85741: Energieeffiziente Antriebsregelungen

Regelung im Zustandsraum

Prof. Dr. Raphael Pfaff

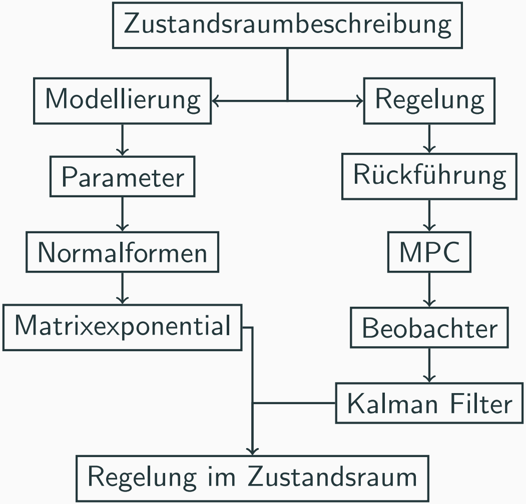
21. November 2019

Fachhochschule Aachen

Lernziele

- Teil 1:
  - Die Studierenden kennen die Zustandsraumbeschreibung, die Bedeutung von Polstellen und die Begriffe Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit.
  - Die Studierenden kennen die Normalformen der Zustandsbeschreibung und zugehörige Blockdiagramme.
  - Die Studierenden kennt die Blockdiagramme und resultierenden Systemmatrizen der Regelung im Zustandsraum sowie den Unterschied zwischen Zustands- und Ausgangsrückführung.
- Teil 2:
  - Die Studierenden kennen Schätzfunktionen und deren wünschenswerte Eigenschaften.
  - Die Studierenden kennen den grundsätzlichen Aufbau der Prediction Error Methods (PEM) und ihre Eigenschaften.
  - Die Studierenden können den Kalman Filter als Zustandsschätzer sowie den RLS als Parameterschätzer anwenden und ihre Grenzen aufzeigen.
- Teil 3 (Rechnerpraktikum/Selbststudium):
  - Die Studierenden können dynamische Systeme im Zustandsraum simulieren.
  - Die Studierenden können Zustands- und Parameterschätzer in Scicos oder C implementieren.

Struktur des Kurses



Einführung Zustandsraum

Einführung Zustandsraum (state space)

- Zustandsvariablen $x_i(t)$:
  - Energiegehalt der Speichersysteme
  - Bilden Zustandsvektor $x(t)$
- $x(t_0)$ enthält alle Informationen über System zum Zeitpunkt t_0
- Überführung der DGL n-ter Ordnung in n DGL 1. Ordnung
- Hier betrachtet: *single-input-single-output* (SISO) System

Zustandsraumdarstellung:

Zeitkontinuierlich

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{2}$$

Zeitdiskret

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \tag{3}$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \tag{4}$$

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Bedeutung der Variablen und Parameter

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: Systemmatrix
  - Systeminformationen, z.B. Polstellen, Beobachtbarkeit, ...
- $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$: Eingangsvektor
  - Wirkung von u auf System
- $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$: Ausgangsvektor
  - Wirkung von x auf Ausgang
- $D \in \mathbb{R}$: Feedforward term
  - Direkte Wirkung von u auf Ausgang

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\
x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\
y_k &= Cx_k + Du_k
\end{aligned}
$$

- $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$: Zustandsvektor
  - Zustand der Energiespeicher
- $u(t) \in \mathbb{R}$: Eingangswert in System
- $y(t) \in \mathbb{R}$: Ausgangswert des Systems

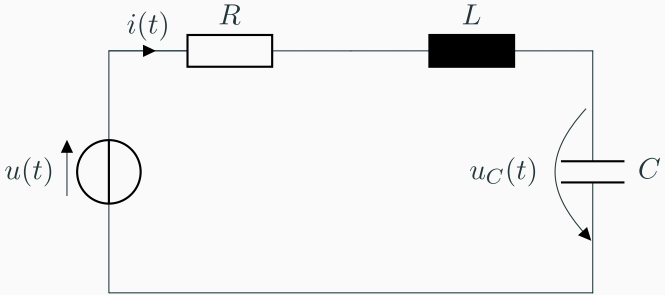
Erarbeitung konzeptionelles Blockdiagramm

