

# IMPLICAÇÃO E EQUIVALÊNCIA LÓGICA

*Já sabemos avaliar os valores lógicos de uma proposição composta e julgar se ela é uma tautologia, contradição ou contingência. Mas será que dada uma proposição composta conseguimos deduzir alguma coisa a respeito de outra proposição composta?*

ingue risus at  
ne velit at tellus.  
massa porttitor  
sectetur magna.

Fala Professor

## 5.1 Implicação Lógica

Diz-se que uma proposição  $P(p,q,r,...)$  **implica logicamente** ou apenas **implica** uma proposição  $Q(p,q,r,...)$ , se  $Q(p,q,r,...)$  é verdadeira (V) todas as vezes que  $P(p,q,r,...)$  é verdadeira (V).



Conceitos

Em outras palavras, uma proposição  $P(p,q,r,...)$  **implica logicamente** uma proposição  $Q(p,q,r,...)$ , todas as vezes que nas respectivas tabelas-verdade dessas duas proposições não aparecer V na última coluna de P e F na última coluna de Q, com V e F na mesma linha, ou seja, não ocorre P e Q com valores lógicos simultâneos V e F (ALENCAR FILHO, 2003).

**Representação:**  $P(p,q,r,...) \Rightarrow Q(p,q,r,...)$

Em particular, toda proposição implica uma tautologia e somente uma contradição implica uma contradição.

## 5.2 Propriedades da Implicação Lógica

A relação de implicação lógica entre proposições possui as propriedades reflexiva (R) e transitiva (T), isto é, simbolicamente.

(R)	$P(p,q,r,...) \Rightarrow P(p,q,r,...)$
(T)	Se $P(p,q,r,...) \Rightarrow Q(p,q,r,...)$ e $Q(p,q,r,...) \Rightarrow R(p,q,r,...)$ , então $P(p,q,r,...) \Rightarrow R(p,q,r,...)$

**Exemplos:**

(1) Considere a tabela-verdade para as proposições  $(p \wedge q)$ ,  $(p \vee q)$  e  $(p \leftrightarrow q)$

p	q	$p \wedge q$	$(p \vee q)$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	F	V

Vamos observar  $(p \wedge q)$ . Esta proposição é verdadeira apenas na 1ª linha. Nesta mesma linha, p, q,  $(p \vee q)$  e  $(p \wedge q)$  são também verdadeiras. Quer dizer,  $(p \wedge q)$  implica logicamente em p, por exemplo. Assim, podemos escrever:  $(p \wedge q) \Rightarrow p$ .

As mesmas tabelas-verdade demonstram importantes regras de inferência:

$$p \Rightarrow p \vee q \quad \text{e} \quad q \Rightarrow p \vee q \quad (\text{Adição})$$

$$p \wedge q \Rightarrow p \quad \text{e} \quad p \wedge q \Rightarrow q \quad (\text{Simplificação})$$

(2) Seja a tabela-verdade da proposição  $(p \vee q) \wedge \sim p$ :

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

Ela é verdadeira apenas na linha 3, em que q também é verdadeira. Logo existe a seguinte implicação lógica:

$$(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q \quad \text{e} \quad (p \vee q) \wedge \sim q \Rightarrow p \quad (\text{Regra do Silogismo Disjuntivo})$$

(3) Seja a tabela-verdade da proposição  $(p \rightarrow q) \wedge p$ :

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

Ela é verdadeira apenas na linha 1, em que  $q$  também é verdadeira. Logo existe a seguinte implicação lógica:

$$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q \quad (\text{Regra Modus Ponens})$$

(4) Sejam as tabelas-verdade das proposições  $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$  e  $\sim p$ :

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$	$\sim p$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Ela é verdadeira apenas na linha 4, em que  $\sim p$  também é verdadeira. Logo existe a seguinte implicação lógica:

$$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow p \quad (\text{Regra Modus tollens})$$

### 5.3 Tautologias e Implicação Lógica

**Teorema:** Dizemos que a proposição  $P(p, q, r, \dots)$  **implica** a proposição  $Q(p, q, r, \dots)$ , ou seja  $P(p, q, r, \dots) \Rightarrow Q(p, q, r, \dots)$ , se e somente se a condicional  $(p, q, r, \dots) \rightarrow Q(p, q, r, \dots)$  é tautológica.



