

# Matemática Discreta

Adriana Padua Lovatte

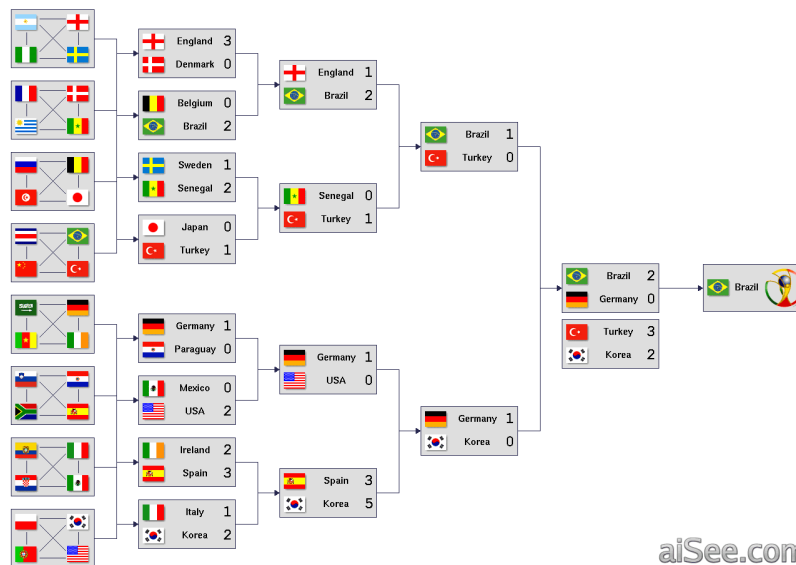
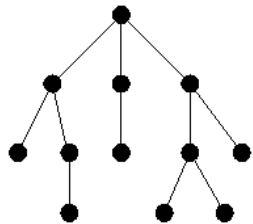
# Grafos e Árvores

- Grafos e Suas Representações
- Árvores e suas Representações
- Árvores de Decisão
- Códigos de Huffman

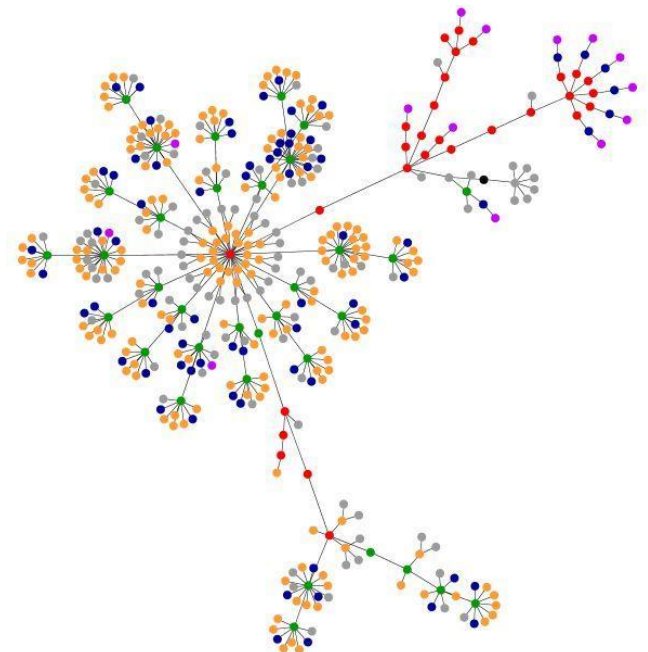
# Grafos e Suas Representações

Definição: Uma **árvore** é um grafo conexo acíclico com um nó especial, denominado raiz da árvore.

OBS: caso não haja raiz a árvore é chamada de, **árvore sem raiz** ou **árvore livre**.



aiSee.com



# Grafos e Suas Representações

Quantos caminhos existem entre quaisquer dois nós de uma árvore?

Dica: a árvore é conexa?

lembre-se que a árvore é acíclica!

