2023/3/28.

Assignment 4.

1.

~~题~~ 原问题是凸的,因为:

obj: $(x_1+x_2)^2+x_2^2+x_3^2+(3x_1-4x_2)$.

cons1: $\sqrt{(\sqrt{2}x_1+\frac{1}{2\sqrt{2}}x_2)^2+\frac{31}{8}x_2^2+4}+\frac{(x_1-x_2+x_3+1)^2}{(x_1+x_2)}\le 6$.

仿射复合　　仿射复合

cons2: $x\ge 1$.

~~题~~.

2. 原问题是凸的,因为:

①. obj与其后几个constraints均为凸,这是显然.

②. 对于约束1: 因为已经有另一约束: $x\ge 0$.

所以 $(x_3+2x_4)^4 = \cancel{((x_3+2x_4))^2}$, 其中$(\cdot)^4$为凸的,且在$[0,+\infty)$单调↑

而且(x_3+2x_4)在其他约占

③. 对于约束1, 作如下说明:

1° 因为 $f(x)=x_3+2x_4$为仿射, $g(x)=x^4$为凸

故 $g(f(x))=(x_3+2x_4)^4$为凸.

2° 同理, 因为 $f(x)=x_1-x_2$为仿射, $g(x)=x^2$为凸

故 $g(f(x))=(x_1-x_2)^2$也为凸.

3. 原问题是凸的，因为：

①. 对于目标函数：

$|2x_1+3x_2+x_3|$ 由于仿射复合，故为凸；

$\|x\|^2$ 由于单调复合（$\|x\|$ 恒 ≥ 0），故为凸.

$$\sqrt{2x_1^2+4x_1x_2+7x_2^2+10x_2+6} = \sqrt{2(x_1+x_2)^2+5(x_2+1)^2+1} = \left\|\begin{bmatrix}\sqrt{2}(x_1+x_2)\\ \sqrt{5}(x_2+1)\\ 1\end{bmatrix}\right\|_2$$，故为凸.

②. 对于约束：

约束1：令 quad-over-linear 函数 $f(x,y) \triangleq \frac{x^Tx}{y}$，其中 $y>0$.

故原式 $\Leftrightarrow f([x_1,1],x_2)+2(x_1+x_2+\frac{1}{2}x_3)^2+3x_2^2+\frac{19}{2}x_3^2 \leq 7$ 为凸.（因为约束4已要求 $x_2 \geq 1 > 0$）.

约束2：因为 x_1+x_2，x_3，x_1-x_3 均为仿射（即凸）

故“逐点最大值”：$\max\{x_1+x_2, x_3, x_1-x_3\} \leq 19$ 也为凸.

4. 原问题是凸的，因为：

①. 对于目标函数：

第一项 $= \|[\sqrt{2}(x_1+x_3), x_2, x_3, \sqrt{7}]\|_2 \Rightarrow$ 由仿射复合，第一项为凸.

第二项 $= f(g(x))$，其中 $g(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+1$ 为凸且恒正.
$f(x)=x^2$ 为凸且在 $[0,+\infty)$ 上单调↑. $\Rightarrow$ 第二项为凸.

故目标函数为凸

②. 对于约束：

约束1 $\Leftrightarrow$ quad-over-lin$(x_1+x_2, x_3+1)+x_1^8 \leq 7$.
其中由约束4：$x_3 \geq 0$ 得 x_3+1 必定 >0；而 x_1^8 由仿射复合为凸.

约束2 $\Leftrightarrow (x_1+x_2+x_3)^2+3x_3^2 \leq 10$，由仿射复合为凸.

约束3 $\Leftrightarrow f(g(x))$，其中 $g(x)=|x_1+x_2-x_3|$ 为凸且恒 ≥ 0（由于仿射复合）.
$f(x)=x^2$ 为凸且在 $[0,+\infty)$ 上单调↑

故约束也均为凸.

5. 各问题是凸的原因:

①对于目标函数:

1° $\frac{x_1^4}{x_2^2}+\frac{x_2^4}{x_1^2}+2x_1x_2=\left(\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}\right)^2$，而 $\frac{x_1^2}{x_2}$ 与 $\frac{x_2^2}{x_1}$ 均为 quadratic-over-linear 函数仿射复合，均为凸

且由约束 3, 4, 二者均恒正，故由单调复合，上式为凸.

2°. $|x_1+x_3|$ $(1\le x_1\le 3)$ 由仿射复合，为凸.

②. 对于约束:

约束1: 可一层层写为 $f(g(h(x)))$

其中 $h(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+1$ 为凸且恒正

$g(x)=x^2+1$ 为凸且在 $x\ge0$ 单调↑

故 $g(h(x))$ 为凸，且恒正.

又因为 $f(x)=x^2$ 为凸且在 $x\ge0$ 单调↑，故 $f(g(h(x)))$ 为凸.

约束2: $\max\{(x_1+2x_2)^2+5x_2^2, x_1, x_2\}\le 4$.

其中 $(x_1+2x_2)^2+5x_2^2$ 为凸，x_1, x_2 均仿射，故整体为凸.

6. 原问题是凸的，因为：

“maximum margin line” $\Leftrightarrow$ 找到支持向量机中的超平面.

即找到 $H(w,\beta)=\{x\in\mathbb{R}^2: w^Tx+\beta=0\}$. 满足以下优化问题.

$$\max_{w,\beta}\ \min_{i=1,\dots,m+p}\ \frac{|w^Tx_i+\beta|}{\|w\|_2}$$，其中 x_i ($1\le i\le m+p$) 为 $(m+p)$ 个样本点.

s.t. $w^Tx_i+\beta>0$, $i=1,2,\dots,m$.

$w^Tx_i+\beta<0$, $i=m+1,\dots,m+p$.

该优化问题 $\Leftrightarrow$ $\min \frac{1}{2}\|w\|_2^2$

s.t. $b_i\cdot(w^Tx_i+\beta_i)\geq 1$, $i=1,2,\dots,m+p$.

这个等价的优化问题是凸问题. 故原问题也是一个凸问题.