

Mesin Carnot Quantum dengan Dua Partikel Tidak Berinteraksi dan Tidak Terbedakan

Khazali Fahmi^{(1,a)*}

⁽¹⁾Prodi Fisika, Universitas Pertahanan RI, Bogor, Indonesia, 16810

Email : [\(a*\)fahmikhazali@gmail.com](mailto:(a*)fahmikhazali@gmail.com)

Diterima (23 Juni 2023), Direvisi (22 Juli 2023)

Abstract. This article examines the quantum Carnot engine using a one dimensional infinite well potential model in which two particles are noninteracting, indistinguishable and have the same mass. We find that the efficiency of this model is the same as that of the one-dimensional infinite potential well model in which there is one particle. Moreover, efficiency can be measured only when $L_C/L_A \geq 2$, where L_A and L_C are the potential well widths during isothermal and adiabatic expansion, respectively.

Keywords: Quantum Carnot engine, Carnot cycle, efficiency .

Abstrak. Artikel ini mengkaji tentang mesin Carnot kuantum dengan menggunakan model sumur potensial takberhingga satu dimensi yang di dalamnya terdapat dua partikel yang tidak berinteraksi, tidak dapat dibedakan dan memiliki massa sama. Kami memperoleh bahwa efisiensi dari model ini memiliki hasil yang sama dengan model sumur potensial takberhingga satu dimensi yang di dalamnya terdapat satu partikel. Selain itu, efisiensi dapat diukur hanya ketika $L_C/L_A \geq 2$, dengan L_A dan L_C masing-masing merupakan lebar sumur potensial selama ekspansi isotermal dan adiabatik.

Kata kunci: Mesin Carnot kuantum, siklus Carnot, Efisiensi.

PENDAHULUAN

Fisika kuantum membawa perubahan yang signifikan terhadap perkembangan fisika khususnya pada ranah mikroskopik. Saat ini, hampir semua konsep fisika klasik dibawa ke dalam konsep fisika kuantum, salah satunya adalah teori kuantum dari mesin panas. Mesin panas sendiri bekerja dengan mengubah sejumlah panas menjadi usaha. Sejauh mana mesin panas bekerja secara optimal ditentukan oleh efisiensi mesin panas tersebut. Salah satu mesin panas yang dikenal baik adalah mesin Carnot.

Mesin Carnot terdiri dari empat proses termodinamika yang membentuk suatu siklus dan terdiri dari dua proses isotermal dan dua proses adiabatik. Versi kuantum dari mesin Carnot disebut mesin Carnot kuantum. Proses termodinamika kuantum

telah banyak dikaji oleh peneliti [1]–[6]. Model yang digunakan dalam menjelaskan mesin Carnot kuantum juga bervariasi seperti sumur potensial takberhingga [7]–[12] dan sistem yang berosilasi [13], [14]. Selain itu, penelitian mesin Carnot kuantum yang melibatkan berbagai jenis partikel juga telah dikaji [15]–[20].

Secara klasik, efisiensi mesin Carnot diperoleh dengan membandingkan antara usaha yang dihasilkan dengan kalor yang diserap dari reservoir suhu tinggi [21], secara matematis diberikan oleh **Persamaan 1**

$$\eta = \frac{W}{Q}. \quad (1)$$

Jika reservoir suhu tinggi adalah T_H dan reservoir suhu rendah adalah T_L , efisiensi mesin Carnot juga dapat dinyatakan seperti pada **Persamaan 2** berikut,

$$\eta = 1 - \frac{T_L}{T_H}. \quad (2)$$

Studi baru-baru ini menunjukkan bahwa proses termodinamika kuantum menghasilkan kesesuaian dengan proses termodinamika klasik. Salah satu tujuan memformulasikan siklus termodinamika kuantum adalah untuk memperluas konsep siklus termodinamika ke ranah kuantum dan memahami konversi energi dalam daerah kuantum [5]. Formulasi ini kemudian dapat diterapkan pada beberapa siklus termodinamika klasik seperti siklus Carnot.