**Profundidade do nó:** comprimento do caminho da raiz ao nó.

A raiz tem profundidade 0.

**Profundidade da árvore:** maior profundidade de um nó

**Folha:** nó sem filhos

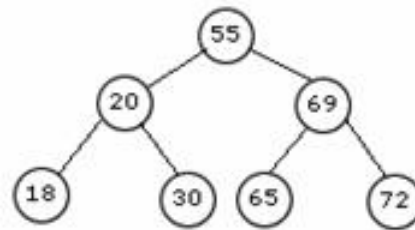
**Nós internos:** nó que não são folhas

**Floresta:** conjunto de arvores desconexas

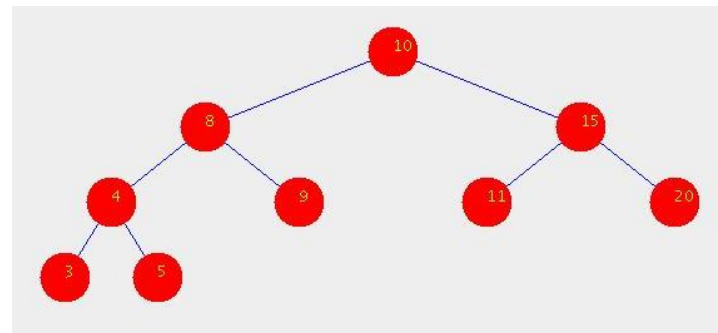
# Grafos e Suas Representações

**Árvore binária:** com no máximo dois filhos cada nós.

**Árvore binária cheia**



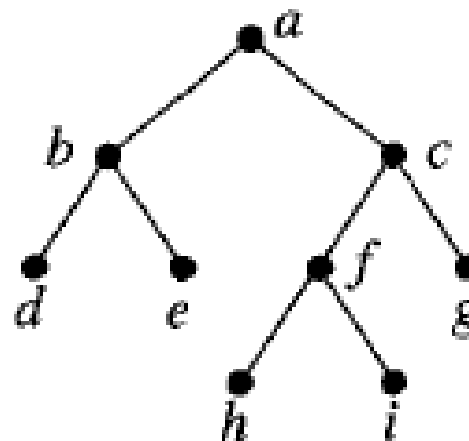
**Árvore binária completa**

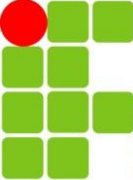


# Grafos e Suas Representações

**Ex:**

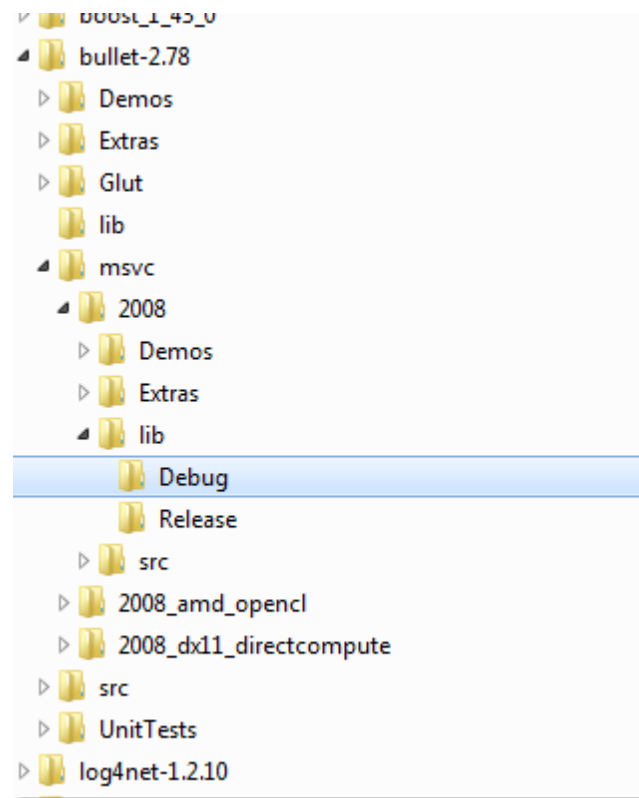
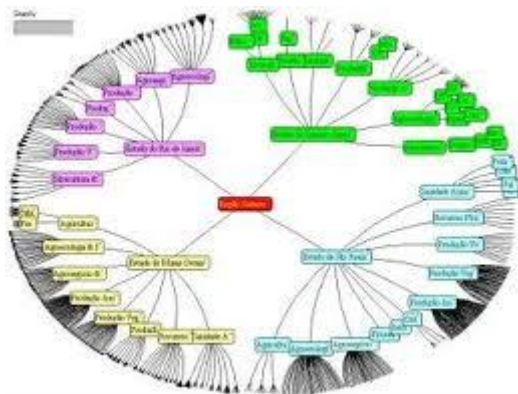
- Altura da árvore?
- Profundidade do nó D?
- Filhos de B?
- Filho a esquerda de C?
- Comprimento do caminho de D à I?





