INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Matemática Discreta

Adriana Padua Lovatte

Grafos e Árvores

- Grafos e Suas Representações
- Árvores e suas Representações
- Árvores de Decisão
- Códigos de Huffman

Grafos e Suas Representações

Objetivo:

Deseja-se indexar todas as combinações de uma letra do conjunto {A, B, C, D, E} com todos os números formados por 8 algarismos.

Ex: A01263857

Quantas combinações possíveis existem?

Considerando que essa informação usará o sistema de códigos ASCII (8 bits por caractere), quantos bytes são necessários para o armazenamento?

SERÁ POSSÍVEL ARMAZENAR A MESMA INFORMAÇÃO COM UMA QUANTIDADE MENOR DE MEMÓRIA?

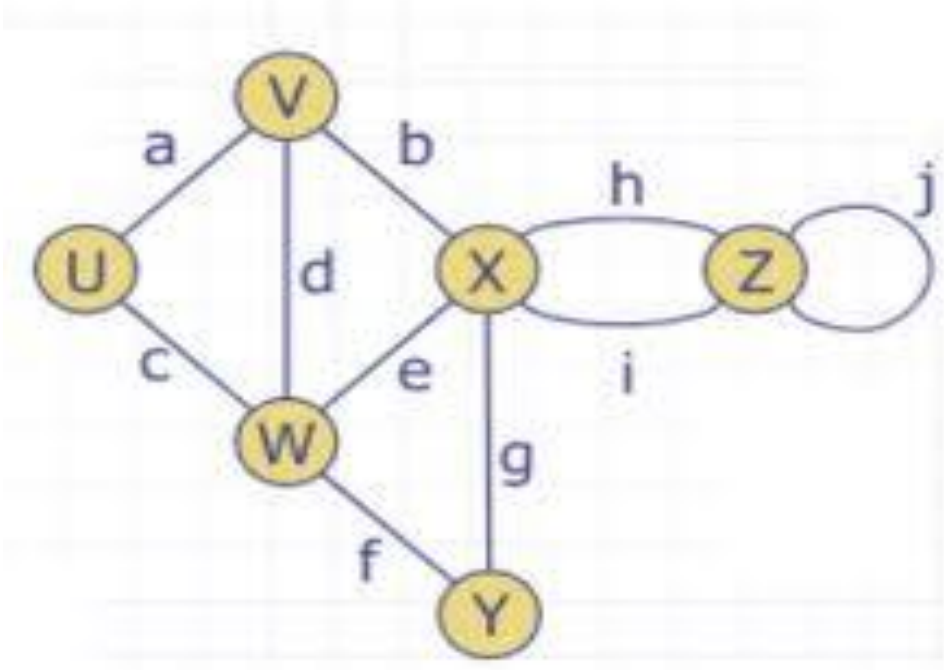
Grafos e Suas Representações

Definição Informal: Um grafo é um conjunto não-vazio de nós(vértices) e um conjunto de arcos(arestas) tais que cada arco conecta dois nós.

Normalmente representado por G{N,A}, onde G e a relação entre os conjuntos de nós N e arestas A.

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Grafos e Suas Representações



Grafos e Suas Representações

Definição formal: Um grafo é uma tripla ordenada (N,A,g), onde:

N: Conjunto não-vazio de nós(vértices) ;

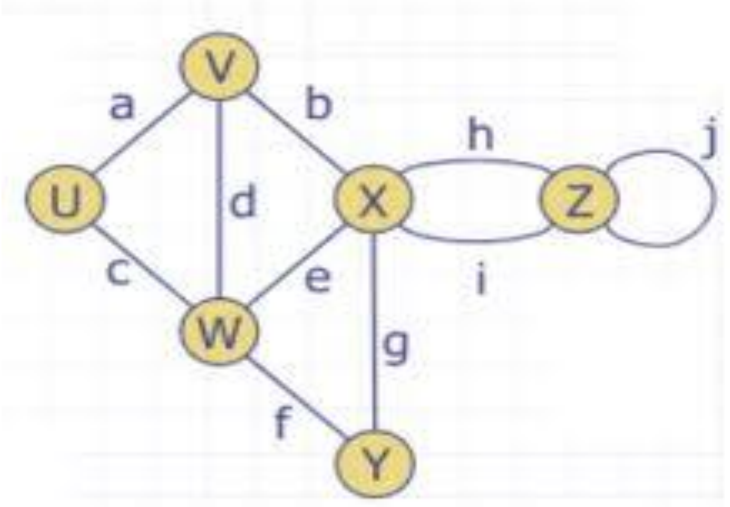
A: Conjunto de arcos(arestas) tais que cada arco conecta dois nós.

g: Uma função que associa cada arco “a” a um par não ordenado x-y de nós, chamados de extremidades de “a”

Grafos e Suas Representações

Ex: No grafo com N = {V,U,W,X,Y,Z}, A = {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j} onde a relação G é dada por:

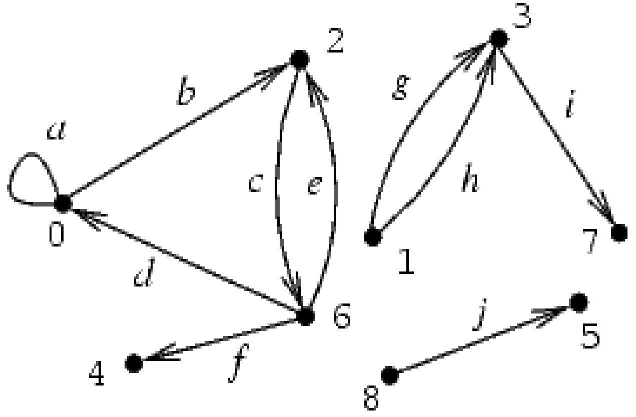
G(a) = V-U
G(b) = V-X
G(c) = U-W
G(d) = V-W
G(e) = W-X
G(f) = W-Y
G(g) = X-Y
G(h) = X-Z
G(I) = X-Z
G(j) = Z-Z



Grafos e Suas Representações

Definição – Grafo direcionado: Um grafo direcionado é um conjunto não-vazio de nós(vértices) e um conjunto de arcos(arestas) onde a relação entre nós e arestas é ordenada.

