# Regelungstechnik

## Kurze Einführung in die Zustandsraumdarstellung

Prof. Dr. Raphael Pfaff

19. Juni 2020

Fachhochschule Aachen

# Einführung Zustandsraum

# Einführung Zustandsraum (state space)

- Zustandsvariablen $x_i(t)$:
  - Energiegehalt der Speichersysteme
  - Bilden Zustandsvektor $x(t)$
- $x(t_0)$ enthält alle Informationen über System zum Zeitpunkt $t_0$
- Überführung der DGL $n$-ter Ordnung in $n$ DGL 1. Ordnung
- Hier betrachtet: *single-input-single-output* (SISO) System

**Zustandsraumdarstellung:**

**Zeitkontinuierlich**

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2)$$

**Zeitdiskret**

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (3)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \quad (4)$$

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

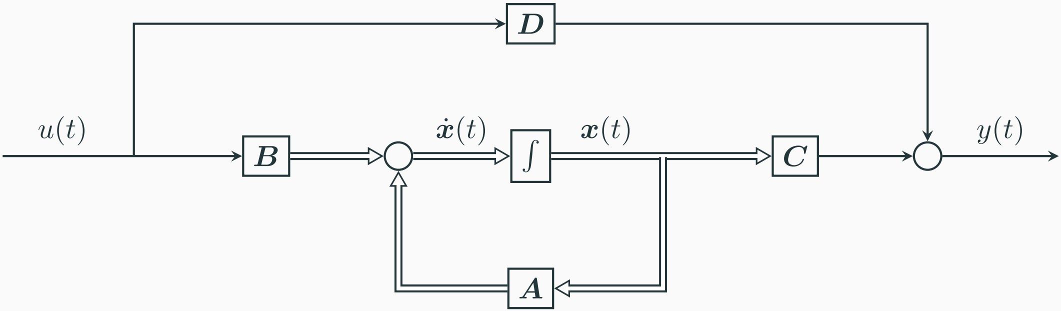
# Bedeutung der Variablen und Parameter

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: Systemmatrix
  - Systeminformationen, z.B. Polstellen, Beobachtbarkeit, ...
- $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$: Eingangsvektor
  - Wirkung von $u$ auf System
- $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$: Ausgangsvektor
  - Wirkung von $x$ auf Ausgang
- $D \in \mathbb{R}$: Feedforward term
  - Direkte Wirkung von $u$ auf Ausgang

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
y(t) &= Cx(t) + Du(t)
\end{aligned}
$$

- $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$: Zustandsvektor
  - Zustand der Energiespeicher
- $u(t) \in \mathbb{R}$: Eingangswert in System
- $y(t) \in \mathbb{R}$: Ausgangswert des Systems

# Blockdiagramm für SISO-System




FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

# Vorteile/Nachteile Zustandsraumdarstellung



+ Reichhaltige Beschreibung: interne Werte des Systems werden modelliert
+ Vollständige Abbildung des Systemzustands durch die $x_i$
+ Digitale Regler im Zustandsraum performanter
+ Für Energieeffizienz: Energiegehalt des System wird modelliert
+ Zustand hat häufig physikalische Bedeutung
- Zustandsraumdarstellung nicht eindeutig
- Teils numerisch/analytisch aufwendig

# Normalformen

# Regelungsnormalform (control canonical form)

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}\, t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}\, t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, t} + a_0 y = b_n \frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}\, t^n} + b_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} u}{\mathrm{d}\, t^{n-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}\, u}{\mathrm{d}\, t} + b_0 u$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} b_0 - b_n a_0 & b_1 - b_n a_1 & \cdots & b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad D = b_n$$

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

# Beobachtungsnormalform (observer canonical form)

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y$$
$$= b_n\frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}t^n} + b_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} u}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + b_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + b_0 u$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ b_2 - b_n a_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = b_n$$

# Jordan Normalform (modal canonical form)

- Für System mit Polstellen $\lambda_i$
- Transferfunktion $G(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s-\lambda_i}$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

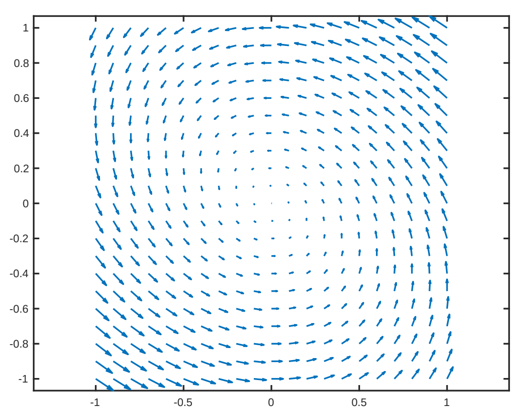
# Richtungsfeld

# Das Richtungsfeld einer DGL

- DGL zweiten Grades bzw. System zweiter Ordnung
- Zu jedem Punkt $(x_1, x_2)^T$ lässt sich die Steigung $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)^T$ bestimmen:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Mit dem Richtungsfeld lässt sich eine Lösung graphisch bestimmen

