85741: Energieeffiziente Antriebsregelungen

Regelung im Zustandsraum

Prof. Dr. Raphael Pfaff

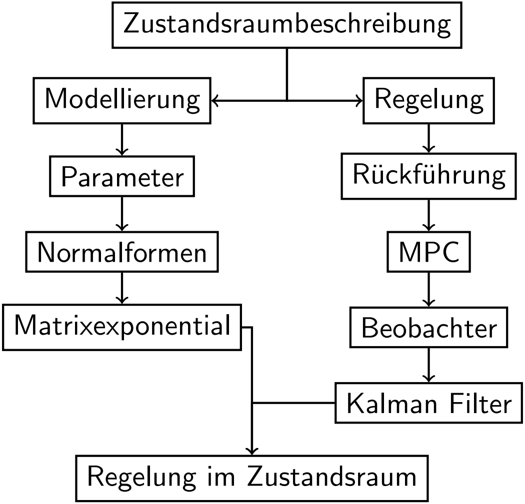
Fachhochschule Aachen

9. Januar 2019

Lernziele

- Teil 1:
  - Die Studierenden kennen die Zustandsraumbeschreibung, die Bedeutung von Polstellen und die Begriffe Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit.
  - Die Studierenden kennen die Normalformen der Zustandsbeschreibung und zugehörige Blockdiagramme.
  - Die Studierenden kennt die Blockdiagramme und resultierenden Systemmatrizen der Regelung im Zustandsraum sowie den Unterschied zwischen Zustands- und Ausgangsrückführung.
- Teil 2:
  - Die Studierenden kennen Schätzfunktionen und deren wünschenswerte Eigenschaften.
  - Die Studierenden kennen den grundsätzlichen Aufbau der Prediction Error Methods (PEM) und ihre Eigenschaften.
  - Die Studierenden können den Kalman Filter als Zustandsschätzer sowie den RLS als Parameterschätzer anwenden und ihre Grenzen aufzeigen.
- Teil 3 (Rechnerpraktikum/Selbststudium):
  - Die Studierenden können dynamische Systeme im Zustandsraum simulieren.
  - Die Studierenden können Zustands- und Parameterschätzer in Scicos oder C implementieren.

Struktur des Kurses



Section 1

Einführung Zustandsraum

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Einführung Zustandsraum *(state space)*

Der Zustandsraum ist eine zunehmend an Bedeutung gewinnende Darstellung eines dynamischen Systems.

- Zustandsvariablen $x_i(t)$:
  - Energiegehalt der Speichersysteme
  - Bilden Zustandsvektor $x(t)$
- $x(t_0)$ enthält alle Informationen über System zum Zeitpunkt t_0
- Überführung der DGL n-ter Ordnung in n DGL 1. Ordnung
- Hier betrachtet: *single-input-single-output* (SISO) System

Zustandsraumdarstellung:

Zeitkontinuierlich

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{2}$$

Zeitdiskret

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \tag{3}$$
$$y_k = Cx_k + Du_k \tag{4}$$

Bedeutung der Variablen und Parameter

Größen der Variablen und Parameter für SISO System der Ordnung n, $\cdot(t)$ beschreibt Variablen, d.h. $\cdot_k$ bzw. $\cdot(t)$.

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: Systemmatrix
  - Systeminformationen, z.B. Polstellen, Beobachtbarkeit, ...
- $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$: Eingangsvektor
  - Wirkung von u auf System
- $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$: Ausgangsvektor
  - Wirkung von x auf Ausgang
- $D \in \mathbb{R}$: Feedforward term
  - Direkte Wirkung von u auf Ausgang

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\
x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\
y_k &= Cx_k + Du_k
\end{aligned}
$$

- $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$: Zustandsvektor
  - Zustand der Energiespeicher
- $u(t) \in \mathbb{R}$: Eingangswert in System
- $y(t) \in \mathbb{R}$: Ausgangswert des Systems

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Erarbeitung konzeptionelles Blockdiagramm