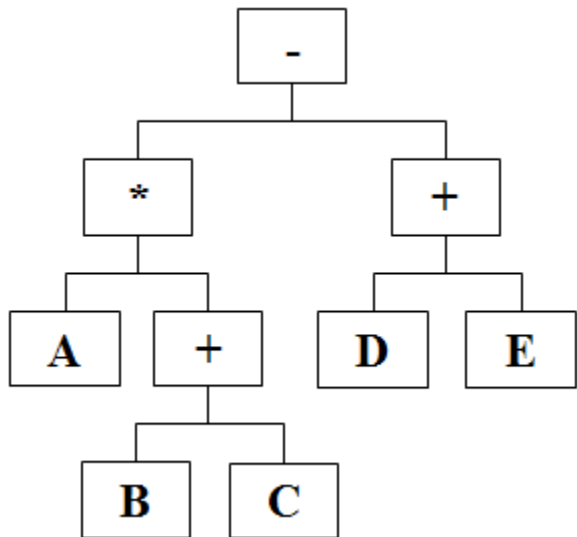
# Grafos e Suas Representações

## Aplicações:



# Grafos e Suas Representações

## Operações:

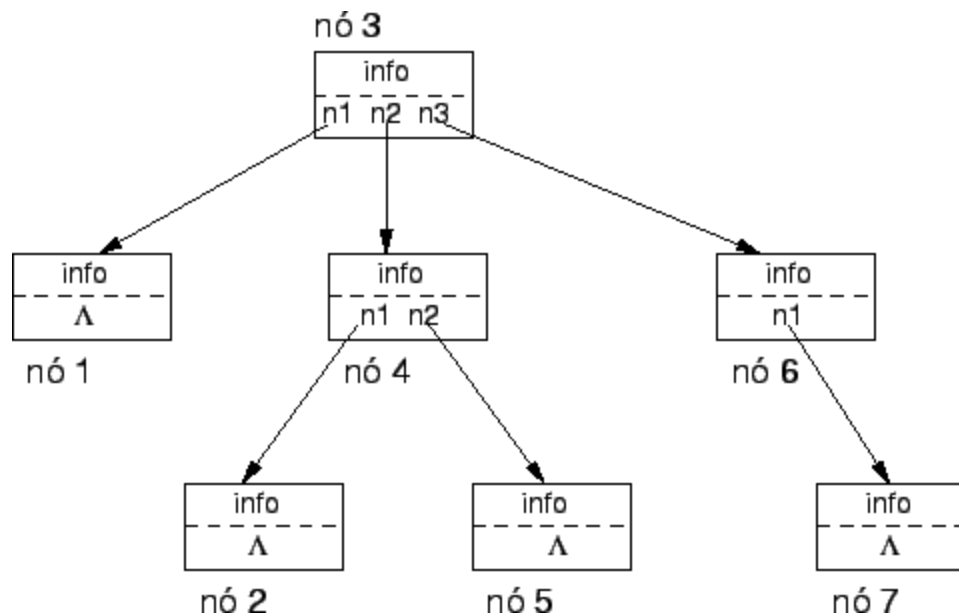


Ex: Monte a árvore para  $(2 + 3) - (y * 2)$ .