Dengan menggunakan model sumur potensial takberhingga satu dimensi, Bender *et al* [22] memperoleh bahwa pada proses isotermal, perkalian antara gaya dan lebar sumur sama dengan konstan atau

$$F(L) L = C. \quad (3)$$

Persamaan 3 bersesuaian dengan proses isotermal klasik yaitu perkalian tekanan dan volume bernilai konstan atau

$$PV = C. \quad (4)$$

Dengan model yang sama, mereka juga mendapatkan hubungan antara gaya dengan lebar sumur potensial takberhingga satu dimensi pada proses adiabatik yaitu

$$F(L) L^3 = C. \quad (5)$$

Hasil ini juga bersesuaian dengan proses adiabatik klasik yaitu

$$PV^\gamma = C \quad (6)$$

dengan γ merupakan konstanta Laplace. Efisiensi mesin Carnot kuantum yang dihasilkan menggunakan model ini adalah

$$\eta = 1 - 4 \left(\frac{L_A}{L_C} \right)^2 \quad (7)$$

dengan L_A dan L_C masing-masing merupakan posisi ekspansi isotermal dan adiabatik. **Persamaan 3, 5** dan **7** menunjukkan bahwa ada kesesuaian yang signifikan antara mesin Carnot kuantum dengan mesin Carnot klasik.

Artikel ini akan mengkaji proses termodinamika dan efisiensi mesin Carnot kuantum dengan menggunakan model sumur potensial takberhingga satu dimensi yang di dalamnya terdapat dua buah partikel bermassa sama, takberinteraksi dan takterbedakan. Model ini memberikan kesederhanaan untuk kajian terkait siklus Carnot kuantum. Dengan memahami model ini dengan baik, penelitian dapat dikembangkan dengan model yang lebih kompleks. Artikel ini disusun sebagai berikut: pertama, penulis mendiskusikan mengenai fungsi gelombang dan energi sistem sebagai metode yang akan digunakan untuk mendiskusikan proses termodinamika, kedua, penulis menentukan kerja dan efisiensi mesin Carnot kuantum dan terakhir membandingkan hasil yang diperoleh dengan model sebelumnya.

METODE PENELITIAN

Persamaan Schrodinger dari sumur potensial takberhingga satu dimensi yang di dalamnya terdapat N partikel bermassa sama, takberinteraksi dan takterbedakan diberikan oleh **Persamaan 8**

$$\hat{H}\psi(x_1, x_2, \dots, x_N) = E\psi(x_1, x_2, \dots, x_N). \quad (8)$$

Fungsi gelombang dan energi eigen sistem ini masing-masing diberikan oleh **Persamaan 9** berikut [23],

$$\psi(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N \left(\sqrt{\frac{2}{L}} \right)^N \sin\left(\frac{n_i \pi}{L} x_i\right) \quad (9)$$

$$E_{n_1, \dots, n_N} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_1^2 + \dots + n_N^2) \quad (10)$$

dengan L merupakan lebar sumur potensial.

Selama proses termodinamika berlangsung, sistem diasumsikan hanya bisa berada pada keadaaan dasar dan eksitasi pertama. Dengan demikian fungsi gelombang sistem merupakan superposisi dari kedua keadaan tersebut. Dengan menggunakan asumsi ini, **Persamaan 9** menjadi

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2) &= |a_{11}| \frac{2}{L} \sin\left(\frac{\pi}{L} x_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{L} x_2\right) \\ &+ |a_{22}| \frac{2}{L} \sin\left(\frac{2\pi}{L} x_1\right) \sin\left(\frac{2\pi}{L} x_2\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Energi ekspektasi sistem diberikan oleh **Persamaan 12**

$$E = |a_{11}|^2 E_{11} + |a_{22}|^2 E_{22}. \quad (12)$$

Perhatikan bahwa **Persamaan 11** diperoleh dengan menggunakan $N = 2$. Koefisien a_{11} , a_{22} bergantung terhadap jarak ekspansi atau kompresi dari sistem selama proses termodinamika berlangsung dan memenuhi kondisi normalisasi