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Vorteile/Nachteile Zustandsraumdarstellung

+ Reichhaltige Beschreibung: interne Werte des Systems werden modelliert
+ Vollständige Abbildung des Systemzustands durch die x_i
+ Digitale Regler im Zustandsraum performanter
+ Für Energieeffizienz: Energiegehalt des System wird modelliert
+ Zustand hat häufig physikalische Bedeutung
- Zustandsraumdarstellung nicht eindeutig
- Teils numerisch/analytisch aufwendig

Zustandsraumdarstellung RLC-System



$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{LC} & \frac{-R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{pmatrix} u(t) \qquad (5)$$

$$y(t) = u_C(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Regelungsnormalform (control canonical form)

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}\, t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}\, t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, t} + a_0 y \\ &= b_n \frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}\, t^n} + b_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} u}{\mathrm{d}\, t^{n-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}\, u}{\mathrm{d}\, t} + b_0 u\end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} b_0 - b_n a_0 & b_1 - b_n a_1 & \cdots & b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad D = b_n$$

Darstellung Regelungsnormalform im Blockdiagramm

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Beobachtungsnormalform (observer canonical form)

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}\, t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}\, t^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, t} + a_0 y \\ &= b_n \frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}\, t^n} + b_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} u}{\mathrm{d}\, t^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{\mathrm{d}\, u}{\mathrm{d}\, t} + b_0 u\end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ b_2 - b_n a_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = b_n$$

Darstellung Beobachtungsnormalfom im Blockdiagramm

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Jordan Normalform (modal canonical form)

- Für System mit Polstellen λ_i
- Transferfunktion $G(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s-\lambda_i}$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

Systemmatrix, Eigenwerte

- Eigenwerte:
  - Können Polstellen des Systems sein
  - Ggf. Kürzung gegen Nullstellen des Systems
  - Bestimmung mittels charakterischem Polynom $\chi_A(\lambda)$
  - Polstellen reell oder paarweise komplex

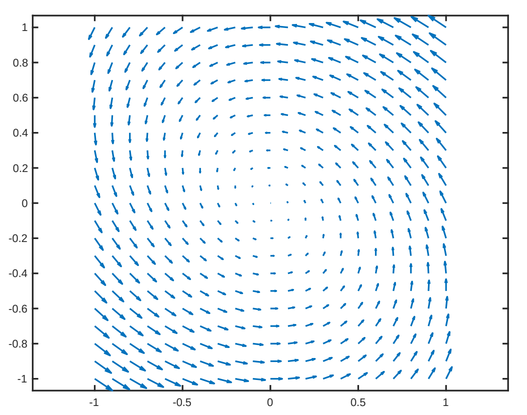
$$
\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det\left(\lambda\,\mathrm{Id} - A\right) \\
&= \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}\right) = 0
\end{aligned} \tag{7}
$$

Das Richtungsfeld einer DGL

- DGL zweiten Grades bzw. System zweiter Ordnung
- Zu jedem Punkt $(x_1, x_2)^T$ lässt sich die Steigung $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)^T$ bestimmen:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

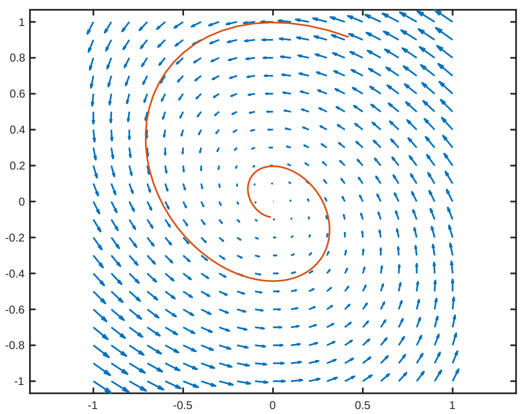
- Mit dem Richtungsfeld lässt sich eine Lösung graphisch bestimmen



