 \\ D = 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow y_p(t) = e^t(-2\cos t - t\sin t)$

<u>Étape#3</u> : La solution générale est

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$
$$= (C_1 + C_2 t)e^t + e^t(-2\cos t - t\sin t)$$

où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$

(7) $y'' - 3y' + 2y = (-3t^2 + 10t - 7)e^t$.

<u>Étape #1</u> : Le (PC) est $r^2 - 3r + 2$. On a

$\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$. Les racines du (PC) sont

$$r_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{3+1}{2} = 2.$$

$$\Rightarrow y_h(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} \text{ où } (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Étape#2

$$f(t) = (-3t^2 + 10t - 7)e^t$$
$$= e^{\alpha t}\left(P_1(t)\cos(\beta t) + P_2 \sin(\beta t)\right)$$

avec $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $P_2(t) = 0$, $P_1(t) = -3t^2 + 10t - 7$

$\alpha + i\beta = 1$ est racine simple de (PC).

$$\Rightarrow y_p(t) = t e^{\alpha t}\left(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t)\right)$$

avec $\deg Q_1 = \deg Q_2 = \max\{\deg P_1, \deg P_2\} = 2$

$$\Rightarrow y_p(t) = t e^t Q_1(t)$$
$$= t e^t (At^2 + Bt + C)$$
$$= (At^3 + Bt^2 + Ct)e^t$$

On a $y_p'(t) = (3At^2 + 2Bt + C)e^t + (At^3 + Bt^2 + Ct)e^t$

$$= (At^3 + (3A+B)t^2 + (2B+C)t + C)e^t$$

8

$$y_p'' = (3At^2 + 2(3A+B)t + 2B + C)e^t + (At^3 + (3A+B)t^2 + (2B+C)t + C)e^t$$

$$= (At^3 + (6A+B)t^2 + (6A+4B+C)t + 2B + 2C)e^t$$

On veut

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = (-3t^2 + 10t - 7)e^t$$

$\underline{t^3e^t}$: $A - 3A + 2A = 0 \iff 0 = 0$

$\underline{t^2e^t}$: $6A + B - 3(3A+B) + 2B = -3$

$\iff -3A = -3 \iff A = 1$

$\underline{te^t}$: $6A + 4B + C - 3(2B+C) + 2C = 10$

$\iff 6A - 2B = 10$

$\iff 6 - 2B = 10 \iff -2B = 4 \iff B = -2.$

$\underline{e^t}$: $2B + 2C - 3C = -7$

$\iff 2B - C = -7 \iff -4 - C = -7$

$\iff -C = -3 \iff C = 3.$

$\Rightarrow y_p(t) = t(t^2-2t+3)e^t$ est sol. part. de (E)

Étape#3 : La solution générale de (E) est

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + t(t^2-2t+3)e^t$$

où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$

(2) $y'' + y' = \cos^3 t$ (E).

Posons $w = y'$. (E) s'écrit

$$w' + w = \cos^3 t$$

qui est de la forme $w' + \alpha w = \beta$ avec $\alpha(t) = 1$

et $\beta(t) = \cos^3 t$.

$\Rightarrow w_h(t) = C e^{-A(t)}$ où $A(t) = \int \alpha(t)dt = t$

$= C e^{-t}$

et $w_p(t) = C(t) e^{-t}$ où $C(t) = \int \beta(t) e^{A(t)} dt$

$= \int \cos^3 t \, e^t dt$

$$\cos^3 t = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3it}+3e^{it}+3e^{-it}+e^{-3it}\right)$$

$$\cos^3 t \times e^t = \frac{1}{8}\left(e^{(3i+1)t}+3e^{(i+1)t}+3e^{(-i+1)t}+e^{(-3i+1)t}\right)$$

$$C(t) = \int \cos^3 t \times e^t \, dt$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{e^{(3i+1)t}}{3i+1}+\frac{3e^{(i+1)t}}{i+1}+\frac{3e^{(-i+1)t}}{-i+1}+\frac{e^{(-3i+1)t}}{-3i+1}\right)$$

$$\Rightarrow w_p(t) = C(t)e^{-t}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{e^{3it}}{3i+1}+\frac{3e^{it}}{i+1}+\frac{3e^{-it}}{-i+1}+\frac{e^{-3it}}{-3i+1}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{(-3i+1)e^{3it}+(3i+1)e^{-3it}}{10}+\frac{3(-i+1)e^{it}+3(i+1)e^{-it}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{-3i(2i\sin 3t)+2\cos(3t)}{10}+\frac{-3i(2i\sin t)+3(2\cos t)}{2}\right)$$

$$= \frac{6}{80}\sin(3t)+\frac{2}{80}\cos(3t)+\frac{6}{16}\sin t+\frac{6}{16}\cos t$$

(11)

$$\Rightarrow w(t) = Ce^{-t} + \frac{3}{40}\sin(3t) + \frac{1}{40}\cos(3t) + \frac{3}{8}\sin t + \frac{3}{8}\cos t$$

Or $w = y'$

$$\Rightarrow y(t) = -Ce^{-t} + C_1 - \frac{1}{40}\cos(3t) + \frac{1}{120}\sin(3t) - \frac{3}{8}\cos t + \frac{3}{8}\sin t.$$

où $(C; C_1) \in \mathbb{R}^2$.

(e) $y'' + \omega^2 y = \sin(\omega t)$

Fait en cours.