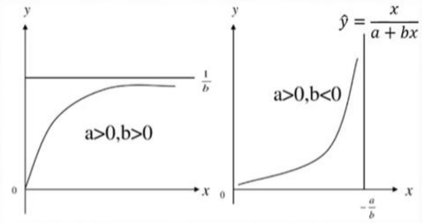
➢ **常见的六类曲线如下：**

（1）双曲函数曲线：变形双曲线

$$\begin{cases}\hat{y}=\dfrac{x}{a+bx}\\ \hat{y}=\dfrac{a+bx}{x}\\ \hat{y}=\dfrac{1}{a+bx}\end{cases}$$



- $\hat{y}=\frac{x}{a+bx}$该曲线通过原点(0,0)，当 $a>0$、$b>0$时，y随x的增大而增大，但速率趋小，并向$y=\frac{1}{b}$渐进，是凸曲线；当 $a>0$、$b<0$时，y随x的增大而增大，速率趋大，并向$x=-\frac{a}{b}$渐进，是凹曲线
- 变换方式：

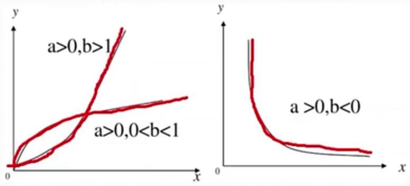
  $\hat{y}=\frac{x}{a+bx}$，两边取倒数后，令$y'=\frac{x}{\hat{y}}$，得$y'=ax+b$

  $\hat{y}=\frac{a+bx}{x}$，令$y'=\hat{y}x$，得$y'=ax+b$；$\hat{y}=\frac{1}{a+bx}$，两边取倒数后，令$y'=\frac{1}{y}$，得$y'=ax+b$

（2）**幂函数曲线**

- 幂函数（y是x某次幂的函数）方程形式：

  $\hat{y}=ax^b$



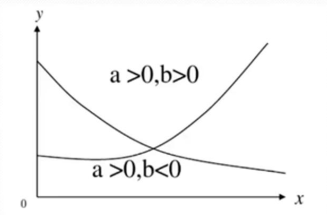
当 $a>0$、$b>1$时，y随x的增大而增大（增长），是凹曲线；
当 $a>0$、$0<b<1$时，y随x的增大而增大（增长），但变化缓慢，是凸曲线；
当 $a>0$、$b<0$时，y随x的增大而减小，且以x,y轴为渐近线，是凹曲线。

- 变换方式：两边取对数，令$y'=ln\hat{y},x'=lnx,a'=lna$，得$y'=a'+bx'$

（3）**指数函数曲线**

- 指数函数（x 作为指数出现）方程形式：

$$\begin{cases}\hat{y}=ae^{bx}\\ \hat{y}=ab^{x}\end{cases}$$



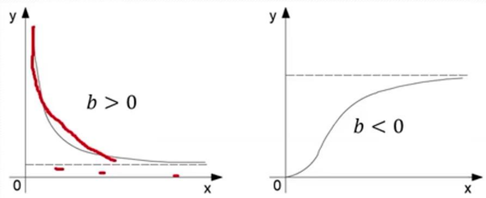
- $\hat{y}=ae^{bx}$

  参数b一般用来描述增长或衰减的速度。
  当 $a>0$、$b>0$时，y随x的增大而增大（增长），是凹曲线；
  当 $a>0$、$b<0$时，y随x的增大而减小（衰减），是凹曲线。
- 变换方式：两边取对数，令$y'=ln\hat{y},a'=lna$，得$y'=a'+bx$

（4）**倒指数曲线**

- 指数函数（x 作为指数出现）方程形式：

$$\hat{y} = ae^{\frac{b}{x}}，其中a > 0$$



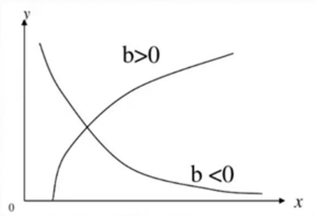
当 $a > 0$、$b > 0$时，y随x的增大而减小（衰减），是凹曲线；
当 $a > 0$、$b < 0$时，y随x的增大而增大（增长），是先凹后凸曲线。

- 变换方式：两边取对数，令$y' = ln\hat{y}, a' = lna, x' = \frac{1}{x}$，得$y' = a' + bx'$

（5）**对数函数曲线**

- 对数函数（x 作为自然对数出现）方程形式：

$$\hat{y} = a + blnx(x > 0)$$



- 对数函数表示：x变数的较大变化可引起y变数的较小变化。
  $b > 0$时，y随x的增大而增大，是凸曲线；
  $b < 0$时，y随x的增大而减小，是凹曲线。
- 变换方式：令$x' = lnx$，得$\hat{y} = a + bx'$

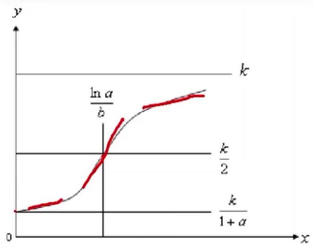
（6）**S型曲线**

- 主要描述动、植物的**自然生长过程**，又称生长曲线，也可以描述传染病的**发展趋势**。
- 生长过程的基本特点是开始增长较慢，而在以后的某一范围内迅速增长，达到一定的限度后增长又缓慢下来，曲线呈拉长的'S'型曲线。著名的'S'型曲线是$Logistic$生长曲线。

$$\hat{y} = \frac{k}{1 + ae^{-bx}}(a、b、k均大于0)$$

$$x = 0, \hat{y} = \frac{k}{1 + a};\ x \to \infty, \hat{y} = k$$

$\frac{k}{y} =$



- 所以时间为0的起始量为$\frac{k}{1+a}$，时间为无限延长的，终极量为k
  曲线$x = \frac{lna}{b}$时有一个拐点，这时$\hat{y} = \frac{k}{2}$，恰好是终极量的一半
  拐点左侧，为凹曲线，速率由小趋大；拐点右侧，为凸曲线
  速率由大趋小。
- 变换方式：两边取倒数再取对数后，$y' = ln(\frac{k-\hat{y}}{\hat{y}}), a' = lna$，得$y' = a' + bx$

- **当六类曲线都配不上时，怎么办？**
  - 多项式回归

    设变量x、Y的回归模型为

    $$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_p x^p + \epsilon$$

    其中p是已知的，$\beta_i(i = 1, 2, \cdots, p)$是未知参数，$\epsilon$服从正态分布$N(0, \sigma)$

    $$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_p x^p$$

    称为回归多项式，上面的回归模型称为**多项式回归**。
  - 其他可能的方法

    比如**神经网络、支持向量机**