# Grafos e Suas Representações

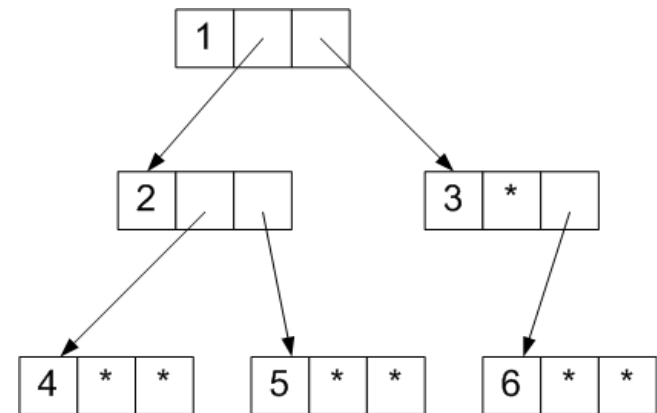
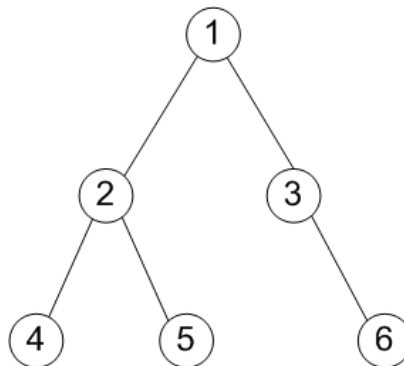
## Representação de árvores:



# Grafos e Suas Representações

## Representação de árvores binárias:

	Filho esquerdo	Filho direito
1	2	3
2	4	5
3	0	6
4	0	0
5	0	0
6	0	0



# Grafos e Suas Representações

## **Algoritmo de Percurso em Árvore:**

- **Pré-ordem**
- **Ordem Simétrica**
- **Pós-ordem**

Para análise, note que a própria definição de árvore é recursiva.

# Grafos e Suas Representações

## Algoritmo recursivo Pré-ordem

*PRÉ – ORDEM (Árvore binária com raiz  $p$ )*

*Se **raiz**  $\neq$  **nulo** então*  
*visita  $p$*

*Pré – Ordem( $p$ .esquerda)*

*Pré – Ordem( $p$ .direita)*

*fim do se*

Note que o primeiro nó a ser visitado é a raiz

# Grafos e Suas Representações

## Algoritmo recursivo Ordem-Simétrica

*EM – ORDEM ( Árvore binária com raiz  $p$  )*

*Se **raiz**  $\neq$  **nulo** então*

*Em – Ordem( $p$ .esquerda)*

*visita  $p$*

*Em – Ordem( $p$ .direita)*

*fim do se*

Primeiro é percorrido a sub-árvore da esquerda, depois a raiz e depois a sub-árvore da direita.

