# DISTRIBUSI POISSON MAJEMUK DAN PENERAPANNYA PADA ANTRIAN KENDARAAN

**Tugas Akhir**

**Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat**
**Memperoleh Gelar Sarjana Sains**
**Program Studi Matematika**

**Oleh :**
**Yuliana Tri Astuti**
**NIM : 153114011**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS SANATA DHARMA**
**YOGYAKARTA**
**2020**

# COMPOUND POISSON DISTRIBUTION AND ITS APPLICATION IN VEHICLE QUEUES

**Thesis**

**Presented as a Partial Fulfillment of the Requirements**
**to Obtain the Degree of Sarjana Sains**
**in Mathematics**

**Written by :**
**Yuliana Tri Astuti**
**Student ID : 153114011**

**MATHEMATICS STUDY PROGRAM DEPARTMENT OF MATHEMATICS**
**FACULTY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**
**SANATA DHARMA UNIVERSITY**
**YOGYAKARTA**
**2020**

**TUGAS AKHIR**

**DISTRIBUSI POISSON MAJEMUK DAN PENERAPANNYA PADA ANTRIAN KENDARAAN**

Oleh :
Yuliana Tri Astuti
NIM : 153114011

Telah disetujui oleh:

Dosen Pembimbing Tugas Akhir

Ir. Ig. Aris Dwiatmoko, M.Sc. Tanggal : 16 Desember 2019

**TUGAS AKHIR**

**DISTRIBUSI POISSON MAJEMUK DAN PENERAPANNYA PADA ANTRIAN KENDARAAN**

Dipersiapkan dan Ditulis Oleh :

Yuliana Tri Astuti

NIM : 153114011

Telah dipertahankan di hadapan Panitia Penguji

Pada tanggal 16 Januari 2020

dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

| | Nama Lengkap | Tanda Tangan |
|---|---|---|
| Ketua | : YG. Hartono, S.Si., M.Sc., Ph.D. | ............................ |
| Sekretaris | : Sudi Mungkasi, S.Si., M.Math.Sc., Ph.D. | ............................ |
| Anggota | : Ir. Ig. Aris Dwiatmoko, M.Sc. | ............................ |

Yogyakarta, 21 Januari 2020

Fakultas Sains dan Teknologi

Universitas Sanata Dharma

Dekan,

(Sudi Mungkasi, S.Si., M.Math.Sc., Ph.D.)

## HALAMAN PERSEMBAHAN

Karya tulis ini dipersembahkan untuk:

Tuhan Yesus Kristus yang selalu memimpin di dalam setiap proses kehidupanku
Kedua orangtua ku yang selalu mendoakan dalam setiap langkahku
Kedua kakak ku yang selalu memberi *support* dalam kondisi apapun
Semua teman dan orang – orang yang selalu mendoakan

“Aku adalah Alfa dan Omega, Yang Pertama dan Yang Terkemudian, Yang Awal dan Yang Akhir.”

(Wahyu 22:13)

## PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa tugas akhir yang Saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 20 Januari 2020

Penulis

Yuliana Tri Astuti

# ABSTRAK

Pertumbuhan ekonomi dan pembangunan mengakibatkan tingginya permintaan kendaraan bermotor. Hal ini memicu meningkatnya jumlah kendaraan bermotor yang akhirnya berdampak pada kemacetan, salah satunya pada antrian kendaraan di depan lampu lalu lintas. Antrian adalah suatu garis tunggu dari nasabah (satuan) yang memerlukan layanan dari satu atau lebih pelayan (fasilitas layanan). Antrian kendaraan memenuhi definisi antrian dengan pelanggan adalah kendaraan yang memasuki garis tunggu di depan lampu lalu lintas dan sebagai pelayan adalah lampu lalu lintas.

Dalam tugas akhir ini, akan dibahas pola antrian berdistribusi Poisson majemuk dengan kedatangan kendaraan berdistribusi sembarang yang saling identik, dalam kasus ini distribusi Normal dan banyaknya siklus berdistribusi Poisson. Data pada tugas akhir ini diambil dengan pengamatan langsung antrian kendaraan di lampu lalu lintas perempatan Kentungan, Jl. Kaliurang, D.I.Y. Antrian kendaraan lampu lalu lintas tersebut sesuai untuk dimodelkan dengan distribusi Poisson majemuk.


Kata kunci : Antrian, distribusi Poisson majemuk, distribusi Normal, distribusi Poisson.

## ABSTRACT

Economic growth and development resulted in high demand for vehicles. This triggres an increase in the number of vehicles which has an impact on traffic jam, one of them is the vehicles queue in front of the traffic lights. Queue is a waiting line from a customer (unit) that requires service from one or more servants (service facilities). Vehicle queue fulfill the definition of queue with customer are vehicles entering the waiting line in front of the tarffic lights and the servant is a traffic light.

In this thesis will be discussed the queuing of Compound Poisson with the arrival of the vehicles are independent and identically distributed, in this case is Normal distribution and the number of cycles has Poisson distribution. Data ini this thesis is taken by observing the vehicle queue directly at Kentungan, Jl. Kaliurangan, D.I.Y traffic lights. Vehicle queue on the traffic lights is suitable to be modeled with Compound Poisson distribution.

Keywords : Queue, Compound Poisson distribution, Normal distribution, Poisson distribution.

## LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Yang bertandatangan di bawah ini, Saya mahasiswa Universitas Sanata Dharma :

Nama : Yuliana Tri Astuti

NIM : 153114011

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, Saya memberikan kepada perpustakaan Universitas Sanata Dharma karya ilmiah Saya yang berjudul:

**DISTRIBUSI POISSON MAJEMUK DAN PENERAPANNYA PADA ANTRIAN KENDARAAN**

Beserta perangkat yang diperlukan (bila ada). Dengan demikian Saya memberikan kepada perpustakaan Universitas Sanata Dharma hak untuk menyimpan, mengalihkan dalam bentuk media lain, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data, mendistribusikannya secara terbatas, dan mempublikasikannya di internet atau media lain untuk kepentingan akademis tanpa meminta ijin dari Saya maupun memberikan royalti kepada Saya selama tetap mencantumkan nama Saya sebagai penulis.

Demikian pernyataan ini Saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Yogyakarta

Pada tanggal 20 Januari 2020

Yang menyatakan

(Yuliana Tri Astuti)

## KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kepada Tuhan Yesus Kristus yang selalu mencurahkan berkat dan roh kudus-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan tugas akhir ini dengan baik. Tugas akhir ini dibuat untuk memperoleh gelar sarjana Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Dalam penulisan tugas akhir ini, penulis menyadari banyak pihak yang membantu di dalam menghadapi tantangan, kesulitan, dan rintangan. Oleh karena itu, di dalam kesempatan ini, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Ir. Ig. Aris Dwiatmoko, M.Sc., selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran serta ilmu yang telah diberikan sehingga terselesainya tugas akhir ini.
2. Bapak Sudi Mungkasi, S.Si., M.Math.Sc., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi dan Dosen Pembimbing Akademik yang selalu mengarahkan dan memberi nasihat selama perkuliahan.
3. Bapak YG. Hartono, S.Si., M.Sc., Ph.D., selaku Kepala Program Studi Matematika.
4. Bapak dan Ibu dosen yang telah memberikan ilmu pengetahuan selama penulis menempuh pendidikan di Universitas Sanata Dharma.
5. Kedua orangtua penulis yang selalu mendoakan penulis di dalam setiap langkah.
6. Kedua kakak penulis yang selalu memberikan *support* di setiap kondisi penulis.
7. Dona dan Sandra yang membantu penulis selama melewati kehidupan perkuliahan di Yogyakarta.
8. Teman-teman *I-corp* yang selalu memberikan *support* di manapun.
9. Teman-teman program studi matematika 2015 atas bantuan dan dinamikanya selama perkuliahan dan penyusunan tugas akhir ini.
10. Semua pihak yang telah membantu di dalam penyelesaian tugas akhir ini.

Penulis menyadari bahwa di dalam penyusunan tugas akhir ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, saran dan kritik yang membangunan diharapkan untuk peneltian selanjutnya. Semoga tugas akhir ini bermanfaat bagi semua pihak, khususnya bagi penulis dan para pembaca.

Yogyakarta, 20 Januari 2020

Penulis

(Yuliana Tri Astuti)

# DAFTAR ISI

## DAFTAR TABEL

# DAFTAR GAMBAR

# BAB I
# PENDAHULUAN

## A. Latar Belakang

Pada zaman modern seperti saat ini segala sesuatu dituntut harus serba cepat. Pertumbuhan ekonomi dan pembangunan yang pesat mengakibatkan manusia lebih memilih segala sesuatu yang lebih praktis dan tidak membutuhkan waktu lama. Hal ini memicu masyarakat dunia khususnya Indonesia lebih suka menggunakan kendaraan pribadi daripada kendaraan umum, yang pada akhirnya mengakibatkan tingginya permintaan dan penjualan kendaraan bermotor, baik kendaran motor dua ataupun lebih. Kegiatan ini terus berlangsung dari tahun ke tahun hingga kemacetan tidak dapat dihindari lagi, khususnya di kota-kota besar seperti Yogyakarta.

Salah satu faktor penyebab kemacetan adalah akibat terjadinya penumpukan kendaraan pada lampu lalu lintas. Kemacetan biasanya terjadi pada waktu-waktu tertentu atau sering disebut dengan waktu sibuk. Waktu sibuk biasanya terjadi pada saat jam berangkat ataupun pulang kerja. Penumpukan kendaraan mengakibatkan terjadinya antrian di depan lampu lalu lintas.

Menurut Siagian (1987), antrian adalah suatu garis tunggu dari nasabah (satuan) yang memerlukan layanan dari satu atau lebih pelayan (fasilitas layanan). Antrian kendaraan memenuhi definisi antrian dengan pelanggan adalah kendaraan yang memasuki garis tunggu di depan lampu lalu lintas dan sebagai pelayan adalah lampu lalu lintas. Antrian terjadi karena terbatasnya jumlah pelayan (petugas) serta banyaknya pelanggan yang datang untuk mendapatkan pelayanan. Antrian yang terlalu lama dan panjang terkadang membuat pelanggan meninggalkan fasilitas pelayanan tersebut yang akhirnya menimbulkan kerugian bagi pemilik fasilitas pelayanan. Salah satu solusi yang bisa digunakan untuk mengurangi kerugian tersebut yaitu dengan menambah jumlah petugas. Tetapi di dalam kenyataan, terkadang penambahan petugas dapat menimbulkan pengurangan keuntungan atau penambahan biaya.

Dalam tugas akhir ini, akan dibahas mengenai pola antrian pada salah satu lampu lalu lintas di Yogyakarta. Pada tugas akhir yang ditulis oleh Nilam Mufidah (2008), menyatakan bahwa banyaknya kendaraan yang melewati lampu lalu lintas mengikuti suatu distribusi tertentu, yaitu distribusi Poisson. Sedangkan, pada tugas akhir ini akan dibahas mengenai pola antrian yang berdistribusi Compound Poisson (Poisson majemuk).

**B. Rumusan Masalah**

Perumusan masalah di dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana landasan matematika Poisson majemuk?
2. Bagaimana teori antrian dapat diterapkan pada antrian kendaraan di depan lampu lalu lintas?
3. Bagaimana distribusi Poisson majemuk dapat menjelaskan banyaknya kendaraan yang datang ke depan lampu lalu lintas?

**C. Batasan Masalah**

Batasan masalah yang digunakan di dalam tugas akhir ini adalah:

1. Penelitian hanya dilakukan pada antrian kendaraan di depan lampu lalu lintas Kentungan, Yogyakarta.
2. Model yang dibahas adalah model banyaknya kedatangan kendaraan berdistribusi Poisson majemuk.
3. Kendaraan yang diamati hanya dari arah selatan.
4. Diasumsikan tidak ada percepatan atau perlambatan laju kendaraan, dan tidak ada kendaraan yang melakukan putar balik.
5. Kendaraan yang diamati dari suatu jarak tertentu, yaitu dari depan Toko Cemara (Jl. Kaliurang N0.26, Manggung, Caturtunggal, Depok, Sleman, D.I.Y).

**D. Tujuan Penulisan**

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah:

1. Mengetahui bagaimana landasan matematika Poisson majemuk.
2. Mengetahui bagaimana penerapan teori antrian dalam lampu lalu lintas.
3. Menjelaskan bagaimana distribusi Poisson majemuk dapat digunakan pada antrian banyaknya kedatangan kendaraan di depan lampu lalu lintas.

**E. Manfaat Penulisan**

Manfaat dari tugas akhir ini yaitu kita dapat mengetahui bagaimana teori antrian dapat diterapkan di kehidupan sehari-hari, terutama di dalam fasilitas pelayanan publik agar tercipta pelayanan yang semakin baik.

**F. Metode Penulisan**

Metode penulisan yang digunakan adalah studi pustaka, yaitu dengan membaca buku-buku dan jurnal-jurnal mengenai teori antrian dan penerapannya dalam berbagai fasilitas pelayanan.

**G. Sistematika Penulisan**

BAB I PENDAHULUAN

A. Latar Belakang
B. Rumusan Masalah
C. Batasan Masalah
D. Tujuan Penulisan
E. Manfaat Penulisan
F. Metode Penulisan
G. Sistematika Penulisan

BAB II TEORI PELUANG

A. Peluang
B. Nilai Harapan
C. Variansi
D. Fungsi Pembangkit Momen
E. Distribusi Seragam
F. Distribusi Binomial
G. Distribusi Poisson
H. Distribusi Gamma
I. Distribusi Eksponensial
J. Kolmogorov-Smirnov
K. Deret Taylor

BAB III PROSES POISSON

A. Definisi Proses Poisson
B. Antar Kedatangan dan Distribusi Waktu Tunggu
C. Distribusi Bersyarat Waktu Antar Kedatangan
D. Proses Poisson Tak Homogen
E. Variabel Random Poisson Majemuk dan Prosesnya

BAB IV DISTRIBUSI POISSON MAJEMUK PADA ANTRIAN KENDARAAN

A. Ilustrasi
B. Data
C. Kedatangan Kendaraan
D. Uji Distribusi Kendaraan

BAB V PENUTUP

A. Kesimpulan

B. Saran

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

# BAB II
# LANDASAN TEORI

## A. Peluang

Pada subbab ini akan dibahas mengenai teori-teori peluang.

### 2.1 Ruang Sampel

Ruang sampel adalah himpunan semua kemungkinan hasil dari suatu percobaan. Ruang sampel merupakan semesta pembicaran yang dapat dinotasikan dengan $S$. Banyaknya anggota ruang sampel dapat dinotasikan dengan $n(S)$.

**Contoh 2.1**

Pada percobaan melempar dadu sebanyak satu kali, ruang sampel $S$ dari percobaan tersebut adalah

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Sedangkan banyaknya anggota ruang sampel $n(s) = 6$. Bilangan $1,2,3,4,5,6$ merupakan titik-titik sampel.

### 2.2 Kejadian

Kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel. Kejadian dinotasikan dengan huruf-huruf kapital, misalnya $A$. Banyaknya anggota kejadian dinotasikan dengan $n(A)$. Menentukan anggota titik-titik sampel suatu kejadian dapat dilakukan dengan mendaftar semua titik sampel kemudian memilih titik-titik sampel yang sesuai.

**Contoh 2.2**

Dilakukan percobaan pelemparan dua buah dadu secara bersama-sama sebanyak satu kali, tentukan anggota dari kejadian “jumlah mata dadu lebih dari 7.”

Jawab:

Diketahui banyaknya anggota ruang sampel adalah sebagai berikut:

| Dadu 1\ Dadu 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *(1,1)* | *(1,2)* | *(1,3)* | *(1,4)* | *(1,5)* | *(1,6)* |
| *2* | *(2,1)* | *(2,2)* | *(2,3)* | *(2,4)* | *(2,5)* | *(2,6)* |
| *3* | *(3,1)* | *(3,2)* | *(3,3)* | *(3,4)* | *(3,5)* | *(3,6)* |
| *4* | *(4,1)* | *(4,2)* | *(4,3)* | *(4,4)* | *(4,5)* | *(4,6)* |
| *5* | *(5,1)* | *(5,2)* | *(5,3)* | *(5,4)* | *(5,5)* | *(5,6)* |
| *6* | *(6,1)* | *(6,2)* | *(6,3)* | *(6,4)* | *(6,5)* | *(6,6)* |

dengan warna kuning mewakili anggota-anggota kejadian ”muncul jumlah mata dadu lebih dari 7” yang dinotasikan dengan *A*. Maka,

*A={(2,6),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),(4,6),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,2),(6,3),(6,4), (6,5),(6,6)}.*

### 2.3 Operasi Dalam Kejadian

Misalkan *A* dan *B* adalah kejadian dalam ruang sampel *S*, maka

1. Gabungan dari dua kejadian dinotasikan dengan $A \cup B$ adalah
$$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \vee x \in B\}$$
2. Irisan dari dua kejadian dinotasikan dengan $A \cap B$ adalah
$$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \in B\}$$
3. Komplemen suatu kejadian dinotasikan dengan $A^c$ adalah
$$A^c = \{x \in S \mid x \notin A\}$$
4. Selisih dari kejadian *A* dan *B* dinotasikan dengan *A**B* adalah
$$A \setminus B = A \cap B^c$$
5. *A* dan *B* adalah kejadian-kejadian yang saling asing bila irisan *A* dan *B* kosong, atau dapat dinotasikan dengan $A \cap B = \emptyset$.

## 2.4 Peluang

Bila $S$ merupakan ruang sampel yang berkaitan dengan sebuah percobaan. Untuk setiap kejadian $A$ di dalam $S$, $P(A)$ merupakan peluang dari $A$ jika memenuhi aksioma berikut:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. Jika $A_1, A_2, A_3, \ldots$ kejadian-kejadian yang saling asing di dalam $S$, maka $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

## 2.5 Peluang Suatu Kejadian

Peluang suatu kejadian merupakan ukuran seberapa besar kemungkinan kejadian itu akan terjadi. Peluang kejadian $A$ pada ruang sampel $S$ jika kemungkinan munculnya setiap titik sampel seragam adalah

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

dengan $n(A)$ adalah banyaknya anggota $A$ dan $n(S)$ adalah banyaknya anggota ruang sampel $S$.

**Contoh 2.3**

Sebuah kantong terdiri dari 3 huruf, yaitu huruf $a$, $b$, $dan$ $c$. Dari huruf-huruf tersebut diambil 2 huruf secara bersama-sama tanpa memperhatikan urutan pengambilan. Hitung peluang terambilnya huruf $a$ dan huruf $b$ secara bersama-sama.

Jawab:

Jika diketahui $S = \{ab, ac, bc\}$, maka $n(S) = 3$.

Misalkan $A$ = peluang terambilnya huruf $a$ dan huruf $b$ secara bersama-sama maka $n(A) = 1$. Sehingga,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{3}$$

**2.6 Peluang Bersyarat**

Diberikan dua kejadian di dalam ruang sampel $S$, yaitu kejadian $A$ dan kejadian $B$ dengan $P(B) > 0$. Peluang terjadinya kejadian $A$ bila diketahui kejadian $B$ adalah

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

dan disebut peluang $A$ dengan syarat $B$.

**Contoh 2.4**

Dilakukan sebuah percobaan melempar sebuah dadu. Jika diketahui $A$ adalah kejadian muncul mata dadu bernilai ganjil dan $B$ adalah kejadian muncul mata dadu kurang dari sama dengan 5. Tentukan peluang $A$ dengan syarat $B$.

Jawab:

Jika diketahui $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$, maka $n(S) = 6$.

Jika dikethaui $A = \{1, 3, 5 \}$, maka $n(A) = 3$. Sehingga,

$P(A) = \frac{3}{6}$.

Jika diketahui $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, maka $n(B) = 5$. Sehingga,

$P(B) = \frac{5}{6}$.

Jika diketahui $A \cap B = \{1,3,5\}$, maka $n(A \cap B) = 3$. Sehingga,

$P(A \cap B) = \frac{3}{6}$

Maka, $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3/6}{5/6} = \frac{3}{5}$.

**2.7 Kejadian Saling Bebas**

Diberikan kejadian $A$ dan kejadian $B$ di dalam ruang sampel $S$. Kejadian $A$ dan kejadian $B$ saling bebas jika $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

**Contoh 2.5**

Dilakukan sebuah percobaan melempar sebuah dadu. Jika diketahui $A$ adalah kejadian muncul mata dadu bernilai genap dan $B$ adalah kejadian muncul mata dadu kurang dari 4. Tentukan apakah $A$ dan $B$ saling bebas

Jawab:

Jika diketahui $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$, maka $n(S) = 6$.

Jika diketahui $A = \{2, 4, 6\}$, maka $n(A) = 3$. Sehingga,

$$P(A) = \frac{3}{6}.$$

Jika diketahui $B = \{1, 2, 3\}$, maka $n(B) = 3$. Sehingga,

$$P(B) = \frac{3}{6}.$$

Jika diketahui $A \cap B = \{2\}$, maka $n(A \cap B) = 1$. Sehingga,

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

$A$ dan $B$ saling bebas jika $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$P(A)P(B) = \frac{3}{6}.\frac{3}{6} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{6} = P(A \cap B)$$

$A$ dan $B$ tidak saling bebas.

**2.8 Variabel Acak**

$X$ adalah variabel acak, yaitu fungsi yang memetakan setiap elemen dalam ruang sampel $S$ ke himpunan bilangan real. $X: S \rightarrow \mathbb{R}$. Variabel acak dinotasikan dengan huruf kapital dan nilainya dinotasikan dengan huruf kecil.

**Contoh 2.6**

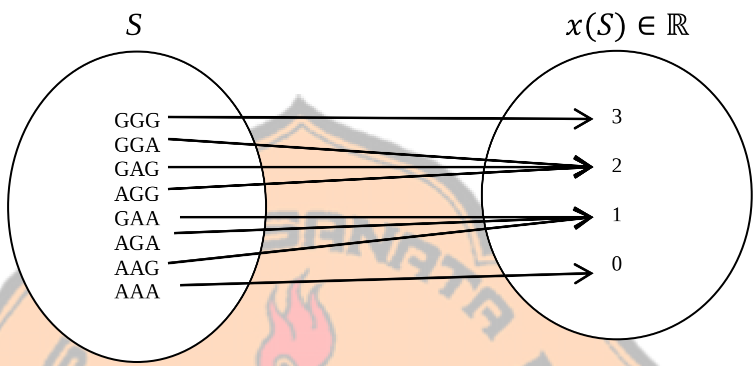
Dalam percobaan pelemparan sekeping uang sebanyak 3 kali. Misalkan $X$ adalah variabel acak banyaknya gambar muncul. Ruang sampel $S$ pada percobaan tersebut adalah

$$S = \{GGG, GGA, GAG, AGG, GAA, AGA, AAG, AAA\}$$

dengan *G* mewakili gambar yang muncul dan *A* mewakili angka yang muncul.

*X* = banyaknya gambar yang muncul.

Nilai numerik *0, 1, 2, 3* dapat diberikan pada setiap titik sampel di mana *0, 1, 2, 3* merupakan besaran acak yang nilainya ditentukan dari percobaan.




Gambar 2.1 Pemetaan X

## 2.9 Variabel Acak Diskrit

*X* adalah variabel acak diskrit bila semua kemungkinan nilai *X* adalah terbilang, yaitu semua kemungkinan nilai *X* dapat berkorespondensi satu-satu dengan bilangan asli. Jika tidak, maka *X* adalah variabel acak kontinu.

## 2.10 Distribusi Peluang Diskrit

Fungsi *f(x)* adalah suatu fungsi peluang atau distribusi peluang suatu variabel acak diskrit *X* bila untuk setiap hasil *x* yang mungkin,

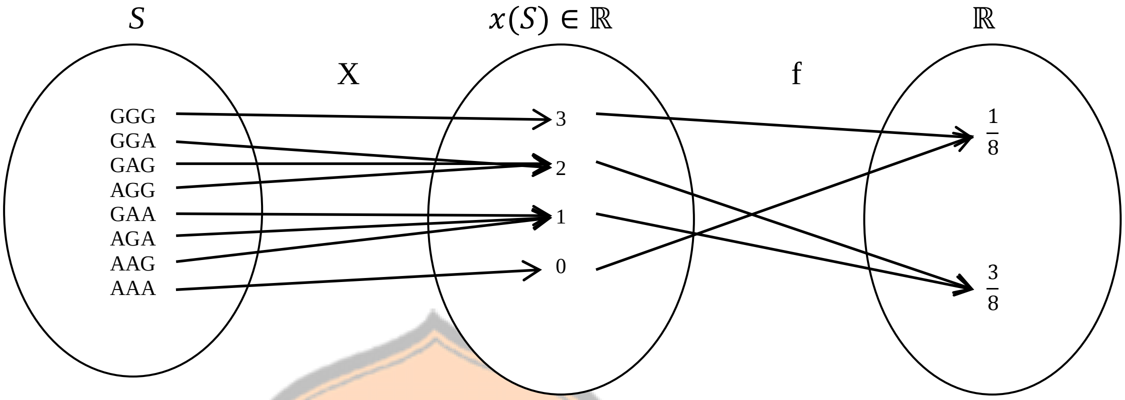
1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_x f(x) = 1$

**Contoh 2.7**

Pada Contoh 2.6, tentukan fungsi peluang banyaknya gambar yang muncul!