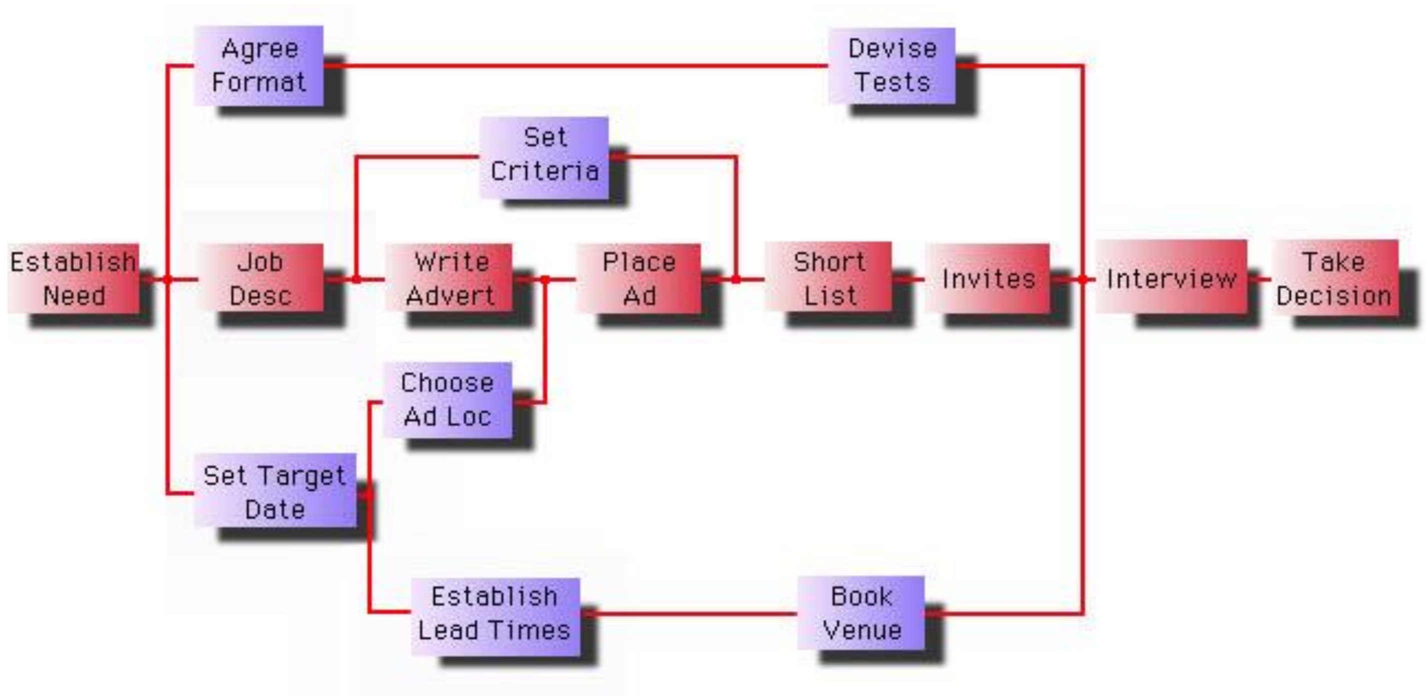
Exemplo: Escreva a relação G do grafo abaixo.



Grafos e Suas Representações

Aplicações:

Aplicações:Grafos e Suas Representações



Aplicações: Grafos e Suas Representações

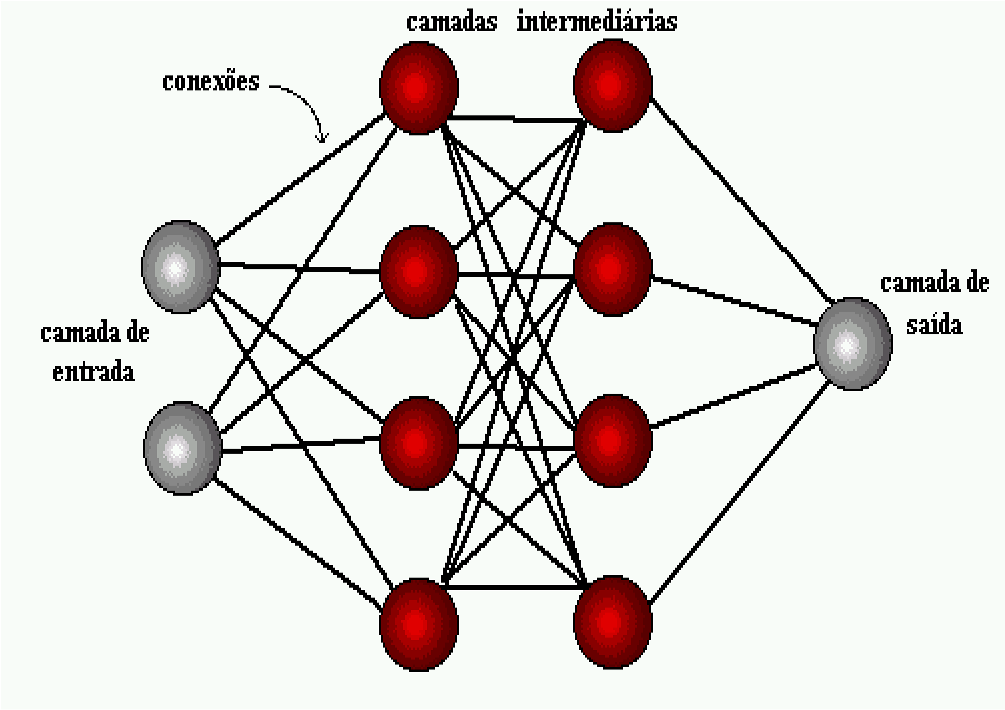


Figura obtida em https://sites.icmc.usp.br/andre/research/neural/

Grafos e Suas Representações

Terminologia:

- Nós adjacentes
- Laço
- Arcos paralelos
- Grafo simples: grafo sem laço nem arcos paralelos
- Nó isolado
- Grau do nós
- Grafo completo
- Subgrafo
- Caminho (do nó *s* para o nó *d*)
- Comprimento de um caminho
- Grafo conexo
- Ciclo
- Grafo acíclico (Grafo sem ciclos)

Grafos e Suas Representações

Definição:

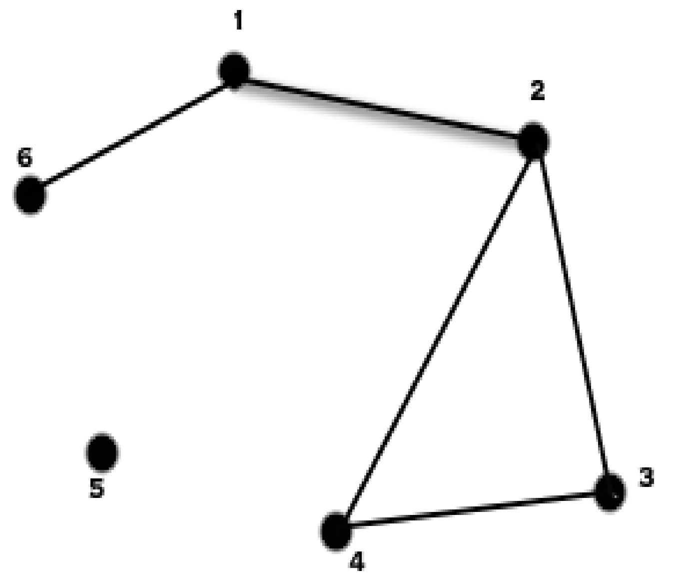
- Nós adjacentes: Dois nós são adjacentes se ambos são extremidades de um mesmo arco.
- Laço: É um arco com extremidades n-n para algum nó n
- Arcos paralelos: Dois arcos são paralelos se tem as mesmas extremidades
- Grafo simples: Grafo sem laço nem arcos paralelos
- Nó isolado: É um nó que não é adjacente a nenhum outro nó.
- Grau do nós: É o número de extremidades de arcos daquele nó , denota-se d(nó)

Grafos e Suas Representações

Exemplo : Determine, caso haja:

- Um laço
- Arcos paralelos
- <u>Grau do nós</u>
- <u>Nó isolado</u>

- <u>O grafo é simples?</u>

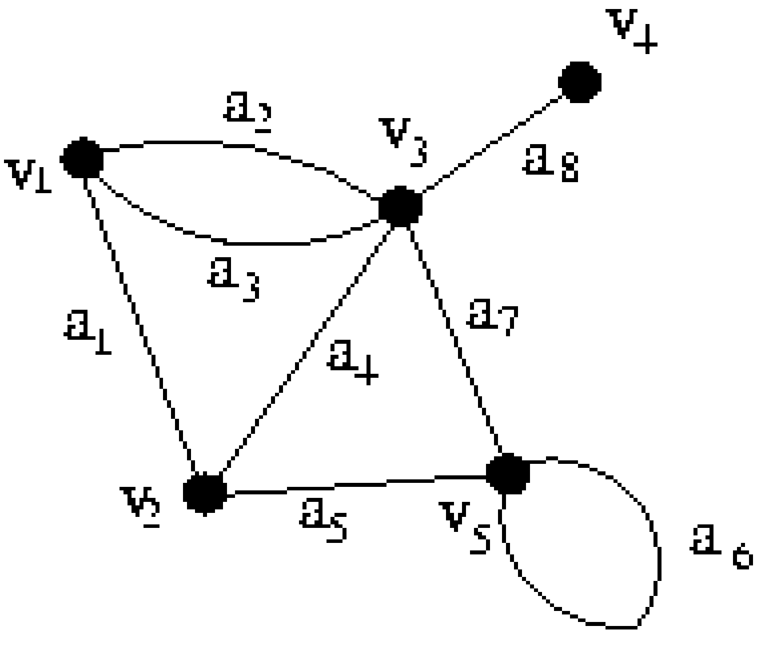


Grafos e Suas Representações

Exemplo : Determine, caso haja:

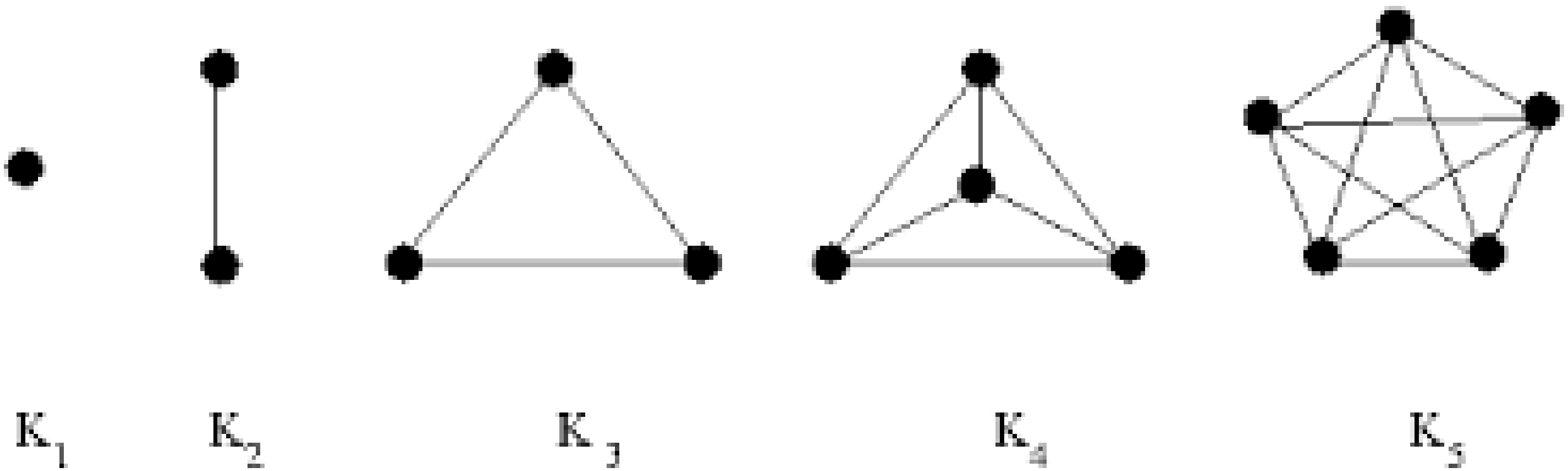
- Um laço
- Arcos paralelos
- Grau do nós
- Nó isolado

- O grafo é simples?



Grafos e Suas Representações

- Definição: Grafo completo : É um grafo no qual dois nós distintos quaisquer são adjacentes. Um grafo completo K_n possui $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas