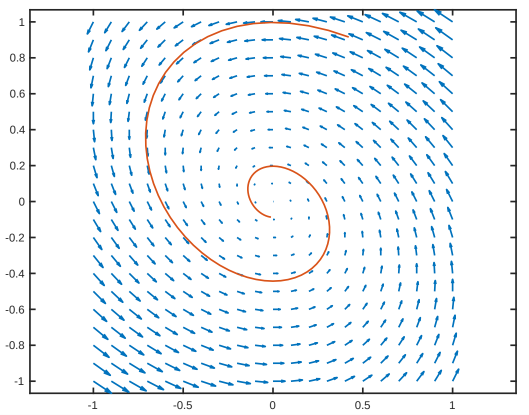


# Das Richtungsfeld einer DGL

- DGL zweiten Grades bzw. System zweiter Ordnung
- Zu jedem Punkt $(x_1, x_2)^T$ lässt sich die Steigung $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)^T$ bestimmen:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Mit dem Richtungsfeld lässt sich eine Lösung graphisch bestimmen



# Eigenwerte und Polstellen

# Systemmatrix, Eigenwerte



- Eigenwerte:
  - Können Polstellen des Systems sein
  - Ggf. Kürzung gegen Nullstellen des Systems
  - Bestimmung mittels charakterischem Polynom $\chi_A(\lambda)$
  - Polstellen reell oder paarweise komplex

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \det\left(\lambda \,\mathrm{Id} - A\right) \\ &= \det\left(\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}\right) = 0\end{aligned} \tag{5}$$

# Matrixexponential

- Definiere für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die unendliche Reihe

$$\exp\left(At\right) = \mathrm{Id} + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \dots \tag{6}$$

- Dann erfüllt

$$x(t) = \exp\left(At\right)x_0 + \exp\left(At\right)\int_0^t \exp\left(-At\right)Bu(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \tag{7}$$

die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{8}$$

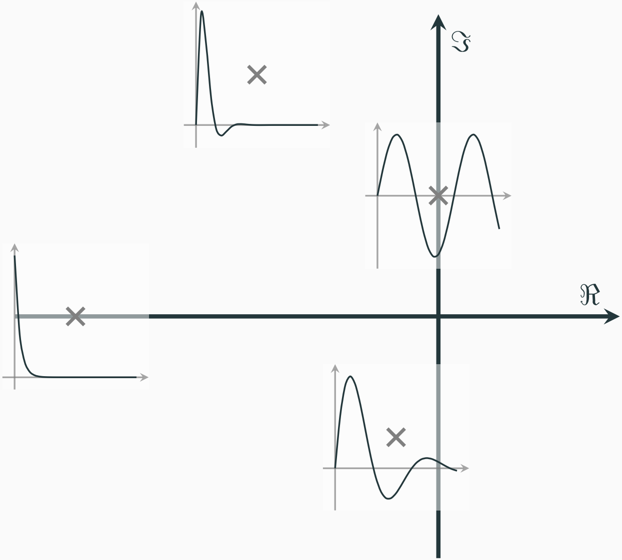
# Berechnung Matrixexponential

- Für diagonalisierbare Matrizen $A = UDU^{-1}$, d.h. $\chi_A$ hat $n$ komplexe Nullstellen $\lambda_i \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\exp\left(A\right) =& U \exp\left(D\right) U^{-1} = \\ & U \begin{pmatrix} \exp\left(\lambda_1 t\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp\left(\lambda_2 t\right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \exp\left(\lambda_n t\right) \end{pmatrix} U^{-1}\end{aligned} \tag{9}$$

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

# Interpretation von Polstellen (zeitkontinuierliche Systeme)



# Steuerbarkeit

# Zustandssteuerbarkeit (state controllability)



**Definition (Zustandssteuerbarkeit)**
Ein System (1), (2) bzw. (3),(4) ist dann vollständig zustandssteuerbar, wenn es für jeden Anfangszustand $x\left(t_0\right)$ eine Steuerfunktion $u(t)$ gibt, die das System innerhalb einer endlichen Zeitspanne $t_0 \leq t \leq t_1$ in den Endzustand $x\left(t_1\right) = 0$ überführt.