Jawab:

Pada Contoh 2.6, nilai $x$ adalah bilangan-bilangan yang menyatakan banyaknya gambar yang muncul




| *X* | *0* | *1* | *2* | *3* |
|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

Tabel 2.1 Fungsi Peluang Banyaknya Gambar yang Muncul

**2.11 Distribusi Peluang Kontinu**

Fungsi *f(x)* adalah suatu fungsi peluang (fungsi densitas) atau distribusi peluang suatu variabel acak kontinu *X* jika,

1. $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

**Contoh 2.8**

Misalkan fungsi densitas dari variabel acak kontinu *X* adalah

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{8} ; & 0 < x < 4 \\ 0 ; & \text{lainnya} \end{cases}$$

Tunjukkan bahwa *f(x)* memenuhi syarat fungsi densitas!

Jawab:

Berdasarkan 2.11, fungsi densitas memenuhi 2 syarat, yaitu:

1. $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Syarat pertama dapat dilihat dengan jelas, karena

$\forall\ 0 < x < 4,\ f(x) \geq 0.$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^4 \frac{x}{8} = \frac{x^2}{16}\Big|_0^4 = 1 - 0 = 1.$

Terbukti bahwa *f(x)* memenuhi syarat fungsi densitas.

### 2.12 Fungsi Distribusi Kumulatif

Fungsi distribusi kumulatif dari sebuah variabel acak diskrit dan kontinu didefinisikan sebagai berikut:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{\forall X \leq x} f(x) & , \text{ jika } X \text{ diskrit} \\ \int_{-\infty}^{x} f(t)dt & , \text{ jika } X \text{ kontinu} \end{cases}$$

**Contoh 2.9**

Pada Tabel 2.1, tentukan fungsi distribusi kumulatif $F(x)$ untuk $X$ diskrit.

Jawab:

Untuk $x < 0$, $F(x) = 0$.

Untuk $0 \leq x < 1$, $F(x) = \frac{1}{8}$.

Untuk $1 \leq x < 2$, $F(x) = \frac{1}{2}$.

Untuk $2 \leq x < 3$, $F(x) = \frac{7}{8}$.

Untuk $x \geq 3$, $F(x) = 1$.

Sehingga, fungsi distribusi kumulatif $F(x)$ pada tabel 2.1 adalah

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{8} & , 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & , 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & , 2 \leq x \leq 3 \\ 1 & , x \geq 3 \end{cases}$$

**Contoh 2.10**

Diketahui fungsi densitas

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3} & , -1 < x < 2 \\ 0 & , \text{selainnya} \end{cases}$$

Tentukan fungsi distribusi kumulatif $F(x)$.

Jawab:

Untuk $x < -1, F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \, dt = 0$.

Untuk $-1 \le x < 2, F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} 0 \, dt + \int_{-1}^{x} \frac{t^2}{3} dt = \frac{x^3+1}{9}$.

Untuk $x \ge 2, F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} 0 \, dt + \int_{-1}^{2} \frac{t^2}{3} dt + \int_{2}^{\infty} 0 \, dt = 1$.

Sehingga, fungsi kumulatif $F(x)$ ditunjukkan oleh:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < -1 \\ \dfrac{x^3+1}{9} & , -1 \le x < 2 \\ 1 & , x \ge 2 \end{cases}$$

**Akibat 2.1**

Jika $F(x)$ adalah fungsi distributif kumulatif variabel acak $X$ kontinu, maka fungsi probabilitas $f(x)$,

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x).$$

## B. Nilai Harapan

Bila $X$ adalah variabel acak diskrit dengan fungsi probabilitas *f(x)* maka nilai harapan dari $X$ didefinisikan sebagai:

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{\forall x} x f(x)$$

Sedangkan, bila $X$ adalah variabel acak kontinu dengan fungsi probabilitas *f(x)* maka nilai harapan dari $X$ dinyatakan dengan:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \, dx$$

**2.13 Sifat-sifat dalam Nilai Harapan**

Diberikan suatu konstanta *a*, *b* tak nol dan *g(X)*, *h(X)* adalah fungsi variabel acak maka untuk variabel acak *X* (diskrit atau kontinu), diperoleh:

1. $E[a] = a$
2. $E[aX] = aE[X]$
3. $E[X - b] = E[X] - b$
4. $E[aX - b] = aE[X] - b$
5. $E[g(X) - h(X)] = E[g(X)] - E[h(X)]$

Bukti:

1. Misalkan *X* variabel acak diskrit, maka

   $E[a] = \Sigma af(x) = a\,\Sigma f(x) = a(1) = a$

   Misalkan *X* variabel acak kontinu, maka

   $E[a] = \int af(x)dx = a\int f(x)dx = a$

2. Misalkan *X* variabel acak diskrit, maka

   $$E[aX] = \sum_x (ax)f(x)$$
   $$= a\sum_x xf(x)$$
   $$= aE[X]$$

   Misalkan *X* variabel acak kontinu, maka

   $$E[aX] = \int_{-\infty}^{\infty}(ax)f(x)dx$$
   $$= a\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$$
   $$= aE[X]$$

3. Misalkan *X* variabel acak diskrit, maka

   $$E[X - b] = \Sigma(x - b)f(x)$$
   $$= \Sigma(xf(x) - bf(x))$$

$$= \Sigma xf(x) - \Sigma bf(x)$$

$$= E[X] - b\,\Sigma f(x)$$

$$= E[X] - b$$

Misalkan $X$ variabel kontinu, maka

$$E[X-b] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-b)f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [xf(x) - bf(x)]dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} bf(x)dx$$

$$= E[X] - b$$

4. Misalkan $X$ variabel acak diskrit, maka

$$E[aX - b] = \Sigma(ax - b)f(x)$$

$$= \Sigma[axf(x) - bf(x)]$$

$$= \Sigma axf(x) - \Sigma bf(x)$$

$$= a\,\Sigma xf(x) - b\,\Sigma f(x)$$

$$= aE[X] - b$$

Misalkan $X$ variabel acak kontinu, maka

$$E[aX - b] = \int_{-\infty}^{\infty} (ax-b)f(x)dx$$

$$= \int_{\infty}^{\infty} [axf(x) - bf(x)]dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} axf(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} bf(x)dx$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx - b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

$$= aE[X] - b$$

5. Misalkan $X$ variabel acak diskrit, maka

$$E[g(X) - h(X)] = \Sigma[g(x) - h(x)] f(x)$$
$$= \Sigma[g(x) f(x) - h(x) f(x)]$$
$$= \Sigma g(x) f(x) - \Sigma h(x) f(x)$$
$$= E[g(X)] - E[h(X)]$$

Misalkan $X$ variabel acak kontinu, maka

$$E[g(X) - h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x) - h(x)] f(x) dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} [g(x) f(x) - h(x) f(x)] dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx$$
$$= E[g(X)] - E[h(X)]$$

**Contoh 2.11**

Diberikan variabel acak $X$ dengan fungsi probabilitas sebagai berikut:

| $X$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

Tentukan nilai harapan dari $Y = (X - 1)^2$

Jawab:

Dengan menggunakan sifat-sifat nilai harapan, fungsi $Y = (X - 1)^2$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$E[(X - 1)^2] = E(X^2 - 2X + 1) = E(X^2) - 2E(X) + E(1)$$
$$E(1) = 1$$
$$E(X) = 0\left(\frac{1}{8}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) + 2\left(\frac{3}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{2}$$
$$E(X^2) = 0\left(\frac{1}{8}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) + 4\left(\frac{3}{8}\right) + 9\left(\frac{1}{8}\right) = 3$$

Jadi, nilai harapan dari $Y = (X - 1)^2$ adalah $E[(X - 1)^2] = 3 - 2\left(\frac{3}{2}\right) + 1 = 1$.

**Contoh 2.12**

Sepasang suami istri memutuskan untuk memiliki *3* orang anak. Jika dari *3* anak tersebut tidak ada satupun yang perempuan, maka mereka akan mencoba untuk mendapatkan anak kembali. Jika mereka tetap tidak memperoleh anak perempuan, maka mereka akan mencoba sekali lagi. Jika $X$ adalah variabel acak banyaknya anak yang akan dimiliki oleh pasangan tersebut, maka berapa nilai harapan dari $X$?

Jawab :

Karena pasangan tersebut kemungkinan bisa memiliki *3*, *4*, atau *5* anak, maka ruang sampel dari variabel acak $X$ adalah

$$S = \{3,4,5\}$$

Probabilitas fungsi densitas dari $X$ diberikan oleh:

$f(3) = P(X=3)$

$= P$ (paling sedikit satu perempuan)

$= 1 - P$ (semua lelaki)

$= 1 - P$ (3 lelaki dalam 3 kali percobaan)

$= 1 - (P(\text{1 lelaki dalam setiap percobaan}))^3$

$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$= \frac{7}{8}$

$f(4) = P(X=4)$

$= P$ (*3* lelaki dan *1* perempuan)

$= (P(\text{1 lelaki dalam percobaan})^3\ P$ (*1* perempuan)

$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{16}$

$f(5) = P(X=5)$

$= P$ (*4* lelaki dan *1* perempuan) $+ P$ (*5* lelaki dalam *5* kali percobaan)

$= (P(\text{1 lelaki dalam percobaan}))^4 P(\text{1 perempuan}) +$

$(P(\text{1 lelaki dalam percobaan}))^5$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$= \frac{1}{16}$

Nilai harapan dari variabel acak $X$ adalah:

$$E(X) = \sum_{\forall x} x f(x)$$

$$= 3\left(\frac{7}{8}\right) + 4\left(\frac{1}{16}\right) + 5\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$= \frac{21}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{16}$$

$$= \frac{42+4+5}{16}$$

$$= \frac{51}{16}.$$

## C. Variansi

Diberikan variabel acak $X$ dengan distribusi probabilitas yang diketahui dan mean $E[X]$. Variansi dari $X$ didefinisikan sebagai

$Var[X] = \sum_x (x - E[X])^2 f(x)$ ; jika $X$ variabel acak diskrit

$Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f(x) dx$ ; jika $X$ variabel acak kontinu

Akar dari variansi disebut standar deviasi dari $X$.

**Teorema 2.1**

Jika $X$ adalah variabel peubah acak, maka

$$Var(X) = E(X^2) - (E[X])^2$$

Bukti :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[(X - E[X])^2] \\ &= E[X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2] \\ &= E[X^2] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2 \\ &= E[X^2] - 2(E[X])^2 + (E[X])^2 \\ &= E[X^2] - (E[X])^2 \end{aligned}$$

Hal ini ekuivalen dengan

$$E[X^2] = Var(X) + (E[X])^2$$

**Teorema 2.2**

Jika $X$ adalah variabel peubah acak dan $a$,$b$ adalah suatu konstanta, maka

$$Var(aX+b) = a^2 Var(X)$$

Bukti :

$$\begin{aligned}
Var(aX+b) &= E[(aX+b-aE[X]-b)^2] \\
&= E[(aX-aE[X])^2] \\
&= E[a^2X^2 - 2aXaE[X] + a^2(E[X])^2] \\
&= E[a^2X^2 - 2a^2XE[X] + a^2(E[X])^2] \\
&= E[a^2(X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2)] \\
&= E[a^2(X^2 - (E[X])^2] \\
&= a^2 Var(X)
\end{aligned}$$

**Contoh 2.13**

Misalkan $X$ mempunyai fungsi densitas

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{k^2} & 0 \le x \le k \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Tentukan nilai $k$ sehingga variansi dari $X$ sama dengan *2!*

Jawab:

$$Var(X) = E(X^2) - (E[X])^2$$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^k x f(x) dx \\
&= \int_0^k x \frac{2x}{k^2} dx \\
&= \frac{2}{3} k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^k x^2 f(x) dx \\
&= \int_0^k x^2 \frac{2x}{k^2}\, dx \\
&= \frac{2}{4} k^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(E[X])^2 &= E(X)E(X) \\
&= \frac{2}{3} k \frac{2}{3} k \\
&= \frac{4}{9} k^2
\end{aligned}$$

Diketahui variansi dari *X* sama dengan *2*, maka

$$Var(X) = E(X^2) - (E[X])^2$$

$$= \frac{2}{4}k^2 - \frac{4}{9}k^2$$

$$= \frac{1}{18}k^2$$

$$Var(X) = \frac{1}{18}k^2$$

$$2 = \frac{1}{18}k^2$$

$$36 = k^2$$

$$\pm 6 = k$$

Jadi, nilai $k$ yang memenuhi fungsi densitas $X$ adalah *6*, karena variansi haruslah lebih besar atau sama dengan *0*.

## D. Fungsi Pembangkit Momen

Fungsi pembangkit momen berguna untuk menentukan rata-rata dan variansi dari variabel acak dengan lebih mudah.

**Definisi 2.2**

Jika $X$ adalah variabel random kontinu, maka momen *ke-k* terhadap titik asal ($\mu = 0$) adalah $\mu'_k = E(X^k)$ .

**Definisi 2.3**

Fungsi pembangkit momen untuk variabel acak $X$ didefinisikan dengan $m(t) = E(e^{tx})$. Fungsi pembangkit momen untuk variabel acak $X$ ada jika terdapat konstanta positif b sedemikian sehingga *m(t)* berhingga untuk $|t| \leq b$.

**Definisi 2.4**

Dengan menggunakan definisi nilai harapan dari variabel acak, dapat didefinikan *m(t)* sebagai berikut

$$m(t) = \begin{cases} \sum_{\forall x} e^{tx} f(x) & \text{, jika } X \text{ diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx & \text{, jika } X \text{ kontinu} \end{cases}$$

**Contoh 2.14**

Misalkan $X$ adalah variabel acak yang mempunyai fungsi pembangkit momen *m(t)* dan *k* adalah suatu bilangan asli. Tentukan turunan *ke-k* dari fungsi pembangkit momen *m(t)* saat *t=0*

Jawab:

$$\frac{d}{dt} m(t) = \frac{d}{dt} E(e^{tx})$$

$$= E(\frac{d}{dt} e^{tx})$$

$$= E(xe^{tx})$$

Dengan cara yang sama diperoleh,

$$\frac{d^2}{dt^2} m(t) = \frac{d^2}{dt^2} E(e^{tx})$$

$$= E(\frac{d^2}{dt^2} e^{tx})$$

$$= E(x^2 e^{tx})$$

Secara umum, diperoleh turunan *ke-k* dari fungsi pembangkit momen *m(t)* sebagai berikut

$$\frac{d^k}{dt^k} m(t) = \frac{d^k}{dt^k} E(e^{tx})$$

$$= E(\frac{d^k}{dt^k} e^{tx})$$

$$= E(x^k e^{tx})$$

Jika *t=0*, maka diperoleh

$$\frac{d^k}{dt^k} m(t)|_{t=0} = E(x^k e^{tx})|_{t=0} = E(x^k)$$

**Contoh 2.15**

$X$ mempunyai fungsi densitas

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\theta}\right) e^{-x/\theta} & , x > 0 \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases}$$

Tentukan fungsi pembangkit momen dari variabel acak $X$!

Jawab

$$m(t) = E(e^{tx})$$

$$= \int_0^\infty e^{tx} f(x) dx$$

$$= \int_0^\infty e^{tx} \left[\left(\frac{1}{\theta}\right) e^{-\frac{x}{\theta}}\right] dx$$

$$= \frac{1}{\theta} \int_0^\infty e^{tx} e^{-x/\theta} dx$$

$$= \frac{1}{\theta} \int_0^\infty e^{\frac{tx\theta - x}{\theta}} dx$$

$$= \frac{1}{\theta} \int_0^\infty e^{\frac{-x(1-t\theta)}{\theta}} dx$$

$$= \frac{1}{\theta} \left[\frac{-\theta e^{\frac{-x(1-t\theta)}{\theta}}}{t\theta - 1}\right] \Big|_0^\infty$$

$$= \frac{-\theta}{\theta(t\theta - 1)} \left[\lim_{x\to\infty} e^{\frac{-x(1-t\theta)}{\theta}} - 1\right]$$

$$= -\frac{1}{(t\theta - 1)} [0 - 1] = \frac{1}{(t\theta - 1)}.$$

## E. Distribusi Seragam

Distribusi yang paling sederhana adalah distribusi yang variabel acaknya mengasumsikan bahwa setiap nilainya diperoleh dengan peluang yang sama. Distribusi ini disebut distribusi seragam diskrit.

**Definisi 2.5**

Jika $\theta_1 < \theta_2$, variabel acak $X$ dikatakan mempunyai distribusi seragam kontinu pada interval $(\theta_1, \theta_2)$ jika dan hanya jika fungsi densitas X didefinisikan oleh:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta_2 - \theta_1} & , \theta_1 \leq x \leq \theta_2 \\ 0 & , \quad lainnya \end{cases}$$

**2.14 Nilai Harapan Distribusi Seragam**

Nilai harapan atau rataan dari variabel acak $X$ yang berdistribusi Seragam adalah $\mu = E[X] = \frac{\theta_1+\theta_2}{2}$

Bukti:

Menurut definisi nilai harapan

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} x \left(\frac{1}{\theta_2 - \theta_1}\right) dx$$

$$= \frac{{\theta_2}^2 - {\theta_1}^2}{2(\theta_2 - \theta_1)}$$

$$= \frac{(\theta_2 - \theta_1)(\theta_2 + \theta_1)}{2(\theta_2 - \theta_1)} = \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}.$$

**2.15 Variansi Distribusi Seragam**

Variansi dari variabel acak $X$ yang berdistribusi Seragam adalah $\sigma^2 = var[X] = \frac{(\theta_2-\theta_1)^2}{12}$

Bukti:

Menurut definisi variansi

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} x^2 f(x)dx$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} x^2 \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} dx$$

$$= \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}\left[\frac{1}{3}\left({\theta_2}^3 - {\theta_1}^3\right)\right]$$

$$= \frac{({\theta_2}^2 + \theta_2\theta_1 + {\theta_1}^2)(\theta_2 - \theta_1)}{3(\theta_2 - \theta_1)}$$

$$= \frac{{\theta_2}^2 + \theta_2\theta_1 + {\theta_1}^2}{3}.$$

$$[E(X)]^2 = E(X)E(X)$$

$$= \left(\frac{\theta_2 + \theta_1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{{\theta_2}^2 + 2\theta_2\theta_1 + {\theta_1}^2}{4}.$$

$$Var(X) = \frac{{\theta_2}^2 + \theta_2\theta_1 + {\theta_1}^2}{3} - \frac{{\theta_2}^2 + 2\theta_2\theta_1 + {\theta_1}^2}{4}$$

$$= \frac{4{\theta_2}^2 + 4\theta_2\theta_1 + 4{\theta_1}^2 - 3{\theta_2}^2 - 6\theta_2\theta_1 - 3{\theta_1}^2}{12}$$

$$= \frac{{\theta_2}^2 - 2\theta_2\theta_1 + {\theta_1}^2}{12}$$

$$= \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{12}.$$

**2.16 Fungsi Pembangkit Momen Distribusi Seragam**

Fungsi pembangkit momen dari variabel acak $X$ yang berdistribusi Seragam adalah $m(t) = \frac{e^{t\theta_2} - e^{t\theta_1}}{t(\theta_2 - \theta_1)}$

Bukti:

$$m(t) = E[e^{tx}]$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{tx} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} dx$$

$$= \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{tx} dx$$

$$= \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}\left[\frac{1}{t}\left(e^{t\theta_2} - e^{t\theta_1}\right)\right]$$

$$= \frac{e^{t\theta_2} - e^{t\theta_1}}{t(\theta_2 - \theta_1)}.$$

**Contoh 2.16**

Sebuah dadu dilemparkan, setiap elemen dari ruang sampel $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ memiliki peluang $1/6$. Sehingga, diketahui Distribusi Seragam dengan

$$f(x) = \frac{1}{6}, \quad x = 1,2,3,4,5,6$$

Tentukan rataan dan variansi dari Distribusi Seragam tersebut!

Jawab:

$$\mu = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

dan

$$\sigma^2 = \frac{(1-3.5)^2 + (2-3.5)^2 + \cdots + (6-3.5)^2}{6} = \frac{35}{12}$$

Sehingga, rataan dan variansi Distribusi Seragam tersebut secara berturut-turut adalah *3.5* dan $35/12$.

## F. Distribusi Binomial

Suatu percobaan dapat dilakukan dengan proses berulang, di mana setiap ulangan memiliki dua kemungkinan hasil, yaitu sukses atau gagal. Contoh pengaplikasiannya misalnya pada proses pengujian suatu barang di dalam mesin perakitan, di mana setiap pengujian (pengamatan) dapat menunjukkan barang yang cacat atau tidak cacat. Proses ini disebut proses Bernoulli. Setiap pengamatan disebut hasil percobaan Bernoulli.

**2.17 Proses Binomial**

Secara singkat, proses Binomial harus memenuhi persyaratan berikut:

1. Percobaan terdiri atas *n* ulangan percobaan Bernoulli.
2. Setiap ulangan memberikan hasil yang dapat dikelompokkan menjadi sukses atau gagal.

3. Peluang sukses, dinotasikan dengan $p$, tetap konstan dari ulangan yang satu ke ulangan yang lainnya.
4. ulangan bersifat saling bebas.

Banyaknya $X$ sukses dalam $n$ percobaan Bernoulli disebut variabel acak Binomial. Distribusi peluang dari variabel acak diskret ini disebut dengan Distribusi Binomial dan akan dinotasikan dengan $b(x; n, p)$, karena nilainya tergantung pada banyaknya percobaan *(n)* dan peluang sukses dalam suatu percobaan *(p)*.

**Definisi 2.6**

Peluang distribusi variabel acak Binomial $X$, yaitu banyaknya sukses dalam n ulangan bebas adalah

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0,1,2, \dots, n$$

### 2.18 Nilai Harapan Distribusi Binomial

Nilai harapan atau rataan dari variabel acak $X$ yang berdistribusi Binomial adalah $\mu = np$.

Bukti:

Misalkan hasil percobaan ke $j$ dinyatakan dengan variabel acak Bernoulli $I_j$, yang diasumsikan dengan nilai *0* dan *1* dengan peluang masing-masing $q\ dan\ p$. Selanjutnya, di dalam percobaan binomial banyaknya peluang sukses dapat dituliskan sebagai jumlahan $n$ variabel bebas. Sehingga,

$$X = I_1, I_2, \dots, I_n$$

Setiap $I_j$ mempunyai rataan $E[I_j] = 0.q + 1.p = p$. Sehingga, dengan menggunakan sifat no. 5 di dalam 2.13, diperoleh

$$\begin{aligned} \mu = E[X] &= E[I_1] + E[I_2] + \cdots + E[I_n] \\ &= p + p + \cdots + p \\ &= np. \end{aligned}$$

**2.19 Variansi Distribusi Binomial**

Variansi dari variabel acak $X$ yang berdistribusi Binomial adalah $\sigma^2 = npq$.

Bukti:

Variansi setiap $I_j$ diberikan oleh:

$$\begin{aligned} {\sigma_{I_j}}^2 &= E[(I_j - p)^2] \\ &= E[{I_j}^2] - p^2 \\ &= (0)^2 q + (1)^2 p - p^2 \\ &= p(1-p) = pq \end{aligned}$$

sehingga,

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= {\sigma_{I_1}}^2 + {\sigma_{I_2}}^2 + \cdots + {\sigma_{I_n}}^2 \\ &= pq + pq + \cdots + pq \\ &= npq. \end{aligned}$$

**2.20 Fungsi Pembangkit Momen Distribusi Binomial**

Fungsi pembangkit momen dari variabel acak $X$ yang berdistribusi Binomial adalah $m(t) = (1 - p + pe^t)^n$.

