2022～2023 学年第 1 学期期中考试

《 离散数学 》（A 卷 共 6 页）

（考试时间：2022 年 11 月 12 日）

一、简答题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

1. 将下面式子规范化并指出其中的自由变元和约束变元并说明理由。

$$\forall x((A(x) \to B(y,x)) \land \exists z\, C(y,z)) \to D(x)$$

2. 简述相容的定义，相容关系与覆盖的关系，相容关系、等价关系的不同。

二、计算题（本大题共6小题，每小题8分，共48分）

1. 求 $\neg(\neg p \land q) \to r$ 的主析取范式。

2. 符号化下列命题，并进行推理，事实情况如下所述：

a) Alice 或 Bob 获得了 Turning 奖；

b) 若 Alice 获得 Turing 奖，则 Church-Turing 命题不成立；

c) 若 Bob 的证明正确，则量子计算机的研制没有获得成功；

d) 若 Bob 的证明不正确，则 Church-Turning 命题成立；

e) 量子计算机的研制获得了成功。

问：谁获得了 Turning 奖。

3 把下列各式化为前述范式，

（1） $(\exists x)(\neg((\exists y)P(x,y)) \rightarrow ((\exists z)Q(z) \rightarrow R(x)))$

（2） $((\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y)) \rightarrow (\forall x)R(x)$

4. 设 $A=\{1,2,3,4\}$，$S=\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$为 A 的一个划分，求由 S 诱导的集合 A 上的等价关系。

5. 设集合 $A=\{a,b,c,d\}$上关系 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$

（1） 写出 R 的关系矩阵

（2） 用 Warshall 算法求出 R 的传递闭包。

6. 设集合 $A=\{1,2,4,6,8,12\}$，R 为整除关系.

（1） 计算 COV A；

（2） 画出偏序集 $\langle A,R\rangle$ 的哈斯图；

（3） 写出 A 的子集 $B=\{4,6,8,12\}$ 的上界、下界、最小上界、最大下界；

（4） 写出 A 的最大元、最小元、极大元、极小元.

2，

三、证明题（本大题共7小题，每小题6分，共42分）

1. 证明：$\neg(\neg p\to q)$ 逻辑蕴含 $\neg p$.

2. 证明：$\neg(P\to Q)\to\neg(R\vee S)$, $(Q\to P)\vee\neg R$, $R\Rightarrow P\leftrightarrows Q$.

3 证明：$(P\vee Q)\wedge(Q\vee R)\wedge(P\vee R)\Longleftrightarrow(P\wedge Q)\vee(Q\wedge R)\vee(P\wedge R)$.

4 试利用真值表证明德·摩根律。

5. 用CP规则证明：

$$(\exists x)A(x)\rightarrow(\forall x)B(x)\Rightarrow(\forall x)(A(x)\rightarrow B(x))$$

6. 设 R 是一个二元关系，设 $S=\{(a,b)\mid$ 对于某一 c, 有 $(a,c)\in R$ 且 $(c,b)\in R\}$，证明：若 R 是一个等价关系，则 S 也是一个等价关系。

7. 设 R_j 表示 I 上的模 j 等价关系，R_k 表示 I 上的模 k 等价关系，证明：I/R_k 细分 I/R_j，当且仅当 k 是 j 的整数倍。