



# DISTRIBUSI PROBABILITAS

# Konsep Variabel Acak

- **Variabel acak** adalah suatu fungsi yang menghubungkan sebuah bilangan real dengan setiap unsur dalam ruang sampel.
- Bila suatu ruang sampel berisi sejumlah kemungkinan terhingga atau urutan yang tidak terbatas dengan unsur sebanyak jumlah bilangan bulat, ruang sampel model ini disebut sebagai ruang **sampel diskrit**
- Bila suatu ruang sampel berisi sejumlah kemungkinan tak terhingga yang sama dengan jumlah titik-titik dalam sebuah segmen garis, ruang sampel model ini disebut sebagai ruang **sampel kontinu**.
- Variabel acak diskrit bila himpunan keluarannya dapat dihitung.
- Variabel acak dapat mengambil nilai-nilai pada skala kontinu disebut sebagai variabel acak kontinu.



## Distribusi Probabilitas Diskrit

- Bernoulli/Binomial
- Poisson
- Hipergeometrik

## Distribusi Probabilitas Kontinyu

- Normal (Z, t, Chi-Square dll)

# Percobaan Bernoulli :

Sifat-sifat sebagai berikut :

- Percobaan itu terdiri dari  $n$  pengulangan
- Tiap pengulangan memberikan hasil yang dapat diidentifikasi sukses atau gagal
- Probabilitas sukses dinyatakan dengan  $p$ , tetap konstan (tidak berubah) dari satu pengulangan ke pengulangan lainnya, sedangkan probabilitas gagal adalah  $q = 1 - p$
- Tiap pengulangan dan pengulangan lainnya saling bebas.

# Distribusi Binomial

- Banyaknya  $X$  sukses dalam  $n$  pengulangan suatu percobaan bernoulli disebut sebagai **variabel random Binomial**, sedangkan distribusi probabilitasnya disebut **distribusi Binomial** dan nilainya dinyatakan sebagai :

**$b(x,n,p)$**  dimana  $x = 1, 2, \dots, n$

Definisi Distribusi Peluang Binomial

$$b(x;n,p) = C_x^n p^x q^{n-x} \quad \text{untuk } x = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

$n$ : banyaknya ulangan

$x$ : banyak keberhasilan dalam peubah acak  $X$

$p$ : peluang berhasil pada setiap ulangan

$q$ : peluang gagal =  $1 - p$  pada setiap ulangan

## CONTOH :

Tentukan peluang mendapatkan "MATA 1" muncul 3 kali pada pelemparan 5 kali sebuah dadu setimbang!

Kejadian sukses/berhasil = mendapat "MATA 1"

$$x = 3$$

$n = 5 \rightarrow$  pelemparan diulang 5 kali

$$p = \frac{1}{6} \qquad q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$b(x; n, p) = C_x^n p^x q^{n-x}$$

$$b(3; 5, \frac{1}{6}) = C_3^5 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5!}{3!2!} \frac{5^2}{6^5} = 10 \times 0.003215... = 0.03215..$$

## TABEL :

Cara membaca Tabel tersebut :

Misal :

n	x	p = 0.10	p = 0.15	p = 0.20 dst
5	0	0.5905	0.4437	0.3277
	1	0.3281	0.3915	0.4096
	2	0.0729	0.1382	0.2048
	3	0.0081	0.0244	0.0512
	4	0.0005	0.0022	0.0064
	5	0.0000	0.0001	0.0003

Perhatikan Total setiap Kolom  $p = 1.0000$  (atau karena pembulatan, nilainya tidak persis = 1.0000 hanya mendekati 1.0000)

$x = 0$	$n = 5$	$p = 0.10$	$b(0; 5, 0.10) = 0.5905$
$x = 1$	$n = 5$	$p = 0.10$	$b(1; 5, 0.10) = 0.3281$
$x = 2$	$n = 5$	$p = 0.10$	$b(2; 5, 0.10) = 0.0729$

Jika  $0 \leq x \leq 2$ ,  $n = 5$  dan  $p = 0.10$  maka  $b(x; n, p) = b(0; 5, 0.10) + b(1; 5, 0.10) + b(2; 5, 0.10)$   
 $= 0.5905 + 0.3281 + 0.0729 = 0.9915$

Suatu perusahaan “pengiriman paket ” terikat perjanjian bahwa keterlambatan paket akan menyebabkan perusahaan harus membayar biaya kompensasi.