#### Conceitos

Portanto, a toda implicação lógica corresponde uma condicional tautológica e vice-versa. Isso acontece porque, como  $P \Rightarrow Q$ , não ocorre o situação onde  $P$  é falso e  $Q$  é verdadeiro. Desse modo,  $P \rightarrow Q$  nunca será falso.

Observe que os símbolos  $\rightarrow$  e  $\Rightarrow$  são diferentes. O primeiro é de operação lógica e o segundo é de relação.



#### Atenção

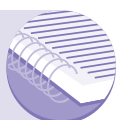
Exemplo:

A proposição  $(p \leftrightarrow q) \wedge p$  implica a proposição  $q$ , pois a condicional  $(p \leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q$  é tautológica.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \wedge p$	$(p \leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Ou seja:  $(p \leftrightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ .

### Atividades



**ATIVIDADE 6 - Para exercitar, vamos realizar algumas das atividades propostas por (PINHO, 1999, p. 53):**

1. Utilizando tabelas-verdade, verifique se existem as relações de implicação lógica seguintes:

- (a)  $p \wedge q \Rightarrow q \wedge p$
- (b)  $\sim(p \wedge q) \Rightarrow \sim p \vee \sim q$
- (c)  $p \rightarrow q \wedge r \rightarrow \sim q \Rightarrow r \rightarrow \sim p$
- (d)  $\sim p \wedge (\sim q \rightarrow p) \Rightarrow \sim(p \wedge \sim q)$

2. Mostrar que:

- (a)  $q \Rightarrow p \rightarrow q$
- (b)  $q \Rightarrow p \wedge q \leftrightarrow p$

3. Mostrar que  $p \leftrightarrow \sim q$  não implica  $p \rightarrow q$ .

4. Mostrar  $(x \neq y \rightarrow x = y) \wedge x \neq y \Rightarrow x = 0$ .

## 5.4 EQUIVALÊNCIA LÓGICA

### Conceitos



Uma proposição  $P(p, q, r, \dots)$  é **logicamente equivalente** a uma proposição  $Q(p, q, r, \dots)$ , se as tabelas-verdade destas duas proposições são idênticas.

**Representação:**  $P(p,q,r,...) \Leftrightarrow Q(p,q,r,...)$

Em particular, se as proposições  $P$  e  $Q$  são ambas tautológicas ou são ambas contraditórias, então são equivalentes.

## 5.5 Propriedades da Equivalência Lógica

Vamos relacionar algumas propriedades:

- **Reflexiva** (a proposição é equivalente a ela mesma):  $P(p,q,r,...) \Leftrightarrow P(p,q,r,...)$
- **Simétrica** (se uma proposição equivale a uma outra, esta outra equivale à primeira):  
Se  $P(p,q,r,...) \Leftrightarrow Q(p,q,r,...)$  então  $Q(p,q,r,...) \Leftrightarrow P(p,q,r,...)$
- **Transitiva** (se uma proposição equivale a uma segunda, e a segunda proposição é equivalente à uma terceira, a primeira equivale à terceira):  
Se  $P(p,q,r,...) \Leftrightarrow R(p,q,r,...)$  e  $R(p,q,r,...) \Leftrightarrow Q(p,q,r,...)$  então  $P(p,q,r,...) \Leftrightarrow Q(p,q,r,...)$

## 5.6 Exemplos

### (1) Regra da dupla negação

As proposições  $\sim\sim p$  e  $p$  são equivalentes, ou seja,  $\sim\sim p \Leftrightarrow p$ :

$p$	$\sim p$	$\sim\sim p$
V	F	V
F	V	F

### (2) Regra de CLAVIUS

As proposições  $\sim p \rightarrow p$  e  $p$  são equivalentes, ou seja,  $\sim p \rightarrow p \Leftrightarrow p$ :

$p$	$\sim p$	$\sim p \rightarrow p$
V	F	V
F	V	F

**(3) Regra de absorção**

As proposições  $p \rightarrow p \wedge q$  e  $p \rightarrow q$  são equivalentes:

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow p \wedge q$	$p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

**5.7 Tautologias e Equivalência Lógica****Conceitos**

**Teorema:** Dizemos que a proposição  $P(p, q, r, \dots)$  é **equivalente** a proposição  $Q(p, q, r, \dots)$ , ou seja  $P(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$ , se e somente se a bicondicional  $(p, q, r, \dots) \leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$  é tautológica (ALENCAR FILHO, 2003).