Bukti:

$$\begin{aligned} m(t) &= E[e^{tx}] \\ &= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} f(x) \\ &= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{x!\,(n-x)!} e^{tx} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{x!\,(n-x)!} (pe^t)^x (1-p)^{n-x} \end{aligned}$$

dengan menggunakan rumus binomial newton, yaitu:

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} b^x a^{n-x}$$

maka

$m(t) = (1 - p + pe^t)^n.$

**Contoh 2.17**

Peluang untuk sembuh seorang penderita penyakit darah adalah 0.4. Bila diketahui terdapat 15 orang yang mengidap penyakit tersebut. Tentukan rataan dan variansi dari variabel acak tersebut.

Jawab:

Diketahui percobaan Binomial dengan $n = 15$ dan $p = 0.4$. Rataan dan variansi berturut-turut dari percobaan Binomial tersebut adalah

$$\mu = np = 15(0.4) = 6.$$

dan

$$\sigma^2 = npq = 15(0.4)(0.6) = 3.6.$$

## G. Distribusi Poisson

Distribusi Poisson digunakan untuk mengamati jumlah kejadian-kejadian khusus yang terjadi dalam satu satuan waktu atau interval.

**Definisi 2.7**

Suatu variabel acak $X$ mempunyai distribusi Poisson jika fungsi densitasnya diberikan oleh:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} & , x = 0,1,2,\ldots \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases}$$

dengan $0 < \lambda < \infty$ adalah parameter rata-rata banyaknya hasil sukses yang terjadi selama selang waktu atau interval tertentu , dan *e = 2.71828...*

Sesuai dengan yang dijelaskan oleh Ronald E. Walpole (2007), kejadian yang berdistribusi Poisson memiiki ciri-ciri sebagai berikut:

1. banyaknya kejadian yang terjadi dalam suatu selang waktu tertentu tidak bergantung pada banyaknya kejadian yang terjadi pada selang waktu yang lain,
2. peluang terjadinya suatu hasil percobaan selama suatu selang waktu tertentu sebanding dengan panjang selang waktu tersebut,
3. peluang bahwa lebih dari satu hasil percobaan akan terjadi dalam selang waktu yang dapat diabaikan.

### 2.21 Nilai Harapan Distribusi Poisson

Nilai harapan dari variabel acak $X$ yang berdistribusi Poisson adalah $E(X) = \lambda t$.

Bukti:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)(\lambda t)^{x-1}}{x(x-1)!}$$

$$= \lambda t \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{x-1}}{(x-1)!}$$

Misalkan $y = x - 1$, maka

$$E(X) = \lambda t \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^y}{y!}$$

Menurut distribusi peluang diskrit, $\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$, maka diperoleh

$$E(X) = \lambda t \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{\lambda t}(\lambda t)^y}{y!} = \lambda t(1) = \lambda t.$$

### 2.22 Variansi Distribusi Poisson

Variansi variabel acak X berdistribusi Poisson adalah $Var(X) = \lambda t$.

Bukti:

$$Var(X) = E(X^2) - (E[X])^2$$

Misalkan $E(X^2) = E(X^2) - E(X) + E(X)$

$$= E(X^2 - X) + E(X)$$

$$= E[X(X-1)] + E(X)$$

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^2(\lambda t)^{x-2}}{x(x-1)(x-2)!}$$

$$= (\lambda t)^2 \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{x-2}}{(x-2)!}$$

Misalkan $y = x - 2$, maka

$$E[X(X-1)] = (\lambda t)^2 \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^y}{y!}$$

Menurut distribusi peluang diskrit, $\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$, maka diperoleh

$$E[X(X-1)] = (\lambda t)^2 \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^y}{y!} = (\lambda t)^2(1) = (\lambda t)^2$$

Sehingga,

$$E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X) = (\lambda t)^2 + \lambda t \tag{2.8}$$

Berdasarkan 2.8 dan nilai harapan distribusi Poisson, maka diperoleh

$$Var(X) = E(X^2) - (E[X])^2$$

$$= (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t.$$

**2.23 Fungsi Pembangkit Momen Distribusi Poisson**

Fungsi pembangkit momen suatu variabel acak $X$ berdistribusi Poisson adalah $e^{\lambda t(e^t-1)}$.

Bukti:

Misalkan $a = \lambda t$

Menurut definisi fungsi pembangkit momen,

$$m(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx} e^{-a} a^x}{x!}$$

$$= e^{-a} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx} a^x}{x!}$$

$$= e^{-a} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(ae^t)^x}{x!}$$

$$= e^{-a} e^{ae^t} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-ae^t} (ae^t)^x}{x!}$$

$$= e^{-a} e^{ae^t} (1)$$

$$= e^{-a} e^{ae^t}$$

$$= e^{a(e^t - 1)} = e^{\lambda t(e^t - 1)}.$$

**Contoh 2.18**

Rata-rata banyaknya kendaraan yang melewati gerbang tol setiap hari adalah *4*. Berapa peluang *6* kendaraan melewati penghitung dalam suatu menit?

Jawab:

*X = Variabel acak 6 kendaraan melewati penghitung dalam suatu waktu*

$\lambda = 4$

maka,

$$f(X = 6) = \frac{e^{-4} 4^6}{6!}$$

$$= 0.1042$$

Jadi, peluang *6* kendaraan melewati penghitung dalam suatu waktu adalah *0.1042*.

## H. Distribusi Gamma

Distribusi Gamma merupakan distribusi probabilitas kontinu yang berasal dari fungsi Gamma yang sudah dikenal luas dan dipelajari dalam banyak bidang matematika. Sebelum membahas mengenai Distribusi Gamma, akan dibahas terlebih dahulu mengenai fungsi Gamma.

**Definisi 2.8**

Fungsi Gamma didefinisikan sebagai

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx, \qquad \alpha > 0.$$

**2.24 Sifat-sifat Fungsi Gamma**

Berikut ini adalah sifat-sifat fungsi Gamma:

1. $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1), \qquad untuk\ \alpha > 1.$
2. $\Gamma(1) = 1.$
3. $\Gamma(\mathrm{n}) = (\mathrm{n} - 1)!$ , untuk setiap bilangan bulat positif n.

Bukti:

1. Dengan melakukan integral parsial pada definisi fungsi Gamma dan memisalkan $u = x^{\alpha-1}$ dan $dv = e^{-x}\, dx$, maka akan diperoleh:

$$\Gamma(\alpha) = -e^{-x}x^{\alpha-1}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}(\alpha - 1)x^{\alpha-2}\, dx$$

$$= (\alpha - 1)\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-2}\, dx$$

Untuk $\alpha > 1$, maka

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1).$$

2. Berdasarkan definisi fungsi Gamma diperoleh:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^{1-1}e^{-x}\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{x\to\infty} -e^{-x}\Big|_0^\infty$$

$$= 0 - (-1) = 1. \qquad (2.9)$$

3. Dengan menggunakan rumus berulang berkali-kali akan diperoleh:

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) &= (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)\\ &= (\alpha - 1)(\alpha - 2)\Gamma(\alpha - 2)\\ &= (\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)\Gamma(\alpha - 3)\end{aligned}$$

   dan seterusnya.

   Perhatikan bahwa bila $\alpha = n$, dengan n bilangan bulat positif, maka

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= (n - 1)(n - 2)\ldots\Gamma(1)\\ &= (n - 1)(n - 2)\ldots(1)\\ &= (n - 1)!\end{aligned}$$

**Definisi 2.9**

Variabel acak kontinu $X$ dikatakan berdistribusi Gamma dengan parameter $\alpha\ dan\ \beta$ bila fungsi densitasnya adalah

$$f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases}\dfrac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}, & x > 0\\ 0, & \text{selainnya}\end{cases}$$

dengan $\alpha > 0, \beta > 0$.

**2.25 Nilai Harapan distribusi Gamma**

Nilai harapan variabel acak kontinu $X$ yang berdistribusi Gamma adalah $E[X] = \alpha\beta$.

Bukti:

Misalkan $\lambda = 1/\beta$. Menurut definisi nilai harapan dan definisi distribusi probabilitas Gamma, diperoleh:

$$E[X] = \int_0^\infty xf(x)dx$$

$$= \int_0^\infty x \frac{\lambda^\alpha}{(\alpha-1)!} x^{\alpha-1} e^{-x\lambda}\, dx$$

misalkan $u = \lambda x$, maka $u/\lambda = x$ dan $du = \lambda\, dx$ sehingga

$$E[X] = \int_0^\infty \left(\frac{u}{\lambda}\right) \frac{\lambda^\alpha}{(\alpha-1)!} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{e^{-u}}{\lambda}\right) du$$

$$= \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\lambda^{1+\alpha-1+1}(\alpha-1)!} u^{(1+\alpha)-1}(e^{-u})du$$

$$= \frac{1}{\lambda(\alpha-1)!}\Gamma(\alpha+1)$$

$$= \frac{1}{\lambda(\alpha-1)!}\alpha\Gamma(\alpha)$$

$$= \frac{\alpha}{\lambda(\alpha-1)!}(\alpha-1)!$$

$$= \frac{\alpha}{\lambda} \qquad (2.10)$$

karena $\lambda = 1/\beta$, maka persamaan 2.10 menjadi

$$E[X] = \alpha\beta.$$

**2.26 Variansi Distribusi Gamma**

Variansi variabel acak kontinu $X$ yang berdistribusi Gamma adalah $Var[X] = \alpha\beta^2$.

Bukti:

$$E[X^2] = \int_0^\infty \frac{x^2 x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+1} e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx \qquad (2.11)$$

Misalkan $y = x/\beta$, maka $x = y\beta$ dan $dx = \beta dy$. Persamaan 2.11 dapat ditulis kembali menjadi:

$$E[X^2] = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty (\beta y)^{\alpha+1} e^{-y} \beta \, dy$$

$$= \frac{\beta^{\alpha+1+1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha+1} e^{-y} \, dy$$

$$= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha + 2)$$

$$= \frac{\beta^2}{(\alpha - 1)!} (\alpha + 2 - 1)!$$

$$= \frac{\beta^2 (\alpha + 1)!}{(\alpha - 1)!}$$

$$= \frac{\beta^2 (\alpha + 1)(\alpha)(\alpha - 1)!}{(\alpha - 1)!}$$

$$= \alpha(\alpha + 1)\beta^2$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= \alpha(\alpha + 1)\beta^2 - (\alpha\beta)^2$$

$$= \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta^2$$

$$= \alpha\beta^2.$$

**2.27 Fungsi Pembangkit Momen Distribusi Gamma**

Fungsi pembangkit momen variabel acak kontinu $X$ yang berdistribusi Gamma adalah $m(t) = \frac{1}{(1-t\beta)^\alpha}$.

Bukti:

Misalkan $\beta = 1/\lambda$. Menurut definisi fungsi pembangkit momen dan definisi distribusi probabilitas Gamma, diperoleh

$$m(t) = E[e^{tx}]$$

$$= \int_0^\infty e^{tx} \left[ \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x\lambda} \right] dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{tx} e^{-x\lambda} \, dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x\lambda\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)}\, dx \qquad (2.12)$$

Misalkan $y = \lambda x \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)$ atau $x = \frac{y}{\lambda\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)}$ dengan $t < \lambda$ maka $dx = \frac{1}{\lambda\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)}\, dy$. Persamaan 2.12 dapat ditulis kembali menjadi:

$$m(t) = \int_0^\infty \frac{\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-y}}{\lambda\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)} \left(\frac{1}{\lambda\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)}\right)^{\alpha-1} dy$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{\lambda\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)}\right)^{\alpha} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-\frac{t}{\lambda}}\right)^{\alpha} \frac{y^{\alpha-1} e^{-y}}{\Gamma(\alpha)}\, dy$$

$$= \left(\frac{1}{1-\frac{t}{\lambda}}\right)^{\alpha} \int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1} e^{-y}}{\Gamma(\alpha)}\, dy \qquad (2.13)$$

karena $\int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1} e^{-y}}{\Gamma(\alpha)}\, dy$ merupakan fungsi probabilitas Gamma dengan $\beta = 1$, maka menurut definisi fungsi probabilitas kontinu, persamaan 2.13 dapat ditulis kembali dengan:

$$m(t) = \left(\frac{1}{1-\frac{t}{\lambda}}\right)^{\alpha} (1)$$

substitusikan $\lambda = 1/\beta$, sehingga

$$m(t) = \left(\frac{1}{1-t\beta}\right)^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{(1-t\beta)^\alpha}.$$

## I. Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial merupakan kejadian khusus dari Distribusi Gamma. Distribusi Eksponensial merupakan Distribusi Gamma dengan $\alpha = 1\ dan\ \beta = \frac{1}{\lambda}$.

**Definisi 2.10**

Variabel acak kontinu $X$ berdistribusi Eksponensial dnegan parameter $\lambda$ dengan fungsi densitas sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$$

**2.28 Nilai Harapan Distribusi Eksponensial**

Nilai harapan variabel acak kontinu $X$ yang berdistribusi Eksponensial adalah $E[X] = \frac{1}{\lambda}$.

Bukti:

$$E[X] = \alpha\beta = 1\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}.$$

**2.29 Variansi Distribusi Eksponensial**

Variansi variabel acak kontinu $X$ yang berdistribusi Eksponensial adalah $Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$.

Bukti:

$$Var[X] = \alpha\beta^2 = 1\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

**2.30 Fungsi Pembangkit Momen Distribusi Eksponensial**

Fungsi pembangkit momen variabel acak kontinu $X$ yang berdistribusi Eksponensial adalah $m(t) = \frac{1}{1-\frac{t}{\lambda}}$.

Bukti:

$$m(t) = \frac{1}{(1-t\beta)^{\alpha}} = \frac{1}{1-\frac{t}{\lambda}}.$$

## J. Uji Kolmogorov-Smirnov

Uji Kolmogorov-Smirnov adalah uji nonparametrik (*distribution-free*), yaitu uji statistika yang menyatakan bahwa data yang digunakan tidak perlu mengikuti suatu distribusi tertentu. Uji Kolmogorov-Smirnov digunakan untuk menguji perbedaaan dua distribusi kumulatif. Uji Kolmogorov-Smirnov digunakan untuk mengamati apakah distribusi suatu variabel acak mengikuti distribusi variabel acak yang dihipotesiskan.

### 2.31 Distribusi Sampel

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah suatu variabel acak, dan $S_n(x)$ adalah fungsi distribusi sampel yang diamati. $S_n(x)$ didefinisikan dengan:

$$S_n(x) = \begin{cases} 0 & , \mathrm{x} < \mathrm{X_i} \\ \frac{i}{N} & , \mathrm{X_i} < \mathrm{x} < \mathrm{X_{(i+1)}} \\ 1 & , \mathrm{X_n} \leq \mathrm{N} \end{cases}$$

### 2.32 Statistik Uji Kolmogorov-Smirnov

Statistik Uji Kolmogorov-Smirnov dinotasikan dengan $D$, dan didefinisikan dengan:

$$D = \max(D_+, D_-)$$

$$D_+ = \max[S_n(x) - F_0(x)]$$

$$D_- = \max[F_0(x) - S_n(x)]$$

di mana, $S_n(x)$ merupakan distribusi kumulatif data sampel dan $F_0(x)$ merupakan distribusi kumulatif data yang dihipotesiskan.

Langkah-langkah dalam melakukan uji Kolmogorov-Smirnov adalah sebagai berikut:

1. $H_0: F(x) = F_0(x)$
2. $H_1: F(x) \neq F_0(x)$
3. Menentukan nilai $\alpha$

4. Statistik uji

   $D = \max(D_+, D_-)$

5. Wilayah kritis

   $H_0$ ditolak jika nilai *D hitung > nilai D*(α). D*(α)* adalah nilai kritis yang diperoleh dari tabel Kolmogorov.

6. Menghitung stat uji
7. Kesimpulan

**Contoh 2.19**

Diberikan data suatu sampel acak

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 8 | 8 | 8 | 7 | 8 |
| 7 | 8 | 7 | 9 | 8 | 7 |

Tentukan apakah data tersebut berdistribusi Poisson

Jawab:

1. $H_0$ : *data berdistribusi Poisson*
2. $H_1$ : *data tidak berdistribusi Poisson*
3. Tingkat signifikasi $(\alpha) = 0.05$
4. Statistik uji

   $D = \max(D_+, D_-)$

   $D = \max(D_+, D_-) = 0.59708.$

5. Wilayah kritis

   $H_0$ ditolak jika nilai $D_{hitung} > D(\alpha)$.

   $D(\alpha) = 0.945.$

6. Perhitungan

   Rata-rata dari data adalah 7.8

| X | Frekuensi | | Fkum | $S_n(x)$ | $F_0(x)$ | $D_+$ | $D_-$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 4 | 28 | 4 | 0.33333 | 0.14231 | 0.19103 | -0.191 |
| 8 | 6 | 48 | 10 | 0.83333 | 0.28165 | 0.55169 | -0.5517 |
| 9 | 2 | 18 | 12 | 1 | 0.40292 | 0.59708 | -0.5971 |

Tabel 2.2 Uji Kolmogorov-Smirnov Secara Manual

$\max(D_+) = 0.59708\ dan \max(D_-) = -0.191.$

7. Kesimpulan

   Berdasarkan perhitungan manual, diperoleh $D_{hitung} = 0.59708 < D(\alpha) = 0.945$.

   $H_0$ *diterima.*

   Data berdistribusi Poisson.

Pada pengujian Normalitas di Bab IV, perhitungan akan menggunakan bantuan perangkat lunak R.

## K. Deret Taylor

Jika *f(x)* dan turunannya, yaitu $f'$, $f''$, ..., $f^n$, $f^{n+1}$, ... berada di dalam selang *[a,b]*. Misalkan $x_0 \in [a, b]$, untuk nilai $x$ di sekitar $x_0$ dan $x \in [a, b]$, maka *f(x)* dapat diekspansi menjadi:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + \ldots$$

Misalkan $h = x - x_0$, maka persamaan tersebut dapat ditulis kembali menjadi:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^n(x_0) \qquad (2.14)$$

Secara lebih ringkas, persamaan (2.14) dapat dinyatakan dengan:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} h^n \qquad (2.15)$$

dengan *n!* menunjukkan nilai faktorial *n* dan $f^n(x_0)$ menunjukkan nilai dari turunan *ke-n* dari fungsi *f* pada titik $x_0$, serta *h* menyatakan nilai dari $x - x_0$. Dalam kasus khusus, di mana $x_0 = 0$, deret tersebut dinamakan deret MacLaurin.

**Contoh 2.20**

Bentuklah deret Taylor untuk *f(x) = ln(x)* disekitar $x_0 = 1$.

Jawab:

*f(x) = ln(x)*, $f(x_0) = ln(1) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x}, f'(x_0) = \frac{1}{1} = 1$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}, f''(x_0) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}, f'''(x_0) = \frac{2}{1^3} = 2$$

$$f^4(x) = -\frac{6}{x^4}, f^4(x_0) = -\frac{6}{1^4} = -6$$

dengan menggunakan rumus,

$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0)$

maka,

$$\ln(x) = 0 + \frac{(x-1)}{1!} 1 + \frac{(x-1)^2}{2!}(-1) + \frac{(x-1)^3}{3!}(2) + \frac{(x-1)^4}{4!}(-6) + \cdots$$

misalkan $h = x - 1$, sehingga

$$\ln(x) = \frac{h}{1!} - \frac{h^2}{2!} + \frac{2(h^3)}{3!} - \frac{6(h^4)}{4!} + \cdots$$

# BAB III

# PROSES POISSON

## A. Proses Poisson

Proses Poisson merupakan proses menghitung (*counting process*) banyaknya kedatangan dalam interval waktu tertentu dengan sifat kedatangan mengikuti batasan tertentu. Hal ini berlaku di dalam kehidupan nyata, seperti berapa banyak panggilan telepon yang masuk ke dalam sistem dalam interval waktu tertentu.

Sebelum mendefinisikan proses Poisson, akan dibahas 3 konsep yang terkait, yaitu proses menghitung, kenaikan bebas (*independent increments*), dan kenaikan stasioner (*stasionary increments*).

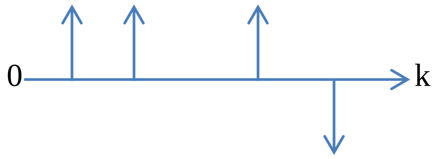
### 3.1 Proses Menghitung

Menurut Allen (2003), proses stokastik merupakan himpunan variabel acak $\{X(t;Z)|t \in T, z \in Z\}$, dengan $Z$ adalah ruang sampel dan $T$ adalah waktu. T dapat bersifat diskrit maupun kontinu, tetapi di dalam tugas akhir ini akan digunakan waktu diskrit. Proses stokastik $\{N(t), t \geq 0\}$ disebut proses menghitung jika *N(t)* merepresentasikan total banyaknya kejadian yang terjadi pada waktu *t*. Proses menghitung *N(t)* harus memenuhi:

1. $N(t) \geq 0$.
2. *N(t)* bilangan bulat.
3. Jika $s < t$ maka $N(s) \leq N(t)$.
4. Untuk $s < t, N(t) - N(s)$ sama dengan banyaknya kejadian yang terjadi pada interval *(s,t]*.

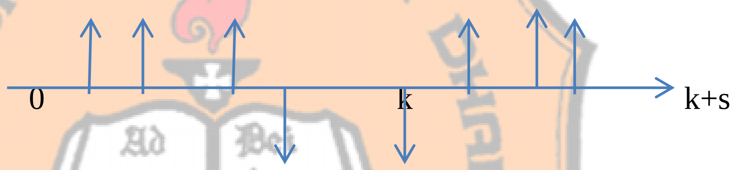
### 3.2 Proses Kenaikan Bebas

Proses menghitung disebut proses kenaikan bebas jika banyaknya kejadian yang terjadi pada interval waktu yang saling lepas adalah saling bebas. Sebagai contoh, banyaknya kejadian yang terjadi pada waktu *t*, yaitu *N(t)* haruslah saling bebas dengan banyaknya kejadian yang terjadi pada interval waktu antara *t* dan *t+s*, yaitu *N(t+s) – N(t)*. Secara lengkap dijelaskan pada gambar 3.1 dan 3.2




Gambar 3.1 Peluang Banyaknya Kejadian *t=0* sampai *t=k*

Gambar 3.1 merupakan proses Poisson banyaknya kedatangan pada interval waktu *t = 0* sampai waktu *t = k*. Diketahui fungsi peluang *P[X(t)=k]* sama dengan fungsi peluang *P[X(t-0)=k]*= $\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$, karena prosesnya merupakan proses Poisson.




Gambar 3.2 Peluang Banyaknya Kejadian *t=0* sampai *t=k+s*

Selanjutnya, akan dicari fungsi peluang banyaknya kedatangan dari dua interval waktu yang berbeda. Gambar 3.2 merupakan proses Poisson banyaknya kedatangan pada interval waktu *t = 0* sampai waktu *t = k* dan pada interval waktu *t = k* sampai dengan waktu *t = k + s*. Fungsi peluang pada interval waktu *t = 0* sampai dengan *t = k* telah dijelaskan pada Gambar 3.1. Lalu, bagaimana dengan fungsi peluang pada interval waktu *t = k* sampai dengan *t = k + s*? Berdasarkan definisi kenaikan bebas, diketahui bahwa banyaknya kejadian pada interval *t = 0* sampai dengan *t = k* sama dengan banyaknya kejadian pada interval *t = k* sampai dengan *t = k + s*. Proses Poisson *X(t)* dan interval *(T1,T2)* dan *(T3,T4)*, diperoleh *X(T2-T1)* saling bebas dengan *X(T4-T3)* jika $T1 \leq T2 \leq T3 \leq T4$. Berdasarkan Gambar 3.2, diketahui bahwa proses kedatangan merupakan proses Poisson *X(t)* dengan interval waktu *(0,k)* dan *(k,k+s)* dengan $0 \leq k \leq k \leq k + s$ dapat ditentukan fungsi densitas bersama dari *X1* =

*X(T2-T1)* dan *X2* = *X(T4-T3)* adalah $P_{x1x2}(x1, x2) = P_{x1}(x1)P_{x2}(x2)$ karena *X1* dan *X2* saling bebas berdasarkan definisi kenaikan bebas.