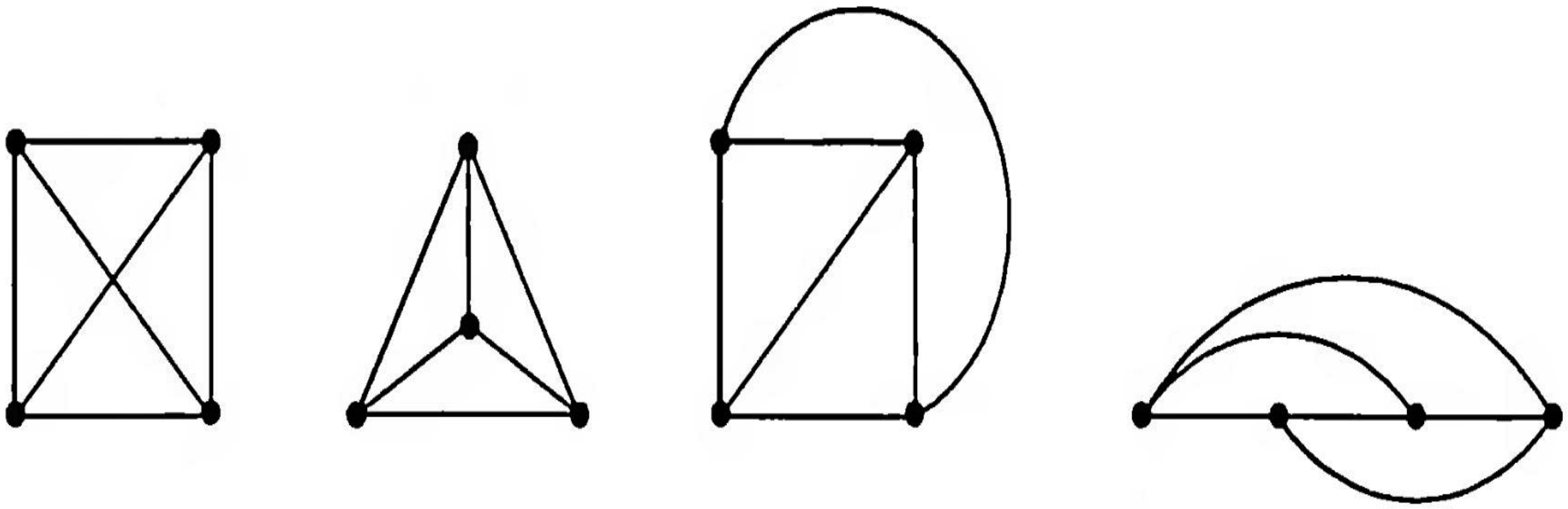


Grafos e Suas Representações

Exemplo : Determine

- Grau do nós

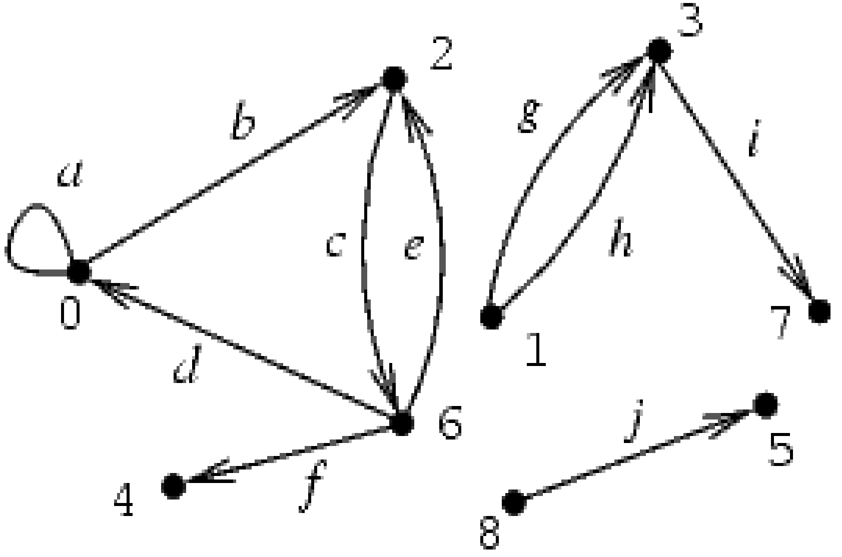
- Estes grafos são grafos simples?



Grafos e Suas Representações

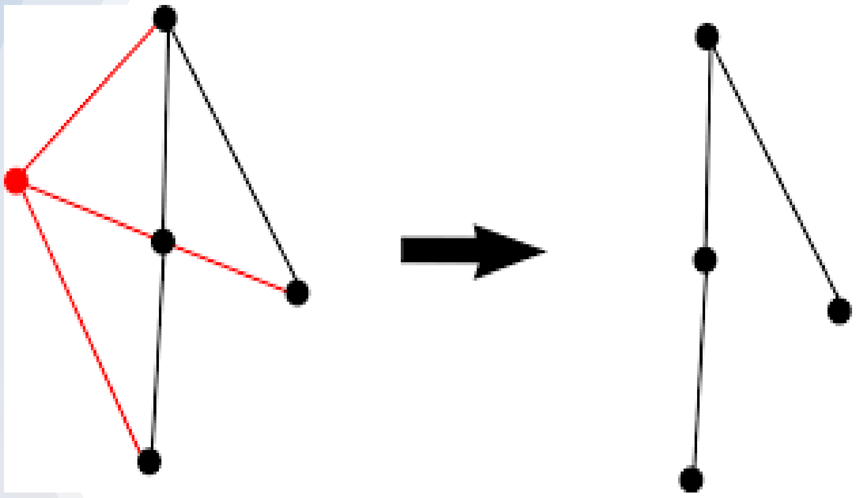
Exemplo : Determine

- Um laço
- Arcos paralelos
- <u>Grau do nós</u>



Grafos e Suas Representações

- Definição:
- Subgrafo: Conjunto de nós e arestas que são subconjunto do grafo original.
-
- :



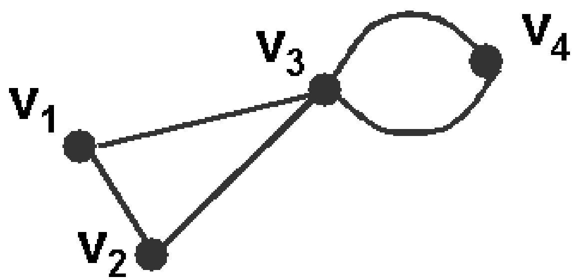
Grafos e Suas Representações

- Definição:

<u>Caminho:</u> Um caminho entre dois vértices, x e y, é uma seqüência de vértices e arestas que une x e y.

Comprimento do caminho:
Um caminho de k-vértices é formado por k-1 arestas $(v1,v2)$, $(v2,v3)$ ... $(vk-1, vk)$, e o valor de k-1 é o comprimento do caminho.

-
- :



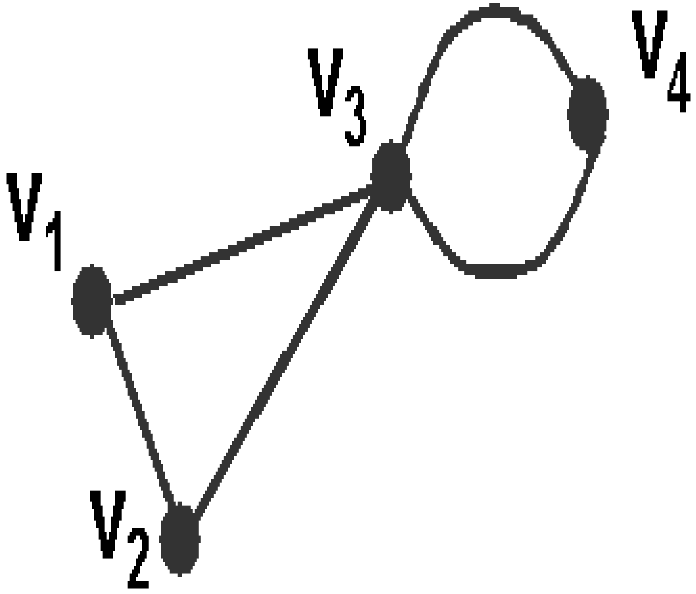
Grafos e Suas Representações

- Definição:

Caminho Simples: **Um caminho é simples se todos os vértices que o compõem forem distintos.**

O caminho P= v3,v1,v2 é simples

O caminho
P= v3,v4,v3,v1 NÃO é simples



- :

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

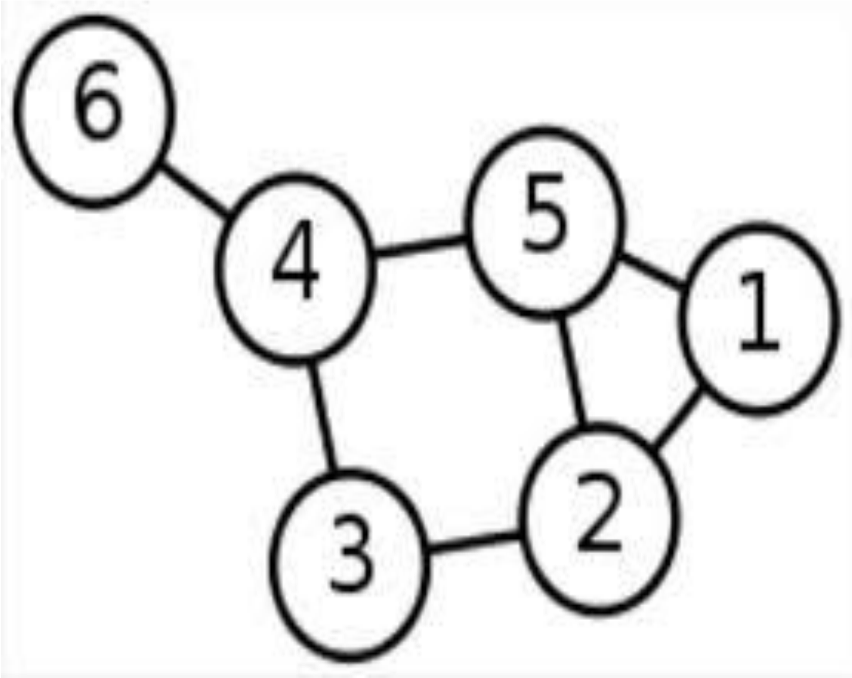
Grafos e Suas Representações

- Grafo conexo
- Ciclo
- Grafo a acíclico

Grafos e Suas Representações

Definição:

<u>Grafo conexo</u>: Um gráfo é conexo se existe um caminho de um nó para para qualquer outro.