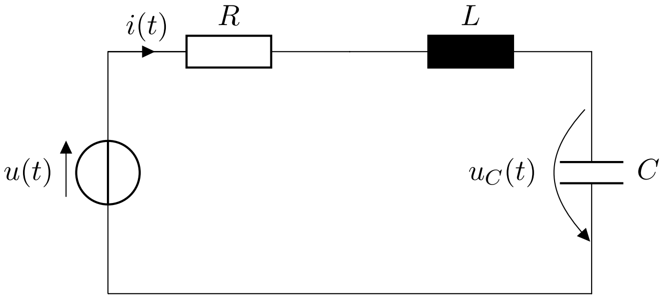
FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Vorteile/Nachteile Zustandsraumdarstellung

- \+ Reichhaltige Beschreibung: interne Werte des Systems werden modelliert
- \+ Vollständige Abbildung des Systemzustands durch die x_i
- \+ Digitale Regler im Zustandsraum performanter
- \+ Für Energieeffizienz: Energiegehalt des System wird modelliert
- \+ Zustand hat häufig physikalische Bedeutung
- \- Zustandsraumdarstellung nicht eindeutig
- \- Teils numerisch/analytisch aufwendig

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Zustandsraumdarstellung RLC-System



$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{LC} & \frac{-R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{pmatrix} u(t) \quad (5)$$

$$y(t) = u_C(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Regelungsnormalform *(control canonical form)*

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y$$
$$= b_n\frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}t^n} + b_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} u}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + b_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + b_0 u$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} b_0 - b_n a_0 & b_1 - b_n a_1 & \cdots & b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad D = b_n$$

Darstellung Regelungsnormalform im Blockdiagramm

Beobachtungsnormalform *(observer canonical form)*

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}\, t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}\, t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, t} + a_0 y \\
&= b_n \frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}\, t^n} + b_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} u}{\mathrm{d}\, t^{n-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}\, u}{\mathrm{d}\, t} + b_0 u
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ b_2 - b_n a_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{pmatrix}
$$

$$
C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = b_n
$$

Darstellung Beobachtungsnormalfom im Blockdiagramm

Jordan Normalform *(modal canonical form)*

- Für System mit Polstellen λ_i
- Transferfunktion $G(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s-\lambda_i}$

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad & B &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
C &= \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Systemmatrix, Eigenwerte

Es enthält A alle Informationen über das Eigenverhalten des Systems.

- Eigenwerte:
  - Können Polstellen des Systems sein
  - Ggf. Kürzung gegen Nullstellen des Systems
  - Bestimmung mittels charakterischem Polynom $\chi_A(\lambda)$
  - Polstellen reell oder paarweise komplex

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \det\left(\lambda\,\mathrm{Id} - A\right) \\ &= \det\left(\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}\right) = 0\end{aligned} \tag{7}$$

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Matrixexponential

Mittels des Matrixexponentials lassen sich lineare Differentialgleichungssystem (also Zustandsgleichungen) lösen.

- Definiere für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die unendliche Reihe

$$\exp(At) = \mathrm{Id} + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots \tag{8}$$

- Dann erfüllt

$$x(t) = \exp(At)\, x_0 + \exp(At) \int_0^t \exp(-At)\, Bu(\tau)\, \mathrm{d}\,\tau \tag{9}$$

die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} x(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{10}$$

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Berechnung Matrixexponential

Auch falls Simulationstechniken eingesetzt werden bringt die Kenntnis der qualitativen Lösung Einblicke in das Systemverhalten.

- Für diagonalisierbare Matrizen $A = UDU^{-1}$, d.h. χ_A hat n komplexe Nullstellen $\lambda_i \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\exp(A) =& U \exp(D) U^{-1} = \\ & U \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2 t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \exp(\lambda_n t) \end{pmatrix} U^{-1}\end{aligned} \tag{11}$$

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Interpretation von Polstellen

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Zustandssteuerbarkeit *(state controllability)*

Zustandssteuerbarkeit bewertet, ob alle x_i über u beeinflusst werden können.