Jika Peluang setiap kiriman akan terlambat adalah 0.20 Bila terdapat 5 paket, hitunglah probabilitas :

- Tidak ada paket yang terlambat, sehingga perusahaan tidak membayar biaya kompensasi? ( $x = 0$ )
- Lebih dari 2 paket terlambat? ( $x > 2$ )

Jawab

a.  $x = 0 \rightarrow b(0; 5, 0.20) = 0.3277$  (lihat di tabel atau dihitung dgn rumus)

b.  $x > 2 \rightarrow$  Lihat tabel dan lakukan penjumlahan sebagai berikut :

$$b(3; 5, 0.20) + b(4; 5, 0.20) + b(5; 5, 0.20) = \\ 0.0512 + 0.0064 + 0.0003 = 0.0579$$

atau .....

$$\begin{aligned} \rightarrow 1 - b(x \leq 2) &= 1 - [b(0; 5, 0.20) + b(1; 5, 0.20) + b(2; 5, 0.20)] \\ &= 1 - [0.3277 + 0.4096 + 0.2048] \\ &= 1 - 0.9421 = 0.0579 \end{aligned}$$

(hasilnya sama dengan perhitungan sebelumnya, bukan?)



# Rata-rata dan Variansi Distribusi Binomial :

- Rata-rata =  $\mu = np$
- Variansi =  $\sigma^2 = npq$


## CONTOH :

Untuk  $b(5; 5 \ 0.20)$ , di mana  $x = 5$ ,  $n = 5$  dan  $p = 0.20$  sehingga  $q = 0.80$  maka

$$\mu = 5 \times 0.20 = 1.00$$

$$\sigma^2 = 5 \times 0.20 \times 0.80 = 0.80$$

$$\sigma = \sqrt{0.80} = 0.8944....$$



# Distribusi Poisson

(Distribusi Probabilitas Diskrit)

# Percobaan Poisson :

- Jika suatu percobaan menghasilkan variabel random  $X$  yang menyatakan banyak-nya sukses dalam daerah tertentu atau selama interval waktu tertentu, percobaan itu disebut **percobaan Poisson**.

# Distribusi Poisson

- Jumlah  $X$  dari keluaran yang terjadi selama satu percobaan Poisson disebut **Variabel random Poisson**, dan distribusi probabilitasnya disebut **distribusi Poisson**.
- Bila  $x$  menyatakan banyaknya sukses yang terjadi,  $\lambda$  adalah rata-rata banyaknya sukses yang terjadi dalam interval waktu atau daerah tertentu, dan  $e = 2,718$ , maka **rumus distribusi Poisson** adalah :

$$p(x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

# Rata-rata dan Variansi Distribusi Poisson

- **Mean (rata-rata)** dan **variansi** dari distribusi Poisson adalah  $\lambda$ .

## Catatan :

- Distribusi Poisson sebagai suatu bentuk pembatasan distribusi Binomial pada saat **n besar** , sedangkan **p mendekati 0** , dan **np konstan**.
- Sehingga bila n besar dan p mendekati 0, distribusi Poisson dapat digunakan untuk memperkirakan probabilitas Binomial, dengan

$$\lambda = np$$

## TABEL :

- Tabel Peluang Poisson

Seperti halnya peluang binomial, soal-soal peluang Poisson dapat diselesaikan dengan Tabel Poisson (Statistika 2, hal 163-164)

Cara membaca dan menggunakan Tabel ini tidak jauh berbeda dengan Tabel Binomial

Misal:	x	$\mu = 5.50$	$\mu = 6.00$
	0	0.0041	0.0025
	1	0.0225	0.0149
	2	0.0618	0.0446
	3	0.1133	0.0892
	dst	dst	dst
	25	0.0000	0.0000

## CONTOH :

Rata-rata seorang sekretaris baru melakukan 6 kesalahan ketik per halaman. Berapa peluang bahwa pada halaman berikut ia membuat:

- tidak ada kesalahan? ( $x = 0$ )
- tidak lebih dari 3 kesalahan? ( $x \leq 3$ )

Jawab:

$$\mu = 6.00$$

a.  $x = 0 \rightarrow$  dengan rumus? hitung  $\text{poisson}(0; 6.00)$

atau

$\rightarrow$  dengan Tabel Distribusi Poisson

$$\text{di bawah } x:0 \text{ dengan } \mu = 6.00 \rightarrow (0; 6.00) = 0.0025$$

b.  $x \leq 3 \rightarrow$  dengan Tabel Distribusi Poisson hitung

$$\begin{aligned} &\text{poisson}(0; 6.00) + \text{poisson}(1; 6.00) + \text{poisson}(2; 6.00) + \text{poisson}(3; 6.00) = \\ &0.0025 + 0.0149 + 0.0446 + 0.0892 = 0.1512 \end{aligned}$$



# Distribusi Hipergeometrik

(Distribusi Probabilitas Diskrit)



# Perbedaan diantara distribusi binomial dan distribusi hipergeometrik

- adalah terletak pada cara penarikan sampel.
- Dalam **distribusi binomial** diperlukan sifat pengulangan yang saling bebas, dan pengulangan tersebut harus dikerjakan dengan pengulangan (*with replacement*).
- Sedangkan untuk **distribusi hipergeometrik** tidak diperlukan sifat pengulangan yang saling bebas dan dikerjakan tanpa pengulangan (*without replacement*).