$$|a_{11}|^2 + |a_{22}|^2 + \dots = 1. \quad (13)$$

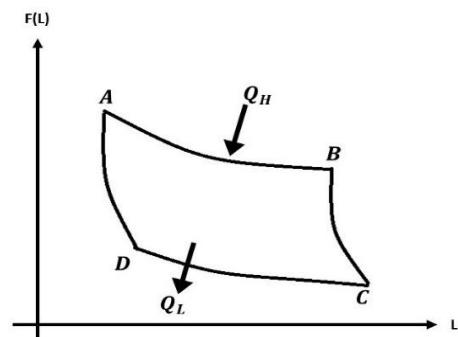
Selama proses termodinamika berlangsung, diperlukan sejumlah gaya untuk melakukan ekspansi maupun kompresi dalam siklus mesin Carnot kuantum. Analog dengan konsep klasik, gaya yang dilakukan dapat diperoleh menggunakan persamaan

$$F = -\frac{dE}{dL} \quad (14)$$

dengan E merupakan energi ekspektasi sistem.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Analog dengan konsep klasik, mesin Carnot kuantum juga terdiri dari empat proses termodinamika, dua proses isotermal dan dua proses adiabatik dengan masing-masing dapat mengalami ekspansi dan kompresi. Sumur potensial takberhingga satu dimensi yang digunakan sebagai model mesin Carnot kuantum memberikan analog antara tekanan dan gaya serta volume dan lebar sumur potensial. Konsep ini memberikan grafik siklus mesin Carnot kuantum seperti gambar di bawah.



Gambar 1. Grafik gaya terhadap lebar sumur potensial takberhingga dari siklus mesin Carnot kuantum yang terdiri dari empat proses termodinamika

Ekspansi Isotermal

Selama ekspansi isotermal, sistem terhubung dengan reservoir suhu tinggi T_H dan menyerap energi Q_H . Dengan demikian sistem tetap dalam kesetimbangan termal. Dari hukum pertama termodinamika, jumlah kalor yang diperlukan untuk mengekspansi sistem adalah

$$\Delta Q = W. \quad (15)$$

Diasumsikan bahwa sistem mengalami ekspansi isotermal dari L_A ke L_B . Selama ekspansi, fungsi gelombang sistem dua partikel merupakan superposisi dari keadaan dasar dan keadaan eksitasi pertama, yaitu

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2) &= |a_{11}| \frac{2}{L} \sin\left(\frac{\pi}{L} x_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{L} x_2\right) \\ &+ |a_{22}| \frac{2}{L} \sin\left(\frac{2\pi}{L} x_1\right) \sin\left(\frac{2\pi}{L} x_2\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Sedangkan energi sistem diberikan oleh

$$E = |a_{11}|^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{mL^2} + |a_{22}|^2 \frac{4\pi^2 \hbar^2}{mL^2}. \quad (17)$$

Selama ekspansi isotermal berlangsung, energi pada **Persamaan 17** sama dengan energi di A. Dengan demikian memberikan

$$|a_{11}|^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{mL^2} + |a_{22}|^2 \frac{4\pi^2 \hbar^2}{mL^2} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{mL_A^2}. \quad (18)$$

Dengan menggunakan kondisi normalisasi $|a_{11}|^2 + |a_{22}|^2 = 1$ dan **Persamaan 18**, diperoleh

$$|a_{11}|^2 = \frac{1}{3} \left(4 - \frac{L^2}{L_A^2} \right) \quad (19)$$

$$|a_{22}|^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{L^2}{L_A^2} - 1 \right). \quad (20)$$

Ketika mencapai titik B, sistem sepenuhnya tereksitasi pertama. Pada keadaan ini koefisien $a_{11} = 0$. Jadi ekspansi terjauh yang dapat dicapai adalah

$$L = L_B = 2L_A \quad (21)$$

dan energi di B diberikan oleh **Persamaan 22**, yaitu

$$E_{22} = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{mL_B^2} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{mL_A^2}. \quad (22)$$

Dengan menggunakan **Persamaan 14**, **21** dan **22** gaya yang diperlukan untuk melakukan ekspansi diberikan oleh

$$F(L) = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{mL_A^2 L}. \quad (23)$$

Perhatikan bahwa perkalian antara gaya dan lebar sumur potensial pada persamaan (23) sama dengan konstan, yaitu

$$F(L) L = C \quad (24)$$

dengan $C = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{mL_A^2}$. Analog dengan proses isotermal klasik, hasil ini menunjukkan bahwa selama ekspansi isotermal sistem dalam kesetimbangan termal.