### 3.3 Proses Kenaikan Stasioner

Proses menghitung disebut proses kenaikan stasioner jika distribusi dari banyaknya kejadian yang terjadi di setiap interval waktu hanya bergantung pada panjang dari interval waktu itu. Dengan kata lain, proses menghitung mempunyai kenaikan stasioner jika banyaknya kejadian pada interval $(t_1 + s, t_2 + s)$ , yaitu $N(t_2 + s) - N(t_1 + s)$ mempunyai distribusi yang sama dengan banyaknya kejadian yang terjadi pada interval $(t_1, t_2]$, yaitu $N(t_2) - N(t_1)$ untuk setiap $t_1 < t_2$ dan *s < 0*, $P\{N(s+t) - N(s) = n\} = P_n(t)$.

**Definsi 3.1**

Proses menghitung $\{N(t), t \geq 0\}$ disebut proses Poisson dengan parameter $\lambda, \lambda > 0$, jika:

1. *N(0) = 0.*
2. Prosesnya mempunyai sifat kenaikan bebas.
3. Banyaknya kejadian dalam setiap interval dengan panjang $t$ adalah berdistribusi Poisson dengan nilai rata-rata $\lambda t$. Sehingga, untuk setiap $s, t \geq 0$,

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}, n = 0,1, \dots$$

Perhatikan bahwa berdasarkan syarat *(3)*, proses Poisson bersifat kenaikan stasioner dan $E[N(t)] = \lambda t$ (berdasarkan bukti nilai harapan distribusi Poisson), yang menjelaskan mengapa $\lambda$ disebut parameter dari proses Poisson.

**Definisi 3.2**

Fungsi *f* disebut *o(h)* jika

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = 0.$$

Contoh:

Diketahui $\frac{f(h)}{h} = \frac{(\lambda h)^2}{2!} - \frac{(\lambda h)^3}{3!} + \cdots$

Untuk interval waktu yang kecil *(h > 0):*

$$e^{-\lambda h} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda h)^n}{n!} = 1 - \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} - \frac{(\lambda h)^3}{3!} + \cdots$$

Dapat ditunjukkan bahwa jika $\frac{f(h)}{h} = \frac{(\lambda h)^2}{2!} - \frac{(\lambda h)^3}{3!} + \cdots$ maka

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = \frac{(\lambda h)^2}{2!} - \frac{(\lambda h)^3}{3!} + \cdots = 0$$

Sehingga,

$e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h)$

$1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h)$

Persamaan $1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h)$ menunjukkan peluang adanya kejadian pada interval waktu yang kecil, yaitu *h > 0*. Sedangkan, pada persamaan $e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h)$ menunjukkan peluang tidak ada kejadian pada interval waktu *h > 0*. Peluang tidak ada kejadian pada interval waktu *h > 0* dapat dinotasikan dengan:

$$P\{N(h) = 0\} = 1 - \lambda h + \mathrm{o(h)}.$$

**Definisi 3.3**

Proses menghitung $\{N(t), t \geq 0\}$ disebut proses Poisson dengan parameter $\lambda, \lambda > 0$, jika:

1. *N(0) = 0.*
2. Prosesnya mempunyai kenaikan bebas dan kenaikan stasioner.
3. $P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$.
4. $P\{N(h) \geq 2\} = o(h)$.

**Teorema 3.1**

Definisi 3.1 dan 3.3 adalah ekivalen.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa definisi 3.1 memuat definisi 3.3.

1. Definisi 3.1 (1) ekivalen dengan definisi 3.3 (1).
2. Definisi 3.1 (2) menyatakan proses *N(t)* merupakan proses kenaikan bebas dan *N(t+s) – N(t)* memiliki distribusi yang sama dengan *N(t)* sehingga prosesnya merupakan proses kenaikan stasioner. Oleh karena itu, definisi 3.1 (2) ekivalen dengan definisi 3.3 (2).
3. Berdasarkan definisi 3.1 (3), maka

Untuk

$$P\{N(h)=1\}=\frac{e^{-\lambda h}(\lambda h)^1}{1!}=\lambda h e^{-\lambda h}$$

$$=\lambda h\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda h)^n}{n!}$$

$$=\lambda h[1-\lambda h+\frac{(\lambda h)^2}{2!}-\frac{(\lambda h)^3}{3!}+\cdots]$$

$$=\lambda h-(\lambda h)^2+\frac{(\lambda h)^3}{2!}-\frac{(\lambda h)^4}{3!}+\cdots$$

$$=\lambda h+[-(\lambda h)^2+\frac{(\lambda h)^3}{2!}-\frac{(\lambda h)^4}{3!}+\cdots]$$

$$=\lambda h+o(h).$$

memenuhi definisi 3.3 (3).

$$P\{N(h)\geq 2\}=e^{-\lambda h}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-\lambda h)^n}{n!}$$

$$=e^{-\lambda h}[\frac{(\lambda h)^2}{2!}-\frac{(\lambda h)^3}{3!}+\frac{(\lambda h)^4}{4!}-\cdots]$$

$$=e^{-\lambda h}(\lambda h)^2[\frac{1}{2!}-\frac{\lambda h}{3!}+\frac{(\lambda h)^2}{4!}-\cdots]$$

$$=(\lambda h)^2e^{-\lambda h}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-\lambda h)^{n-2}}{n!}$$

untuk $h \to 0$, maka

$$P\{N(t) \geq 2\} = o(h).$$

memenuhi definisi 3.3 (4).

Terbukti bahwa definisi 3.1 memuat definisi 3.3.

Akan ditunjukkan bahwa definisi 3.3 memuat definisi 3.1.

1. Definisi 3.3 (1) ekivalen dengan definisi 3.1 (1).
2. Definisi 3.3 (2) jelas ekivalen dengan definisi 3.3 (2).
3. Misalkan

$$P_n(t) = P\{N(t) = n\}$$

Akan diturunkan persamaan diferensial untuk $P_0(t)$ dengan cara

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &= P\{N(t+h) = 0\} && \text{(definisi} P_0(\text{t} + \text{h})) \\ &= P\{N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0\} \\ &= P\{N(t) = 0\}P\{N(t+h) - N(t) = 0\} && \text{(definisi kenaikan bebas)} \\ &= P_0(t)P_0(h) && \text{(definisi kenaikan stasioner)} \\ &= P_0(t)[1 - \lambda h + o(h)], \end{aligned}$$

di mana dua persamaan terakhir mengikuti asumsi (2), yaitu kenaikan bebas dan $P\{N(h) = 0\} = 1 - \lambda h + o(h)$

oleh karena itu,

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) + \frac{o(h)}{h}$$

misalkan $h \to 0$, maka

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$$

atau

$$\frac{P_0{}'(t)}{P_0(t)} = -\lambda,$$

dengan mengintegralkan diperoleh

$$\log P_0\,(t) = -\lambda t + c$$

atau

$$P_0(t) = Ke^{-\lambda t}$$

karena $P_0(0) = P\{N(0) = 0\} = 1$, maka

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

untuk $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} P_n(t+h) &= P\{N(t+h) = n\} \\ &= P\{N(t) = n, N(t+h) - N(t) = 0\} \\ &\quad + P\{N(t) = n-1, N(t+h) - N(t) = 1\} \\ &\quad + P\{N(t+h) = n, N(t+h) - N(t) \geq 2\} \end{aligned}$$

namun, berdasarkan definisi 3.3 (4), persamaan terakhir adalah *o(h)*, sehingga dengan menggunakan definisi 3.3 (2), diperoleh

$$\begin{aligned} P_n(t+h) &= P_n(t)P_0(h) + P_{n-1}(t)P_1(h) + o(h) \\ &= (1 - \lambda h)P_n(t) + \lambda h P_{n-1}(t) + o(h) \end{aligned}$$

maka

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

misalkan $h \to 0$, maka

$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

atau

$$e^{\lambda t}[P_n'(t) + \lambda P_n(t)] = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t)$$

sehingga,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} P_n(t)\right) = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t) \tag{3.4}$$

dari 3.4, diketahui bahwa ketika $n = 1$, maka

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} P_1(t)) = \lambda$$

atau

$$P_1(t) = (\lambda t + c)e^{-\lambda t},$$

dengan syarat awal $P(0) = 0$, maka

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

Untuk menunjukkan bahwa $P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$ dapat menggunakan induksi matematika. Pertama, asumsikan untuk *n-1*, maka

$$P_{n-1}(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

menurut 3.4 diperoleh

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}P_n(t)\right) = \lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t)$$

$$= \lambda e^{\lambda t}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

sehingga,

$$e^{\lambda t}P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} + c,$$

atau, karena $P_n(0) = P\{N(0) = n\} = 0,$

maka

$$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$$

Sehingga, terbukti bahwa definisi 3.3 memuat definisi 3.1.

**Implikasi**

*N(t)* mempunyai distribusi Poisson merupakan akibat dari pendekatan Poisson untuk Distribusi Binomial.

Misalkan akan dihitung distribusi probabilitas banyaknya kecelakaan mobil pada suatu persimpangan selama interval waktu *1* minggu. Bagilah interval waktu *1* minggu ke dalam *n* subinterval waktu yang sama panjang dan masing-masing subinterval sangat kecil sehingga paling banyak satu kecelakaan yang dapat terjadi. Notasikan probabilitas *1* kecelakaan di dalam setiap subinterval dengan *p*. Sehingga, secara lengkap dinotasikan dengan:

*P*(tidak ada kecelakaan di dalam subinterval) = *1-p*

*P*(satu kecelakaan di dalam subinterval) = *p*

*P*(*2* atau lebih kecelakaan di dalam subinterval) = *0*

Lalu, banyaknya kecelakaan selama satu minggu merupakan banyaknya subinterval yang di dalamnya terjadi kecelakaan. Jika kejadian kecelakaan bersifat saling bebas antara satu subinterval dengan subinterval lainnya, maka banyaknya kecelakaan mempunyai Distribusi Binomial.

Meskipun tidak terdapat cara tunggal untuk menentukan subinterval, tetapi dengan membagi interval waktu *1* minggu ke dalam jumlahan *n* subinterval, maka probabilitas *p*, yaitu terdapat satu kecelakaan akan mengecil. Secara lebih jelas, akan ditunjukkan oleh:

*P*{*1* atau lebih kejadian di dalam setiap subinterval}

$\leq \sum_{i=1}^{n} P\{1 \text{ atau lebih kejadian di dalam subinterval ke} - i\}$

Misalkan $\lambda = np$ dan dengan menghitung limit $n \to \infty$ dari probabilitas binomial $p(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}$ akan diperoleh:

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-y+1)}{y!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^y \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-y}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^y}{y!} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{n(n-1)\dots(n-y+1)}{n^y} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-y}$$

$$= \frac{\lambda^y}{y!} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-y} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{y-1}{n}\right)$$

diketahui

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

sehingga,

$$p(y) = \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda}$$

dengan *e = 2.718...*

Oleh karena itu, variabel acak *Y*, yaitu banyaknya kecelakaan selama satu minggu berdistribusi Poisson berdasarkan pendekatan Binomial.

**B. Antar Kedatangan dan Distribusi Waktu Tunggu**

Pandang kedatangan dua kendaraan yang saling berurutan. Waktu antar kedatangan adalah waktu yang dibutuhkan antara kedatangan dua kendaraan yang saling berurutan. Sedangkan, waktu tunggu adalah waktu yang dibutuhkan oleh pengendara untuk dapat keluar dari antrian di depan lampu lalu lintas.

Pandang sebuah proses Poisson, dan misalkan $X_1$ menunjukkan waktu dari kejadian pertama. Untuk $n \geq 1$, misalkan $X_n$ menunjukkan waktu antara kejadian *ke-(n-1)* dan kejadian *ke-n*. Barisan $\{X_n, \ n \geq 1\}$ disebut barisan antar waktu antar kedatangan.

Untuk menentukan distribusi dari $X_n$, pertama diketahui kejadian $\{X_1 > t\}$ dapat terjadi jika dan hanya jika tidak ada kejadian dari proses Poisson yang terjadi di dalam interval *[0,t]*, dengan demikian

$$P\{X_1 > t\} = P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$$

$X_1$ berdistribusi Eksponensial dengan rata-rata $1/\lambda$. Untuk memperoleh distribusi dari $X_2$ dengan menggunakan $X_1$, maka peluang bersyarat

$$\begin{aligned} P\{X_2 > t |\ X_1 = s\} &= P\{0 \text{ kejadian di dalam } (s, s+t)\ | X_1 = s\} \\ &= P\{0 \text{ kejadian di dalam } (s, s+t)\} \\ &= P\{N(s+t) - N(s) = 0\} \\ &= P\{N(t) = 0\} \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Berdasarkan hal tersebut maka dapat disimpulkan bahwa $X_2$ juga merupakan variabel acak Eksponensial dengan rata-rata $1/\lambda$ dan $X_2$ saling bebas dengan $X_1$.

**Teorema 3.2**

$S_n$ memiliki Distribusi Gamma dengan parameter *n* dan $\lambda$.

Bukti:

$S_n$ adalah waktu kedatangan pada kejadian *ke-n* dan disebut waktu tunggu sampai dengan kejadian *ke-n*

$$S_n = \sum_{t=1}^{n} X_t \qquad n \geq 1,$$

Persamaan di atas dapat diturunkan dengan tidak ada peristiwa *ke-n* yang terjadi sebelumnya atau pada waktu *t* jika dan hanya jika banyaknya kejadian yang terjadi pada waktu *t* paling sedikit *n*. Secara umum, hal itu dijelaskan oleh persamaan di bawah ini:

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t.$$

Oleh karena itu, fungsi distribusi kumulatif dari $S_n$ adalah

$$P\{S_n \leq t\} = P\{N(t) \geq n\}$$
$$F(S_n) = P\{N(t) \geq n\}$$
$$= \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

Sehingga fungsi densitas dari $S_n$ adalah turunan dari $F(S_n)$, yaitu

$$f(t) = -\sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + \sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}$$
$$= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Berdasarkan persamaan di atas, dapat disimpulkan bahwa $S_n$ memiliki Distribusi Gamma.

## C. Distribusi Bersyarat Waktu Antar Kedatangan

Sebelum membahas mengenai distribusi bersyarat waktu antar kedatangan, akan dibahas terlebih dahulu mengenai statistik terurut. Statistik terurut merupakan proses mengurutkan variabel-variabel acak yang sedang diamati. Proses pengurutan ini biasanya dilakukan dengan mengurutkan variabel berdasarkan nilai besar kecilnya. Contoh dari statistik terurut misalnya dalam mencari waktu tercepat di dalam balapan mobil atau mencari tikus terberat di antara tikus-tikus yang diberi obat diet tertentu.

Misalkan $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ adalah variabel acak kontinu yang saling bebas dengan fungsi distribusi kumulatif *F(y)* dan fungsi densitas *f(y)*. Notasikan variabel acak terurut $Y_i$ dengan $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \ldots, Y_{(n)}$, di mana $Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \cdots \leq Y_{(n)}$. Sehingga,

$$Y_{(1)} = \min(Y_1, \ldots, Y_n)$$

adalah nilai minimum dari $Y_i$ dan

$$Y_{(n)} = \max(Y_1, \ldots, Y_n)$$

adalah nilai maksimum dari $Y_i$.

**Teorema 3.3**

Fungsi densitas bersama dari statistik terurut $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ adalah:

$$g_{1,2,\ldots,n}(y_1 \ldots y_n) = \begin{cases} n!\, f(y_1), \ldots, f(y_n), & y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n \\ 0\ , & lainnya \end{cases}$$

Bukti:

Fungsi densitas $Y_{(1)}$ dan $Y_{(n)}$ dapat ditentukan dengan metode fungsi distribusi. Karena $Y_{(n)}$ merupakan nilai maksimum dari $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ maka kejadian $(Y_{(n)} \leq y)$ akan terjadi jika dan hanya jika kejadian $(Y_i \leq y)$ terjadi, untuk setiap *i = 1,2,…,n*. Secara matematis, hal tersebut ditunjukkan oleh:

$$P\left(Y_{(n)} \leq y\right) = P(Y_1 \leq y, Y_2 \leq y, \ldots, Y_n \leq y) \tag{3.5}$$

Karena $Y_i$ saling bebas dan $P(Y_i \leq y)$ merupakan fungsi distribusi kumulatif yaitu *F(y)* untuk setiap *i = 1,2,…,n*, maka persamaan 3.5 dapat ditulis kembali menjadi:

$$P\left(Y_{(n)} \leq y\right) = P(Y_1 \leq y, Y_2 \leq y, \ldots, Y_n \leq y) = [F(y)]^n \tag{3.6}$$

Misalkan $g_n(y)$ adalah fungsi densitas dari $Y_{(n)}$ , maka dengan melakukan turunan untuk kedua ruas, persamaan 3.6 dapat ditulis kembali dengan:

$$g_n(y) = n[F(y)]^{n-1} f(y)$$

Lalu, akan dicari fungsi densitas dari $Y_{(1)}$ dengan menggunakan cara yang sama seperti mencari fungsi densitas dari $Y_{(n)}$.

Diketahui

$$P\left(Y_{(1)} \le y\right) = 1 - P(Y_{(1)} > y)$$

Karena $Y_{(1)}$ merupakan nilai minimum dari $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ maka kejadian $(Y_{(1)} \le y)$ akan terjadi jika dan hanya jika kejadian $(Y_i > y)$ terjadi, untuk setiap *i* = *1,2,...,n*. Karena $Y_i$ saling bebas dan $P(Y_i > y) = 1 - F(y)$ untuk *i* = *1,2,...,n*, maka secara matematis, hal tersebut ditunjukkan oleh:

$$\begin{aligned} P\left(Y_{(1)} \le y\right) &= 1 - P(Y_i > y) \\ &= 1 - P(Y_1 > y, Y_2 > y, \dots, Y_n > y \\ &= 1 - [P(Y_1 > y)P(Y_2 > y) \dots P(Y_n > y)] \\ &= 1 - [1 - F(y)]^n \qquad (3.7) \end{aligned}$$

Misalkan $g_1(y)$ adalah fungsi densitas dari $Y_{(1)}$ , maka dengan melakukan turunan untuk kedua ruas, persamaan 3.7 dapat ditulis kembali dengan:

$$g_1(y) = n[1 - F(y)]^{n-1} f(y)$$

Untuk *n* = *2*, akan ditentukan fungsi densitas bersama dari $Y_{(1)}$ dan $Y_{(2)}$. Kejadian $[Y_{(1)} \le y_1, Y_{(2)} \le y_2]$ dapat berati kejadian $(Y_1 \le y_1, Y_2 \le y_2)$ atau $(Y_2 \le y_1, Y_1 \le y_2)$. Hal ini dapat terjadi karena $Y_{(1)}$ memiliki dua kemungkinan, yaitu $Y_1$ atau $Y_2$ yang memiliki nilai terkecil. Untuk $y_1 \le y_2, P(Y_{(1)} \le y_1, Y_{(2)} \le y_2)$ akan sama dengan peluang dari gabungan dua kejadian, yaitu kejadian $(Y_1 \le y_1, Y_2 \le y_2)$ dan kejadian $(Y_2 \le y_1, Y_1 \le y_2)$. Sehingga,

$$P\left(Y_{(1)} \le y_1, Y_{(2)} \le y_2\right) = P[(Y_1 \le y_1, Y_2 \le y_2) \cup (Y_2 \le y_1, Y_1 \le y_2)] \qquad (3.7)$$

dengan menggunakan aturan jumlahan peluang, maka persamaan 3.7 dapat ditulis kembali menjadi:

$$\begin{aligned} P\left(Y_{(1)} \le y_1, Y_{(2)} \le y_2\right) = P(Y_1 \le y_1, Y_2 \le y_2) + P(Y_2 \le y_1, Y_1 \le y_2) - \\ P(Y_1 \le y_1, Y_2 \le y_1) \qquad (3.8) \end{aligned}$$

Karena $Y_1$ dan $Y_2$ saling bebas dan $P(Y_i \le w) = F(w), i = 1,2$ maka persamaan 3.8 dapat ditulis kembali menjadi:

$$\begin{aligned} P\left(Y_{(1)} \le y_1, Y_{(2)} \le y_2\right) &= F(y_1)F(y_2) + F(y_2)F(y_1) - F(y_1)F(y_1) \\ &= 2F(y_1)F(y_2) - [F(y_1)]^2 \qquad (3.9) \end{aligned}$$

Misalkan $g_{1,2}(y_1, y_2)$ adalah fungsi densitas bersama dari $Y_{(1)}$ dan $Y_{(2)}$, maka dengan melakukan turunan untuk kedua ruas, persamaan 3.9 dapat ditulis kembali dengan:

$$g_{1,2}(y_1, y_2) = \begin{cases} 2f(y_1)f(y_2), & y_1 \leq y_2 \\ 0\,, & lainnya \end{cases}$$

Secara umum, fungsi densitas bersama dari $Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}$ dapat dicari dengan menggunakan:

$$g_{1,2,\dots,n}(y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} n!\, f(y_1), \dots, f(y_n), & y_1 \leq y_2 \leq \cdots y_n \\ 0\,, & lainnya \end{cases}$$

Jadi, Teorema 3.3 terbukti.

Berdasarkan Teorema 3.3, dapat disimpulkan 3 hal, yaitu:

(i) $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(n)}$ akan sama dengan $y_1, y_2, \dots, y_n$ jika $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sama dengan setiap n! Permutasi dari $y_1, y_2, \dots, y_n$.

(ii) Fungsi densitas dari $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ akan sama dengan $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in}$ jika $f(y_{i1})f(y_{i2}) \dots f(y_{in}) = \prod_1^n f(y_i)$ ketika $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in}$ adalah permutasi dari $y_1, y_2, \dots, y_n$.

(iii) Jika $Y_i, i = 1, \dots, n$ berdistribusi seragam pada (0,t), maka berdasarkan persamaan di atas fungsi densitas bersama dari statistik terurut $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(n)}$ adalah

$$f(y_1, y_2, y_3) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n < t$$

Misalkan diketahui bahwa terdapat tepat satu kejadian proses Poisson yang terjadi pada waktu *t*. Akan ditentukan distribusi dari waktu di mana kejadian tersebut terjadi. Karena proses Poisson bersifat kenaikan stasioner dan kenaikan bebas, maka setiap interval dengan panjang yang sama di dalam interval *[0,t]* haruslah memiliki probabilitas yang sama. Dengan kata lain, waktu kejadian haruslah distribusi seragam pada *[0,t]*. Hal ini akan dibuktikan.

Untuk $s \leq t$, maka

$$P\{X_1 < s | N(t) = 1\} = \frac{P\{X_1 < s, N(t) = 1\}}{P\{N(t) = 1\}}$$

$$= \frac{P\{1 \text{ kejadian di dalam interval } [0, s), 0 \text{ kejadian di dalam interval } [s, t)\}}{P\{N(t) = 1\}}$$

$$= \frac{P\{1 \text{ kejadian di dalam interval } [0, s)\}P\{0 \text{ kejadian di dalam interval } [s, t)\}}{P\{N(t) = 1\}}$$

$$= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}}$$

$$= \frac{s}{t}.$$

**Teorema 3.4**

Jika *N(t)* = *n*, *n* waktu kedatangan maka distribusi probabilitas dari $S_1, \dots, S_n$ akan sama dengan distribusi statistik terurut *n* variabel acak yang saling bebas yang terdistribusi seragam pada interval *(0,t)*.

Bukti:

Akan dibuktikan $n$ waktu kedatangan $S_1, \dots, S_n$ akan mempunyai distribusi yang sama dengan statistik terurut. Akan dicari fungsi densitas $S_1, \dots, S_n$. Diketahui *N(t)* = *n*. Misalkan $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1} = t$ dan $h_i$ nilai yang sangat kecil sedemikian sehingga $t_i + h_i < t_{i+1}, i = 1$. Lalu,

$$P\{t_i \leq S_i \leq t_i + h_i, i = 1,2, \dots, n | N(t) = n\}$$

$$= \frac{\begin{array}{c} P\{\text{tepat 1 kejadian di dalam interval } [t_i, t_i + h_i], i = 1, \dots, n, \\ \text{tidak ada kejadian selain di interval } [0, t]\} \end{array}}{P\{N(t) = n\}}$$

$$= \frac{\lambda h_1 e^{-\lambda h_1} \dots \lambda h_n e^{-\lambda h_n} e^{-\lambda(t-h_1-h_2-\cdots-h_n)}}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n / n!}$$

$$= \frac{n!}{t^n} h_1 . h_2 \dots . h_n$$

atau,

$$\frac{P\{t_i \leq S_i \leq t_i + h_i, i = 1,2, \dots, n | N(t) = n\}}{h_1 h_2 \dots h_n} = \frac{n!}{t^n},$$

Dengan memisalkan $h_i \to 0$, dapat ditentukan fungsi densitas dari $S_1, \dots, S_n$ dengan *N(t)* = *n*, yaitu

$$\frac{P\{t_i \leq S_i \leq t_i + h_i, i = 1,2, \dots, n | N(t) = n\}}{h_1 h_2 \dots h_n} = \frac{n!}{t^n},$$

$$\lim_{h_i \to \infty} \frac{F(t_1, \dots t_n)}{h_1 h_2 \dots h_n} = \frac{n!}{t^n}$$

$$f(t_1, \dots, t_n) = \frac{n!}{t^n}, 0 < t_1 < \dots < t_n$$

Sehingga teorema 3.3 terbukti, yaitu *n* waktu kedatangan $S_1, \dots, S_n$ akan mempunyai distribusi yang sama dengan distribusi statistik terurut *n* variabel acak yang saling bebas yang terdistribusi seragam pada interval *(0,t)* .