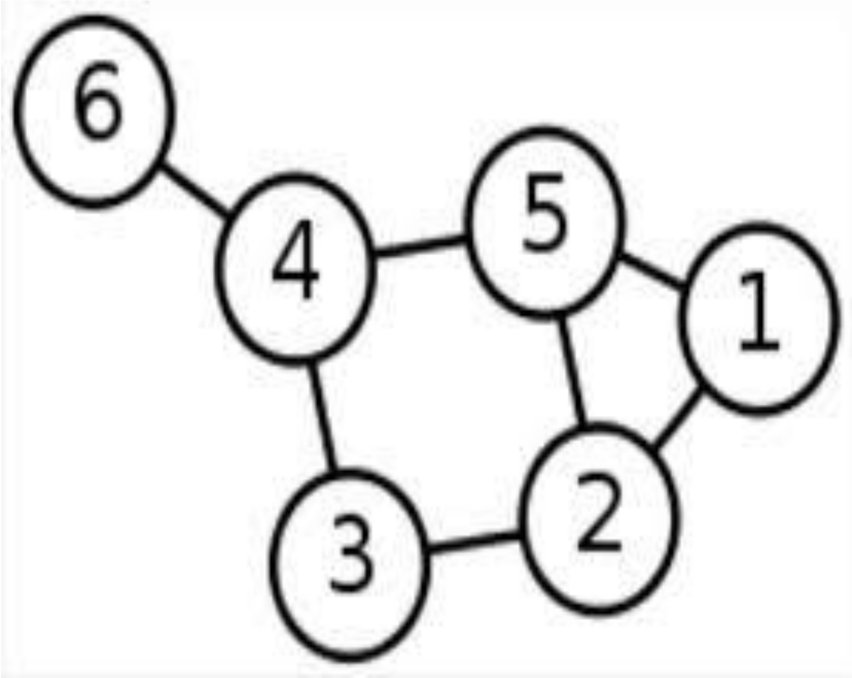


.

Grafos e Suas Representações

Definição: Ciclo:

É um um caminho simples de um nó "n"para ele mesmo. (O único nó que pode se repetir é o nó "n" que é a origem e extremidade do caminho .



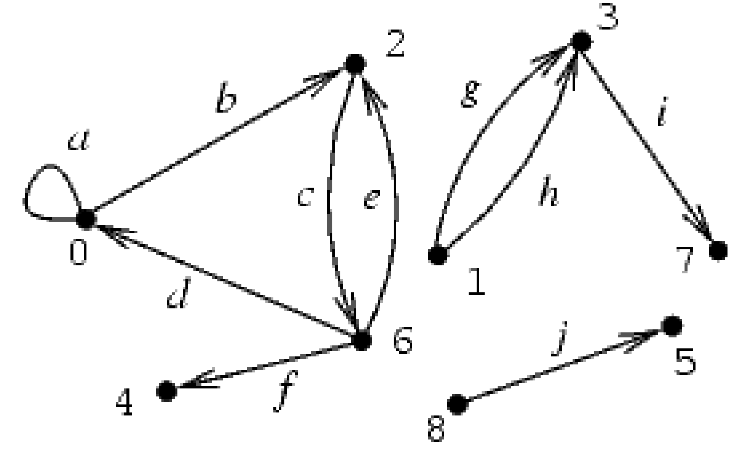
.

Grafos e Suas Representações

Exemplo: Determine, se possível:

a) Um ciclo

b) O subgrafo {1,3,7} é conexo?

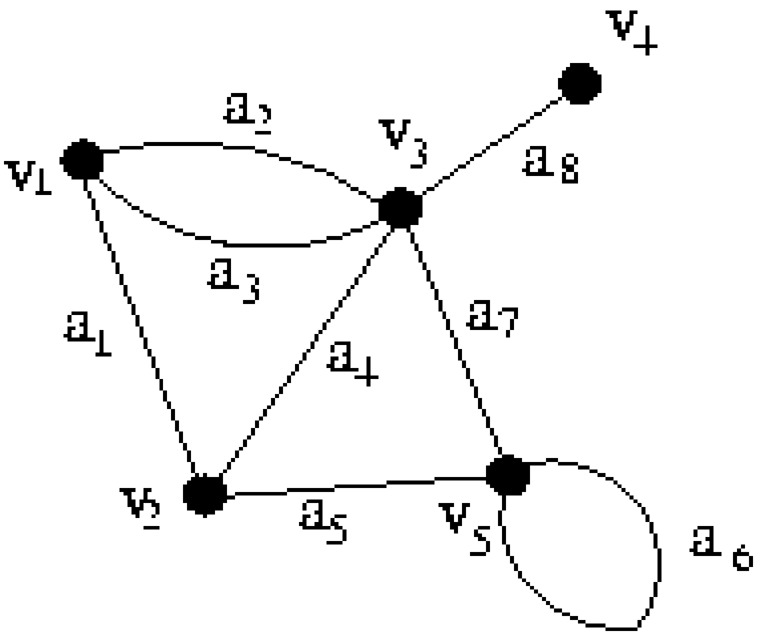


Grafos e Suas Representações

Representação Computacional:

- Matriz de Adjacência: Seja G um grafo com k nós, $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Essa numeração impões uma ordem arbitrária nos nós. Após a ordenação dos nós criamos uma matriz A quadrada kxk, onde o elemento $a_{i,j}$ é o número de arcos entre os nós i e j

Exemplo: Dado o gráfico a seguir, obtenha uma matriz de adjacência

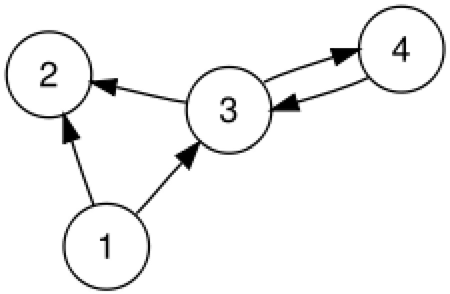


- A matriz de adjacência será uma matriz 5x5

- $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- OBS1: A diagonal principal não será nula se houver laço;
- OBS2: Grafo não direcionado tem a matriz de adjacência simétrica.