Ekspansi Adiabatik

Selama ekspansi adiabatik, tidak ada perubahan energi yang terjadi pada sistem dan sistem mengalami perubahan suhu. Dalam keadaan ini, fungsi gelombang dan energi sistem tetap dalam keadaan terkesitasi pertama. Dengan demikian fungsi gelombang dan energi sistem diberikan oleh **Persamaan 25** dan **26**, yaitu

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{2}{L} \sin\left(\frac{2\pi}{L} x_1\right) \sin\left(\frac{2\pi}{L} x_2\right) \quad (25)$$

$$E_B = E_C = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{mL^2}. \quad (26)$$

Dengan menggunakan **Persamaan 14**, gaya yang diberikan adalah

$$F(L) = \frac{8\pi^2 \hbar^2}{mL^3}. \quad (27)$$

Persamaan 27 menunjukkan bahwa perkalian antara lebar sumur pangkat tiga sama dengan konstan, yaitu

$$F(L) L^3 = C \quad (28)$$

dengan $C = \frac{8\pi^2\hbar^2}{m}$. **Persamaan 28** menunjukkan kesesuaian dengan proses adiabatik dalam termodinamika klasik

Kompresi Isotermal

Selama kompresi isotermal, fungsi keadaan sistem merupakan superposisi keadaan dasar dan keadaan eksitasi pertama. Selain itu, sistem tetap dalam kesetimbangan termal. Dengan cara yang sama seperti pada ekspansi isotermal, maka energi sistem dapat dinyatakan sebagai

$$E = |a_{11}|^2 \frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2} + |a_{22}|^2 \frac{4\pi^2\hbar^2}{mL^2}. \quad (29)$$

Asumsikan sistem mengalami kompresi dari L_C ke L_D . Setting energi pada persamaan di atas sama dengan energi di titik E_C . Dengan demikian energi **Persamaan 29** menjadi

$$|a_{11}|^2 \frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2} + |a_{22}|^2 \frac{4\pi^2\hbar^2}{mL^2} = \frac{4\pi^2\hbar^2}{mL_C^2}. \quad (30)$$

Dengan menggunakan kondisi normalisasi $|a_{11}|^2 + |a_{22}|^2 = 1$, diperoleh

$$|a_{11}|^2 = \frac{4}{3} \left[1 - \frac{L^2}{L_C^2} \right] \quad (31)$$

$$|a_{22}|^2 = \frac{1}{3} \left[\frac{4L^2}{L_C^2} - 1 \right]. \quad (32)$$

Perhatikan bahwa, kompresi maksimal terjadi ketika $a_{22} = 0$. Dengan demikian kompresi terjauh diberikan oleh **Persamaan 33**, yaitu

$$L = L_D = \frac{L_C}{2}. \quad (33)$$

Dengan menggunakan **Persamaan 14**, gaya yang dihasilkan pada proses ini adalah

$$F(L) = \frac{8\pi^2\hbar^2}{mL_C^2 L}. \quad (34)$$

Hasil di atas juga menunjukkan bahwa perkalian gaya dan lebar sumur potensial sama dengan konstan, yaitu

$$F(L) L = C. \quad (35)$$

Kompresi Adiabatik

Pada kompresi adiabatik, sistem tetap dalam keadaan dasar. Dengan demikian energi sistem adalah

$$E = E_D = E_A = \frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2}. \quad (36)$$

Dengan menggunakan **Persamaan 14**, gaya yang dihasilkan diberikan oleh

$$F = \frac{2\pi^2\hbar^2}{mL^3}. \quad (37)$$

Persamaan 37 juga menunjukkan bahwa ada kesesuaian dengan proses adiabatik dalam termodinamika klasik

