CAPÍTULO 5

IMPLICAÇÃO E EQUIVALÊNCIA LÓGICA

Fala Professor

Já sabemos avaliar os valores lógicos de uma proposição composta e julgar se ela é uma tautologia, contradição ou contingência. Mas será que dada uma proposição composta conseguimos deduzir alguma coisa a respeito de outra proposição composta?

5.1 Implicação Lógica

Conceitos

Diz-se que uma proposição P(p,q,r,...) **implica logicamente** ou apenas **implica** uma proposição Q(p,q,r,...), se Q(p,q,r,...) é verdadeira (V) todas as vezes que P(p,q,r,...) é verdadeira (V).

Em outras palavras, uma proposição P(p,q,r,...) **implica logicamente** uma proposição Q(p,q,r,...), todas as vezes que nas respectivas tabelas-verdade dessas duas proposições não aparecer V na última coluna de P e F na última coluna de Q, com V e F na mesma linha, ou seja, não ocorre P e Q com valores lógicos simultâneos V e F (ALENCAR FILHO, 2003).

Representação: P(p,q,r,...) => Q(p,q,r,...)

Em particular, toda proposição implica uma tautologia e somente uma contradição implica uma contradição.

5.2 Propriedades da Implicação Lógica

A relação de implicação lógica entre proposições possui as propriedades reflexiva (R) e transitiva (T), isto é, simbolicamente.

(R) **P(p,q,r,...) => P(p,q,r,...)**

(T) **Se P(p,q,r,...) => Q(p,q,r,...) e**
Q(p,q,r,...) => R(p,q,r,...), então
P(p,q,r,...) => R(p,q,r,...)

Exemplos:

(1) Considere a tabela-verdade para as proposições $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$ e $(p \leftrightarrow q)$

p	q	$p \wedge q$	$(p \vee q)$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	F	V

Vamos observar $(p \wedge q)$. Esta proposição é verdadeira apenas na 1ª linha. Nesta mesma linha, p, q, $(p \vee q)$ e $(p \wedge q)$ são também verdadeiras. Quer dizer, $(p \wedge q)$ implica logicamente em p, por exemplo. Assim, podemos escrever: $\mathbf{(p \wedge q) \Rightarrow p}$.

As mesmas tabelas-verdade demonstram importantes regras de inferência:

$\mathbf{p \Rightarrow p \vee q}$ **e** $\mathbf{q \Rightarrow p \vee q}$ **(Adição)**

$\mathbf{p \wedge q \Rightarrow p}$ **e** $\mathbf{p \wedge q \Rightarrow q}$ **(Simplificação)**

(2) Seja a tabela-verdade da proposição $\mathbf{(p \vee q) \wedge \sim p}$:

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

Ela é verdadeira apenas na linha 3, em que q também é verdadeira. Logo existe a seguinte implicação lógica:

$\mathbf{(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q}$ **e** $\mathbf{(p \vee q) \wedge \sim q \Rightarrow p}$ **(Regra do Silogismo Disjuntivo)**

(3) Seja a tabela-verdade da proposição $\mathbf{(p \rightarrow q) \wedge p}$:

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

Ela é verdadeira apenas na linha 1, em que **q** também é verdadeira. Logo existe a seguinte implicação lógica:

$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ (Regra Modus Ponens)

(4) Sejam as tabelas-verdade das proposições **$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$ e $\sim p$:**

p	q	$p \rightarrow q$	~q	$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$	~p
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Ela é verdadeira apenas na linha 4, em que **~p** também é verdadeira. Logo existe a seguinte implicação lógica:

$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow p$ (Regra Modus tollens)

5.3 Tautologias e Implicação Lógica

Teorema: Dizemos que a proposição P(p, q, r, ...) **implica** a proposição Q(p, q, r, ...), ou seja **P(p, q, r, ...) => Q(p, q, r, ...),** se e somente se a condicional **(p, q, r, ...) $\rightarrow$ Q(p, q, r, ...)** é tautológica.