# Penerapan untuk distribusi hipergeometrik

- Ditemukan dalam berbagai bidang, dan paling sering digunakan dalam penarikan sampel penerimaan barang, pengujian elektronik, jaminan mutu, dsb.
- Dalam banyak bidang ini, pengujian dilakukan terhadap barang yang diuji yang pada akhirnya barang uji tersebut menjadi rusak, sehingga tidak dapat dikembalikan. Jadi, pengambilan sampel harus dikerjakan tanpa pengembalian

### Definisi Distribusi Hipergeometrik:

Bila dalam populasi  $N$  obyek,  $k$  benda termasuk kelas "BERHASIL" dan  $N-k$  (sisanya) termasuk kelas "GAGAL", maka Distribusi Hipergeometrik peubah Acak  $X$  yg menyatakan banyaknya keberhasilan dalam contoh acak berukuran  $n$  adalah :

$$h(x; N, n, k) = \frac{C_x^k C_{n-x}^{N-k}}{C_n^N} \quad \text{untuk } x = 0, 1, 2, 3, \dots, k$$

### Contoh 8 :

Jika dari seperangkat kartu bridge diambil 5 kartu secara acak tanpa pemulihan, berapa peluang diperoleh 3 kartu hati?

$$N = 52 \quad n = 5 \quad k = 13 \quad x = 3$$

$$h(3; 52, 5, 13) = \frac{C_3^{13} C_2^{39}}{C_5^{52}} \quad (\text{selesaikan sendiri !})$$

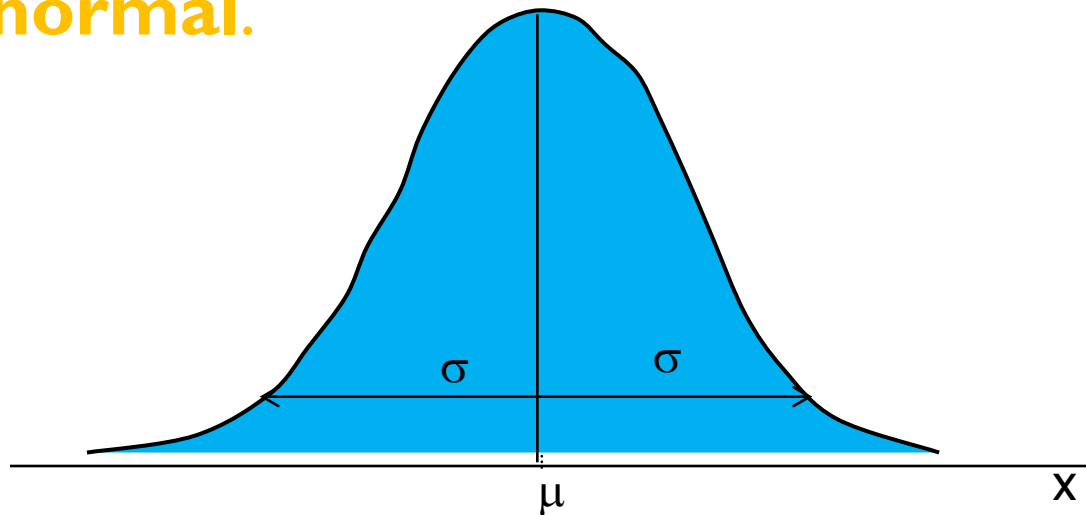


# Distribusi Normal

(Distribusi Probabilitas Kontinu)

# Kurva Normal dan Variabel Random Normal

- Distribusi probabilitas kontinu yang terpenting adalah distribusi normal dan grafiknya disebut **kurva normal**.
- Variabel random  $X$  yang distribusinya berbentuk seperti lonceng disebut **variabel random normal**.



# Sifat kurva normal, yaitu :

- Kurva mencapai maksimum pada  $x = \mu$
- Kurva setangkup terhadap garis tegak yang melalui  $x = \mu$
- Kurva mempunyai titik belok pada  $x = \mu \pm \sigma$
- Sumbu x merupakan asimtot dari kurva normal
- Seluruh luas di bawah kurva, di atas sumbu x adalah 1