**D. Proses Poisson tak Homogen**

Pada subbab ini, proses Poisson diperumum dengan mengandaikan tingkat kedatangan pada waktu *t* menjadi fungsi dari *t*.

**Definisi 3.4**

Proses membilang (*counting process*) $\{N(t),\ t \geq 0\}$ disebut proses Poisson *nonstasioner* atau tak homogen dengan fungsi intensitas $\lambda(t), t \geq 0$ jika

1. $N(0) = 0$.
2. $\{N(t), t \geq 0\}$ bersifat kenaikan bebas.
3. $P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h)$.
4. $P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h)$.

**Teorema 3.5**

Misalkan

$$m(t) = \int_0^s \lambda(s) ds$$

Maka dapat ditunjukkan bahwa

$$P\{N(t+s) - N(t) = n\}$$

$$= \frac{e^{-(m(t+s)-m(t))}[m(t+s) - m(t)]^n}{n!} \qquad , n \geq 0 \qquad (3.10)$$

yaitu bahwa $N(t+s)-N(t)$ berdistribusi Poisson dengan rata-rata $m(t+s)-m(t)$.

Bukti:

Untuk membuktikan persamaan 3.10, dapat menggunakan bukti teorema 3.1. Definsikan

$$P_n(s) = P\{N(t+s)-N(t)=n\}$$

maka

$$P_0(s+h) = P\{N(t+s+h)-N(t)=0\}$$

$= P\{0 \text{ kejadian di } (t, t+s), 0 \text{ kejadian di } (t+s, t+s+h)\}$

$= P\{0 \text{ kejadian di } (t, t+s)\}P\{0 \text{ kejadian di } (t+s, t+s+h)\}$

$= P\{N(t+s)-N(t)=0\}P\{N(t+s+h)-N(t+s)=0\}$

$= P_0(s)P_0(h)$

$= P_o(s)[1-\lambda(t+s)h+o(h)]$

oleh karena itu,

$$\frac{P_0(s+h)-P_0(s)}{h} = -\lambda(t+s)P_0(s) + \frac{o(h)}{h}$$

misalkan $h \to 0$, maka

$$P_0'(s) = -\lambda(t+s)P_0(s)$$

atau

$$\frac{P_0{}'(s)}{P_0(s)} = -\lambda(t+s)$$

dengan mengintegralkan diperoleh

$$\log P_0\,(s) = \int_0^s -\lambda(t+u)du$$

atau

$$P_0(s) = e^{-[m(t+s)-m(t)]}$$

untuk $n \geq 1$,

misalkan $\lambda t = m(t+s)-m(t)$

$$P_n(s+h) = P\{N(t+s+h)-N(t)=n\}$$

$$= P\{N(t+s)-N(t)=n, N(t+s+h)-N(t)=0\}$$

$$+P\{N(t+s)-N(t)=n-1, N(t+s+h)-N(t)=1\}$$

$$+P\{N(t+s+h)=n, N(t+s+h)-N(t)\geq 2\}$$

namun, berdasarkan definisi 3.3 (4), persamaan terakhir adalah *o(h)*, sehingga dengan menggunakan definisi 3.3 (2), diperoleh

$$P_n(s+h) = P_n(s)P_0(h) + P_{n-1}(s)P_1(h) + o(h)$$

$$= [1-\lambda h + o(h)]P_n(s) + \lambda h P_{n-1}(s) + o(h)$$

maka

$$\frac{P_n(s+h)-P_n(s)}{h} = -\lambda P_n(s) + \lambda P_{n-1}(s) + \frac{o(h)}{h}$$

misalkan $h \to 0$, maka

$$P_n'(s) = -\lambda P_n(s) + \lambda P_{n-1}(s)$$

atau

$$e^{\lambda t}[P_n'(s) + \lambda P_n(s)] = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(s)$$

oleh karena itu,

$$\frac{d}{ds}\left(e^{\lambda t}P_n(s)\right) = \lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(s) \qquad (3.11)$$

dari 3.12, diketahui bahwa ketika *n = 1*, maka

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}P_1(s)) = \lambda$$

atau

$$P_1(s) = (\lambda t + c)e^{-\lambda t},$$

dengan syarat awal *P(0) = 0*, maka

$$P_1(s) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

Untuk menujukkan bahwa $P_n(s) = \frac{e^{-(m(t+s)-m(t))}[m(t+s)-m(t)]^n}{n!}$ dapat menggunakan induksi matematika. Pertama, asumsikan untuk *n-1*, maka

$$P_{n-1}(s) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

menurut 3.12 diperoleh

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}P_n(s)\right) = \lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(s)$$

$$= \frac{\lambda e^{\lambda t}e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

sehingga,

$$e^{\lambda t} P_n(s) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} + c,$$

atau, karena $P_n(0) = P\{N(0) = n\} = 0$,

maka

$$P_n(s) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$$

Substitusikan $\lambda t = m(t+s) - m(t)$

sehingga, persamaan di atas dapat ditulis kembali menjadi:

$$P_n(s) = \frac{e^{-(m(t+s)-m(t))}[m(t+s) - m(t)]^n}{n!}$$

sehingga, persamaan 3.10 terbukti

Teorema 3.5 Terbukti

**E. Variabel Random Poisson Majemuk dan Prosesnya**

Pada subbab ini, akan dibahas mengenai variabel acak Poisson majemuk dan bagaimana prosesnya.

**Definisi 3.5**

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ merupakan variabel acak yang saling bebas dan berdistribusi secara identik serta memiliki fungsi distribusi $F$. Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ saling bebas terhadap $N$, yaitu suatu variabel acak yang berdistribusi Poisson dengan mean $\lambda$. Variabel acak

$$W = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

merupakan variabel acak Poisson majemuk dengan parameter $\lambda$ dan komponen distribusi $F$.

**Teorema 3.6**

Fungsi pembangkit momen suatu variabel acak $W$ yang berdistribusi Poisson majemuk adalah $E[e^{tW}] = e^{\lambda t(\emptyset_X(t)-1)}$.

Bukti:

Fungsi pembangkit momen dari $W$ bersyarat $N$ didefinisikan dengan:

$$E[e^{tW}] = \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{tW}|N = n]P\{N = n\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{t(X_1+\cdots+X_n)}|N = n]\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{t(X_1+\cdots+X_n)}]\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \quad (3.12)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{tX_i}]^n\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \quad (3.13)$$

Persamaan 3.12 diperoleh karena $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ saling bebas terhadap $N$. Sedangkan, persamaan 3.13 diperoleh karena $X_i$ saling bebas. Misalkan

$$\emptyset_X(t) = E[e^{tX_i}]$$

Adalah fungsi pembangkit momen dari $X_i$. Persamaan 3.13 dapat didefinisikan kembali dengan:

$$E[e^{tW}] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\emptyset_X(t)]^n e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda t} + \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)(\emptyset_X(t))}{1!} + \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^2(\emptyset_X(t))^2}{2!}$$

$$+ \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^3(\emptyset_X(t))^3}{3!} + \cdots$$

$$= e^{-\lambda t}\left(1 + \frac{(\lambda t)(\emptyset_X(t))}{1!} + \frac{(\lambda t)^2(\emptyset_X(t))^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^3(\emptyset_X(t))^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n(\emptyset_X(t))^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t(\emptyset_X(t)))^n}{n!} \quad (3.14)$$

dengan menggunakan sifat ekspansi dari deret Mc Laurin, yaitu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Maka persamaan 3.14 dapat ditulis kembali menjadi:

$$\begin{aligned} E[e^{tW}] &= e^{-\lambda t} e^{\lambda t(\emptyset_X(t))} \\ &= e^{\lambda t(\emptyset_X(t)-1)} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Sehingga, jika $X_i$ berdistribusi Poisson dengan mean $\lambda$ maka distribusi dari variabel acak Poisson majemuk $W$ dicirikan oleh fungsi pembangkit momen $m_W(t) = e^{\lambda t(\emptyset_X(t)-1)}$.

**Contoh 3.2**

Penerapan distribusi Poisson majemuk dapat ditemukan pada proses menghitung total banyaknya curah hujan. Misalkan $W$ adalah total banyaknya curah hujan, $X_i$ merupakan banyaknya curah hujan per hari di tiap daerah yang berdistribusi eksponensial, dan $N$ merupakan banyaknya hari hujan yang berdistribusi Poisson. Akan dicari fungsi pembangkit momen dari W.

Jawab:

$$\begin{aligned} m_W(t) &= \prod_{i=1}^{n} m_X(t), \qquad \text{(karena } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ saling bebas)} \\ &= \left(\frac{1}{1-\frac{t}{\lambda}}\right)^n \end{aligned}$$

Sehingga, jika $X_i$ berdistribusi eksponensial dengan mean $\frac{1}{\lambda}$ maka distribusi dari variabel acak Poisson majemuk $W$ dicirikan oleh fungsi pembangkit momen $m_W(t) = \left(\frac{1}{1-\frac{t}{\lambda}}\right)^n$.

### 3.4 Nilai Harapan Distribusi Poisson Majemuk

Nilai harapan dari variabel acak $W$ yang berdistribusi Poisson majemuk adalah $E[W] = \lambda E[X]$.

Bukti:

$$\begin{aligned} E(W) &= E(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_N) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \cdots + E(X_N) \\ &= E(N.E(X)) \\ &= E(N)E(X) \quad (N \text{ berdistribusi Poisson dengan rata} - \text{rata } \lambda) \\ &= \lambda E(X). \end{aligned} \tag{3.16}$$

### 3.5 Variansi Distribusi Poisson Majemuk

Variansi variabel acak $W$ berdistribusi Poisson majemuk adalah $var\,(W) = \lambda E(X^2)$.

Bukti:

$$\begin{aligned} var(W) &= E\big(var(W|N)\big) + var(E(W|N)) \\ &= E\big(var(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_N)\big) + var\big(\lambda E(X)\big) \\ &= E\big(var(X_1) + var(X_2) + var(X_3) + \cdots + var(X_N)\big) + \\ &\quad [E(X)]^2 var(N) \\ &= E\big(var(X) + var(X) + var(X) + \cdots + var(X)\big) + \\ &\quad [E(X)]^2 var(N) \\ &= E\big(N.var(X)\big) + [E(X)]^2 var(N) \\ &= E\big(var(X)\big)E(N) + [E(X)]^2 var(N) \quad \text{(karena } N \text{ Poisson)} \\ &= \lambda E\big(var(X)\big) + [E(X)]^2 \lambda \\ &= \lambda\big(E\big(var(X)\big) + [E(X)]^2\big) \\ &= \lambda E(X^2). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Contoh 3.3

Diketahui $W$ merupakan variabel acak Poisson majemuk dan $X$ variabel acak berdistribusi Normal, tentukan variansi dan nilai harapan dari $W$!

Jawab:

Menurut persamaan 3.16, nilai harapan dari $W$ dapat dicari dengan $E[W] = \lambda E[X]$. Nilai harapan dari variabel acak $X$ adalah

$$E(X) = \frac{d}{dt} m(t)|_{t=0}$$

$$m(t) = E(e^{tx})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Misalkan $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, maka $x = z\sigma + \mu$ dan $dx = \sigma dz$. Sehingga,

$$m(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(z\sigma+\mu)} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz\sigma+t\mu} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= \frac{e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz\sigma} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= \frac{e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2+tz\sigma-\frac{1}{2}\sigma^2t^2+\frac{1}{2}\sigma^2t^2} dz$$

$$= \frac{e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z^2-2tz\sigma+\sigma^2t^2)} e^{\frac{1}{2}\sigma^2t^2} dz$$

$$= \frac{e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z^2-2tz\sigma+\sigma^2t^2)} dz$$

$$= \frac{e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma t)^2} dz$$

$$= \frac{2e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}$$

$$= e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

Sehingga nilai harapan untuk $X$ variabel acak berdistribusi Normal adalah

$$E(X) = \frac{d}{dt}m(t)|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}|_{t=0}$$

$$= (\mu + \sigma^2 t)e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}|_{t=0}$$

$$= (\mu + 0)e^0 = \mu.$$

Sehingga nilai harapan dari variabel acak $W$ adalah

$$E[W] = \lambda E[X] = \lambda\mu. \qquad (3.18)$$

Menurut persamaan 3.17, variansi dari variabel acak $W$ dapat dicari dengan $var\,(W) = \lambda E(X^2)$. $E(X^2)$ untuk $X$ berdistribusi Normal adalah

$$E(X^2) = \frac{d^2}{dt^2}m(t)|_{t=0}$$

$$= \frac{d^2}{dt^2}e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}(\mu + \sigma^2 t)e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}|_{t=0}$$

$$= (\mu + \sigma^2 t)^2 e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} + (\sigma^2)e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}|_{t=0}$$

$$= \mu^2 e^0 + \sigma^2 e^0 = \mu^2 + \sigma^2.$$

Sehingga variansi dari variabel acak $W$ adalah

$$var\,(W) = \lambda E(X^2) = \lambda(\sigma^2 + \mu^2). \qquad (3.19)$$

Dalam praktik, $\mu$, $\lambda$, dan $\sigma$ tidak diketahui sehingga dapat diduga dengan $\bar{X}$ dan $S$, di mana $S = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x}_1)^2}{n-1}}$.

### 3.6 Proses Poisson Majemuk

Proses stokastik $\{X(t), t \geq 0\}$ merupakan proses Poisson majemuk, jika untuk $t \geq 0$, prosesnya dapat dinyatakan dengan:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

dengan $\{N(t), t \geq 0\}$ merupakan proses Poisson dan $\{X_i, i = 1,2, \dots\}$ merupakan variabel acak yang terdistibusi secara identik dan saling bebas dengan proses $\{N(t), t \geq 0\}$. Oleh karena itu, jika $\{X(t), t \geq 0\}$ merupakan proses Poisson majemuk maka $X(t)$ adalah variabel acak Poisson majemuk.

Contoh dari proses Poisson majemuk, misalkan kedatangan pelanggan pada suatu toko berdistibusi Poisson dengan parameter $\lambda$. Misalkan banyaknya uang yang dibelanjakan oleh masing-masing pelanggan merupakan variabel acak yang saling bebas dan terdistribusi secara identik dan tidak bergantung pada proses kedatangan. Jika $X(t)$ merupakan total banyaknya uang yang dibelanjakan di dalam toko oleh semua pelanggan yang datang saat waktu t, maka $\{X(t), t \geq 0\}$ merupakan proses Poisson majemuk.

# BAB IV
# DISTRIBUSI POISSON MAJEMUK PADA ANTRIAN KENDARAAN

## A. Ilustrasi

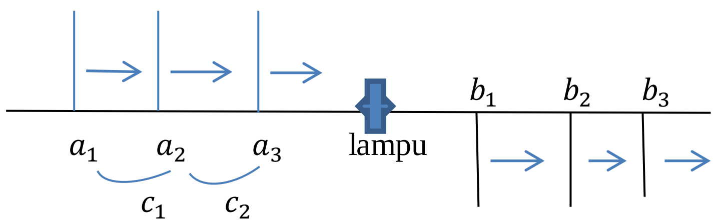
Diperkenalkan istilah-istilah yang digunakan pada Bab III dikaitkan dengan aplikasi.

### 4.1 Antrian Kendaraan

Antrian di dalam aplikasi merupakan antrian banyaknya kedatangan kendaraan, seperti kendaraan roda dua, dan kendaraan roda empat atau lebih. Kendaraan yang diamati di dalam penelitian ini tidak dibedakan jenis-jenisnya, seperti kendaraan berat seperti bus, truk; kendaraan ringan, seperti sepeda, becak, dll.

### 4.2 Antar Kedatangan Kendaraan dan Waktu Tunggu Kendaraan

Antar kedatangan kendaraan bersifat identik dan saling bebas, artinya kedatangan kendaraan kedua tidak dipengaruhi oleh kedatangan kendaraan sebelumnya. Waktu antar kedatangan adalah waktu yang dibutuhkan antara dua kedatangan kendaraan yang berurutan di dalam fasilitas pelayanan. Waktu tunggu di dalam penelitian ini adalah lamanya waktu yang dibutuhkan oleh pengendara untuk dapat keluar dari antrian di depan lampu lalu lintas. Secara lebih jelas, antar kedatangan dan waktu tunngu kendaraan dijelaskan oleh gambar 4.1

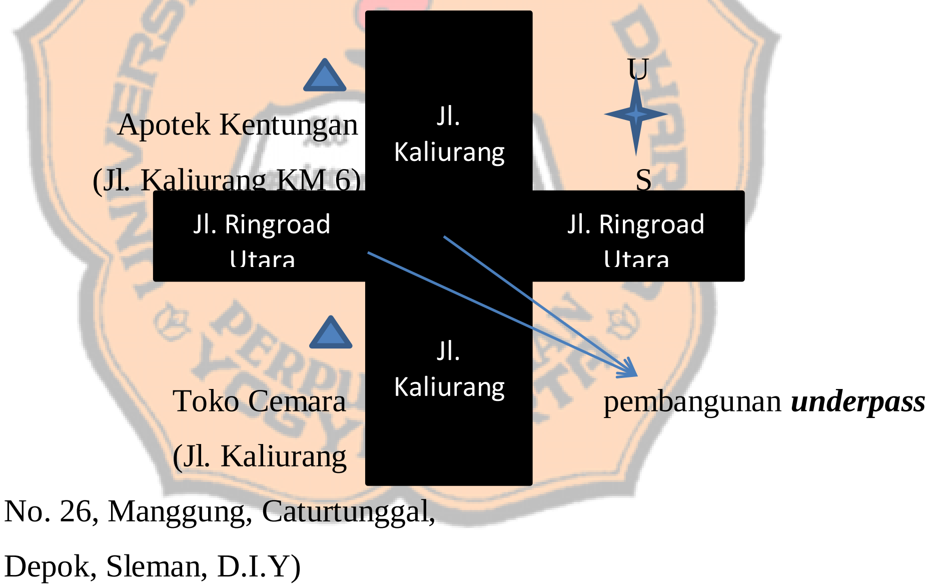



Gambar 4.1 Antrian Kendaraan

Berdasarkan Gambar 4.1, $a_1, a_2, a_3$ mewakili kedatangan kendaraan ke dalam antrian lampu lalu lintas. Sedangkan, $b_1, b_2, b_3$ mewakili banyaknya kendaraan yang keluar dari antrian di depan lampu lalu lintas. Antar kedatangan kendaraan adalah kedatangan kendaraan $a_1$ dan $a_2$. Waktu antar kedatangan diwakili oleh $c_1$ dan $c_2$. Waktu tunggu diwakili oleh lamanya waktu yang dibutuhkan oleh $a_1, a_2, a_3$ untuk keluar dari antrian di depan lampu lalu lintas.

## 4.3 Tempat Penelitian

Penelitian pada tugas akhir ini mengambil data pada perempatan Kentungan, Yogyakarta. Secara jelas, akan dilampirkan denah lokasi pengambilan data pada gambar 4.2




Gambar 4.2 Denah Pengambilan Data

Berdasarkan Gambar 4.2, pengambilan data dilakukan dari depan toko Cemara (Jl. Kaliurang N0. 26, Manggung, Caturtunggal, Depok, Sleman, D.I.Y). Panjang jarak dari Toko Cemara hingga garis henti di depan lampu lalu lintas adalah $\pm$ 100 meter. Banyaknya kendaraan yang diamati adalah kedatangan kendaraan dari arah selatan, yaitu banyaknya kedatangan kendaraan yang berasal dari arah UGM.

### 4.4 Waktu Penelitian

Pengambilan data di dalam penelitian ini dilakukan dua kali, yaitu pada tanggal 22 September 2018 – 28 September 2018 sebelum pembangunan ***underpass*** perempatan Kentungan dan pada tanggal 28 Maret 2019 – 30 Maret 2019 selama pembangunan ***underpass*** Kentungan. Pada tanggal 22 September 2018 – 28 September 2018 pengambilan data diambil pada pagi hari pukul 07.00 – 08.00 WIB, siang hari pada pukul 11.30 – 12.30 WIB, serta sore hari pada pukul 16.00 – 17.00 WIB. Pada tanggal 28 Maret 2018 – 30 Maret 2018 pengambilan data diambil pada pagi hari pukul 06.00 – 08.00 WIB, siang hari pada pukul 11.00 – 13.00 WIB, serta sore hari pada pukul 16.00 – 18.00 WIB.

## B. Data

Data di dalam penelitian ini adalah banyaknya kedatangan kendaraan ke depan lampu lalu lintas di simpang empat Kentungan, Yogyakarta. Lampu lalu lintas yang diamati dalam penelitian ini adalah lampu lalu lintas dari arah selatan. Proses pengambilan data dilakukan secara langsung, yaitu dengan mengamati secara langsung banyaknya kedatangan kendaraan ke depan lampu lalu lintas. Kelemahan dari proses pengambilan data ini adalah kurang akuratnya jumlah kendaran yang masuk ke dalam antrian akibat proses pengambilan data hanya dilakukan secara manual dengan bantuan alat seadanya. Selain itu, lampu penghitung lamanya satu siklus sering kali tidak berfungsi pada pagi hari, yaitu sekitar pukul 06.00 – 07.00 WIB.

Tujuan dari tugas akhir ini adalah untuk mengamati apakah kedatangan kendaraan pada antrian lampu lalu lintas mengikuti distribusi Poisson majemuk.

### 4.5 Asumsi-Asumsi Data

Dalam tugas akhir ini juga diasumsikan beberapa hal, seperti:

1. Tidak ada jalur putar balik, sehingga kendaraan yang sudah memasuki antrian tidak dapat keluar dari antrian.
2. Hanya memperhatikan dari satu arah saja, yaitu arah selatan.
3. Analisa dalam penelitian ini adalah mengamati bahwa proses kedatangan kendaraan mengikuti suatu distribusi tertentu dan mengamati lamanya seseorang menunggu dalam jarak tertentu agar kendaraannya dapat keluar dari lampu lalu lintas.
4. Jarak tertentu yang digunakan untuk menghitung kedatangan pelanggan adalah dimulai dari toko Cemara (Jl. Kaliurang N0. 26, Manggung, Caturtunggal, Depok, Sleman, D.I.Y) hingga garis henti.
5. Tidak memperhatikan percepatan atau perlambatan kendaraan akibat lampu merah atau hal lainnya.
6. Tidak membedakan jenis-jenis kendaraan.

### 4.6 Perbedaan Proses Pengambilan Data

Proses pengambilan data pada tanggal 22 September 2018 – 28 September 2018 (sebelum ***underpass***) dan pada tanggal 28 Maret 2019 – 30 Maret 2019 (selama ***underpass***) juga mempunyai beberapa perbedaan, yaitu:

1. Proses pengambilan data pada tanggal 22 September 2018 – 28 September 2018 (sebelum ***underpass***) tidak menghitung banyaknya kendaraan yang belok ke kiri, dikarenakan pada tanggal-tanggal itu, kendaraan yang akan belok ke kiri diperbolehkan untuk langsung belok. Sedangkan, pada proses pengambilan data pada tanggal 28 Maret 2019 – 30 Maret 2019 (selama ***underpass***), banyaknya kendaraan yang belok ke kiri masuk ke dalam perhitungan, karena pada tanggal-tanggal itu kendaraan yang belok ke kiri wajib mengikuti APILL.