Conceitos

Portanto, a toda implicação lógica corresponde uma condicional tautológica e vice-versa. Isso acontece porque, como **P** => em Q, não ocorre o situação onde P é falso e Q é verdadeiro. Desse modo, P $\rightarrow$ Q nunca será falso.

Observe que os símbolos $\rightarrow$ e => são diferentes. O primeiro é de operação lógica e o segundo é de relação.

Atenção

Exemplo:

A proposição **(p <-> q) ^ p** implica a proposição **q**, pois a condicional **(p <-> q) ^ p -> q** é tautológica.

p	q	p <-> q	(p <-> q) ^ p	(p <-> q) ^ p -> q
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Ou seja: **(p <-> q) ^ p => q.**

Atividades

ATIVIDADE 6 - Para exercitar, vamos realizar algumas das atividades propostas por (PINHO, 1999, p. 53):

1. Utilizando tabelas-verdade, verifique se existem as relações de implicação lógica seguintes:

(a) $p \wedge q \Longrightarrow q \wedge p$

(b) $\sim(p \wedge q) \Longrightarrow \sim p \vee \sim q$

(c) $p \longrightarrow q \wedge r \longrightarrow \sim q \Longrightarrow r \longrightarrow \sim p$

(d) $\sim p \wedge (\sim q \longrightarrow p) \Longrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$

2. Mostrar que:

(a) $q \Longrightarrow p \longrightarrow q$ (b) $q \Longrightarrow p \wedge q \longleftrightarrow p$

3. Mostrar que $\mathbf{p \longleftrightarrow \sim q}$ **não implica** $\mathbf{p \longrightarrow q}$**.**

4. Mostrar $(x \neq y \longrightarrow x = y) \wedge x \neq y \Longrightarrow x = 0$.

5.4 EQUIVALÊNCIA LÓGICA

Conceitos

Uma proposição P(p,q,r...) é **logicamente equivalente** a uma proposição Q(p,q,r...), se as tabelas-verdade destas duas proposições são idênticas.

Representação: P(p,q,r,...) ⇔ Q(p,q,r,...)

Em particular, se as proposições P e Q são ambas tautológicas ou são ambas contradições, então são equivalentes.

5.5 Propriedades da Equivalência Lógica

Vamos relacionar algumas propriedades:

- **Reflexiva** (a proposição é equivalente a ela mesma): **P(p,q,r..) ⇔ P(p,q,r..)**
- **Simétrica** (se uma proposição equivale a uma outra, esta outra equivale à primeira):
  Se P(p,q,r..) ⇔ Q(p,q,r..) então **Q(p,q,r..) ⇔ P(p,q,r..)**
- **Transitiva** (se uma proposição equivale a uma segunda, e a segunda proposição é equivalente à uma terceira, a primeira equivale à terceira):
  Se P(p,q,r..) ⇔ R(p,q,r..) e **R(p,q,r..) ⇔ Q(p,q,r..) então P(p,q,r..) ó Q(p,q,r..)**

5.6 Exemplos

(1) Regra da dupla negação

As proposições **~~p e p** são equivalentes, ou seja, **~~p ⇔ p:**

p	~p	~~p
V	F	V
F	V	F

(2) Regra de CLAVIUS

As proposições **~p → p** e **p** são equivalentes, ou seja, **~p → p ⇔ p**:

p	~p	~p → p
V	F	V
F	V	F

(3) Regra de absorção

As proposições $\mathbf{p \rightarrow p \wedge q}$ e $\mathbf{p \rightarrow q}$ são equivalentes:

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow p \wedge q$	$p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

5.7 Tautologias e Equivalência Lógica

Conceitos

Teorema: Dizemos que a proposição P(p, q, r, ...) **é equivalente** a proposição Q(p, q, r, ...), ou seja **P(p, q, r, ...)** $\Leftrightarrow$ **Q(p, q, r, ...)**, se e somente se a bicondicional **(p, q, r, ...)** $\leftrightarrow$ **Q(p, q, r, ...)** é tautológica (ALENCAR FILHO, 2003).

Portanto, toda equivalência lógica corresponde a uma bicondicional tautológica e vice-versa. Isso acontece, porque, se duas proposições P $\Leftrightarrow$ Q, então não ocorre o caso em que P e Q apresentam valores lógicos diferentes. Desse modo P $\leftrightarrow$ Q é uma tautologia.