Exemplo: Dado o gráfico a seguir, obtenha uma matriz de adjacência



- A matriz de adjacência será uma matriz 4x4

- $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

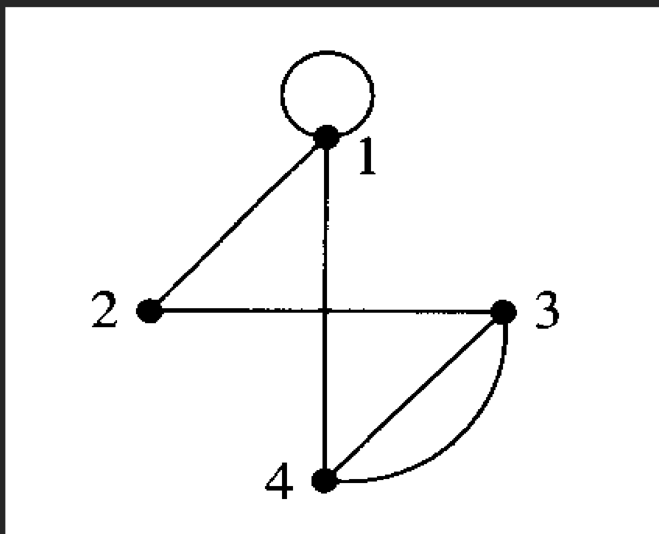
- OBS1: A diagonal principal será nula se não houver laço;
- OBS2: No grafo direcionado a matriz de adjacência não será simétrica.

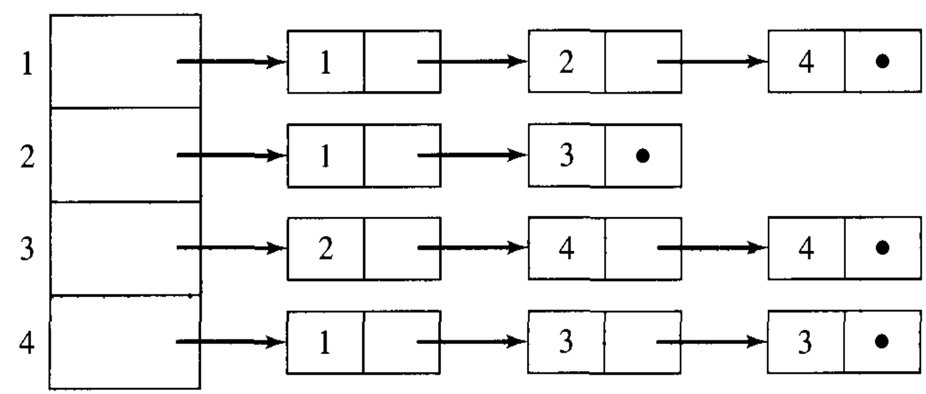
Grafos e Suas Representações

Representação Computacional:

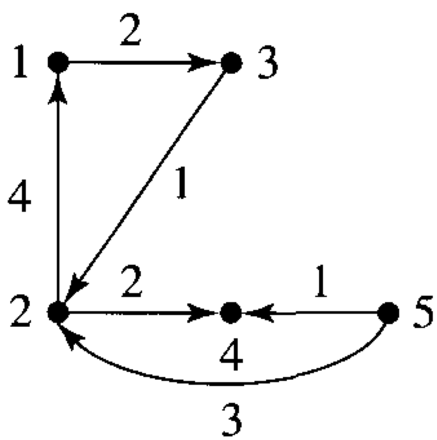
- Lista de Adjacência : Uma lista para cada nó, de todos os nós adjacentes a ele. São usados ponteiros para se ir de um item na lista para o próximo. Existe um arranjo de n ponteiros , um para cada nó, para iniciar a lista. Esta estrutura é chamada de lista encadeada.

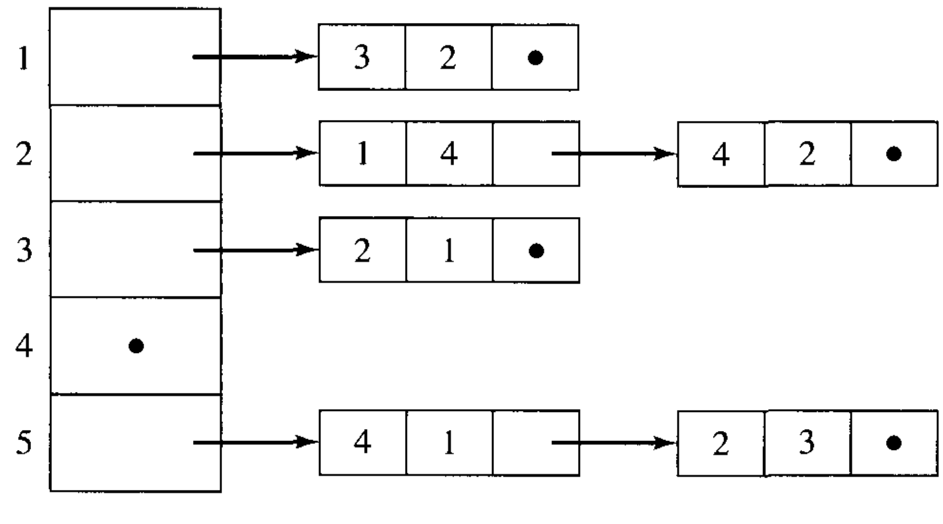
Exemplo: Lista de adjacência grafo a seguir





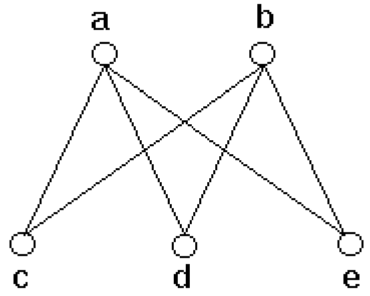
Exemplo: Lista de adjacência grafo a seguir





Grafos e Suas Representações

Definição: Grafo bipartido completo: Se os nós podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos e não-vazios N_1 e N_2, tal que cada nó de N_1 e adjacente à todos os nós de N_2 e vice-versa. Se o número de nós de N_1 é m e o número de nós de N_2 é n, denota-se este grafo por $K_{m,n}$.



$k_{2,3}$

Grafos e Suas Representações

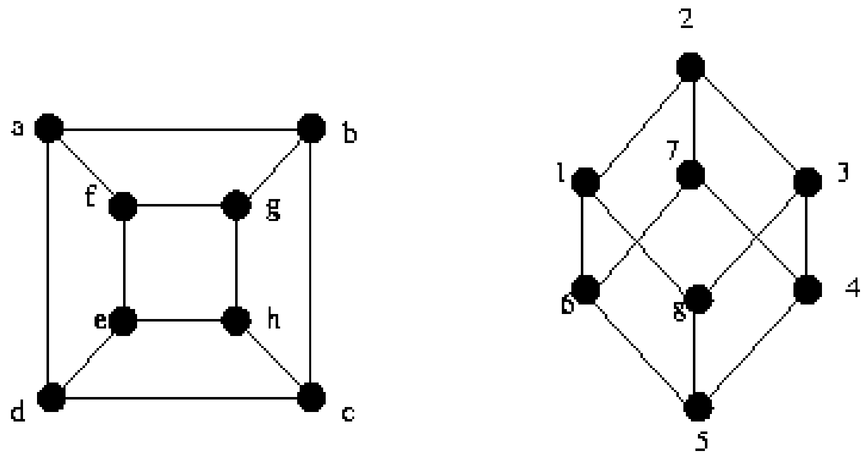
Exemplo: Desenhe $K_{3,3}$

Ex: Prove que um grafo acíclico é simples.
Dica: demonstração por contraposição

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

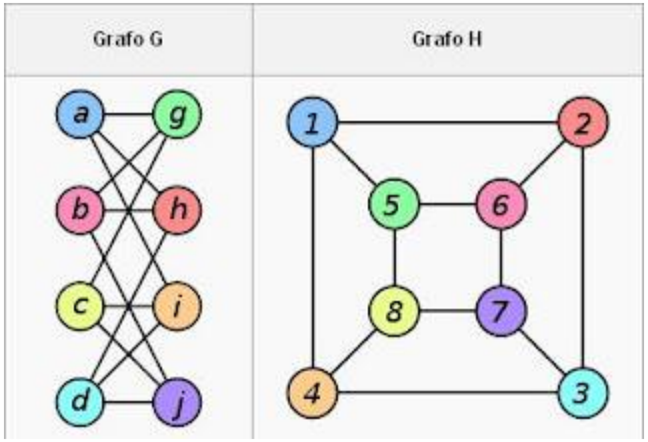
Grafos e Suas Representações

Teorema sobre isomorfismo de Grafos Simples: Se existe uma bijeção *f* relacionando dois grafos G(N,A) e G'(N',A'), tal que para cada par de nós x e y adjacentes em N temos que *f*(x) e *f*(y) pertencem à N' e são adjacentes.