- DGL zweiten Grades bzw. System zweiter Ordnung
- Zu jedem Punkt $(x_1, x_2)^T$ lässt sich die Steigung $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)^T$ bestimmen:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Mit dem Richtungsfeld lässt sich eine Lösung graphisch bestimmen



Matrixexponential

- Definiere für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die unendliche Reihe

$$\exp(At) = \mathrm{Id} + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots \tag{8}$$

- Dann erfüllt

$$x(t) = \exp(At)\, x_0 + \exp(At) \int_0^t \exp(-At)\, Bu(\tau) \,\mathrm{d}\,\tau \tag{9}$$

die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} x(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{10}$$

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Berechnung Matrixexponential

- Für diagonalisierbare Matrizen $A = UDU^{-1}$, d.h. χ_A hat n komplexe Nullstellen $\lambda_i \in \mathbb{C}$:

$$\exp(A) = U \exp(D) U^{-1} = U \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2 t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \exp(\lambda_n t) \end{pmatrix} U^{-1} \tag{11}$$

Interpretation von Polstellen

Zustandssteuerbarkeit (state controllability)

Definition (Zustandssteuerbarkeit)
Ein System (1), (2) bzw. (3),(4) ist dann vollständig zustandssteuerbar, wenn es für jeden Anfangszustand $x\left(t_0\right)$ eine Steuerfunktion $u(t)$ gibt, die das System innerhalb einer endlichen Zeitspanne $t_0 \leq t \leq t_1$ in den Endzustand $x\left(t_1\right) = 0$ überführt.

Dies gilt genau dann, wenn

$$\operatorname{rg}\left[B|AB|\cdots|A^{n-1}B\right] = n \tag{12}$$

Es wird $\left[B|AB|\cdots|A^{n-1}B\right]$ die Steuerbarkeitsmatrix genannt.

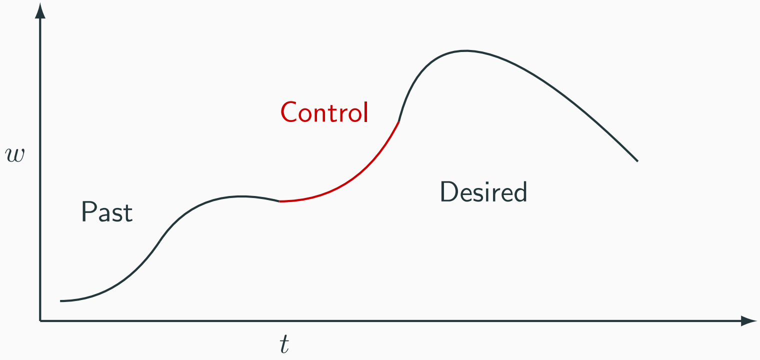
FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Definition (Ausgangssteuerbarkeit)
Ein System (1), (2) bzw. (3),(4) ist dann vollständig ausgangssteuerbar, wenn es für jeden Anfangswert $y\left(t_0\right)$ eine Steuerfunktion $u(t)$ gibt, die das System innerhalb einer endlichen Zeitspanne $t_0 \leq t \leq t_1$ in den Endwert $y\left(t_1\right)$ überführt.

Dies gilt für ein System mit m Ausgangswerten genau dann, wenn

$$\operatorname{rg}\left[CB|CAB|CA^2B|\cdots|CA^{n-1}B|D\right] = m \tag{13}$$

Grafische Interpretation von Steuerbarkeit



Beobachtbarkeit (observability)

Definition (Beobachtbarkeit)
Ein System (1), (2) bzw. (3),(4) ist dann vollständig beobachtbar, wenn bei bekannter äußerer Beeinflussung $Bu(t)$ und bekannten Matrizen A und C aus dem Ausgangsvektor $y(t)$ über einem endlichen Zeitintervall $t_0 \leq t \leq t_1$ den Anfangszustand $x(t_0)$ eindeutig bestimmen kann.