Portanto, toda equivalência lógica corresponde a uma bicondicional tautológica e vice-versa. Isso acontece, porque, se duas proposições  $P \Leftrightarrow Q$ , então não ocorre o caso em que  $P$  e  $Q$  apresentem valores lógicos diferentes. Desse modo  $P \leftrightarrow Q$  é uma tautologia.

**Atenção**

Observe que os símbolos  $\leftrightarrow$  e  $\Leftrightarrow$  são diferentes. O primeiro é de operação lógica e o segundo é de relação.

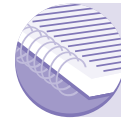
Exemplo:

A bicondicional  $(p \wedge \sim q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$ , onde  $c$  é uma proposição com valor lógico  $F$ , é tautológica, pois a última coluna da tabela-verdade tem apenas a letra  $V$ . Portanto, as proposições  $p \wedge \sim q \rightarrow c$  e  $p \rightarrow q$  são equivalentes, ou seja,  $(p \wedge \sim q \rightarrow c) \Leftrightarrow (p \rightarrow q)$ .

Nesta equivalência consiste o **método de demonstração por absurdo**.

**ATIVIDADE 7:**

1. Construa a tabela-verdade do exemplo acima.

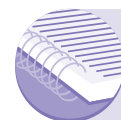
**Atividades****5.8 Proposições Associadas a uma Condicional**

Dada a condicional  $p \rightarrow q$ , temos as seguintes proposições associadas:

- Proposição recíproca de  $p \rightarrow q$ :  $q \rightarrow p$
- Proposição contrária de  $p \rightarrow q$ :  $\sim p \rightarrow \sim q$
- Proposição contrapositiva de  $p \rightarrow q$ :  $\sim q \rightarrow \sim p$

**ATIVIDADE 8:**

1. Construa as tabelas-verdade das proposições acima.

**Atividades****5.9 Negação Conjunta de Duas Proposições**

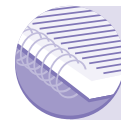
**Negação conjunta** – de duas proposições  $p$  e  $q$  é a proposição **não  $p$  e não  $q$** , ou seja,  $\sim p \wedge \sim q$ . Também indicada pela notação:  $p \downarrow q$ .

**Conceitos**

Portanto temos:  $p \downarrow q \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

**ATIVIDADE 9:**

1. Construa a tabela-verdade da proposição anterior.

**Atividades**

## 5.10 Negação Disjunta de Duas Proposições

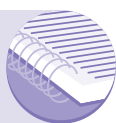
### Conceitos



**Negação disjunta** – de duas proposições **p** e **q** é a proposição **não p ou não q**, ou seja,  $\sim p \vee \sim q$ . Também indicada pela notação:  $p \uparrow q$ .

Portanto temos:  $p \uparrow q \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

### Atividades



**ATIVIDADE 10** – Para exercitar, vamos realizar algumas das atividades propostas por (PINHO, 1999, p. 63):

1. Construa a tabela-verdade da proposição acima.
2. Mostrar que as proposições **p** e **q** são equivalentes ( $p \Leftrightarrow q$ ) nos seguintes casos:
 

(a) $p: 1 + 3 = 4$ ;	$q: (1 + 3)^2 = 16$
(b) $p: \sin^0 = 1$ ;	$q: \cos^0 = 0$
(c) $p: x$ é par;	$q: x + 1$ é ímpar ( $x \in \mathbb{Z}$ )
3. Expressar a bicondicional  $p \Leftrightarrow q$  em função dos conectivos:  $\wedge$ ,  $\vee$  e  $\sim$ .
4. Demonstrar, por tabelas-verdade, as seguinte equivalências:
 

(a) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	(b) $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \vee r$
---	---
5. Demonstrar através de tabelas-verdade, que os três conectivos  $\vee$  e  $\sim$  exprimem-se em função do conectivo  $\uparrow$ , do seguinte modo:
 

(a) $\sim p \Leftrightarrow p \uparrow p$	(b) $p \vee q \Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$
---	---
6. Sabendo que o valor lógico das proposições **q** e **p** são verdadeiras e de **r** é falsa, determine o valor lógico das seguintes proposições:
 

(a) $((p \uparrow q) \wedge (q \uparrow \sim r))$	(b) $(\sim p \uparrow \sim q) \Leftrightarrow ((q \downarrow r) \downarrow p)$
---	--

### Indicações



Para maior compreensão, ler os capítulos 5 – Implicação Lógica e 6 – Equivalência Lógica do livro Alencar Filho, Edgard de. Iniciação à lógica matemática. São Paulo: Nobel, 2003.