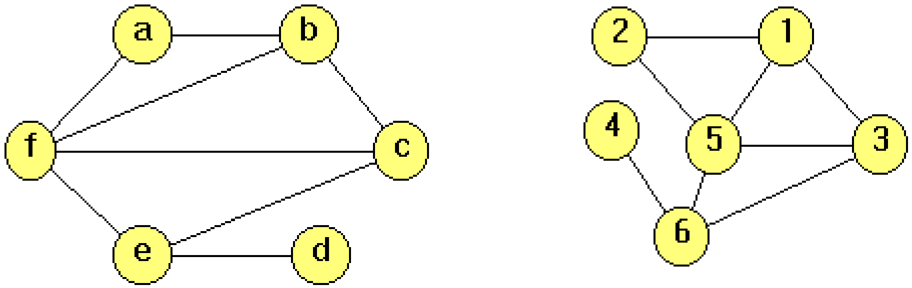
Grafos e Suas Representações

Exemplo:



Grafos e Suas Representações

Ex: Encontre a relação de isomorfismo entre os grafos.

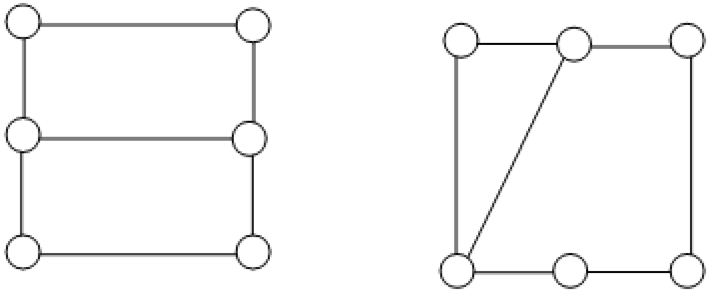


Ex: Esse grafos são isomorfos?

$$
\begin{aligned}
g:\ a &\to 2 \\
b &\to 1 \\
c &\to 3 \\
d &\to 4 \\
e &\to 6 \\
f &\to 5
\end{aligned}
$$

Grafos e Suas Representações

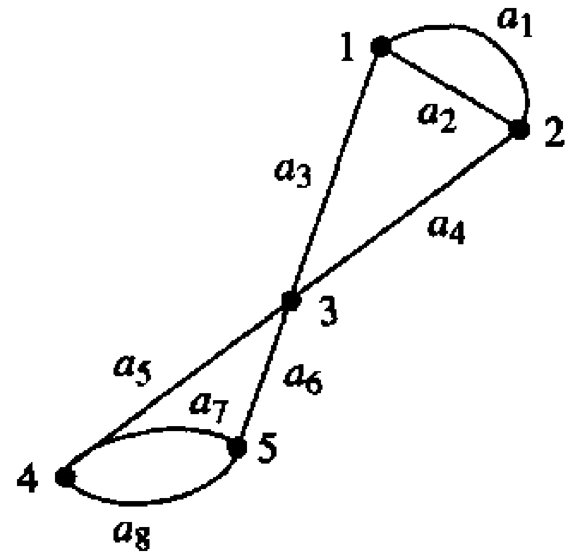
Ex: Esse grafos são isomorfos?



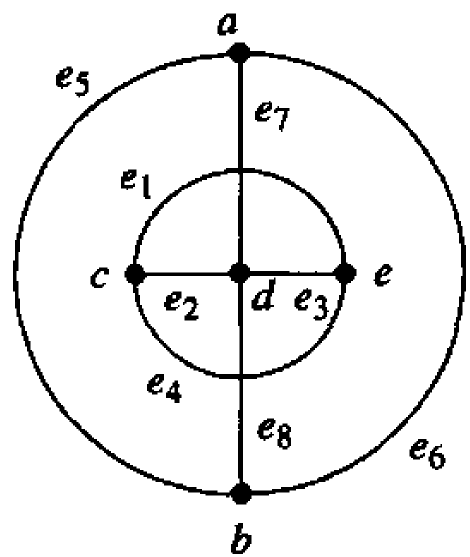
Grafos e Suas Representações

Teorema sobre isomorfismo de Grafos : Dois grafos G(N,A,g) e G'(N',A',g') são isomorfos se existem bijeções $f_1 = N \rightarrow N'$ e $f_2 = A \rightarrow A'$ tais que para cada arco $a \in A$, $g(a) = x - y$ se, e somente se, $g'(f_2(a)) = f_1(x) - f_1(y)$

Exemplo:



$$
\begin{aligned}
f_1 :\ & 1 \to c \\
& 2 \to e \\
& 3 \to d \\
& 4 \to b \\
& 5 \to a
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
f_2 :\ & a_1 \to e_1 \\
& a_2 \to e_4 \\
& a_3 \to e_2 \\
& \quad \vdots
\end{aligned}
$$



Grafos e Suas Representações

Grafos Planares: um grafo planar é um grafo que pode ser representado no plano de tal forma que suas arestas não se cruzem.

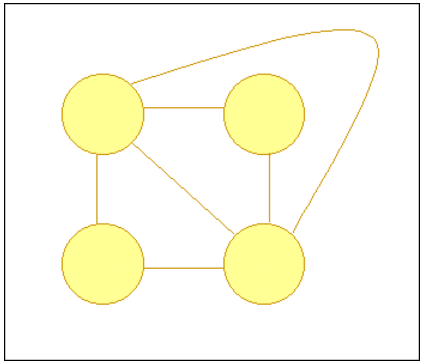
Ex: Provar que K_4 é planar.

Ex: K_5 é planar?

Ex: $K_{3,3}$ é planar?