Kerja Sistem

Pada diagram F-L, kerja yang dihasilkan selama empat proses termodinamika pada mesin Carnot sama dengan luas grafik tersebut. Oleh karena itu, kerja dari sistem ini adalah

$$\begin{aligned} W = & \int_{L_A}^{2L_A} F dL + \int_{2L_A}^{L_C} F dL + \int_{L_C}^{L_C/4} F L \\ & + \int_{L_C/4}^{L_A} F dL \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{L_A}^{2L_A} \frac{2\pi^2 \hbar^2}{m L_A^2} \frac{1}{L} dL + \int_{2L_A}^{L_C} \frac{8\pi^2 \hbar^2}{m} \frac{1}{L^3} dL \\
&\quad + \int_{L_C}^{L_C/2} \frac{8\pi^2 \hbar^2}{m L_C^2} \frac{1}{L} dL + \int_{L_C/2}^{L_A} \frac{2\pi^2 \hbar^3}{m} \frac{1}{L^3} dL \\
&= \frac{2\pi^2 \hbar^2}{m} \left[\frac{1}{L_A^2} + \frac{4}{L_C^2} \right] \ln 2.
\end{aligned} \tag{38}$$

Efisiensi

Untuk memperoleh efisiensi dari model mesin Carnot kuantum, perlu dihitung jumlah energi yang diserap pada reservoir suhu tinggi. Energi ini dapat diperoleh pada proses ekspansi isotermal. Besarnya energi yang diserap ini adalah

$$Q_H = \int_{L_A}^{2L_A} F dL \tag{39}$$

$$Q_H = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{m L_A^2} \ln 2. \tag{40}$$

Dengan menyubstitusikan **Persamaan 38** dan **40** ke dalam **Persamaan 1**, efisiensi mesin Carnot kuantum sistem ini adalah

$$\eta = 1 - 4 \left(\frac{L_A}{L_C} \right)^2 \tag{41}$$

Persamaan 42 menunjukkan bahwa efisiensi mesin Carnot kuantum bergantung terhadap lebar sumur potensial saat melakukan isotermal dan adiabatik. Mesin Carnot kuantum memiliki efisiensi minimal ketika $L_C = 2L_A$.

KESIMPULAN

Persamaan 42 menunjukkan bahwa efisiensi mesin Carnot kuantum dengan

model sumur potensial takberhingga yang di dalamnya terdapat dua partikel takberinteraksi dan bermassa sama memiliki bentuk yang sama dengan model mesin Carnot kuantum yang berisi satu partikel. Kita dapat menyimpulkan bahwa jumlah partikel di dalam sumur potensial tidak mempengaruhi efisiensi. Hal ini dapat diperlukan untuk mesin Carnot kuantum yang memiliki sejumlah partikel takberinteraksi. Namun, kajian masih terbatas pada massa partikel yang sama. Jika kita meninjau partikel dengan massa tidak sama, pengaruh eksitasi partikel dan degenerasi akan memainkan peran penting dalam menentukan efisiensi mesin Carnot kuantum ini dan hal ini masih diluar artikel ini. Kedepannya penelitian dan diskusi lebih lanjut diperlukan terkait pengaruh eksitasi partikel dan degenerasi.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] H. P. Goswami and U. Harbola, "Thermodynamics of quantum heat engines," *Phys Rev A*, vol. 88, no. 1, Jul. 2013, doi: 10.1103/PhysRevA.88.013842.
- [2] H. T. Quan, "Quantum thermodynamic cycles and quantum heat engines. II.," *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys*, vol. 79, no. 4, Apr. 2009, doi: 10.1103/PhysRevE.79.041129.
- [3] H. T. Quan, Y. X. Liu, C. P. Sun, and F. Nori, "Quantum thermodynamic cycles and quantum heat engines," *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys*, vol. 76, no. 3, Sep. 2007, doi: 10.1103/PhysRevE.76.031105.
- [4] Y. Y. Xu, B. Chen, and J. Liu, "Achieving the classical Carnot