Definition (Zustandssteuerbarkeit)

Ein System (1), (2) bzw. (3),(4) ist dann vollständig zustandssteuerbar, wenn es für jeden Anfangszustand $x\left(t_0\right)$ eine Steuerfunktion $u(t)$ gibt, die das System innerhalb einer endlichen Zeitspanne $t_0 \leq t \leq t_1$ in den Endzustand $x\left(t_1\right) = 0$ überführt.

Dies gilt genau dann, wenn

$$\operatorname{rg}\left[B|AB|\cdots|A^{n-1}B\right] = n \tag{12}$$

Es wird $\left[B|AB|\cdots|A^{n-1}B\right]$ die Steuerbarkeitsmatrix genannt.

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Ausgangssteuerbarkeit *(controllability)*

Ausgangssteuerbarkeit bewertet, ob y über u beeinflusst werden können.

Definition (Ausgangssteuerbarkeit)

Ein System (1), (2) bzw. (3),(4) ist dann vollständig ausgangssteuerbar, wenn es für jeden Anfangswert $y\left(t_0\right)$ eine Steuerfunktion $u(t)$ gibt, die das System innerhalb einer endlichen Zeitspanne $t_0 \leq t \leq t_1$ in den Endwert $y\left(t_1\right)$ überführt.

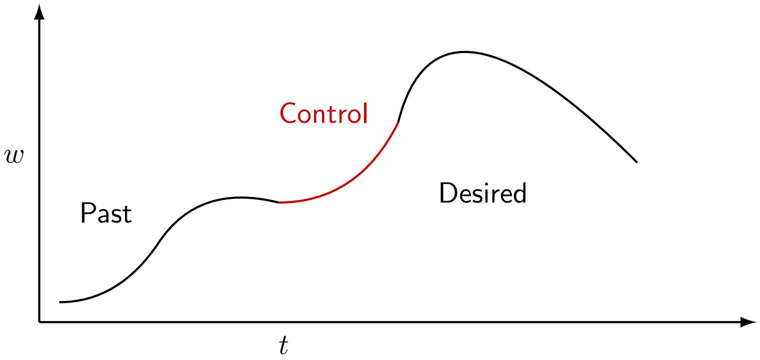
Dies gilt für ein System mit m Ausgangswerten genau dann, wenn

$$\mathrm{rg}\left[CB|CAB|CA^2B|\cdots|CA^{n-1}B|D\right] = m \tag{13}$$

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Grafische Interpretation von Steuerbarkeit

Zu jedem Systemverhalten der Vergangenheit (Zustand) lässt sich ein Funktional $u(t)$ so finden, dass ab t' das gewünschte Verhalten herrscht.



FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Beobachtbarkeit *(observability)*

Beobachtbarkeit bewertet, ob alle x_i den Ausgang y beeinflussen und somit beobachtet werden können.

Definition (Beobachtbarkeit)

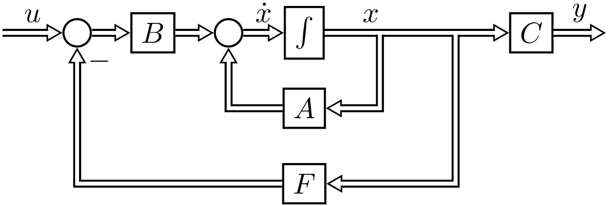
Ein System (1), (2) bzw. (3),(4) ist dann vollständig beobachtbar, wenn bei bekannter äußerer Beeinflussung $Bu(t)$ und bekannten Matrizen A und C aus dem Ausgangsvektor $y(t)$ über einem endlichen Zeitintervall $t_0 \leq t \leq t_1$ den Anfangszustand $x\left(t_0\right)$ eindeutig bestimmen kann.

Dies gilt genau dann, wenn

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n \tag{14}$$

Es wird $\begin{pmatrix} C^T & (CA)^T & \cdots & \left(CA^{n-1}\right)^T \end{pmatrix}^T$ die Bobachtbarkeitsmatrix genannt.