Grafos e Suas Representações

Grafos Planares: Seja grafo planar, simples e conexo, então $n - a + r = 2$. (Fórmula de Euler)



Onde:

n = número de nós

a = número de arcos

r = número de regiões

Grafos e Suas Representações

Fórmula de Euler: $n - a + r = 2$

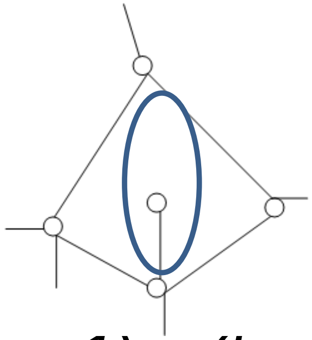
Provar por indução (nº de arestas)

Caso base: $a = 0 \rightarrow n = 1$ e $r = 1$

Supor $a = k \rightarrow n - k + r = 2$

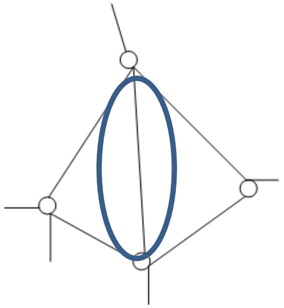
Considere a adição de uma aresta:

caso 1



$(n + 1) - (k + 1) + r = 2$

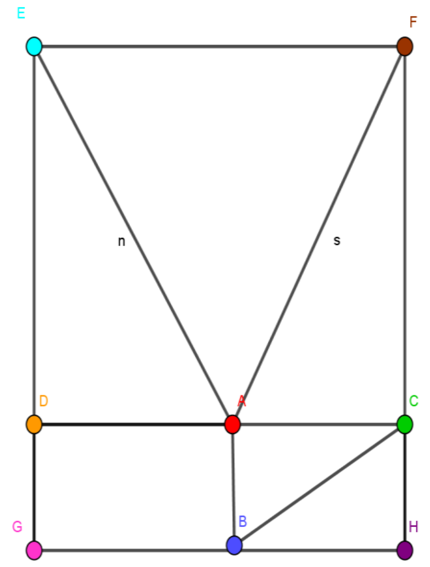
caso2



$n - (k + 1) + (r + 1) = 2$

Grafos e Suas Representações

- Exercício: Dado o gráfico a seguir, verifique se o grafo é planar.



Grafos e Suas Representações

Exercício: Sabendo que um grafo tem 20 nós e cada nó tem grau quatro. Se este grafo é grafo simples, conexo e planar. Quantas regiões deve ter este grafo?

Grafos e Suas Representações

Grafos Planares: Seja grafo planar simples e conexo, então
Fórmula de Euler: $n - a + r = 2;$ com $n >= 3$.
Outro resultado:
Contando o número *a* arcos por regiões temos que um grafo com *a* arcos terá, *2a* arcos por região.
E, como o grafo é planar simples, temos no mínimo 3 arcos por região. Ou seja, o número total de arcos por região é 3r.
Logo, $2a >= 3r$.
Substituindo, $2a >= 3(2 - n + 2)$

$$a <= 3n - 6$$

Grafos e Suas Representações

Grafos Planares: Seja grafo planar simples e conexo, então:

Fórmula de Euler: $n - a + r = 2$; com $n >= 3$.

Considere que não exista ciclos de comprimento 3. Então cada região terá pelo menos 4 arestas, isto é, $2a >= 4r$.

Que fica, $a <= 2n - 4$

Grafos e Suas Representações

Resumo: Em um grafo planar simples e conexo

1) $n - a + r = 2;$

2) *Se* n >= 3, então a <= 3n – 6

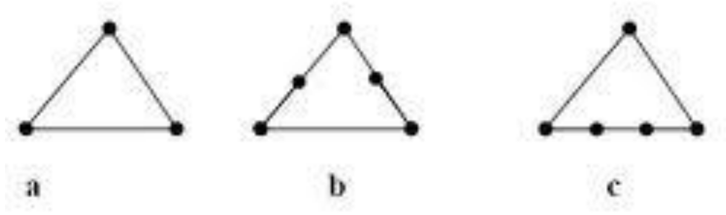
3) Se não existem ciclos de comprimento 3, então a <= 2n – 4

Grafos e Suas Representações

Exercício: Mostre que os grafos K_5 e $K_{3,3}$ são não planares

Grafos e Suas Representações

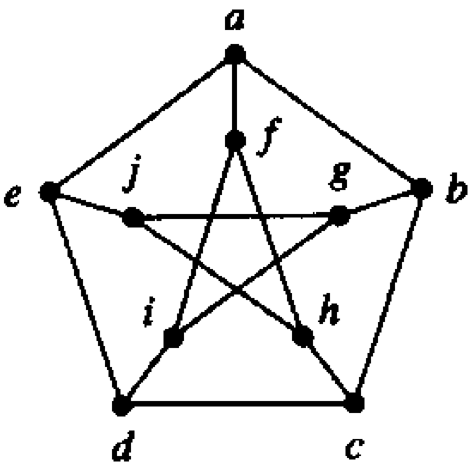
Definição: Dois grafos G, H são homeomorfos se ambos podem ser obtidos de um mesmo grafo por uma sequência de subdivisões elementares, nas quais um único arco x-y é substituído por dois novos arcos , x-v e v-y, ligando um novo nó v.



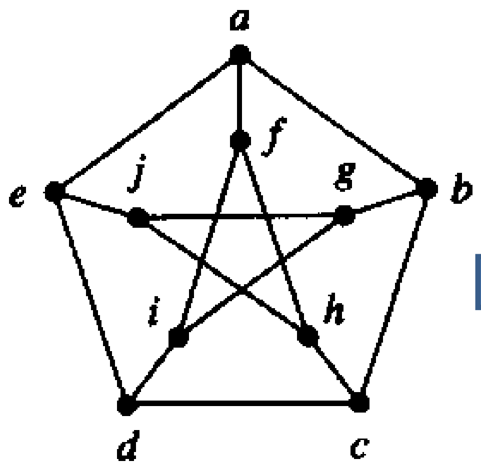
Grafos e Suas Representações

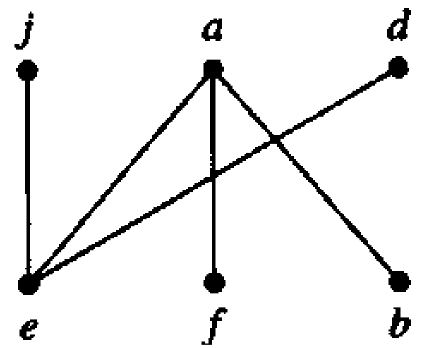
Teorema de Kuratowski: Um grafo não é planar se e só se contém um subgrafo homeomorfo a K_5 ou a $K_{3,3}$

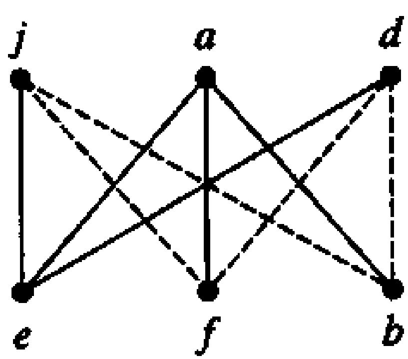
Exemplo: Verifique se o grafo a seguir é planar ou não-planar

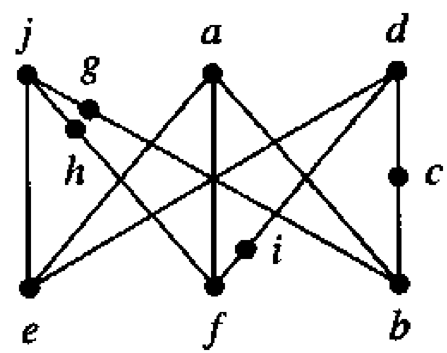


Grafos e Suas Representações









Lista Mínima de Exercícios

Seção 5.1: 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 22, 23, 28, 31, 33, 35, 39, 43, 52, 53, 56, 57