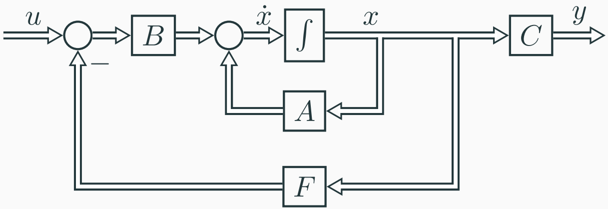
Dies gilt genau dann, wenn

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n \tag{14}$$

Es wird $\begin{pmatrix} C^T & (CA)^T & \cdots & (CA^{n-1})^T \end{pmatrix}^T$ die Bobachtbarkeitsmatrix genannt.

Regelung im Zustandsraum

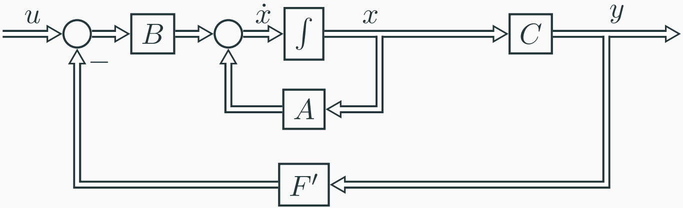
Regelkreis mit Zustandsrückführung



Zustandsraumdarstellung für $D = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = (A - BF)\,x + Bu \tag{15}$$

$$y = Cx \tag{16}$$



Zustandsraumdarstellung für $D = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}\, t} = \left(A - BF'C\right) x + Bu \tag{17}$$

$$y = Cx \tag{18}$$

Vor- und Nachteile Regelung im Zustandsraum

- Vorteile
  - (Fast) vollständige Systembeeinflussung:
    - A überführt in $(A - BF)$ bzw. $(A - BF'C)$
  - Weitestgehend algebraische Rechenoperationen
  - Einfache Implementierung im Controller
  - Intuitive Modellierung des Energiegehalts
- Nachteile
  - Reglervorgabe (Eigenwerte) unüblich
  - Zustandsmessung oder Beobachter nötig
  - Genaue Kenntnis der Systemparameter notwendig

Beobachter

- Grundlage: endlich viele Beobachtungen (Stichprobe)
  - Schätzer selbst fehlerbehaftet
  - Häufig Zufallsvariable
- Schluß auf Grundgesamtheit
- Schätzen einzelner Parameter der Verteilung
  - Mittelwert
  - Median
  - Standardabweichung

Definition (Zufallsvariable)
Als Zufallsvariable bezeichnet man eine messbare Funktion von einem Wahrscheinlichkeitsraum in einen Messraum.

Definition (Schätzfunktion)
Eine Schätzfunktion dient dazu, aufgrund von empirischen Daten einer Stichprobe einen Schätzwert zu ermitteln und dadurch Informationen über unbekannte Parameter einer Grundgesamtheit zu erhalten.

Schätzfunktionen und Eigenschaften

- Mittelwert

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Varianz

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

- Erwartungstreue:
  - Erwartungswert der Schätzfunktion gleich wahrem Parameter
  - Kein systematischer Fehler (Bias).
- Konsistenz:
  - Unsicherheit des Schätzers nimmt für $n \to \infty$ ab
- Effizienz:
  - Minimale Varianz des Schätzers
- BLUE: Best Linear

AutoRegressive Model with eXogenous inputs (ARX)

Das Modell eines Eingrößensystems sei beschrieben durch

$$y_k + a_1 y_{k-1} + \cdots + a_{n_a} y_{k-n_a} = b_1 u_{k-1} + \cdots + b_{n_b} u_{k-n_b} + e_k \tag{19}$$

mit

- $n_b \leq n_a$,
- Parametervektor $\theta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n_a} & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n_b} \end{pmatrix}$,
- Eingangswert u_k,
- Ausgangswert y_k sowie
- additivem weißen Rauschen e_k