Regelung im Zustandsraum

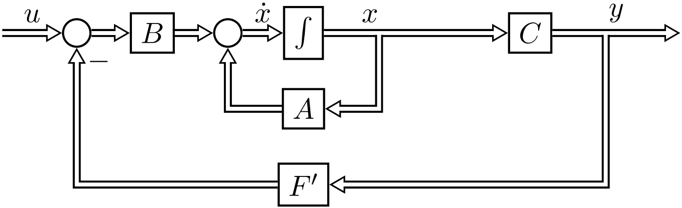


Zustandsraumdarstellung für $D = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = (A - BF)\,x + Bu \tag{15}$$

$$y = Cx \tag{16}$$

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES



Zustandsraumdarstellung für $D = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \left(A - BF'C\right) x + Bu \qquad (17)$$

$$y = Cx \qquad (18)$$

Vor- und Nachteile Regelung im Zustandsraum

- Vorteile
  - (Fast) vollständige Systembeeinflussung:
    - A überführt in $(A - BF)$ bzw. $(A - BF'C)$
  - Weitestgehend algebraische Rechenoperationen
  - Einfache Implementierung im Controller
  - Intuitive Modellierung des Energiegehalts
- Nachteile
  - Reglervorgabe (Eigenwerte) unüblich
  - Zustandsmessung oder Beobachter nötig
  - Genaue Kenntnis der Systemparameter notwendig

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Schätzfunktionen

Eine Schätzfunktion (Schätzer) dient zur Ermittlung eines Parameter-Schätzwertes bzw. zur Ermittlung eines wahrscheinlichen rauschfreien Zustands aus empirischen Daten

- Grundlage: endlich viele Beobachtungen (Stichprobe)
  - Schätzer selbst fehlerbehaftet
  - Häufig Zufallsvariable
- Schluß auf Grundgesamtheit
- Schätzen einzelner Parameter der Verteilung
  - Mittelwert
  - Median
  - Standardabweichung

Definition (Zufallsvariable)

Als Zufallsvariable bezeichnet man eine messbare Funktion von einem Wahrscheinlichkeitsraum in einen Messraum.

Definition (Schätzfunktion)

Eine Schätzfunktion dient dazu, aufgrund von empirischen Daten einer Stichprobe einen Schätzwert zu ermitteln und dadurch Informationen über unbekannte Parameter einer Grundgesamtheit zu erhalten.

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

- Mittelwert

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Varianz

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

- Erwartungstreue:
  - Erwartungswert der Schätzfunktion gleich wahrem Parameter
  - Kein systematischer Fehler (Bias).
- Konsistenz:
  - Unsicherheit des Schätzers nimmt für $n \to \infty$ ab
- Effizienz:
  - Minimale Varianz des Schätzers
- BLUE: Best Linear Unbiased Estimator

AutoRegressive Model with eXogenous inputs (ARX)

Für Parameterschätzer häufig eingesetzte Modellstruktur.

Das Modell eines Eingrößensystems sei beschrieben durch

$$y_k + a_1 y_{k-1} + \cdots + a_{n_a} y_{k-n_a} = b_1 u_{k-1} + \cdots + b_{n_b} u_{k-n_b} + e_k \qquad (19)$$

mit

- $n_b \leq n_a$,
- Parametervektor $\theta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n_a} & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n_b} \end{pmatrix}$,
- Eingangswert u_k,
- Ausgangswert y_k sowie
- additivem weißen Rauschen e_k

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Beobachtungsmatrix *(Observation matrix)*

Die Beobachtungmatrix H sammelt N Beobachtungen eines ARX Systems.

$$H = \begin{pmatrix} -y_{k-1} & \cdots & -y_{k-n_a} & u_{k-1} & \cdots & u_{k-n_b} \\ -y_{k-2} & \cdots & -y_{k-n_a-1} & u_{k-2} & \cdots & u_{k-n_b-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -y_{(k-N-1)} & \cdots & -y_{(k-n_a-N)} & u_{(k-N-1)} & \cdots & u_{(k-n_b-N)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times(n_a+n_b)} \tag{20}$$

Mit einem Bobachtungsvektor
$h = \begin{pmatrix} -y_{k-1} & \cdots & -y_{k-n_a} & u_{k-1} & \cdots & u_{k-n_b} \end{pmatrix}$ gilt:

$$y_k = h\theta$$

Formulierung des Optimierungsziels

Das Optimierungsziel für Parameterschätzer wird über die Summe der Fehlerquadrate des Ausgangs definiert.