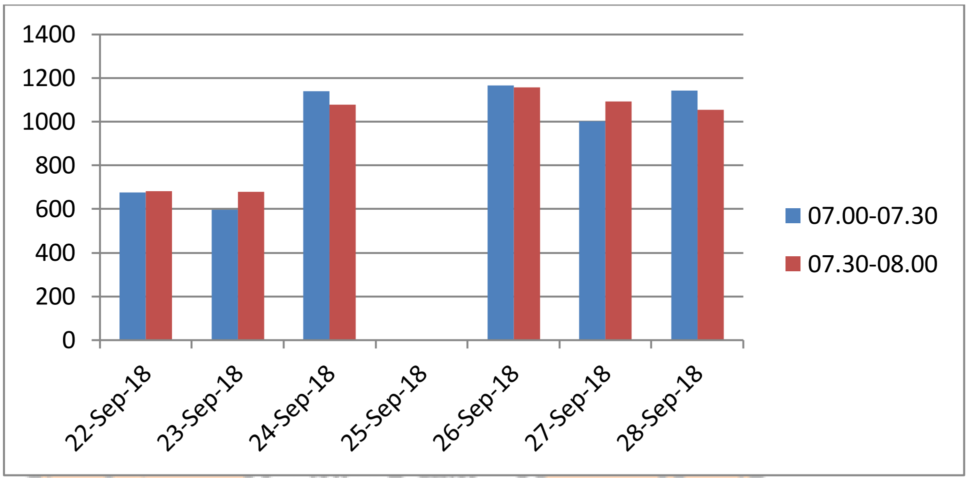
2. Panjang interval waktu lampu merah dan waktu lampu hijau pada tanggal 28 Maret 2019- 30 Maret 2019 (selama ***underpass***) memiliki perbedaan, yaitu pada pukul 11.00 WIB dan pukul 11.30 WIB. Oleh karena itu, untuk membuat data seragam, maka panjang interval waktu pada tanggal 22 September 2018 – 28 September 2018 (sebelum ***underpass***) dan 28 Maret 2019 – 30 Maret 2019 ( selama ***underpass***) dipartisi ke dalam interval yang lebih kecil, yaitu setengah jam.

## C. Kedatangan Kendaraan

Banyaknya kedatangan kendaraan adalah banyaknya kendaraan yang memasuki lampu lalu lintas dari jarak tertentu yang sudah dibatasi jaraknya. Jarak tertentu di dalam penelitian ini adalah dari depan Toko Cemara. Interval waktu di dalam penelitian ini dibagi menjadi 3, yaitu pada pagi hari, siang hari dan sore hari. Pengambilan data pada tanggal 22 September 2018 – 28 September 2018 (sebelum ***underpass***), masing-masing interval waktu memiliki panjang yaitu 1 jam. Sedangkan, pengambilan data pada tanggal 28 Maret 2019 – 30 Maret 2019 (selama ***underpass***), masing-masing interval waktu memiliki panjang 2 jam. Data panjang interval waktu dipartisi ke dalam interval-interval waktu yang lebih kecil, yaitu dalam interval waktu setengah jam. Hal ini dilakukan karena setelah melakukan pengamatan, pada tanggal 28 Maret 2019 – 30 Maret 2019 (selama ***underpass***) terdapat perbedaan durasi satu siklus lampu lalu lintas, yaitu pada pukul 11.00 WIB dan 11.30 WIB. Selain itu, karena penelitian ini bertujuan untuk mengamati apakah kedatangan kendaraan mengikuti suatu distribusi tertentu, maka diperlukan error yang seminimal mungkin. Banyaknya kendaraan yang memasuki antrian adalah banyaknya kedatangan kendaraan selama satu siklus dengan memperhatikan sisa antrian di dalam siklus sebelumnya.

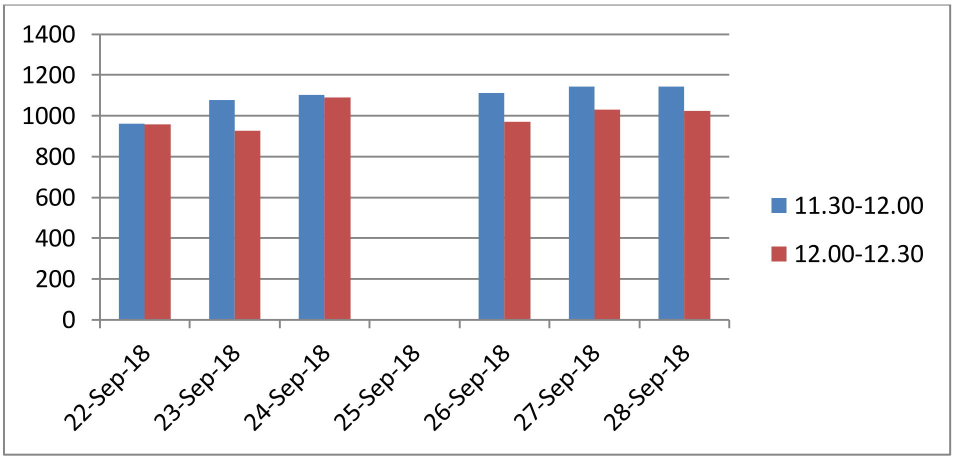
## 4.7 Distribusi Frekuensi Kedatangan Kendaraan Sebelum dibangun *Underpass*

Data banyaknya kendaraan dari arah utara di dalam perempatan Kentungan pada tanggal 22 September 2018 – 28 September 2018 (sebelum ***underpass***) diperlihatkan oleh grafik di bawah ini:



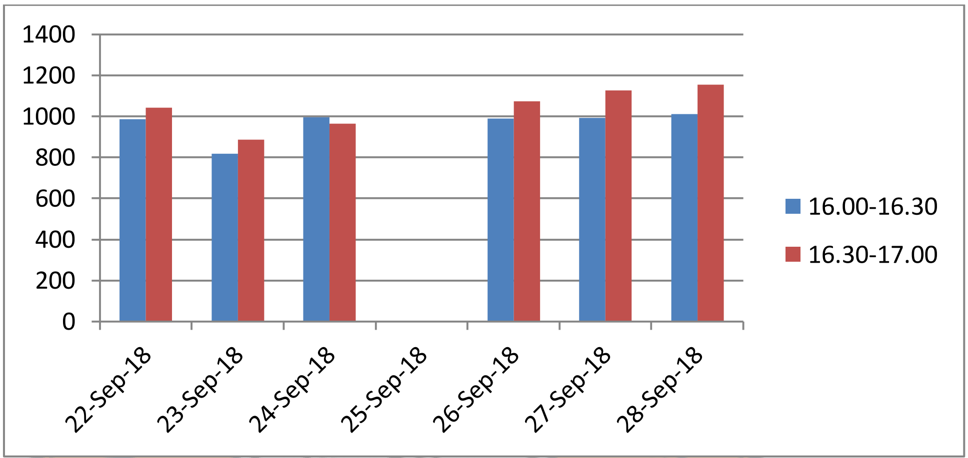

Gambar 4.3 Banyaknya Kendaraan pada Pagi Hari

Dari Grafik 4.3 dapat terlihat bahwa banyaknya kendaraan yang datang ke depan lampu lalu lintas perempatan Kentungan paling padat terjadi pada hari-hari kerja sedangkan pada saat *weekend*, banyaknya kendaraan yang melewati perempatan Kentungan cenderung tidak sepadat hari kerja.




Grafik 4.4 Banyaknya Kendaraan pada Siang Hari

Dari Grafik 4.4 dapat terlihat bahwa banyaknya kendaraan yang datang ke depan lampu lalu lintas perempatan Kentungan cenderung memiliki tingkat kepadatan yang sama. Selain itu, tingkat kepadatan kendaraan yang datang ke depan lampu lalu lintas perempatan Kentungan pada siang hari jauh lebih padat dibandingkan pada pagi hari.

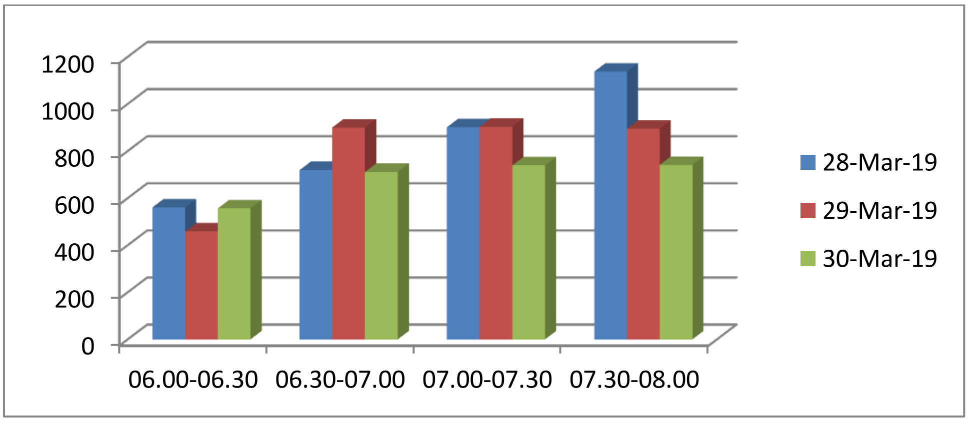



Grafik 4.5 Banyaknya Kendaraan pada Sore Hari

Dari Grafik 4.5 dapat terlihat bahwa banyaknya kendaraan yang datang ke depan lampu lalu lintas perempatan Kentungan cenderung memiliki tingkat kepadatan yang sama.

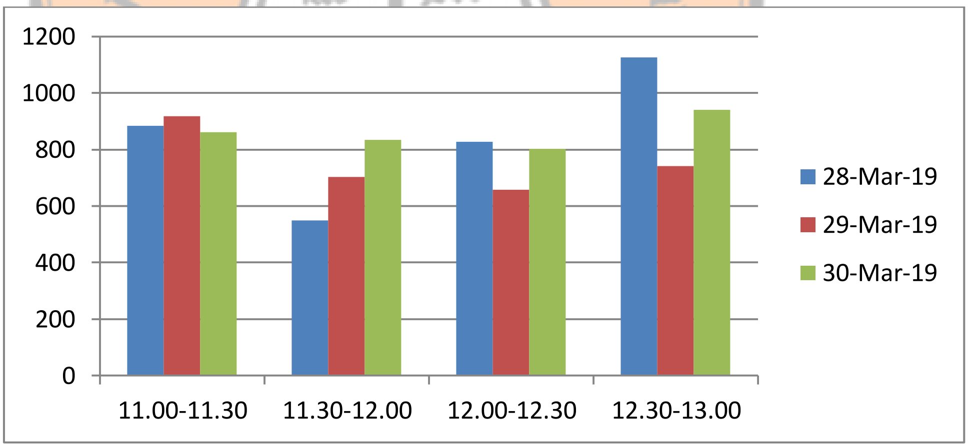
## 4.8 Distribusi Frekuensi Kedatangan Kendaraan Selama dibangun *Underpass*

Data banyaknya kendaraan dari arah utara di dalam perempatan Kentungan pada tanggal 28 Maret 2019 – 30 Maret 2019 (selama ***underpass***) diperlihatkan oleh grafik di bawah ini:



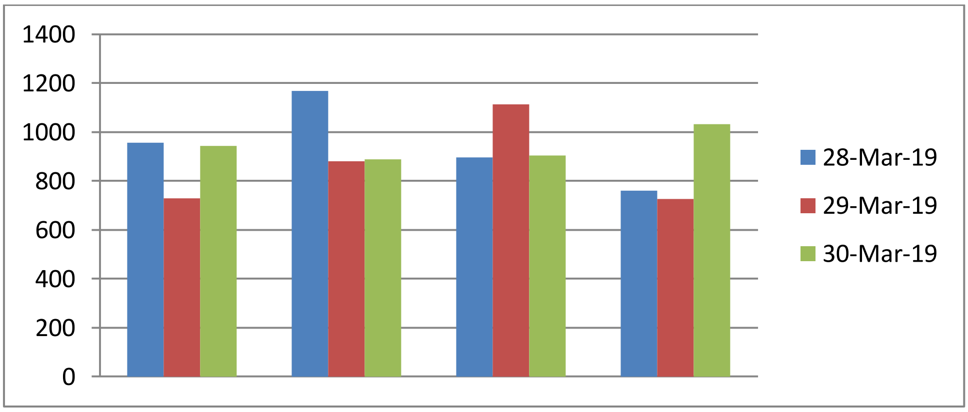

Grafik 4.6 Banyaknya Kendaraan pada Pagi Hari

Dari Grafik 4.6 dapat terlihat bahwa banyaknya kendaraan yang datang ke depan lampu lalu lintas perempatan Kentungan paling padat terjadi pada pukul 07.30-08.00. Sedangkan, kedatangan kendaraan paling sedikit terjadi pada interval waktu 06.00-06.30.




Grafik 4.7 Banyaknya Kendaraan pada Siang Hari

Dari Grafik 4.7 dapat terlihat bahwa banyaknya kendaraan yang datang ke depan lampu lalu lintas perempatan Kentungan paling padat terjadi pada interval waktu 12.30-13.00. Banyaknya kendaraan yang datang cenderung memiliki tingkat kepadatan yang sama. Selain itu, tingkat kedatangan kendaraan pada siang hari jauh lebih padat dibandingkan pada pagi hari.




Grafik 4.8 Banyaknya Kendaraan pada Sore Hari

Dari Grafik 4.8 dapat terlihat bahwa banyaknya kendaraan yang datang ke depan lampu lalu lintas perempatan Kentungan paling padat terjadi pada interval waktu 16.30-17.00. Banyaknya kedatangan kendaraan cenderung memiliki tingkat kepadatan yang sama.

## 4.9 Perbandingan Kepadatan Kendaraan Sebelum dan Selama *Underpass*

Berdasarkan distribusi frekuensi kedatangan kendaraan yang telah dijelaskan pada subbab 4.7 dan 4.8, akan dibandingkan kepadatan kedatangan kendaraan yang melintasi lampu lalu lintas Kentungan, Yogyakarta. Siklus adalah lamanya waktu merah dan lampu hijau menyala di dalam sistem lampu lalu lintas. Perbandingan kepadatan kendaraan/siklus dijelaskan pada Tabel 4.1.

| Rata-rata Jumlah Kedatangan Kendaraan | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Sebelum *Underpass* | | | Selama *Underpass* | | |
| | Kamis | Jumat | Sabtu | Kamis | Jumat | Sabtu |
| 07.00-08.00 | 111.38 | 104.71 | 67.61 | 106.25 | 119.86 | 93.06 |
| 11.30-12.30 | 114.31 | 116.05 | 101 | 105.86 | 97.93 | 96.12 |
| 16.00-17.00 | 111.42 | 113.94 | 106.84 | 110.46 | 108.8 | 107.7 |

Tabel 4.1 Perbandingan Jumlah Kedatangan Kendaraan (kendaraan/siklus)

Pada jam 07.00 WIB – 08.00 WIB, perbedaan tingkat kepadatan rata-rata kendaraan/ siklus berkisar 5 kendaraan – 26 kendaraan, yang dapat ditafsirkan tidak terlalu berbeda signifikan. Pada jam 11.30 WIB – 12.30 WIB, tingkat rata-rata kedatangan kendaraan/siklus lebih padat sebelum pembangunan ***underpass***, yaitu berkisar antara 5 kendaraan – 19 kendaraan. Pada jam 16.00 WIB – 17.00 WIB, perbedaan tingkat kepadatan rata-rata kendaraan/siklus berkisar 1 kendaraan – 5 kendaraan, yang dapat ditafsirkan tidak terlalu berbeda signifikan. Sehingga, secara umum dapat disimpulkan bahwa adanya pembangunan ***underpass*** tidak terlalu berdampak pada tingkat kepadatan lalu lintas.

## D. Uji Distribusi Kendaraan

Berdasarkan data yang telah diambil, akan diuji apakah data tersebut mengikuti suatu distribusi tertentu. Data tersebut akan diuji sebelum dan selama pembangunan ***underpass*** Kentungan. Data yang akan diuji adalah banyaknya kendaraan yang datang selama interval waktu tertentu. Jika $W$ berdistribusi Poisson majemuk, maka

$$W = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

dengan,

$W$ = total banyaknya kendaraan yang masuk siklus pada waktu $t$.

$N$ = banyaknya siklus pada interval waktu $t$.

$X_i$= banyaknya kendaraan yang masuk pada siklus *ke-i*.

karena $W$ berdistribusi Poisson majemuk, maka $N$ berdistribusi Poisson dan $X_i$ berdistribusi sebarang yang saling bebas dan identik.

Data yang diuji adalah banyaknya kendaraan yang datang ke depan lampu lalu lintas dengan melakukan pengujian apakah $X_i$ berdistribusi sebarang yang saling identik dan $N$ berdistribusi Poisson.

### 4.10 Hasil Pengujian $X_i$

Hasil pengujian untuk $X_i$ akan dibagi ke dalam 2 interval waktu, yaitu pada tangal 22 September 2018 – 28 September 2018 (sebelum ***underpass***) dan 28 Maret 2019 – 30 Maret 2019 (selama ***underpass***).

a) **Hasil pengujian untuk $X_i$ dengan panjang interval waktu setengah jam pada tanggal 22 September 2018 – 28 September 2018 (sebelum *underpass*)**

Hasil pengujian untuk $X_i$ pada tanggal 22 September 2018 – 28 September 2018 (sebelum ***underpass***) ditunjukkan oleh tabel di bawah ini:

| | Sabtu | Minggu | Senin | Rabu | Kamis | Jumat |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Hipotesis | $H_0$ : data kedatangan kendaraan per siklus dalam interval waktu setengah jam berdistribusi Normal.<br>$H_1$ : data kedatangan kendaraan per siklus dalam interval waktu setengah jam tidak berdistribusi Normal. | | | | | |
| Tingkat signifikasi ($\alpha$) | Tingkat siginifikasi yang digunakan adalah 5% | | | | | |
| P-value 07.00–07.30 | 0.5915 | 0.8051 | 0.1962 | 0.3769 | 0.1345 | 0.09633 |
| P-value 07.30–08.00 | 0.4398 | 0.09877 | 0.6077 | 0.6442 | 0.2151 | 0.8536 |
| P-value 11.30–12.00 | 0.7235 | 0.9095 | 0.4397 | 0.2904 | 0.6412 | 0.6888 |
| P-value 12.00–12.30 | 0.2614 | 0.05689 | 0.8301 | 0.5417 | 0.9836 | 0.08597 |
| P-value 16.00–16.30 | 0.1731 | 0.237 | 0.8656 | 0.372 | 0.7457 | 0.6799 |
| P-value 16.30–17.00 | 0.7768 | 0.3253 | 0.7917 | 0.9338 | 0.1996 | 0.3526 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Wilayah kritis | $H_0$ ditolak jika $p - value < \alpha$. | | | | | |
| Keputusan | $H_0$ diterima | $H_0$ diterima | $H_0$ diterima | $H_0$ diterima | $H_0$ diterima | $H_0$ diterima |

Tabel 4.2 Uji Kedatangan Kendaraan Sebelum ***Underpass***

Berdasarkan hasil pengujian, dapat disimpulkan bahwa kedatangan kendaraan per siklus dengan panjang interval waktu setengah jam pada tanggal 22 September 2018 – 28 September 2018 (sebelum ***underpass***) saling identik dan mengikuti distribusi Normal.

**b) Hasil pengujian untuk $X_i$ dengan panjang interval waktu setengah jam pada tanggal 28 Maret 2019 – 30 Maret 2019 (selama *underpass*)**

Selanjutnya, akan diuji apakah $X_i$ pada tanggal 28 Maret 2019 – 30 Maret 2019 (selama ***underpass***) berdistribusi Normal. Hasil pengujian $X_i$ pada tanggal 28 Maret 2019 – 30 Maret 2019 (selama ***underpass***) ditunjukkan oleh tabel di bawah ini:

| | Kamis | Jumat | Sabtu |
|---|---|---|---|
| Hipotesis | $H_0$ : data kedatangan kendaraan per siklus dalam interval waktu setengah jam berdistribusi Normal.<br>$H_1$ : data kedatangan kendaraan per siklus dalam interval waktu setengah jam tidak berdistribusi Normal. | | |
| Tingkat siginifikasi $(\alpha)$ | Tingkat signifikasi yang digunakan adalah 5% | | |
| P-value 06.00-06.30 | 0.4216 | 0.7441 | 0.7722 |
| P-value 06.30-07.00 | 0.5567 | 0.4327 | 0.2278 |
| P-value 07.00-07.30 | 0.6903 | 0.1046 | 0.9194 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| P-value 07.30-08.00 | 0.7569 | 0.3659 | 0.1048 |
| P-value 11.00-11.30 | 0.7267 | 0.6247 | 0.8255 |
| P-value 11.30-12.00 | 0.9531 | 0.6752 | 0.8691 |
| P-value 12.00-12.30 | 0.4213 | 0.2621 | 0.7286 |
| P-value 12.30-13.00 | 0.4533 | 0.5108 | 0.2765 |
| P-value 16.00-16.30 | 0.927 | 0.05594 | 0.184 |
| P-value 16.30-17.00 | 0.4523 | 0.4585 | 0.2134 |
| P-value 17.00-17.30 | 0.8479 | 0.7075 | 0.09094 |
| P-value 17.30-18.00 | 0.4356 | 0.7734 | 0.9852 |
| Wilayah kritis | $H_0$ ditolak jika $p - value < \alpha$ | | |
| Kesimpulan | $H_0$ diterima | $H_0$ diterima | $H_0$ diterima |

Tabel 4.3 Uji Kedatangan Kendaraan Selama ***Underpass***

Berdasarkan hasil pengujian, dapat disimpulkan bahwa kedatangan kendaraan per siklus dengan panjang interval waktu setengah jam pada tanggal 28 Maret 2019 – 30 Maret 2019 (selama ***underpass***) saling identik dan mengikuti distribusi Normal.

### 4.11 Hasil Pengujian N

Akan diuji banyaknya siklus yang terjadi selama selang waktu setengah jam berdistribusi Poisson.

a) **Hasil Pengujian Tanggal 22 September 2018 – 28 September 2018 (sebelum *underpass*)**

Hasil pengujian akan ditunjukkan pada tabel di bawah ini:

| | Sabtu | Minggu | Senin | Rabu | Kamis | Jumat |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Hipotesis | $H_0$ : data banyaknya siklus selama rentang waktu setengah jam berdistribusi Poisson.<br>$H_1$ : data banyaknya siklus selama rentang waktu setengah jam tidak berdistribusi Poisson. | | | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tingkat signifikasi ($\alpha$) | Tingkat siginifikasi yang digunakan adalah 5% | | | | | |
| P-value pagi hari | 0.4594 | 0.4594 | 0.4594 | 0.4594 | 0.4594 | 0.4594 |
| P-value siang hari | 0.4573 | 0.4573 | 0.4573 | 0.4573 | 0.4573 | 0.4573 |
| P-value sore hari | 0.4573 | 0.4573 | 0.4573 | 0.4573 | 0.4573 | 0.4573 |
| Wilayah kritis | $H_0$ ditolak jika $p - value < \alpha$. | | | | | |
| Keputusan | $H_0$ diterima | $H_0$ diterima | $H_0$ diterima | $H_0$ diterima | $H_0$ diterima | $H_0$ diterima |

Tabel 4.4 Uji Siklus Sebelum ***Underpass***

Berdasarkan hasil pengujian, dapat disimpulkan bahwa banyaknya siklus dalam rentang waktu setengah jam pada tanggal 22 September 2018 – 28 September 2018 (sebelum ***underpass***) berdistribusi Poisson.

**b) Hasil Pengujian Gabungan Siklus Tanggal 22 September 2018 – 28 September 2018 (sebelum *underpass*)**

Hasil pengujian untuk gabungan dari banyaknya siklus dalam rentang waktu setengah jam pada tanggal 22 September 2018 – 28 September 2018 (sebelum ***underpass***) ditunjukkan pada tabel di bawah ini:

| | |
|---|---|
| Hipotesis | $H_0$ : data banyaknya siklus selama rentang waktu setengah jam berdistribusi Poisson.<br>$H_1$ : data banyaknya siklus selama rentang waktu setengah jam tidak berdistribusi Poisson. |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tingkat signifikasi ($\alpha$) | Tingkat siginifikasi yang digunakan adalah 5% | | | | | |
| P-value pagi hari | 0.4594 | | | | | |
| P-value siang hari | 0.4573 | | | | | |
| P-value sore hari | 0.4573 | | | | | |
| Wilayah kritis | $H_0$ ditolak jika $p - value < \alpha$. | | | | | |
| Keputusan | $H_0$ diterima | $H_0$ diterima | $H_0$ diterima | $H_0$ diterima | $H_0$ diterima | $H_0$ diterima |

Tabel 4.5 Uji Gabungan Siklus Sebelum ***Underpass***

Berdasarkan hasil pengujian, diperoleh bahwa banyaknya siklus gabungan pada tanggal 22 September 2018 – 28 September 2018 (sebelum ***underpass***) berdistribusi Poisson.