Atenção

Observe que os símbolos $\leftrightarrow$ e $\Leftrightarrow$ são diferentes. O primeiro é de operação lógica e o segundo é de relação.

Exemplo:

A bicondicional $\mathbf{(p \wedge \sim q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)}$, onde **c** é uma proposição com valor lógico **F**, é tautológica, pois a última coluna da tabela-verdade tem apenas a letra **V**. Portanto, as proposições $\mathbf{p \wedge \sim q \rightarrow c}$ e $\mathbf{p \rightarrow q}$ são equivalentes, ou seja, $\mathbf{(p \wedge \sim q \rightarrow c) \Leftrightarrow (p \rightarrow q)}$.

Nesta equivalência consiste o **método de demonstração por absurdo.**

ATIVIDADE 7:

Atividades

1. Construa a tabela-verdade do exemplo acima.

5.8 Proposições Associadas a uma Condicional

Dada a condicional **p** $\rightarrow$ **q**, temos as seguintes proposições associadas:

- **Proposição recíproca de p $\rightarrow$ q: q $\rightarrow$ p**
- **Proposição contrária de p $\rightarrow$ q: ~p $\rightarrow$ ~q**
- **Proposição contrapositiva de p $\rightarrow$ q: ~q $\rightarrow$ ~p**

ATIVIDADE 8:

Atividades

1. Construa as tabelas-verdade das proposições acima.

5.9 Negação Conjunta de Duas Proposições

Conceitos

Negação conjunta – de duas proposições **p** e **q** é a proposição **não p** e **não q**, ou seja, **~p** $\wedge$ **~q**. Também indicada pela notação: **p** $\downarrow$ **q.**

Portanto temos: **p** $\downarrow$ **q** $\Leftrightarrow$ **~p** $\wedge$ **~q**

ATIVIDADE 9:

Atividades

1. Construa a tabela-verdade da proposição anterior.

5.10 Negação Disjunta de Duas Proposições

Conceitos

Negação disjunta – de duas proposições **p** e **q** é a proposição **não p ou não q**, ou seja, **~p** $\vee$ **~q**. Também indicada pela notação: **p** $\uparrow$ **q**.

Portanto temos: **p** $\uparrow$ **q** $\Leftrightarrow$ **~p** $\vee$ **~q**

Atividades

ATIVIDADE 10 – Para exercitar, vamos realizar algumas das atividades propostas por (PINHO, 1999, p. 63):

1. Construa a tabela-verdade da proposição acima.

2. Mostrar que as proposições **p** e **q** são equivalentes (**p** $\Leftrightarrow$ **q**) nos seguintes casos:

(a) p: $1 + 3 = 4$; q: $(1 + 3)^2 = 16$

(b) p: $\text{sen}^0 = 1$; q: $\cos^0 = 0$

(c) p: x é par; q: x + 1 é impar ($x \in \mathbf{Z}$)

3. Exprimir a bicondicional $p \leftrightarrow q$ em função dos conectivos: $\wedge$, $\vee$ e ~.

4. Demonstrar, por tabelas-verdade, as seguinte equivalências:

(a) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ (b) $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \vee r$

5. Demonstrar através de tabelas-verdade, que os três conectivos $\vee$ e ~ exprimem-se em função do conectivo $\uparrow$, do seguinte modo:

(a) $\sim p \Leftrightarrow p \uparrow p$ (b) $p \vee q \Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$

6. Sabendo que o valor lógico das proposições **q** e **p** são verdadeiras e de **r** é **falsa**, determine o valor lógico das seguintes proposições:

(a) $((p \uparrow q) \wedge (q \uparrow \sim r)$ (b) $(\sim p \uparrow \sim q) \leftrightarrow ((q \downarrow r) \downarrow p)$

Indicações

Para maior compreensão, ler os capítulos 5 – Implicação Lógica e 6 – Equivalência Lógica do livro Alencar Filho, Edgard de. Iniciação à lógica matemática. São Paulo: Nobel, 2003.