- efficiency in a strongly coupled quantum heat engine,” *Phys Rev E*, vol. 97, no. 2, Feb. 2018, doi: 10.1103/PhysRevE.97.022130.
- [5] O. A. D. Molitor and G. T. Landi, “Stroboscopic two-stroke quantum heat engines,” *Phys Rev A (Coll Park)*, vol. 102, no. 4, Oct. 2020, doi: 10.1103/PhysRevA.102.042217.
- [6] G. Thomas, D. Das, and S. Ghosh, “Quantum heat engine based on level degeneracy,” *Phys Rev E*, vol. 100, no. 1, Jul. 2019, doi: 10.1103/PhysRevE.100.012123.
- [7] T. E. P. Sutantyo, I. H. Belfaqih, and T. B. Prayitno, “Quantum-Carnot engine for particle confined to cubic potential,” in *AIP Conference Proceedings*, American Institute of Physics Inc., Sep. 2015. doi: 10.1063/1.4930655.
- [8] K. Beauchard and M. Mirrahimi, “Approximate stabilization of a quantum particle in a 1D infinite potential well,” in *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, 2008. doi: 10.3182/20080706-5-KR-1001.2285.
- [9] M. Koehn, “Solutions of the Klein-Gordon equation in an infinite square-well potential with a moving wall,” *EPL*, vol. 100, no. 6, Dec. 2012, doi: 10.1209/0295-5075/100/60008.
- [10] N. Papadatos and C. Anastopoulos, “Relativistic quantum thermodynamics of moving systems,” *Physical Review D*, vol. 102, no. 8, Oct. 2020, doi: 10.1103/PhysRevD.102.085005.
- [11] K. Fahmi, A. T. Oktaviana, and E. K. Palupi, “Infinite spherical well as model of quantum carnot engine,” *International Journal of Applied Mathematics, Sciences, and Technology for National Defense*, vol. 1, no. 1, pp. 21–28, Jan. 2023, doi: 10.58524/app.sci.def.v1i1.175.
- [12] J. J. Fernandez and S. Omar, “Maximum power of a two-dimensional quantum mechanical engine with spherical symmetry,” Sep. 2019, [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/1909.13590>
- [13] M. L. Glasser, J. Mateo, J. Negro, and L. M. Nieto, “Quantum infinite square well with an oscillating wall,” *Chaos Solitons Fractals*, vol. 41, no. 4, pp. 2067–2074, Aug. 2009, doi: 10.1016/j.chaos.2008.07.055.
- [14] Y. Rezek and R. Kosloff, “Irreversible performance of a quantum harmonic heat engine,” *New J Phys*, vol. 8, May 2006, doi: 10.1088/1367-2630/8/5/083.
- [15] E. Muñoz and F. J. Peña, “Quantum heat engine in the relativistic limit: The case of a Dirac particle,” *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys*, vol. 86, no. 6, Dec. 2012, doi: 10.1103/PhysRevE.86.061108.
- [16] C. Macchiavello, C. Macchiavello, C. Macchiavello, A. Riccardi, M. F. Sacchi, and M. F. Sacchi, “Quantum thermodynamics of two bosonic

- systems,” *Phys Rev A (Coll Park)*, vol. 101, no. 6, Jun. 2020, doi: 10.1103/PhysRevA.101.062326.
- [17] T. E. P. Sutantyo, “Three-State Quantum Heat Engine Based on Carnot Cycle,” *Jurnal Fisika Unand*, vol. 9, no. 1, pp. 142–149, Feb. 2020, doi: 10.25077/jfu.9.1.142-149.2020.
- [18] B. Çakmak and Ö. E. Müstecaplloğlu, “Spin quantum heat engines with shortcuts to adiabaticity,” *Phys Rev E*, vol. 99, no. 3, Mar. 2019, doi: 10.1103/PhysRevE.99.032108.
- [19] D. J. Diestler and V. McKoy, “Quantum mechanics of one-dimensional two-particle models. Electrons interacting in an infinite square well,” *J Chem Phys*, vol. 47, no. 2, pp. 454–467, 1967, doi: 10.1063/1.1711916.
- [20] J. Fisika and D. Aplikasinya, “Mesin Panas Kuantum Partikel Relativistik pada Sumur Potensial 2 Dimensi.”
- [21] K. S. Stowe, *An introduction to thermodynamics and statistical mechanics*. Cambridge University Press, 2007.
- [22] C. M. Bender, D. C. Brody, and B. K. Meister, “Quantum mechanical Carnot engine,” 2000. [Online]. Available: <http://iopscience.iop.org/0305-4470/33/24/302>
- [23] “David J. Griffiths - Introduction to Quantum Mechanics-Pearson Prentice Hall (2004)”.