**c) Hasil Pengujian Siklus Tanggal 28 Maret 2019 – 30 Maret 2019 (selama *Underpass*)**

Akan diuji banyaknya siklus yang terjadi selama selang waktu setengah jam pada tanggal 28 Maret 2019 – 30 Maret 2019 (selama ***underpass***) dari arah utara perempatan Kentungan. Hasil pengujian pada tanggal 28 Maret 2019 – 30 Maret 2019 (selama ***underpass***) akan ditunjukkan pada tabel di bawah ini:

| | Kamis | Jumat | Sabtu |
|---|---|---|---|
| Hipotesis | $H_0$ : data banyaknya siklus selama rentang waktu setengah jam berdistribusi Poisson.<br>$H_1$ : data banyaknya siklus selama rentang waktu | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | setengah jam tidak berdistribusi Poisson. | | |
| Tingkat siginifikasi $(\alpha)$ | Tingkat signifikasi yang digunakan adalah 5% | | |
| P-value pagi hari | 0.3913 | 0.4519 | 0.361 |
| P-value siang hari | 0.8484 | 0.3913 | 0.5432 |
| P-value sore hari | 0.361 | 0.4519 | 0.4549 |
| Wilayah kritis | $H_0$ ditolak jika $p - value < \alpha$ | | |
| Kesimpulan | $H_0$ diterima | $H_0$ diterima | $H_0$ diterima |

Tabel 4.6 Uji Siklus Selama ***Underpass***

Berdasarkan hasil pengujian, dapat disimpulkan bahwa banyaknya siklus dalam rentang waktu setengah jam pada tanggal 28 Maret 2019 – 30 Maret 2019 (selama ***underpass***) berdistribusi Poisson.

**d) Hasil Pengujian Gabungan Siklus Tanggal 28 Maret 2019 – 30 Maret 2019 (selama *underpass*)**

Hasil Pengujian untuk gabungan dari banyaknya siklus dalam rentang waktu setengah jam pada tanggal 28 Maret 2019 – 30 Maret 2019 (selama ***underpass***) juga menunjukkan berdistribusi Poisson. Hal ini ditunjukkan pada tabel di bawah ini:

| | |
|---|---|
| Hipotesis | $H_0$ : data banyaknya siklus selama rentang waktu setengah jam berdistribusi Poisson.<br>$H_1$ : data banyaknya siklus selama rentang waktu setengah jam tidak berdistribusi Poisson. |
| Tingkat signifikasi $(\alpha)$ | Tingkat siginifikasi yang digunakan adalah 5% |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P-value pagi hari | 0.3891 | | | | | |
| P-value siang hari | 0.7602 | | | | | |
| P-value sore hari | 0.4179 | | | | | |
| Wilayah kritis | $H_0$ ditolak jika $p - value < \alpha$. | | | | | |
| Keputusan | $H_0$ diterima | $H_0$ diterima | $H_0$ diterima | $H_0$ diterima | $H_0$ diterima | $H_0$ diterima |

Tabel 4.7 Uji Gabungan Siklus Selama ***Underpass***

Berdasarkan hasil pengujian, dapat disimpulkan bahwa banyaknya siklus dalam rentang waktu setengah jam pada tanggal 28 Maret 2019 – 30 Maret 2019 (selama ***underpass***) berdistribusi Poisson.

**4.12 Penduga Nilai Harapan Kedatangan Kendaraan**

Karena $N$ berdistribusi Poisson dan $X_i$ berdistribusi sebarang yang saling identik, misalnya dalam kasus ini distribusi Normal, maka $W$ berdistribusi Poisson majemuk (menurut Definisi 3.5). Sehingga, kedatangan kendaraan di dalam lampu lalu lintas pada saat sebelum dan selama pembangunan ***underpass*** Kentungan mengikuti distribusi tertentu, yaitu distribusi Poisson majemuk.

Selanjutnya, akan dihitung penduga nilai harapan pada antrian kendaraan di depan lampu lalu lintas kentungan. Sebelum menghitung penduga nilai harapan dari total banyaknya kedatangan kendaraan, akan diperkenalkan beberapa notasi, yaitu $\lambda, \mu,$ dan $\sigma$. $\lambda$ merupakan parameter Poisson dan diduga dengan $\bar{N}$, yaitu rata-rata banyaknya siklus per interval waktu $t$. $t$ di dalam penelitian ini adalah setengah jam. $\mu$ merupakan parameter distribusi Normal dan diduga dengan $\bar{X}$, yaitu rata-rata banyaknya kedatangan kendaraan/siklus dalam interval waktu setengah jam. $\sigma$ merupakan parameter distribusi Normal dan diduga dengan $S$, yaitu standar deviasi banyaknya kendaraan/siklus dalam interval waktu setengah jam.

Perlu diingat, total banyaknya siklus dalam interval waktu setengah jam pada pagi hari sebelum pembangunan ***underpass*** adalah $N_1 = 11$ dan $N_2 = 10$, sehingga $\lambda$ dapat diduga dengan:

$$\lambda = \overline{N} = \frac{N_1+N_2+\cdots N_k}{n} = \frac{N_1+N_2}{2} = 10.5. \qquad (4.1)$$

$\lambda = 10.5$ merepresentasikan bahwa rata-rata banyaknya siklus pada pagi hari sebelum pembangunan ***underpass*** per interval waktu $t$=setengah jam adalah 10.5. Perhitungan untuk $\lambda$ pada pagi, siang, dan sore hari (sebelum dan selama ***underpass***) dapat menggunakan rumus pada persamaan 4.1.

Selanjutnya, akan diperkenalkan rumus untuk mencari $\mu$. $\mu$ dapat diduga dengan rata-rata terbobot:

$$\mu = \bar{X} = \frac{n_1\overline{X_1} + n_2\overline{X_2} + \cdots + n_k\overline{X_k}}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}.$$

Sedangkan, $\sigma$ dapat diduga dengan menggunakan rumus:

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}.$$

Perhitungan $\sigma$ dapat dilakukan dengan bantuan Microsoft Excel, yaitu dengan menggunakan rumus:

*=STDEV([Number1];[Number2];…;[NumberN])*

Secara lengkap akan diperlihatkan data penduga $\lambda, \mu, \sigma$. Data penduga $\lambda, \mu,$ dan $\sigma$ diperlihatkan pada Tabel 4.8

| Data Penduga λ,μ, dan σ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Sebelum ***Underpass*** | | | Selama ***Underpass*** | | |
| | $\lambda$ | $\mu$ | $S$ | $\lambda$ | $\mu$ | $S$ |
| pagi | 10.5 | 93.60 | 11.61 | 7.83 | 95.94 | 13.92 |
| siang | 9.5 | 110.54 | 12.83 | 8.16 | 106.48 | 10.51 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| sore | 9.5 | 105.66 | 12.93 | 7.91 | 112.09 | 8.64 |

Tabel 4.8 Data Penduga $\lambda, \mu,$ dan $\sigma$

Sebelumnya, pada bab III (persamaan 3.18 dan persamaan 3.19), diketahui bahwa nilai harapan Poisson majemuk dengan $X$ berdistribusi Normal adalah $E(W) = \lambda\mu$ dan variansi Poisson majemuk dengan $X$ berdistribusi Normal adalah $var(W) = \lambda(\mu^2 + \sigma^2)$. Penduga nilai harapan (total banyaknya kedatangan kendaraan) dan penduga standar deviasi, yaitu $S = \sqrt{\lambda(\mu^2 + \sigma^2)}$ dari datangnya kendaraan dapat terlihat pada Tabel 4.9

| Penduga Nilai Harapan dan Variansi | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Sebelum ***Underpass*** | | Selama ***Underpass*** | |
| | Penduga Nilai Harapan | Penduga Standar Deviasi | Penduga Nilai Harapan | Penduga Standar Deviasi |
| Pagi | 982.8 | 305.6229655 | 751.2102 | 271.2716305 |
| Siang | 1050.13 | 342.9943946 | 868.8768 | 305.6458017 |
| Sore | 1003.77 | 328.095405 | 886.6319 | 316.1851483 |

Tabel 4.9 Penduga Nilai Harapan dan Variansi

Berdasarkan Tabel 4.9, dapat dilihat bahwa total banyaknya kedatangan kendaraan/setengah jam pada pagi hari sebanyak 982 kendaraan, pada siang hari sebanyak 1050 kendaraan, dan sore hari sebanyak 1003. Hal ini cukup wajar, karena berdasarkan pengamatan langsung dan berdasarkan Gambar 4.3 – Gambar 4.5 dapat dilihat bahwa total banyaknya kedatangan kendaraan/setengah jam berkisar antara 800 kendaraan - 1000 kendaraan per setengah jam (sebelum ***underpass***).

Sedangkan, total banyaknya kedatangan kendaraan/setengah jam (selama ***underpass***) pada pagi hari sebanyak 751 kendaraan, pada siang hari sebanyak 868 kendaraan, dan sore hari sebanyak 886 kendaraan. Hal ini cukup wajar, karena berdasarkan pengamatan langsung dan berdasarkan Gambar 4.6 – Gambar 4.8, total banyaknya kedatangan kendaraan/setengah jam berkisar antara 600 kendaraan – 1100 kendaraan. Walaupun total banyaknya kedatangan kendaraan/setengah jam saat sebelum ***underpass*** cenderung lebih padat jika dibandingkan dengan selama ***underpass***. Tetapi berdasarkan Tabel 4.1, dapat disimpulkan bahwa pembangunan ***underpass*** tidak terlalu berdampak signifikan terhadap kepadatan lalu lintas, yang dapat berarti bahwa pembangunan underpass tidak terlalu mempengaruhi total banyaknya kedatangan kendaraan yang mengantri di depan lampu lalu lintas Kentungan, Yogyakarta. Sehingga, dapat disimpulkan secara umum bahwa rekayasa lalu lintas kendaraan dapat dikatakan berhasil selama pembangunan ***underpass***.

# BAB V
# KESIMPULAN DAN SARAN

## A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan, diperoleh beberapa kesimpulan:

1. Total banyaknya kedatangan kendaraan di dalam lampu lalu lintas Kentungan, Yogyakarta dapat dimodelkan dengan distribusi Poisson majemuk dengan banyaknya kedatangan kendaraan/siklus selama interval waktu setengah jam berdistribusi Normal dan banyaknya siklus pada interval waktu setengah jam berdistribusi Poisson.
2. Nilai harapan total banyaknya kedatangan kendaraan/setengah jam cukup wajar jika dibandingkan dengan pengamatan langsung di lapangan, yaitu berkisar antara 800 kendaraan – 1000 kendaraan sebelum pembangunan ***underpass*** dan berkisar antara 600 kendaraan – 1100 kendaraan selama pembangunan ***underpass***.
3. Terbatas pada data yang diambil pada tugas akhir ini, pembangunan underpass tidak terlalu berdampak signifikan terhadap kepadatan lalu lintas, yang dapat berarti bahwa pembangunan ***underpass*** tidak terlalu mempengaruhi total banyaknya kedatangan kendaraan yang mengantri di depan lampu lalu lintas Kentungan, Yogyakarta.
4. Rekayasa lalu lintas kendaraan dapat dikatakan berhasil selama pembangunan ***underpass***.

## B. Saran

Dalam penelitian ini penulis menganalisa jika kedatangan kendaraan/siklus selama interval waktu setengah jam berdistribusi Normal, tetapi di dalam definisi Poisson majemuk memungkinkan bahwa kedatangan kendaraan/siklus berdistribusi sebarang yang saling identik, misalnya distribusi Eksponensial. Selain itu, dapat juga dilakukan pengamatan untuk interval waktu yang lebih panjang. Hal ini dilakukan untuk mengurangi tingkat error dan mengetahui apakah lamanya lampu merah dan lampu hijau selalu konstan di dalam interval waktu setengah jam. Rekayasa lalu lintas yang dilakukan oleh pemerintah Yogyakarta sudah cukup efektif untuk mengatasi kemacetan selama pembangunan **underpass**. Walaupun jika dilihat di dalam lapangan, banyaknya kendaraan cenderung lebih padat selama pembangunan ***underpass***. Tetapi setelah dilakukan pengamatan secara langsung, tingkat kepadatan kendaraan selama pembangunan ***underpass*** tidak berbeda signifikan dengan tingkat kepadatan kendaraan sebelum pembangunan ***underpass***.

# DAFTAR PUSTAKA


Allen, L.J.S. (2003). *Introduction to Stochastic Process with Applications to Biology*. USA: Pearson Education, Inc.

Bain, L dan Engelhardt. (1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. Second edition. Pacific Grove: Wadsworth Publishing Company.

Bhat, Narayan U. (2008). *An Introduction to Queueing Theory, Modelling and Analysis in Applications*. Boston: Birkhauser.

Dalgaard, Peter. (2008). *Introduction Statistics with R*. Second edition. New York: Springer.

Kakiay, Thomas J. (2004). *Dasar Teori Antrian Untuk Kehidupan Nyata*. Yogyakarta: Andi.

Mendenhall, W., Scheaffer, R. L., dan Wackerly, D. D. (2008). *Mathematical Statistics with Application*. Seventh edition. Belmont: Thomson Learning, Inc.

Mufidah, Nilam. (2018). *Pemodelan Antrian Kendaraan Bermotor Menggunakan Model Antrian M/M/1 di Simpang Tiga Ringroad Utara Yogyakarta pada Pagi Hari dan Sore Hari*. Yogyakarta: Universitas Islam Indonesia.

Riana, Mita. (2014). *Model Antrian Waktu Tunggu Kendaraan di Persimpangan Lampu Lalu Lintas Condong Catur dengan Compound Poisson Arrivals dan Memperhatikan Sisa Antrian*. Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta.

Ross, Sheldon M. (1996). *Stochastic Process*. Second edition. Berkeley: John Wiley & Sons, Inc.

Siagian, P. (1987). *Penelitian Operasional: Teori dan Praktek*. Jakarta: Universitas Indonesia Press.

Subanti, Sri. (2015). *Teori Peluang*. Surakarta: Universitas Sebelas Maret Press.

Walpole, R. E., Raymond H. Myres., Syaron L. Myres., dan Keying Ye. (2007). *Probability & Statistics for Engineers & Scientits*. Eighth edition. Boston: Pearson Education, Inc.

Widiastuti, Amalya. (2016). *Model Antrian dengan Kedatangan Berdistribusi Poisson dan Waktu Pelayanan Berdistribusi Eksponensial*. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

LAMPIRAN

N = banyaknya siklus

$N_1 = 11$ (siklus 1–11)

$N_2 = 10$ (siklus 12–21)

| siklus ke-i | | Sabtu | Minggu | Senin | Rabu | Kamis | Jumat |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Datang | datang | Datang | datang | datang | Datang |
| 1 | 6.59 | 43 | 51 | 99 | 102 | 108 | 98 |
| 2 | 7.02 | 47 | 43 | 103 | 98 | 121 | 100 |
| 3 | 7.05 | 60 | 45 | 97 | 123 | 111 | 121 |
| 4 | 7.08 | 53 | 67 | 94 | 109 | 98 | 106 |
| 5 | 7.11 | 60 | 56 | 103 | 117 | 109 | 94 |
| 6 | 7.14 | 58 | 45 | 116 | 98 | 143 | 92 |
| 7 | 7.17 | 56 | 36 | 98 | 95 | 112 | 106 |
| 8 | 7.2 | 79 | 56 | 106 | 117 | 132 | 102 |
| 9 | 7.23 | 73 | 76 | 99 | 113 | 112 | 127 |
| 10 | 7.26 | 71 | 66 | 107 | 102 | 102 | 105 |
| 11 | 7.29 | 77 | 56 | 119 | 93 | 98 | 93 |
| 12 | 7.32 | 84 | 54 | 92 | 92 | 122 | 89 |
| 13 | 7.35 | 72 | 78 | 106 | 93 | 108 | 96 |
| 14 | 7.38 | 69 | 68 | 106 | 123 | 134 | 98 |
| 15 | 7.41 | 81 | 64 | 107 | 129 | 126 | 108 |
| 16 | 7.45 | 77 | 46 | 109 | 139 | 97 | 119 |
| 17 | 7.48 | 65 | 78 | 125 | 117 | 108 | 120 |
| 18 | 7.51 | 87 | 67 | 116 | 135 | 100 | 107 |
| 19 | 7.54 | 65 | 78 | 110 | 108 | 99 | 83 |
| 20 | 7.57 | 76 | 68 | 108 | 102 | 105 | 108 |
| 21 | 8 | 67 | 79 | 98 | 118 | 94 | 127 |

Data Kedatangan Kendaraan 22 September 2018 – 28 September 2018

(pagi hari) –Sebelum ***underpass***

| siklus ke-i | | Sabtu | Minggu | Senin | Rabu | Kamis | Jumat |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Datang | datang | datang | datang | datang | datang |
| 1 | 11.3 | 75 | 108 | 114 | 112 | 124 | 98 |
| 2 | 11.33 | 52 | 91 | 108 | 121 | 128 | 109 |
| 3 | 11.37 | 86 | 102 | 112 | 96 | 99 | 112 |
| 4 | 11.4 | 102 | 117 | 98 | 118 | 120 | 113 |
| 5 | 11.44 | 124 | 116 | 123 | 106 | 116 | 105 |
| 6 | 11.47 | 89 | 99 | 99 | 124 | 132 | 123 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 11.5 | 128 | 106 | 110 | 113 | 111 | 135 |
| 8 | 11.54 | 105 | 105 | 142 | 123 | 108 | 127 |
| 9 | 11.57 | 102 | 120 | 90 | 102 | 105 | 107 |
| 10 | 12 | 99 | 112 | 108 | 96 | 99 | 129 |
| 11 | 12.04 | 94 | 103 | 136 | 103 | 100 | 100 |
| 12 | 12.07 | 105 | 103 | 122 | 114 | 109 | 119 |
| 13 | 12.11 | 96 | 100 | 145 | 109 | 115 | 106 |
| 14 | 12.14 | 111 | 108 | 106 | 99 | 119 | 128 |
| 15 | 12.18 | 108 | 100 | 109 | 120 | 125 | 106 |
| 16 | 12.22 | 128 | 117 | 93 | 98 | 139 | 129 |
| 17 | 12.25 | 94 | 102 | 141 | 109 | 108 | 147 |
| 18 | 12.28 | 109 | 99 | 124 | 96 | 121 | 106 |
| 19 | 12.32 | 112 | 114 | 113 | 124 | 94 | 106 |
| 9 | 11.57 | 102 | 120 | 90 | 102 | 105 | 107 |
| 10 | 12.00 | 99 | 112 | 108 | 96 | 99 | 129 |
| 11 | 12.04 | 94 | 103 | 136 | 103 | 100 | 100 |
| 12 | 12.07 | 105 | 103 | 122 | 114 | 109 | 119 |
| 13 | 12.11 | 96 | 100 | 145 | 109 | 115 | 106 |
| 14 | 12.14 | 111 | 112 | 106 | 99 | 119 | 128 |
| 15 | 12.18 | 108 | 100 | 109 | 120 | 125 | 106 |
| 16 | 12.22 | 128 | 99 | 93 | 98 | 139 | 129 |
| 17 | 12.25 | 94 | 102 | 141 | 109 | 108 | 147 |
| 18 | 12.28 | 109 | 105 | 124 | 96 | 121 | 106 |
| 19 | 12.32 | 112 | 103 | 113 | 124 | 94 | 106 |

Data Kedatangan Kendaraan 22 September 2018 – 28 September 2018

(siang hari) – sebelum ***underpass***

| siklus ke- i | | Sabtu | Minggu | Senin | Rabu | Kamis | Jumat |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | datang | datang | datang | datang | datang | datang |
| 1 | 16.01 | 125 | 106 | 98 | 102 | 90 | 119 |
| 2 | 16.04 | 99 | 67 | 108 | 98 | 92 | 102 |
| 3 | 16.08 | 102 | 98 | 107 | 117 | 119 | 108 |
| 4 | 16.11 | 96 | 87 | 121 | 104 | 116 | 98 |
| 5 | 16.15 | 112 | 87 | 127 | 108 | 102 | 89 |
| 6 | 16.18 | 132 | 91 | 95 | 95 | 128 | 134 |
| 7 | 16.21 | 93 | 89 | 107 | 127 | 107 | 135 |
| 8 | 16.24 | 126 | 96 | 117 | 128 | 103 | 120 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 16.28 | 102 | 96 | 115 | 109 | 134 | 107 |
| 10 | 16.31 | 109 | 84 | 96 | 116 | 128 | 116 |
| 11 | 16.34 | 104 | 108 | 95 | 119 | 106 | 97 |
| 12 | 16.37 | 118 | 75 | 92 | 91 | 95 | 95 |
| 13 | 16.4 | 93 | 103 | 102 | 86 | 126 | 118 |
| 14 | 16.43 | 109 | 102 | 115 | 108 | 114 | 136 |
| 15 | 16.46 | 98 | 95 | 110 | 127 | 137 | 129 |
| 16 | 16.49 | 95 | 96 | 94 | 105 | 96 | 120 |
| 17 | 16.52 | 108 | 70 | 84 | 113 | 99 | 107 |
| 18 | 16.55 | 102 | 70 | 80 | 102 | 100 | 96 |
| 19 | 16.59 | 107 | 84 | 97 | 105 | 125 | 139 |

Data Kedatangan Kendaraan 22 September 2018 – 28 September 2018

(sore hari) – sebelum ***underpass***

| siklus ke- i | | Kamis | | Jumat | | Sabtu |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Datang | | Datang | | Datang |
| 1 | 06.01 | 48 | 6.06 | 34 | 6.05 | 54 |
| 2 | 6.04 | 42 | 6.09 | 42 | 6.09 | 65 |
| 3 | 06.08 | 44 | 6.13 | 64 | 6.13 | 92 |
| 4 | 06.11 | 52 | 6.17 | 68 | 6.16 | 89 |
| 5 | 06.15 | 69 | 6.21 | 84 | 6.19 | 76 |
| 6 | 06.19 | 67 | 6.24 | 73 | 6.23 | 98 |
| 7 | 06.22 | 73 | 6.28 | 93 | 6.27 | 82 |
| 8 | 06.26 | 86 | 6.32 | 87 | 6.32 | 108 |
| 9 | 06.30 | 79 | 6.36 | 105 | 6.36 | 92 |
| 10 | 06.34 | 85 | 6.39 | 98 | 6.39 | 87 |
| 11 | 06.37 | 88 | 6.43 | 107 | 6.42 | 67 |
| 12 | 06.41 | 91 | 6.47 | 120 | 6.46 | 94 |
| 13 | 06.45 | 73 | 6.51 | 84 | 6.49 | 95 |
| 14 | 06.49 | 107 | 6.54 | 142 | 6.53 | 67 |
| 15 | 06.52 | 108 | 6.58 | 157 | 6.57 | 101 |
| 16 | 06.56 | 71 | 7.02 | 128 | 7 | 89 |
| 17 | 06.59 | 96 | 7.05 | 103 | 7.04 | 104 |
| 18 | 07.03 | 110 | 7.12 | 143 | 7.08 | 93 |
| 19 | 07.07 | 125 | 7.16 | 141 | 7.11 | 86 |
| 20 | 07.10 | 93 | 7.2 | 128 | 7.15 | 90 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 07.14 | 112 | 7.23 | 132 | 7.19 | 97 |
| 22 | 07.17 | 104 | 7.26 | 128 | 7.23 | 101 |
| 23 | 07.21 | 123 | 7.31 | 114 | 7.26 | 79 |
| 24 | 07.25 | 128 | 7.34 | 116 | 7.3 | 86 |
| 25 | 07.29 | 106 | 7.39 | 108 | 7.34 | 100 |
| 26 | 07.33 | 108 | 7.43 | 121 | 7.37 | 107 |
| 27 | 07.36 | 113 | 7.47 | 107 | 7.41 | 98 |
| 28 | 07.40 | 115 | 7.52 | 110 | 7.45 | 125 |
| 29 | 07.44 | 83 | 7.56 | 112 | 7.49 | 120 |
| 30 | 07.48 | 90 | 8 | 107 | 7.52 | 99 |
| 31 | 07.51 | 92 | | | 7.55 | 104 |
| 32 | 07.55 | 100 | | | | |
| 33 | 07.58 | 98 | | | | |