# Distribusi Normal

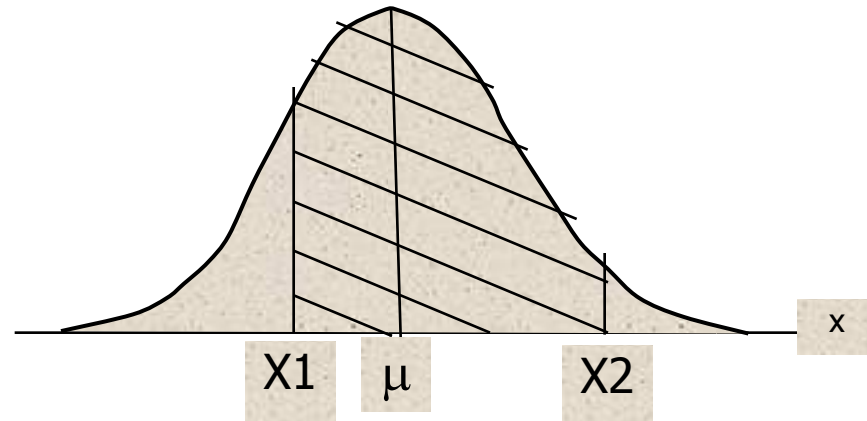
- Variabel random  $X$  **berdistribusi normal**, dengan mean dan variansi mempunyai fungsi densitas

$$n(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2 / (2\sigma^2)}$$

$$-\infty < X < \infty$$

luas daerah di bawah kurva dinyatakan dengan :

$$= P(x_1 < X < x_2)$$



$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} n(x; \mu, \sigma) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-(x-\mu)^2 / (2\sigma^2)} dx$$

$$P(-\infty < X < \infty) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2 / (2\sigma^2)} dx = 1$$



# Distribusi Normal Standar (I)

- apabila variabel  $X$  ditransformasikan dengan substitusi  $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$
- maka :

$$P(z_1 < Z < z_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} \sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{z_1}^{z_2} n(z;0,1) dz$$

ternyata substitusi  $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

menyebabkan distribusi normal  $n(z; \mu, \sigma)$  menjadi  $n(z; 0, 1)$  , yang disebut **distribusi normal standar**.

## Distribusi Normal Standar (2):

- Karena transformasi ini, maka selanjutnya nilai  $P(x_1 < X < x_2)$

ini dapat dihitung dengan menggunakan tabel distribusi normal standar.

Rata-rata upah seorang buruh = \$ 8.00 perjam dengan simpangan baku = \$ 0.60, jika terdapat 1 000 orang buruh, hitunglah :

- banyak buruh yang menerima upah/jam kurang dari \$ 7.80
- banyak buruh yang menerima upah/jam lebih dari \$ 8.30
- banyak buruh yang menerima upah/jam antara \$ 7.80 sampai 8.30

$$\mu = 8.00$$

$$\sigma = 0.60$$

a.  $x < 7.80$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{7.80 - 8.00}{0.60} = -0.33$$

$$P(x < 7.80) = P(z < -0.33) = 0.5 - 0.1293 = 0.3707 \text{ (Gambarkan!)}$$

$$\begin{aligned} \text{banyak buruh yang menerima upah/jam kurang dari \$ 7.80} &= 0.3707 \times 1\,000 \\ &= 370.7 = 371 \text{ orang} \end{aligned}$$

b.  $x > 8.30$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{8.30 - 8.00}{0.60} = 0.50.$$

$$P(x > 8.30) = P(z > 0.50) = 0.5 - 0.1915 = 0.3085 \text{ (Gambarkan!)}$$

$$\begin{aligned} \text{Banyak buruh yang menerima upah/jam lebih dari \$ 8.30} &= 0.3085 \times 1\,000 \\ &= 308.5 = 309 \text{ orang} \end{aligned}$$

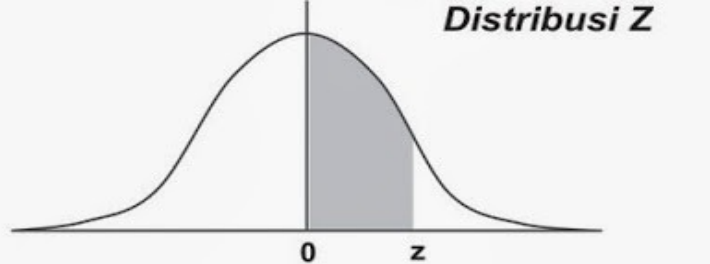
c.  $7.80 < x < 8.30$

$$z_1 = -0.33 \quad z_2 = 0.50$$

$$P(7.80 < x < 8.30) = P(-0.33 < z < 0.50) = 0.1915 + 0.1293 = 0.3208 \text{ (Gambarkan)}$$

$$\begin{aligned} \text{Banyak buruh yang menerima upah/jam dari \$ 7.80 sampai \$ 8.30} &= 0.3208 \times 1\,000 \\ &= 320.8 = 321 \text{ orang} \end{aligned}$$

**Kumulatif sebaran frekuensi normal**  
**(Area di bawah kurva normal baku dari 0 sampai z)**



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767



[illegible]