Beobachtungsmatrix (Observation matrix)

$$H = \begin{pmatrix} -y_{k-1} & \cdots & -y_{k-n_a} & u_{k-1} & \cdots & u_{k-n_b} \\ -y_{k-2} & \cdots & -y_{k-n_a-1} & u_{k-2} & \cdots & u_{k-n_b-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -y_{(k-N-1)} & \cdots & -y_{(k-n_a-N)} & u_{(k-N-1)} & \cdots & u_{(k-n_b-N)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times (n_a+n_b)} \tag{20}$$

Mit einem Bobachtungsvektor $h = \begin{pmatrix} -y_{k-1} & \cdots & -y_{k-n_a} & u_{k-1} & \cdots & u_{k-n_b} \end{pmatrix}$ gilt:

$$y_k = h\theta$$

Formulierung des Optimierungsziels

Sei die Summe der Fehlerquadrate *(Sum of Square Errors, SSE)* für einen Parametervektor θ und eine Indexmenge $I \subset \mathbb{N}$ definiert als

$$E(\theta) = \sum_{k \in I} \left(y_k - \hat{y}_{k|\theta}\right)^2 \tag{21}$$

Hierbei beschreibt $\hat{y}_{k|\theta}$ den geschätzten Ausgangswert für einen Parametervektor θ.

Das Optimierungsziel ist damit

$$\hat{\theta} = \arg\min_\theta \sum_{k \in I} \left(y_k - \hat{y}_{k|\theta}\right)^2 \tag{22}$$

Lineare Rekursion (Linear Least Squares)

- Häufig eingesetzt
- Kein Online-Schätzer
- In vielen Software-Produkten implementiert
- Optimal im Sinne des Optimierungsziels
- Stabil
- Variante: Block Least Squares

Formuliere (22) als

$$E(\theta) = (\mathrm{Id} - H\theta)^T (\mathrm{Id} - H\theta) \tag{23}$$

Damit ist

$$\frac{\mathrm{d}\, E(\theta)}{\mathrm{d}\, \theta} = -2H^T \mathrm{Id} + 2H^T H\theta \tag{24}$$

und der Least Squares Estimator für θ, bezeichnet als $\hat{\theta}$, ist

$$\hat{\theta} = \left(H^T H\right)^{-1} H^T \mathrm{Id} \tag{25}$$

Hierbei ist $\left(H^T H\right)^{-1} H^T$ die Moore-Penrose Pseudoinverse einer

Recursive Least Squares

Lemma (Matrix Inversion)

Let $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ *and* $\mathbf{A}+\mathbf{BCD}$ *be nonsingular square matrices, then the following identity holds:*

$$(\mathbf{A}+\mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\left(\mathbf{C}^{-}1 + \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{DA}^{-1}. \tag{26}$$

Aktualisierte Bebachtungsmatrix:

$$H_{n+1} = \left(\frac{H_n}{h_{n+1}}\right) \tag{27}$$

Aktualisierter Ausgangsvektor:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \left(\frac{\mathbf{y}_n}{y_{n+1}}\right) \tag{28}$$

RLS ohne forgetting factor

Es ist möglich, $\hat{\theta}$ zu schreiben als

$$\hat{\theta}_{n+1} = \Phi_{n+1} H_{n+1}^T \mathbf{y}_{n+1}, \tag{29}$$

wobei $\hat{\theta}_{n+1}$ *geschätzter Parametervektor für Daten einschließlich* $n+1$ und $\Phi = \left(H^T H\right)^{-1}$ [1] bedeutet. Es gilt

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1} &= \left(\begin{pmatrix} H_n \\ h_{n+1}^T \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} H_n \\ h_{n+1}^T \end{pmatrix} \right)^{-1} = \left(H_n^T H_n + h_{n+1} h_{n+1}^T\right)^{-1} \\ &= \left(\Phi_n^{-1} + h_{n+1} h_{n+1}^T\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{30}$$

Mit dem Matrix Inversion Lemma:

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n - \Phi_n h_{n+1} \left(\mathrm{Id} + h_{n+1}^T \Phi_n h_{n+1}\right)^{-1} h_{n+1}^T \Phi_n. \tag{31}$$