Sei die Summe der Fehlerquadrate *(Sum of Square Errors, SSE)* für einen Parametervektor θ und eine Indexmenge $I \subset \mathbb{N}$ definiert als

$$E\left(\theta\right) = \sum_{k \in I} \left(y_k - \hat{y}_{k|\theta}\right)^2 \tag{21}$$

Hierbei beschreibt $\hat{y}_{k|\theta}$ den geschätzten Ausgangswert für einen Parametervektor θ.

Das Optimierungsziel ist damit

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} \sum_{k \in I} \left(y_k - \hat{y}_{k|\theta}\right)^2 \tag{22}$$

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Lineare Rekursion *(Linear Least Squares)*

- Häufig eingesetzt
- Kein Online-Schätzer
- In vielen Software-Produkten implementiert
- Optimal im Sinne des Optimierungsziels
- Stabil
- Variante: Block Least Squares

Formuliere (22) als

$$E(\theta) = (\mathrm{Id} - H\theta)^T (\mathrm{Id} - H\theta) \tag{23}$$

Damit ist

$$\frac{\mathrm{d}\, E(\theta)}{\mathrm{d}\, \theta} = -2H^T \mathrm{Id} + 2H^T H\theta \tag{24}$$

und der Least Squares Estimator für θ, bezeichnet als $\hat{\theta}$, ist

$$\hat{\theta} = \left(H^T H\right)^{-1} H^T \mathrm{Id} \tag{25}$$

Hierbei ist $\left(H^T H\right)^{-1} H^T$ die Moore-Penrose Pseudoinverse einer nichtquadratischen Matrix.

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Lemma (Matrix Inversion)

Let $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ *and* $\mathbf{A}+\mathbf{BCD}$ *be nonsingular square matrices, then the following identity holds:*

$$(\mathbf{A}+\mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\left(\mathbf{C}^{-}1 + \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{DA}^{-1}. \tag{26}$$

Aktualisierte Bebachtungsmatrix:

$$H_{n+1} = \left(\frac{H_n}{h_{n+1}}\right) \tag{27}$$

Aktualisierter Ausgangsvektor:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \left(\frac{\mathbf{y}_n}{y_{n+1}}\right) \tag{28}$$

RLS ohne forgetting factor

Es ist möglich, $\hat{\theta}$ zu schreiben als

$$\hat{\theta}_{n+1} = \Phi_{n+1} H_{n+1}^T \mathbf{y}_{n+1}, \tag{29}$$

wobei $\hat{\theta}_{n+1}$ *geschätzter Parametervektor für Daten einschließlich* $n+1$ und $\Phi = \left(H^T H\right)^{-1}$ [1] bedeutet. Es gilt

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1} &= \left(\left(\frac{H_n}{h_{n+1}^T} \right)^T \left(\frac{H_n}{h_{n+1}^T} \right) \right)^{-1} = \left(H_n^T H_n + h_{n+1} h_{n+1}^T \right)^{-1} \\ &= \left(\Phi_n^{-1} + h_{n+1} h_{n+1}^T \right)^{-1}. \end{aligned} \tag{30}$$

Mit dem Matrix Inversion Lemma:

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n - \Phi_n h_{n+1} \left(\mathrm{Id} + h_{n+1}^T \Phi_n h_{n+1} \right)^{-1} h_{n+1}^T \Phi_n. \tag{31}$$

Da $\left(\mathrm{Id} + h_{n+1}^T \Phi_n h_{n+1} \right)$ ein Skalar ist, gilt:

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n - \frac{\Phi_n h_{n+1} h_{n+1}^T \Phi_n}{1 + h_{n+1}^T \Phi_n h_{n+1}} \tag{32}$$

RLS Algorithmus

$$\phi_n = \Phi_{n-1} h_n \left(1 + h_n^T \Phi_{n-1} h_n\right) \quad (33)$$

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} + \phi_n h_n \left(i_n - h_n^T \hat{\theta}_{n-1}\right) \quad (34)$$

$$\Phi_n = \left(\mathrm{Id} - \phi_n h_n^T\right) \Phi_{n-1}, \quad (35)$$

Initialisierung:

- Anfangswerte Φ_0 and $\hat{\theta}_0$ gemäß *a priori* Wissen
  - Kein *a priori* Wissen: $\hat{\theta}_0 = \mathbf{0}$ und $\Phi_0 = 10^3\,\mathrm{Id}$
  - *a priori* Wissen vorhanden: $\hat{\theta}_0$ auf bekannte Werte, Φ_0 reduzieren
- Kovarianz Matrix Φ ist für normalverteiltes weißes Rauschen mit Standardabweichung σ proportional zur Fehlerkovarianzmatrix

$$\Phi_n = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{cov}\left(\hat{\theta}_n - \theta_n\right) = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{E}\left(\left(\hat{\theta}_n - \theta_n\right)\left(\hat{\theta}_n - \theta_n\right)^T\right). \quad (36)$$

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

RLS Algorithmus: Probleme

- Covariance Blow Up:
  - Verursacht durch fast linear abhängige Beobachtungen
  - Abhilfe: Kleine Störung hinzufügen (An der Startbasis rütteln!)
  - Alternativ: Forgetting factors
- Numerische Instabilität:
  - Die Einträge in Φ werden klein für eingeschwungene Systeme
  - Φ muss positive definit sein
  - Abhilfe: Kleine Störung hinzufügen (An der Startbasis rütteln!)

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

RLS Algorithmus: Forgetting Factors etc.

Ohne Maßnahmen konvergiert der RLS gegen das Ergebnis des LLS.

- Standard-RLS: Konvergenz gegen LLS-Schätzung
  - Keine optimale Schätzung für zeitabhängige Systeme
- Abhilfe:
  - Forgetting factor: Koeffizient zur exponentiellen Abwertung der Daten aus der Vergangenheit
    - Fixed forgetting factor: $\lambda < 1$, üblich: $\lambda = 0.95 \ldots 0.99$
    - Faustregel: RLS mit fixed forgetting betrachtet $M = \frac{1}{1-\lambda}$ Beobachtungen h_i
    - Variable forgetting: Verschiedene Verfahren in der Regel abhängig von der Prediktionsgüte
  - Covariance reset: Φ wird bei Vorliegen gewisser Kriterien zurückgesetzt
    - Für abrupte System-Veränderungen
    - Rücksetzwert bestimmt Stärke der Wirkung

RLS mit forgetting factor

- Cost function angepasst:

$$J_N(\theta) = (\mathrm{Id} - H\theta)^T \begin{pmatrix} \lambda^N & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda^2 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} (\mathrm{Id} - H\theta) \tag{37}$$

- Möglich durch Änderung von (35) in

$$\Phi_n = \frac{1}{\lambda} \left(\mathbf{1} - \phi_n \mathbf{x}_n^T \right) \Phi_{n-1}. \tag{38}$$

- Mit abnehmendem M steigt die Empfindlichkeit für Rauschen

Kalman Filter - Grundlagen

- Grundlage: Diskrete Zustandsraumbeschreibung

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Ew_k && (39)\\
y_{k+1} &= Cx_{k+1} + r_{k+1} && (40)
\end{aligned}
$$

- Process Noise Vector w_k, Output Noise Vector r_{k+1}
  - Weiß, d.h. $\mathrm{E}\left(w_k\right) = \mathrm{E}\left(r_{k+1}\right) = 0$
  - Wechselseitig unkorreliert
  - Bekannte Varianz $\mathrm{Var}\left(w\right) = R_w$ bzw. $\mathrm{Var}\left(r\right) = r_v$
- Systemparameter konstant und bekannt