# Grafos e Suas Representações

## Algoritmo recursivo Pós-ordem

*PÓS – ORDEM (Árvore binária com raiz  $p$ )*

*Se **raiz**  $\neq$  **nulo** então*

*Pós – Ordem( $p$ .esquerda)*

*Pós – Ordem( $p$ .direita)*

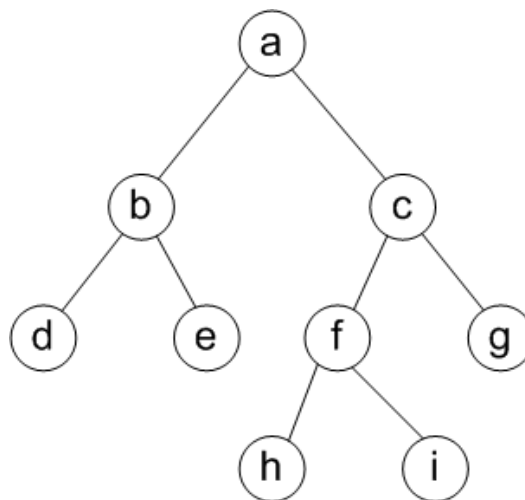
*visita  $p$*

*fim do se*

Note que o último nó a ser visitado é a raiz

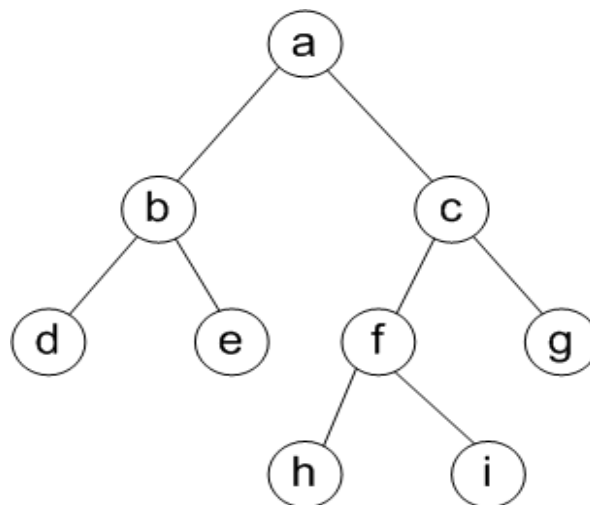
# Grafos e Suas Representações

Diga a sequência impressa pelo algoritmo de pré-ordem para a seguinte árvore.



# Grafos e Suas Representações

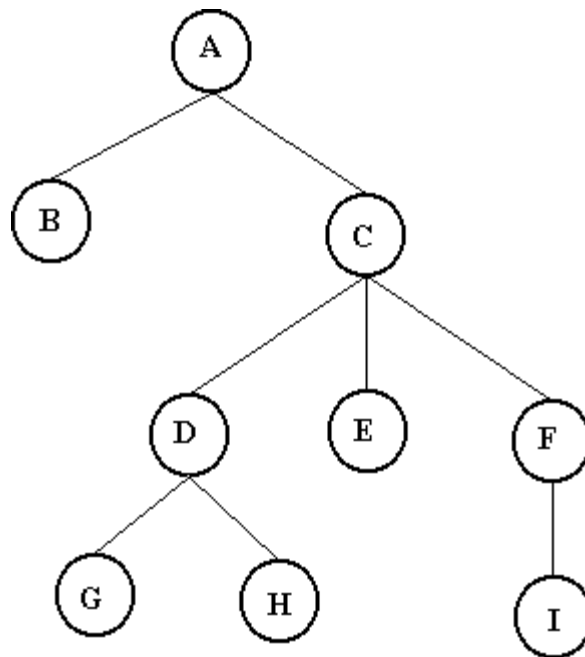
Com a árvore desenhada escreva como ficaria a saída dos algoritmos de **Ordem-simétrica** e **Pós-Ordem**?





# Grafos e Suas Representações

Ex: Escreva as saídas dos algoritmos de **Pré-Ordem**, **Ordem-simétrica** e **Pós-Ordem** para a seguinte árvore.



# Grafos e Suas Representações

## Resultados sobre Árvores:

- Prove que o número de arcos é sempre um a menos que o número de nós.
- Prove que, em qualquer árvore com  $n$  nós, o número total de extremidades de arcos é  $2n - 2$ .

Prove que, em uma árvore binária cheia, o número total de nós é  $2^{h+1} - 1$ , onde  $h$  é a altura.

# Lista Mínima de Exercícios

Seção 5.2: 4, 7, 9, 12, 14, 16, 33, 34, 39, 40, 42, 43, 48