Da $\left(\mathrm{Id} + h_{n+1}^T \Phi_n h_{n+1}\right)$ ein Skalar ist, gilt:

$$\Phi_n h_{n+1} h_{n+1}^T \Phi_n$$

RLS Algorithmus

$$\phi_n = \Phi_{n-1} h_n \left(1 + h_n^T \Phi_{n-1} h_n\right) \tag{33}$$

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} + \phi_n h_n \left(i_n - h_n^T \hat{\theta}_{n-1}\right) \tag{34}$$

$$\Phi_n = \left(\mathrm{Id} - \phi_n h_n^T\right) \Phi_{n-1}, \tag{35}$$

Initialisierung:

- Anfangswerte Φ_0 and $\hat{\theta}_0$ gemäß *a priori* Wissen
  - Kein *a priori* Wissen: $\hat{\theta}_0 = \mathbf{0}$ und $\Phi_0 = 10^3\,\mathrm{Id}$
  - *a priori* Wissen vorhanden: $\hat{\theta}_0$ auf bekannte Werte, Φ_0 reduzieren
- Kovarianz Matrix Φ ist für normalverteiltes weißes Rauschen mit Standardabweichung σ proportional zur Fehlerkovarianzmatrix

$$\Phi_n = \frac{1}{\sigma^2} \mathrm{cov}\left(\hat{\theta}_n - \theta_n\right) = \frac{1}{\sigma^2} \mathrm{E}\left(\left(\hat{\theta}_n - \theta_n\right)\left(\hat{\theta}_n - \theta_n\right)^T\right). \tag{36}$$

RLS Algorithmus: Probleme

- Covariance Blow Up:
  - Verursacht durch fast linear abhängige Beobachtungen
  - Abhilfe: Kleine Störung hinzufügen (An der Startbasis rütteln!)
  - Alternativ: Forgetting factors
- Numerische Instabilität:
  - Die Einträge in Φ werden klein für eingeschwungene Systeme
  - Φ muss positive definit sein
  - Abhilfe: Kleine Störung hinzufügen (An der Startbasis rütteln!)

RLS Algorithmus: Forgetting Factors etc.

- Standard-RLS: Konvergenz gegen LLS-Schätzung
  - Keine optimale Schätzung für zeitabhängige Systeme
- Abhilfe:
  - Forgetting factor: Koeffizient zur exponentiellen Abwertung der Daten aus der Vergangenheit
    - Fixed forgetting factor: $\lambda < 1$, üblich: $\lambda = 0.95 \ldots 0.99$
    - Faustregel: RLS mit fixed forgetting betrachtet $M = \frac{1}{1-\lambda}$ Beobachtungen h_i
    - Variable forgetting: Verschiedene Verfahren in der Regel abhängig von der Prediktionsgüte
  - Covariance reset: Φ wird bei Vorliegen gewisser Kriterien zurückgesetzt
    - Für abrupte System-Veränderungen
    - Rücksetzwert bestimmt Stärke der Wirkung

RLS mit forgetting factor

- Cost function angepasst:

$$J_N(\theta) = (\mathrm{Id} - H\theta)^T \begin{pmatrix} \lambda^N & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda^2 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} (\mathrm{Id} - H\theta) \tag{37}$$

- Möglich durch Änderung von (35) in

$$\Phi_n = \frac{1}{\lambda}\left(\mathbf{1} - \phi_n \mathbf{x}_n^T\right) \Phi_{n-1}. \tag{38}$$

- Mit abnehmendem M steigt die Empfindlichkeit für Rauschen

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Kalman Filter - Grundlagen

- Grundlage: Diskrete Zustandsraumbeschreibung

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Ew_k \tag{39}$$

$$y_{k+1} = Cx_{k+1} + r_{k+1} \tag{40}$$

- Process Noise Vector w_k, Output Noise Vector r_{k+1}
  - Weiß, d.h. $\mathrm{E}(w_k) = \mathrm{E}(r_{k+1}) = 0$
  - Wechselseitig unkorreliert
  - Bekannte Varianz $\mathrm{Var}(w) = R_w$ bzw. $\mathrm{Var}(r) = r_v$
- Systemparameter konstant und bekannt