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

- Ziel des Kalman Filters:
  - Vorhersage für x_k
  - Minimierung des Vorhersagefehlers $\hat{x}_k - x_k$ nur mittels Messung des Eingangs u_k und des Ausgangs y_k
- Beste Vorhersage für bekanntes x_{k-1} ist der rauschfreie Zustand (wg. $\mathrm{E}\left(w_k\right) = \mathrm{E}\left(r_{k+1}\right) = 0$)

$$\hat{x}_{k|k-1} = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1}, \tag{41}$$

- Der Vorhersagefehler wird damit

$$e_{k|k-1} = \hat{x}_{k|k-1} - x_k, \tag{42}$$

- Aufgrund der Linearität des Systems und der Wahl des Schätzers

$$\begin{aligned} e_{k|k-1} &= A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} - Ax_{k-1} - Bu_{k-1} - Dw_{k-1} \\ &= A\left(\hat{x}_{k-1} - x_{k-1}\right) - Dw_{k-1}. \end{aligned} \tag{43}$$

- Die Fehlerkovarianzmatrix wird damit

$$\Phi_{k|k-1} = \mathrm{E}\left\{ e_{k|k-1} e_{k|k-1}^T \right\} \tag{44}$$

- mit

$$\begin{aligned}
&e_{k|k-1} e_{k|k-1}^T \\
&= \left(A\left(\hat{x}_{k-1} - x_{k-1}\right) - E w_{k-1}\right)\left(\left(\hat{x}_{k-1} - x_{k-1}\right)^T A^T - w_{k-1}^T E^T\right) \\
&= A\left(\hat{x}_{k-1} - x_{k-1}\right)\left(\hat{x}_{k-1} - x_{k-1}\right)^T A^T - A\left(\hat{x}_{k-1} - x_{k-1}\right) w_{k-1}^T E^T \\
&+ E w_{k-1}\left(\hat{x}_{k-1} - x_{k-1}\right)^T A^T + E w_{k-1} w_{k-1}^T E^T
\end{aligned} \tag{45}$$

Kalman Filter III

- Auf Grund der Linearität des Erwartungswertes können die Erwartungswerte der einzelnen Terme berechnet werden

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left\{A\left(\hat{x}_{k-1}-x_{k-1}\right)\left(\hat{x}_{k-1}-x_{k-1}\right)^T A^T\right\} &= A\Phi_{k-1}A^T && (46)\\
\mathrm{E}\left\{A\left(\hat{x}_{k-1}-x_{k-1}\right)w_{k-1}^T E^T\right\} &= 0 && (47)\\
\mathrm{E}\left\{E w_{k-1}\left(\hat{x}_{k-1}-x_{k-1}\right)^T A^T\right\} &= 0 && (48)\\
\mathrm{E}\left\{E w_{k-1} w_{k-1}^T E^T\right\} &= E R_w E^T, && (49)
\end{aligned}
$$

- damit folgt

$$\Phi_{k|k-1} = A\Phi_{n-1}A^T + E R_w E^T \quad (50)$$

Kalman Fiter als Rekursion

- Vorhersage *(prediction stage)*

$$\hat{x}_{k|k-1} = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \tag{51}$$

$$\Phi_{k|k-1} = A\Phi_{k-1}A^T + DR_wD^T \tag{52}$$

- Korrektur *(correction stage)*

$$\phi_k = \Phi_{k|k-1}C^T \left(r_v + C_k\Phi_{k|k-1}C_k^T\right)^{-1} \tag{53}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + \phi_k \left(y_k - C_k\hat{x}_{k|k-1}\right) \tag{54}$$

$$\Phi_k = (\mathrm{Id} - \phi_k C_k)\,\Phi_{k|k-1}. \tag{55}$$

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

- Durch Überführung $x \to \theta$, $C^T \to x$ kann das Kalman Filter für Parameterschätzung genutzt werden:
- Vorhersage

$$\hat{\theta}_{k|k-1} = \hat{\theta}_{k-1} \tag{56}$$

$$\Phi_{k|k-1} = \Phi_{k-1} + R_w \tag{57}$$

- Korrektur

$$\phi_k = \Phi_{k|k-1} x_k \left(r_v + x_k^T \Phi_{k|k-1} x_k \right)^{-1} \tag{58}$$

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k|k-1} + \phi_k \left(y_k - x_k^T \hat{\theta}_{k|k-1} \right) \tag{59}$$

$$\Phi_k = \left(1 - \phi_k x_k^T \right) \Phi_{k|k-1}. \tag{60}$$

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Kalman Filter: Initialisierung

Übliche Werte für die Initialisierung eines KF in der Praxis

- $R_w = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$
- $x = x_{\text{true}}$ oder $x = 0$
- $\Phi = 10^4 \, \mathrm{Id}$
- $r_v = 1$

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Kalman Filter: Erweiterungen

- Extended Kalman Filter (EKF):
  - Schätzung von Parametern und Zustand
  - Berücksichtigung von Nichtlinearitäten
- Errors-In-Variables Kalman Filter (EIV-KF):
  - Orthogonale Schätzung (Fehler in beiden Variablen)
- Errors-In-Variables Kalman Filter (EIV-EKF):
  - Orthogonale Schätzung (Fehler in beiden Variablen)
  - Schätzung von Parametern und Zustand
  - Berücksichtigung von Nichtlinearitäten
- Unscented Kalman Filter (UKF):
  - Statistische Berücksichtigung von Nichtlinearitäten

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Luenberger Beobachter: Struktur

Luenberger-Beobachter: Zustandsraumbeschreibung

- Zustandsgleichung des Beobachters:

$$\dot{x} = A\hat{x} + Bu + H\left(y - \hat{y}\right) \tag{61}$$

- Ausgangswert des Beobachters

$$\hat{y} = C\hat{x} \tag{62}$$

- Damit folgt für den Schätzwert des Zustands

$$\hat{x} = A\hat{x} + Bu + HC\left(x - \hat{x}\right) \tag{63}$$

- Der Schätzfehler $e = x - \hat{x}$ genügt damit der Zustandsgleichung

$$\dot{e} = \left(A - HC\right)e \tag{64}$$

- Ist $(A - HC)$ stabil, gilt $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$
- Eigenwerte von $(A - HC)$ sollten links von den Eigenwerten von A liegen, damit ist der Beobachter schneller als das System

Model predictive control

Literatur I

G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini.
Feedback Control of Dynamic Systems.
Pearson, 2010.

T. C. Hsia.
System identification.
Lexington Books, 1977.

L. Ljung.
System Identification: Theory for the User.
Upper Saddle River, NJ: PTR Prentice Hall, 1999.

J. Lunze.
Regelungstechnik 1–Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen.
Springer, 2014.

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Literatur II

J. Lunze.
Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung.
Springer, 2014.

H. Unbehauen.
Regelungstechnik II.
Friedr. Vieweg und Sohn, 2007.

Proof The proof follows [2]. Pre-multiplying (26) by $\mathbf{A}+\mathbf{BCD}$ results in

$$\mathbf{1}=(\mathbf{A}+\mathbf{BCD})\left(\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\left(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{DA}^{-1}\right) \tag{65}$$

and the objective of the proof is to show that the right hand side of (65) is the identity. By direct manipulation it is possible to obtain

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{A}+\mathbf{BCD})\left(\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\left(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{DA}^{-1}\right)\\
=&\mathbf{1}+\mathbf{BCDA}^{-1}-\mathbf{B}\left(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{DA}^{-1}\\
&-\mathbf{BCDA}^{-1}\mathbf{B}\left(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{DA}^{-1}\\
=&\mathbf{1}+\mathbf{BCDA}^{-1}-\mathbf{B}\left(\mathbf{1}+\mathbf{CDA}^{-1}\mathbf{B}\right)\left(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{DA}^{-1}\\
=&\mathbf{1}+\mathbf{BCDA}^{-1}-\mathbf{BC}\left(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}\right)\left(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{DA}^{-1}\\
=&\mathbf{1}+\mathbf{BCDA}^{-1}-\mathbf{BCDA}^{-1}\\
=&\mathbf{1}
\end{aligned}$$

This proves the Matrix Inversion Lemma.