Dies gilt genau dann, wenn

$$\operatorname{rg}\left[B|AB|\cdots|A^{n-1}B\right] = n \tag{10}$$

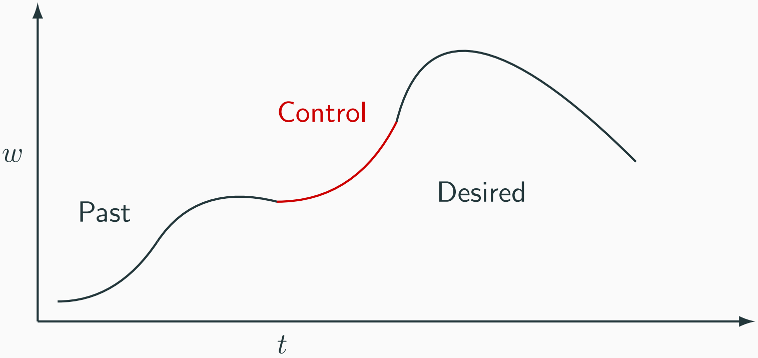
Es wird $\left[B|AB|\cdots|A^{n-1}B\right]$ die Steuerbarkeitsmatrix genannt.

**Definition (Ausgangssteuerbarkeit)**
Ein System (1), (2) bzw. (3),(4) ist dann vollständig ausgangssteuerbar, wenn es für jeden Anfangswert $y\left(t_0\right)$ eine Steuerfunktion $u(t)$ gibt, die das System innerhalb einer endlichen Zeitspanne $t_0 \leq t \leq t_1$ in den Endwert $y\left(t_1\right)$ überführt.

Dies gilt für ein System mit $m$ Ausgangswerten genau dann, wenn

$$\operatorname{rg}\left[CB|CAB|CA^2B|\cdots|CA^{n-1}B|D\right] = m \tag{11}$$

# Grafische Interpretation von Steuerbarkeit



# Beobachtbarkeit (observability)

**Definition (Beobachtbarkeit)**
Ein System (1), (2) bzw. (3),(4) ist dann vollständig beobachtbar, wenn bei bekannter äußerer Beeinflussung $Bu(t)$ und bekannten Matrizen $A$ und $C$ aus dem Ausgangsvektor $y(t)$ über einem endlichen Zeitintervall $t_0 \leq t \leq t_1$ den Anfangszustand $x\left(t_0\right)$ eindeutig bestimmen kann.

Dies gilt genau dann, wenn

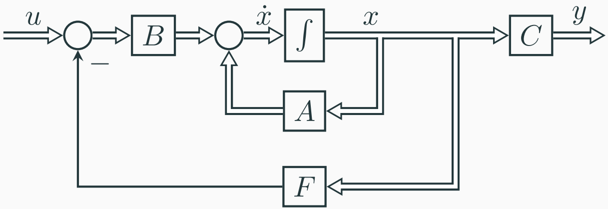
$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n \tag{12}$$

Es wird $\begin{pmatrix} C^T & (CA)^T & \cdots & (CA^{n-1})^T \end{pmatrix}^T$ die Bobachtbarkeitsmatrix genannt.

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

# Regelung im Zustandsraum

# Regelkreis mit Zustandsrückführung

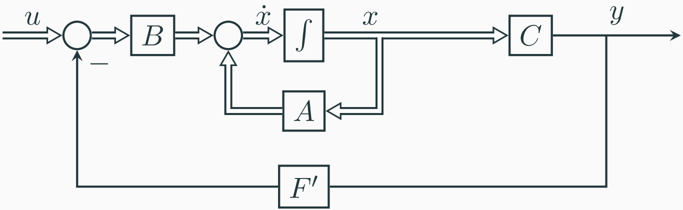



Zustandsraumdarstellung für $D = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = (A - BF)\,x + Bu \tag{13}$$

$$y = Cx \tag{14}$$

# Regelkreis mit Ausgangsrückführung




Zustandsraumdarstellung für $D = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \left(A - BF'C\right)x + Bu \tag{15}$$

$$y = Cx \tag{16}$$

# Vor- und Nachteile Regelung im Zustandsraum

- Vorteile
  - (Fast) vollständige Systembeeinflussung:
    - $A$ überführt in $(A - BF)$ bzw. $(A - BF'C)$
  - Weitestgehend algebraische Rechenoperationen
  - Einfache Implementierung im Controller
  - Intuitive Modellierung des Energiegehalts
- Nachteile
  - Reglervorgabe (Eigenwerte) unüblich
  - Zustandsmessung oder Beobachter nötig
  - Genaue Kenntnis der Systemparameter notwendig

G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini.
**Feedback Control of Dynamic Systems.**
Pearson, 2010.

L. Ljung.
**System Identification: Theory for the User.**
Upper Saddle River, NJ: PTR Prentice Hall, 1999.

J. Lunze.
**Regelungstechnik 1–Systemtheorietische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen.**
Springer, 2014.

J. Lunze.
**Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung.**
Springer, 2014.

H. Unbehauen.
**Regelungstechnik II.**
Friedr. Vieweg und Sohn, 2007.