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

- Ziel des Kalman Filters:
  - Vorhersage für x_k
  - Minimierung des Vorhersagefehlers $\hat{x}_k - x_k$ nur mittels Messung des Eingangs u_k und des Ausgangs y_k
- Beste Vorhersage für bekanntes x_{k-1} ist der rauschfreie Zustand (wg. $\mathrm{E}\left(w_k\right) = \mathrm{E}\left(r_{k+1}\right) = 0$)

$$\hat{x}_{k|k-1} = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1}, \tag{41}$$

- Der Vorhersagefehler wird damit

$$e_{k|k-1} = \hat{x}_{k|k-1} - x_k, \tag{42}$$

- Aufgrund der Linearität des Systems und der Wahl des Schätzers

$$\begin{aligned} e_{k|k-1} &= A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} - Ax_{k-1} - Bu_{k-1} - Dw_{k-1} \\ &= A\left(\hat{x}_{k-1} - x_{k-1}\right) - Dw_{k-1}. \end{aligned} \tag{43}$$

- Die Fehlerkovarianzmatrix wird damit

$$\Phi_{k|k-1} = \mathrm{E}\left\{e_{k|k-1}e_{k|k-1}^T\right\} \tag{44}$$

- mit

$$
\begin{aligned}
& e_{k|k-1} e_{k|k-1}^T \\
& = \left(A\left(\hat{x}_{k-1} - x_{k-1}\right) - E w_{k-1}\right)\left(\left(\hat{x}_{k-1} - x_{k-1}\right)^T A^T - w_{k-1}^T E^T\right) \\
& = A\left(\hat{x}_{k-1} - x_{k-1}\right)\left(\hat{x}_{k-1} - x_{k-1}\right)^T A^T - A\left(\hat{x}_{k-1} - x_{k-1}\right) w_{k-1}^T E^T \\
& + E w_{k-1}\left(\hat{x}_{k-1} - x_{k-1}\right)^T A^T + E w_{k-1} w_{k-1}^T E^T
\end{aligned} \tag{45}
$$

- Auf Grund der Linearität des Erwartungswertes können die Erwartungswerte der einzelnen Terme berechnet werden

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left\{A\left(\hat{x}_{k-1}-x_{k-1}\right)\left(\hat{x}_{k-1}-x_{k-1}\right)^T A^T\right\} &= A\Phi_{k-1}A^T && (46)\\
\mathrm{E}\left\{A\left(\hat{x}_{k-1}-x_{k-1}\right)w_{k-1}^T E^T\right\} &= 0 && (47)\\
\mathrm{E}\left\{E w_{k-1}\left(\hat{x}_{k-1}-x_{k-1}\right)^T A^T\right\} &= 0 && (48)\\
\mathrm{E}\left\{E w_{k-1} w_{k-1}^T E^T\right\} &= E R_w E^T, && (49)
\end{aligned}$$

- damit folgt

$$\Phi_{k|k-1} = A\Phi_{n-1}A^T + E R_w E^T \tag{50}$$

Kalman Fiter als Rekursion

- Vorhersage *(prediction stage)*

$$\hat{x}_{k|k-1} = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \tag{51}$$

$$\Phi_{k|k-1} = A\Phi_{k-1}A^T + DR_wD^T \tag{52}$$

- Korrektur *(correction stage)*

$$\phi_k = \Phi_{k|k-1}C^T\left(r_v + C_k\Phi_{k|k-1}C_k^T\right)^{-1} \tag{53}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + \phi_k\left(y_k - C_k\hat{x}_{k|k-1}\right) \tag{54}$$

$$\Phi_k = \left(\mathrm{Id} - \phi_k C_k\right)\Phi_{k|k-1}. \tag{55}$$

Kalman Filter für Parameterschätzung

- Durch Überführung $x \to \theta$, $C^T \to x$ kann das Kalman Filter für Parameterschätzung genutzt werden:
- Vorhersage

$$\hat{\theta}_{k|k-1} = \hat{\theta}_{k-1} \tag{56}$$

$$\Phi_{k|k-1} = \Phi_{k-1} + R_w \tag{57}$$

- Korrektur

$$\phi_k = \Phi_{k|k-1} x_k \left(r_v + x_k^T \Phi_{k|k-1} x_k\right)^{-1} \tag{58}$$