Data Kedatangan Kendaraan 28 Maret 2019 – 30 Maret 2019

(pagi hari) – selama ***underpass***

| siklus ke- i | | Kamis | | Jumat | | Sabtu |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Datang | | Datang | | Datang |
| 1 | 11.03 | 130 | 11.01 | 98 | 11.03 | 111 |
| 2 | 11.08 | 98 | 11.04 | 120 | 11.07 | 109 |
| 3 | 11.12 | 100 | 11.07 | 100 | 11.11 | 97 |
| 4 | 11.15 | 108 | 11.11 | 119 | 11.14 | 104 |
| 5 | 11.19 | 118 | 11.14 | 105 | 11.17 | 112 |
| 6 | 11.23 | 115 | 11.17 | 104 | 11.21 | 118 |
| 7 | 11.26 | 103 | 11.2 | 112 | 11.24 | 110 |
| 8 | 11.29 | 112 | 11.24 | 114 | 11.27 | 101 |
| 9 | 11.34 | 116 | 11.29 | 111 | 11.3 | 93 |
| 10 | 11.37 | 111 | 11.33 | 108 | 11.34 | 99 |
| 11 | 11.41 | 125 | 11.36 | 121 | 11.38 | 102 |
| 12 | 11.45 | 101 | 11.4 | 99 | 11.42 | 123 |
| 13 | 11.48 | 97 | 11.43 | 99 | 11.46 | 113 |
| 14 | 11.52 | 89 | 11.47 | 90 | 11.5 | 92 |
| 15 | 12.04 | 92 | 11.51 | 95 | 11.54 | 102 |
| 16 | 12.07 | 109 | 11.55 | 105 | 11.57 | 110 |
| 17 | 12.10 | 112 | 11.58 | 103 | 12.01 | 113 |
| 18 | 12.14 | 98 | 12.02 | 101 | 12.05 | 100 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 12.17 | 80 | 12.06 | 78 | 12.09 | 106 |
| 20 | 12.20 | 110 | 12.09 | 105 | 12.12 | 118 |
| 21 | 12.23 | 108 | 12.13 | 111 | 12.16 | 103 |
| 22 | 12.27 | 119 | 12.16 | 117 | 12.2 | 79 |
| 23 | 12.30 | 121 | 12.21 | 124 | 12.23 | 85 |
| 24 | 12.33 | 117 | 12.25 | 110 | 12.26 | 99 |
| 25 | 12.35 | 115 | 12.28 | 108 | 12.31 | 105 |
| 26 | 12.38 | 99 | 12.32 | 95 | 12.34 | 112 |
| 27 | 12.41 | 120 | 12.35 | 119 | 12.38 | 90 |
| 28 | 12.44 | 123 | 12.39 | 118 | 12.42 | 102 |
| 29 | 12.47 | 110 | 12.43 | 103 | 12.45 | 100 |
| 30 | 12.50 | 110 | 12.47 | 109 | 12.49 | 101 |
| 31 | 12.54 | 113 | 12.5 | 112 | 12.53 | 115 |
| 32 | 12.58 | 97 | 12.54 | 98 | 12.56 | 116 |
| 33 | | | 12.57 | 100 | 13 | 115 |

Data Kedatangan Kendaraan 28 Maret 2019 – 30 Maret 2019

(siang hari) – selama ***underpass***

| siklus ke- i | | Kamis | | Jumat | | Sabtu |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | datang | | datang | | Datang |
| 1 | 16.04 | 123 | 16.03 | 100 | 16.01 | 103 |
| 2 | 16.07 | 132 | 16.08 | 113 | 16.04 | 94 |
| 3 | 16.11 | 133 | 16.14 | 110 | 16.07 | 117 |
| 4 | 16.16 | 131 | 16.17 | 113 | 16.1 | 113 |
| 5 | 16.19 | 126 | 16.21 | 110 | 16.14 | 118 |
| 6 | 16.23 | 138 | 16.24 | 100 | 16.18 | 102 |
| 7 | 16.27 | 143 | 16.27 | 98 | 16.21 | 95 |
| 8 | 16.31 | 142 | 16.31 | 100 | 16.25 | 99 |
| 9 | 16.34 | 147 | 16.35 | 104 | 16.28 | 101 |
| 10 | 16.38 | 147 | 16.39 | 115 | 16.32 | 106 |
| 11 | 16.41 | 122 | 16.43 | 110 | 16.36 | 108 |
| 12 | 16.44 | 132 | 16.47 | 119 | 16.4 | 106 |
| 13 | 16.48 | 119 | 16.5 | 117 | 16.43 | 103 |
| 14 | 16.51 | 120 | 16.54 | 99 | 16.47 | 122 |
| 15 | 16.54 | 129 | 16.57 | 95 | 16.51 | 119 |
| 16 | 16.57 | 110 | 17.01 | 114 | 16.54 | 100 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 17.01 | 119 | 17.05 | 111 | 16.58 | 125 |
| 18 | 17.05 | 116 | 17.09 | 105 | 17.02 | 93 |
| 19 | 17.09 | 121 | 17.14 | 122 | 17.05 | 92 |
| 20 | 17.12 | 113 | 17.17 | 112 | 17.08 | 126 |
| 21 | 17.16 | 108 | 17.21 | 121 | 17.13 | 114 |
| 22 | 17.20 | 100 | 17.24 | 112 | 17.17 | 125 |
| 23 | 17.25 | 112 | 17.27 | 117 | 17.2 | 126 |
| 24 | 17.28 | 108 | 17.32 | 98 | 17.24 | 119 |
| 25 | 17.33 | 118 | 17.36 | 100 | 17.27 | 108 |
| 26 | 17.37 | 119 | 17.41 | 105 | 17.31 | 96 |
| 27 | 17.40 | 102 | 17.46 | 109 | 17.34 | 100 |
| 28 | 17.44 | 110 | 17.5 | 110 | 17.38 | 103 |
| 29 | 17.49 | 109 | 17.54 | 92 | 17.41 | 88 |
| 30 | 17.53 | 99 | 17.58 | 104 | 17.44 | 104 |
| 31 | 17.57 | 103 | | | 17.48 | 112 |
| 32 | | | | | 17.51 | 117 |
| 33 | | | | | 17.54 | 109 |
| 34 | | | | | 17.57 | 100 |

Data Kedatangan Kendaraan 28 Maret 2019 – 30 Maret 2019

(sore hari) – selama ***underpass***

Data: 22 September 2018 – 28 September 2018

1. Pengujian $X_i$ berdistribusi Normal (pagi hari)

```
> m<-read.delim(file.choose(),header=T)
> m
```

| | a | b | c | d | e | f | g | h | i | j | k |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 43 | 51 | 99 | 102 | 108 | 98 | 84 | 54 | 92 | 92 | 122 |
| 2 | 47 | 43 | 103 | 98 | 121 | 100 | 72 | 78 | 106 | 93 | 108 |
| 3 | 60 | 45 | 97 | 123 | 111 | 121 | 69 | 68 | 106 | 123 | 134 |
| 4 | 53 | 67 | 94 | 109 | 98 | 106 | 81 | 64 | 107 | 129 | 126 |
| 5 | 60 | 56 | 103 | 117 | 109 | 94 | 77 | 46 | 109 | 139 | 97 |
| 6 | 58 | 45 | 116 | 98 | 143 | 92 | 65 | 78 | 125 | 117 | 108 |
| 7 | 56 | 36 | 98 | 95 | 112 | 106 | 87 | 67 | 116 | 135 | 100 |
| 8 | 79 | 56 | 106 | 117 | 132 | 102 | 65 | 78 | 110 | 108 | 99 |
| 9 | 73 | 76 | 99 | 113 | 112 | 127 | 76 | 68 | 108 | 102 | 105 |
| 10 | 71 | 66 | 107 | 102 | 102 | 105 | 67 | 79 | 98 | 118 | 94 |
| 11 | 77 | 56 | 119 | 93 | 98 | 93 | NA | NA | NA | NA | NA |

| | l |
|---|---|
| 1 | 89 |
| 2 | 96 |
| 3 | 98 |
| 4 | 108 |
| 5 | 119 |
| 6 | 120 |
| 7 | 107 |
| 8 | 83 |
| 9 | 108 |
| 10 | 127 |
| 11 | NA |

```
> attach(m)
> shapiro.test(a)
```

Shapiro-Wilk normality test

data:  a

W = 0.94585, p-value = 0.5915

> shapiro.test(g)

Shapiro-Wilk normality test

data:  g

W = 0.92918, p-value = 0.4398

Data: 28 Maret 2019 – 30 Maret 2019

1. Pengujian $X_i$ berdistribusi Normal (pagi hari)

> data<-read.delim(file.choose(),header=T)

> data

| | a | b | c | d | e | f | g | h | i | j | k |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 48 | 85 | 110 | 108 | 34 | 87 | 128 | 114 | 54 | 108 | 104 |
| 2 | 42 | 88 | 125 | 113 | 42 | 105 | 103 | 116 | 65 | 92 | 93 |
| 3 | 44 | 91 | 93 | 115 | 64 | 98 | 143 | 108 | 92 | 87 | 86 |
| 4 | 52 | 73 | 112 | 83 | 68 | 107 | 141 | 121 | 89 | 67 | 90 |
| 5 | 69 | 107 | 104 | 90 | 84 | 120 | 128 | 107 | 76 | 94 | 97 |
| 6 | 67 | 108 | 123 | 92 | 73 | 84 | 132 | 110 | 98 | 95 | 101 |
| 7 | 73 | 71 | 128 | 100 | 93 | 142 | 128 | 112 | 82 | 67 | 79 |
| 8 | 86 | 96 | 106 | 98 | NA | 157 | NA | 107 | NA | 101 | 86 |
| 9 | 79 | NA | NA | NA | NA | NA | NA | NA | NA | 89 | NA |

| | l |
|---|---|
| 1 | 100 |
| 2 | 107 |
| 3 | 98 |
| 4 | 125 |

```
5    120
6     99
7    104
8     NA
9     NA
> attach(data)
> shapiro.test(a)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  a
W = 0.92346, p-value = 0.4216

> shapiro.test(b)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  b
W = 0.93437, p-value = 0.5567 v
```

Data: 22 September 2018 – 28 September 2018

1. Pengujian banyaknya siklus berdistribusi Poisson (pagi hari)

```
> e<-read.delim(file.choose(),header=T)
> e
    siklus frekuensi
1     10         1
2     11         1
> attach(e)
> k=ks.test(siklus,"ppois",10.5)
> k
```

```
        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  siklus
D = 0.52074, p-value = 0.4594
alternative hypothesis: two-sided
```

Data: 28 Maret 2019 – 30 Maret 2019

1. Pengujian banyaknya siklus (pagi hari)

- Kamis

```
> i<-read.delim(file.choose(),header=T)
> i
  siklus frekuensi
1      8         3
2      9         1
> attach(i)
> k=ks.test(siklus,"ppois",8.25)
> k

        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  siklus
D = 0.5577, p-value = 0.3913
alternative hypothesis: two-sided
```

- Jumat

```
j<-read.delim(file.choose(),header=T)
> j
  siklus frekuensi
1      7         2
2      8         2
> attach(j)
> k=ks.test(siklus,"ppois",7.5)
```

```
> k

        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  siklus
D = 0.52464, p-value = 0.4519
alternative hypothesis: two-sided
```

- Sabtu

```
l<-read.delim(file.choose(),header=T)
> l
  siklus frekuensi
1      7         2
2      8         1
3      9         1
> attach(l)
> k=ks.test(siklus,"ppois",7.75)
> k

        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  siklus
D = 0.48837, p-value = 0.361
alternative hypothesis: two-sided
```

**Table 3 Poisson Probabilities**

$$P(Y \leq a) = \sum_{y=0}^{a} e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!}$$

| $\lambda$ \ $a$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.02 | 0.980 | 1.000 | | | | | | | | |
| 0.04 | 0.961 | 0.999 | 1.000 | | | | | | | |
| 0.06 | 0.942 | 0.998 | 1.000 | | | | | | | |
| 0.08 | 0.923 | 0.997 | 1.000 | | | | | | | |
| 0.10 | 0.905 | 0.995 | 1.000 | | | | | | | |
| 0.15 | 0.861 | 0.990 | 0.999 | 1.000 | | | | | | |
| 0.20 | 0.819 | 0.982 | 0.999 | 1.000 | | | | | | |
| 0.25 | 0.779 | 0.974 | 0.998 | 1.000 | | | | | | |
| 0.30 | 0.741 | 0.963 | 0.996 | 1.000 | | | | | | |
| 0.35 | 0.705 | 0.951 | 0.994 | 1.000 | | | | | | |
| 0.40 | 0.670 | 0.938 | 0.992 | 0.999 | 1.000 | | | | | |
| 0.45 | 0.638 | 0.925 | 0.989 | 0.999 | 1.000 | | | | | |
| 0.50 | 0.607 | 0.910 | 0.986 | 0.998 | 1.000 | | | | | |
| 0.55 | 0.577 | 0.894 | 0.982 | 0.988 | 1.000 | | | | | |
| 0.60 | 0.549 | 0.878 | 0.977 | 0.997 | 1.000 | | | | | |
| 0.65 | 0.522 | 0.861 | 0.972 | 0.996 | 0.999 | 1.000 | | | | |
| 0.70 | 0.497 | 0.844 | 0.966 | 0.994 | 0.999 | 1.000 | | | | |
| 0.75 | 0.472 | 0.827 | 0.959 | 0.993 | 0.999 | 1.000 | | | | |
| 0.80 | 0.449 | 0.809 | 0.953 | 0.991 | 0.999 | 1.000 | | | | |
| 0.85 | 0.427 | 0.791 | 0.945 | 0.989 | 0.998 | 1.000 | | | | |
| 0.90 | 0.407 | 0.772 | 0.937 | 0.987 | 0.998 | 1.000 | | | | |
| 0.95 | 0.387 | 0.754 | 0.929 | 0.981 | 0.997 | 1.000 | | | | |
| 1.00 | 0.368 | 0.736 | 0.920 | 0.981 | 0.996 | 0.999 | 1.000 | | | |
| 1.1 | 0.333 | 0.699 | 0.900 | 0.974 | 0.995 | 0.999 | 1.000 | | | |
| 1.2 | 0.301 | 0.663 | 0.879 | 0.966 | 0.992 | 0.998 | 1.000 | | | |
| 1.3 | 0.273 | 0.627 | 0.857 | 0.957 | 0.989 | 0.998 | 1.000 | | | |
| 1.4 | 0.247 | 0.592 | 0.833 | 0.946 | 0.986 | 0.997 | 0.999 | 1.000 | | |
| 1.5 | 0.223 | 0.558 | 0.809 | 0.934 | 0.981 | 0.996 | 0.999 | 1.000 | | |
| 1.6 | 0.202 | 0.525 | 0.783 | 0.921 | 0.976 | 0.994 | 0.999 | 1.000 | | |
| 1.7 | 0.183 | 0.493 | 0.757 | 0.907 | 0.970 | 0.992 | 0.998 | 1.000 | | |
| 1.8 | 0.165 | 0.463 | 0.731 | 0.891 | 0.964 | 0.990 | 0.997 | 0.999 | 1.000 | |
| 1.9 | 0.150 | 0.434 | 0.704 | 0.875 | 0.956 | 0.987 | 0.997 | 0.999 | 1.000 | |
| 2.0 | 0.135 | 0.406 | 0.677 | 0.857 | 0.947 | 0.983 | 0.995 | 0.999 | 1.000 | |

Table 3 (*Continued*)

| λ \ a | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.2 | 0.111 | 0.355 | 0.623 | 0.819 | 0.928 | 0.975 | 0.993 | 0.998 | 1.000 | |
| 2.4 | 0.091 | 0.308 | 0.570 | 0.779 | 0.904 | 0.964 | 0.988 | 0.997 | 0.999 | 1.000 |
| 2.6 | 0.074 | 0.267 | 0.518 | 0.736 | 0.877 | 0.951 | 0.983 | 0.995 | 0.999 | 1.000 |
| 2.8 | 0.061 | 0.231 | 0.469 | 0.692 | 0.848 | 0.935 | 0.976 | 0.992 | 0.998 | 0.999 |
| 3.0 | 0.050 | 0.199 | 0.423 | 0.647 | 0.815 | 0.916 | 0.966 | 0.988 | 0.996 | 0.999 |
| 3.2 | 0.041 | 0.171 | 0.380 | 0.603 | 0.781 | 0.895 | 0.955 | 0.983 | 0.994 | 0.998 |
| 3.4 | 0.033 | 0.147 | 0.340 | 0.558 | 0.744 | 0.871 | 0.942 | 0.977 | 0.992 | 0.997 |
| 3.6 | 0.027 | 0.126 | 0.303 | 0.515 | 0.706 | 0.844 | 0.927 | 0.969 | 0.988 | 0.996 |
| 3.8 | 0.022 | 0.107 | 0.269 | 0.473 | 0.668 | 0.816 | 0.909 | 0.960 | 0.984 | 0.994 |
| 4.0 | 0.018 | 0.092 | 0.238 | 0.433 | 0.629 | 0.785 | 0.889 | 0.949 | 0.979 | 0.992 |
| 4.2 | 0.015 | 0.078 | 0.210 | 0.395 | 0.590 | 0.753 | 0.867 | 0.936 | 0.972 | 0.989 |
| 4.4 | 0.012 | 0.066 | 0.185 | 0.359 | 0.551 | 0.720 | 0.844 | 0.921 | 0.964 | 0.985 |
| 4.6 | 0.010 | 0.056 | 0.163 | 0.326 | 0.513 | 0.686 | 0.818 | 0.905 | 0.955 | 0.980 |
| 4.8 | 0.008 | 0.048 | 0.143 | 0.294 | 0.476 | 0.651 | 0.791 | 0.887 | 0.944 | 0.975 |
| 5.0 | 0.007 | 0.040 | 0.125 | 0.265 | 0.440 | 0.616 | 0.762 | 0.867 | 0.932 | 0.968 |
| 5.2 | 0.006 | 0.034 | 0.109 | 0.238 | 0.406 | 0.581 | 0.732 | 0.845 | 0.918 | 0.960 |
| 5.4 | 0.005 | 0.029 | 0.095 | 0.213 | 0.373 | 0.546 | 0.702 | 0.822 | 0.903 | 0.951 |
| 5.6 | 0.004 | 0.024 | 0.082 | 0.191 | 0.342 | 0.512 | 0.670 | 0.797 | 0.886 | 0.941 |
| 5.8 | 0.003 | 0.021 | 0.072 | 0.170 | 0.313 | 0.478 | 0.638 | 0.771 | 0.867 | 0.929 |
| 6.0 | 0.002 | 0.017 | 0.062 | 0.151 | 0.285 | 0.446 | 0.606 | 0.744 | 0.847 | 0.916 |

| | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.8 | 1.000 | | | | | | |
| 3.0 | 1.000 | | | | | | |
| 3.2 | 1.000 | | | | | | |
| 3.4 | 0.999 | 1.000 | | | | | |
| 3.6 | 0.999 | 1.000 | | | | | |
| 3.8 | 0.998 | 0.999 | 1.000 | | | | |
| 4.0 | 0.997 | 0.999 | 1.000 | | | | |
| 4.2 | 0.996 | 0.999 | 1.000 | | | | |
| 4.4 | 0.994 | 0.998 | 0.999 | 1.000 | | | |
| 4.6 | 0.992 | 0.997 | 0.999 | 1.000 | | | |
| 4.8 | 0.990 | 0.996 | 0.999 | 1.000 | | | |
| 5.0 | 0.986 | 0.995 | 0.998 | 0.999 | 1.000 | | |
| 5.2 | 0.982 | 0.993 | 0.997 | 0.999 | 1.000 | | |
| 5.4 | 0.977 | 0.990 | 0.996 | 0.999 | 1.000 | | |
| 5.6 | 0.972 | 0.988 | 0.995 | 0.998 | 0.999 | 1.000 | |
| 5.8 | 0.965 | 0.984 | 0.993 | 0.997 | 0.999 | 1.000 | |
| 6.0 | 0.957 | 0.980 | 0.991 | 0.996 | 0.999 | 0.999 | 1.000 |

Table 3 (*Continued*)

| $\lambda$ \ $a$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6.2 | 0.002 | 0.015 | 0.054 | 0.134 | 0.259 | 0.414 | 0.574 | 0.716 | 0.826 | 0.902 |
| 6.4 | 0.002 | 0.012 | 0.046 | 0.119 | 0.235 | 0.384 | 0.542 | 0.687 | 0.803 | 0.886 |
| 6.6 | 0.001 | 0.010 | 0.040 | 0.105 | 0.213 | 0.355 | 0.511 | 0.658 | 0.780 | 0.869 |
| 6.8 | 0.001 | 0.009 | 0.034 | 0.093 | 0.192 | 0.327 | 0.480 | 0.628 | 0.755 | 0.850 |
| 7.0 | 0.001 | 0.007 | 0.030 | 0.082 | 0.173 | 0.301 | 0.450 | 0.599 | 0.729 | 0.830 |
| 7.2 | 0.001 | 0.006 | 0.025 | 0.072 | 0.156 | 0.276 | 0.420 | 0.569 | 0.703 | 0.810 |
| 7.4 | 0.001 | 0.005 | 0.022 | 0.063 | 0.140 | 0.253 | 0.392 | 0.539 | 0.676 | 0.788 |
| 7.6 | 0.001 | 0.004 | 0.019 | 0.055 | 0.125 | 0.231 | 0.365 | 0.510 | 0.648 | 0.765 |
| 7.8 | 0.000 | 0.004 | 0.016 | 0.048 | 0.112 | 0.210 | 0.338 | 0.481 | 0.620 | 0.741 |
| 8.0 | 0.000 | 0.003 | 0.014 | 0.042 | 0.100 | 0.191 | 0.313 | 0.453 | 0.593 | 0.717 |
| 8.5 | 0.000 | 0.002 | 0.009 | 0.030 | 0.074 | 0.150 | 0.256 | 0.386 | 0.523 | 0.653 |
| 9.0 | 0.000 | 0.001 | 0.006 | 0.021 | 0.055 | 0.116 | 0.207 | 0.324 | 0.456 | 0.587 |
| 9.5 | 0.000 | 0.001 | 0.004 | 0.015 | 0.040 | 0.089 | 0.165 | 0.269 | 0.392 | 0.522 |
| 10.0 | 0.000 | 0.000 | 0.003 | 0.010 | 0.029 | 0.067 | 0.130 | 0.220 | 0.333 | 0.458 |

| | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6.2 | 0.949 | 0.975 | 0.989 | 0.995 | 0.998 | 0.999 | 1.000 | | | |
| 6.4 | 0.939 | 0.969 | 0.986 | 0.994 | 0.997 | 0.999 | 1.000 | | | |
| 6.6 | 0.927 | 0.963 | 0.982 | 0.992 | 0.997 | 0.999 | 0.999 | 1.000 | | |
| 6.8 | 0.915 | 0.955 | 0.978 | 0.990 | 0.996 | 0.998 | 0.999 | 1.000 | | |
| 7.0 | 0.901 | 0.947 | 0.973 | 0.987 | 0.994 | 0.998 | 0.999 | 1.000 | | |
| 7.2 | 0.887 | 0.937 | 0.967 | 0.984 | 0.993 | 0.997 | 0.999 | 0.999 | 1.000 | |
| 7.4 | 0.871 | 0.926 | 0.961 | 0.980 | 0.991 | 0.996 | 0.998 | 0.999 | 1.000 | |
| 7.6 | 0.854 | 0.915 | 0.954 | 0.976 | 0.989 | 0.995 | 0.998 | 0.999 | 1.000 | |
| 7.8 | 0.835 | 0.902 | 0.945 | 0.971 | 0.986 | 0.993 | 0.997 | 0.999 | 1.000 | |
| 8.0 | 0.816 | 0.888 | 0.936 | 0.966 | 0.983 | 0.992 | 0.996 | 0.998 | 0.999 | 1.000 |
| 8.5 | 0.763 | 0.849 | 0.909 | 0.949 | 0.973 | 0.986 | 0.993 | 0.997 | 0.999 | 0.999 |
| 9.0 | 0.706 | 0.803 | 0.876 | 0.926 | 0.959 | 0.978 | 0.989 | 0.995 | 0.998 | 0.999 |
| 9.5 | 0.645 | 0.752 | 0.836 | 0.898 | 0.940 | 0.967 | 0.982 | 0.991 | 0.996 | 0.998 |
| 10.0 | 0.583 | 0.697 | 0.792 | 0.864 | 0.917 | 0.951 | 0.973 | 0.986 | 0.993 | 0.997 |

| | 20 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|
| 8.5 | 1.000 | | |
| 9.0 | 1.000 | | |
| 9.5 | 0.999 | 1.000 | |
| 10.0 | 0.998 | 0.999 | 1.000 |