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k|k-1} + \phi_k \left(y_k - x_k^T \hat{\theta}_{k|k-1}\right) \tag{59}$$

$$\Phi_k = \left(1 - \phi_k x_k^T\right) \Phi_{k|k-1}. \tag{60}$$

Kalman Filter: Initialisierung

- $R_w = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$
- $x = x_{\text{true}}$ oder $x = 0$
- $\Phi = 10^4 \,\mathrm{Id}$
- $r_v = 1$

Kalman Filter: Erweiterungen

- Extended Kalman Filter (EKF):
  - Schätzung von Parametern und Zustand
  - Berücksichtigung von Nichtlinearitäten
- Errors-In-Variables Kalman Filter (EIV-KF):
  - Orthogonale Schätzung (Fehler in beiden Variablen)
- Errors-In-Variables Kalman Filter (EIV-EKF):
  - Orthogonale Schätzung (Fehler in beiden Variablen)
  - Schätzung von Parametern und Zustand
  - Berücksichtigung von Nichtlinearitäten
- Unscented Kalman Filter (UKF):
  - Statistische Berücksichtigung von Nichtlinearitäten

Luenberger Beobachter: Struktur

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

- Zustandsgleichung des Beobachters:

$$\dot{x} = A\hat{x} + Bu + H\left(y - \hat{y}\right) \tag{61}$$

- Ausgangswert des Beobachters

$$\hat{y} = C\hat{x} \tag{62}$$

- Damit folgt für den Schätzwert des Zustands

$$\hat{x} = A\hat{x} + Bu + HC\left(x - \hat{x}\right) \tag{63}$$

- Der Schätzfehler $e = x - \hat{x}$ genügt damit der Zustandsgleichung

$$\dot{e} = \left(A - HC\right)e \tag{64}$$

- Ist $(A - HC)$ stabil, gilt $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$
- Eigenwerte von $(A - HC)$ sollten links von den Eigenwerten von A liegen, damit ist der Beobachter schneller als das System

Literatur i

G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini.
Feedback Control of Dynamic Systems.
Pearson, 2010.

T. C. Hsia.
System identification.
Lexington Books, 1977.

L. Ljung.
System Identification: Theory for the User.
Upper Saddle River, NJ: PTR Prentice Hall, 1999.

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

J. Lunze.
Regelungstechnik 1–Systemtheorietische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen.
Springer, 2014.

J. Lunze.
Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung.
Springer, 2014.

H. Unbehauen.
Regelungstechnik II.
Friedr. Vieweg und Sohn, 2007.

Proof Matrix Inversion Lemma

Proof The proof follows [2]. Pre-multiplying (26) by $\mathbf{A}+\mathbf{BCD}$ results in

$$\mathbf{1}=(\mathbf{A}+\mathbf{BCD})\left(\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\left(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{DA}^{-1}\right) \tag{65}$$

and the objective of the proof is to show that the right hand side of (65) is the identity. By direct manipulation it is possible to obtain

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{A}+\mathbf{BCD})\left(\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\left(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{DA}^{-1}\right)\\
=&\mathbf{1}+\mathbf{BCDA}^{-1}-\mathbf{B}\left(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{DA}^{-1}\\
&-\mathbf{BCDA}^{-1}\mathbf{B}\left(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{DA}^{-1}\\
=&\mathbf{1}+\mathbf{BCDA}^{-1}-\mathbf{B}\left(\mathbf{1}+\mathbf{CDA}^{-1}\mathbf{B}\right)\left(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{DA}^{-1}\\
=&\mathbf{1}+\mathbf{BCDA}^{-1}-\mathbf{BC}\left(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}\right)\left(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{DA}^{-1}\\
=&\mathbf{1}+\mathbf{BCDA}^{-1}-\mathbf{BCDA}^{-1}\\
=&\mathbf{1}
\end{aligned}$$

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES