微分方程 | 马尔萨斯人口模型

(1)人口预测模型

1789年，英国神父Malthus在分析了一百多年间人口统计资料之后，提出了Malthus模型。

模型假设:

1.设x(t)表示t时刻的人口数，且x(t)连续可微。

2.人口的增长率r是常数(增长率=出生率-死亡率)。

3.人口数量的变化是封闭的，即人口数量的增加与减少只取决于人口中个体的生育和死亡，且每一个体都具有同样的生育能力与死亡率。

微分方程 | 马尔萨斯人口模型

建模与求解:

由假设，t时刻到t+△t时刻人口的增量为 $x(t+\Delta t)-x(t)=rx(t)\Delta t$,

可得:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx, \\ x(0)=x_0, \end{cases}$$

其解为: $x(t)=x_0\mathrm{e}^{n}$

微分方程 | 阻滞增长模型

如何对增长率r进行修正呢?我们知道，地球上的资源是有限的，它只能提供一定数量的生命生存所需的条件。随着人口数量的增加，自然资源环境条件等对人口再增长的限制作用将越来越显著。如果在人口较少时可以把增长率r看成常数，那么当人口增加到一定数量之后，就应当视r为一个随着人口的增加而减小的量，即将增长率r表示为人口$x(t)$的函数$r(x)$,且$r(x)$为x的减函数。

模型假设:

1.设$r(x)$为x的线性函数，$r(x)=r-sx$(工程师原则，首先用线性)。

2.自然资源与环境条件所能容纳的最大人口数为x_m。即当$x=x_m$时，增长率$r(x_m)=0$。

建模与求解：

由假设1、2可得$r(x)=r\left(1-\frac{x}{x_m}\right)$，则有

$$\frac{dx}{dt}=rx=r\left(1-\frac{x}{x_m}\right)\cdot x$$

$$r(x)=r-sx=r-\frac{r}{x_m}\cdot x$$

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=r\left(1-\dfrac{x}{x_m}\right)x,\\ x(t_0)=x_0\text{。}\end{cases}$$

上式是一个可分离变量的方程，其解为

$$x(t)=\frac{x_m}{1+(\frac{x_m}{x_0}-1)e^{-r(t-t_0)}}\text{。}$$

若要退出全屏模式，请按 Esc

微分方程 | 阻滞增长模型

MATH 数模加油站

对方程求解二阶导：

$$\frac{d^2x}{dt^2}=r^2(1-\frac{x}{x_m})(1-\frac{2x}{x_m})x\text{。}$$

1. $\lim_{x\to 0}x(t)=x_m$,即无论人口初值x_0如何，人口总数都以x_m为极限。

2.当$0<x<x_m$时，$\frac{dx}{dt}=r\left(1-\frac{x}{x_m}\right)x>0$,这说明$x(t)$是单调增加的。又由式知，当$x<\frac{x_m}{2}$时，$\frac{d^2x}{dt^2}>0, x=x(t)$为凹函数;当$x>\frac{x_m}{2}$时，$\frac{d^2x}{dt^2}<0, x=x(t)$为凸函数。

3. 人口变化率$\frac{dx}{dt}$在$x=\frac{x_m}{2}$时取到最大值，即人口总数达到极限值一半以前是加速生长时期，经过这一点之后，生长速率会逐渐变小，最终达到 0。

微分方程 | 地中海鲨鱼问题

MATH 数模加油站

Volterra模型(沃尔泰拉模型)

食饵(即猎物)和捕食者在时刻t的数量分别记作$x_1(t)$和$x_2(t)$.因为大海中资源丰富，可以假设如果出食饵独立生存则将以增长率r_1按指数规律增长，即有$\frac{dx_1}{dt}=r_1x_1$,捕食者的存在使得食饵的增长率降低，假设降低的程度正比于捕食者的数量，于是$x_1(t)$满足方程：

$$\frac{dx_1}{dt}=x_1(r_1-\lambda_1x_2)$$

其中：比例系数λ_1反映捕食者掠取食饵的能力

微分方程 | 地中海鲨鱼问题

捕食者离开食饵无法生存，若假设它独自存在时的死亡率为r_2,即食饵为它提供食物的作用相当于使其死亡率降低。假设这个作用与食饵数量成正比，于是$x_2(t)$满足方程：

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2(-r_2 + \lambda_2 x_1)$$

其中：比例系数λ_2反映食饵对捕食者的供养能力

微分方程 | 地中海鲨鱼问题

方程(1)、(2)是在没有人工捕获情况下的自然环境中食饵与捕食者之间的制约关系，是数学家Volterra提出的最简单的模型。

在考虑人工捕获时，假设表示捕获能力或强度的系数为e,那么相当于食饵的自然增长率由r_1降为r_1-e,捕食者的死亡率由r_2增为r_2+e.方程变为：

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1[(r_1 - e) - \lambda_1 x_2] \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2[-(r_2 + e) + \lambda_2 x_1] \end{cases}$$

微分方程 | 种群相互竞争模型

如果一个自然环境中存在两个或两个以上的种群，它们之间的关系大致可分为以下几种：相互竞争，相互依存，弱肉强食(食饵与捕食者),也可能毫无关系。弱肉强食我们已经研究过，最后一种情形我们不用研究。所以还剩下两种关系，这部分我们先来研究两个种群的相互竞争模型，在下个部分我们再来研究两个种群的相互依存模型。

考虑单个种群在自然资源有限的环境下生存时，我们常用阻滞增长模型来描述它的数量的演变过程，即：$\frac{dx(t)}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{N}\right)$,

其中r是增长率，N是该环境下能容纳的最大数量。

微分方程 | 种群相互竞争模型

假设甲乙两个种群是相互竞争的关系，我们定义以下符号：$x_1(t)$,$x_2(t)$分别是甲乙两个种群的数量；

r1,r_2分别是甲乙两个种群的固有增长率；N_1,N_2分别是甲乙两个种群的最大容量；$x_1(0)$,$x_2(0)$表示甲乙两个的种群的初始数量。

如果不考虑乙的影响，甲种群的数量变化服从阻滞增长模型：

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=r_1x_1(1-\frac{x_1}{N_1})$$

注意：这里的因子$1-\frac{x_1}{N_1}$,反映了甲对有限资源的消耗导致其对自身增长的阻滞作用，

可理解为相对于N_1而言，数量为x_1时供养甲的食物量(假设仅仅考虑对于食物的竞争，食物的总量为1)。

微分方程 | 种群相互竞争模型

如果考虑乙的竞争作用.那么乙消耗同一资源会对甲的增长造成影响,我们在$-1-\frac{x_1}{N_1}$，中再减去一项，该项和种群乙的数量x_2(相对于N_2而言)成正比，于是对于种群甲有：

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=r_1x_1(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2})$$

这里多了一个系数σ_1,它表示的意义是：单位数量的乙种群(相对于N_2)消耗的供养甲的食物量为单位数量的甲(相对于N_1)消耗的供养甲的食物量的σ_1倍。

注意：如果$\sigma_1<1$则意味着在对供养甲的资源的竞争中乙弱于甲。例如：$\sigma_1=0.5$则意味着：乙对甲的食物的消耗强度只有甲的一半，也可以反过来理解为甲对资源的占有能力更强一点。

微分方程 | 种群相互竞争模型

类似地，对于种群乙有：

$$\frac{dx_2(t)}{dt}=r_2x_2(1-\frac{x_2}{N_2}-\sigma_2\frac{x_1}{N_1})$$

这里的系数σ_2表示的意义是：单位数量的甲种群(相对于N_1)消耗的供养乙的食物量为单位数量的乙(相对于N_2)消耗的供养乙的食物量的σ_2倍。

注意：σ_1和σ_2一般是相互独立的。只有在甲乙两个种群的食物选择以及对食物的偏好完全相同时，我们有$\sigma_1\sigma_1=1$。例如牛和羊都只吃草，那么假设$\sigma_1\sigma_1=1$没问题；猎豹和灰熊都吃小动物，构成了竞争关系，但是灰熊还会吃青草坚果等植物，此时$o_1\sigma_1$就很有可能不等于1。

微分方程 | 传染病模型

(1)易感者(S,Susceptible):潜在的可感染人群；

(2)潜伏者(E,Exposed):已被传染但没表现出来的人群；

(3)感染者(I,Infected):确诊感染的人；

(4)康复者(R,Recovered):已痊愈的感染者，体内含抗体。

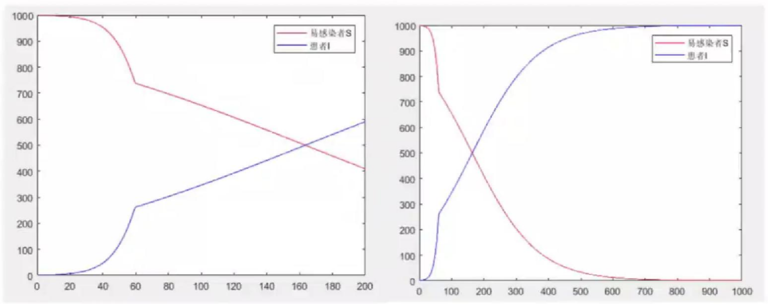
注意：以上分类的命名不唯一，例如有的文献将R解释为移出状态(removed),表示脱离系统不再受到传染病影响的人(痊愈、死亡或被有效隔离的人)。

微分方程 | 传染病模型

- 首先考虑最基本的模型——SI 模型。这里 S 是指易感染者 (Susceptible) 也就是健康人，I 指已感染者 (Infective) 也就是患者。在该模型中我们把人群分为易感染者和已感染者两大类 (即健康人和患者)。
- 假设我们不考虑人口的迁移和生死，设总人数为 N, 那么在任意时刻 N=S+I. 接下来我们需要考虑传染病的传播机理，这里有两种不同的角度：(1) 假设单位时间内，易感染者与已感染者接触且被传染的强度为β, 且单位时间内，由易 惑染者 S 转换为已感染者 I 的人数为：
- $\beta\frac{S}{N}\times\frac{I}{N}\times N=\beta\frac{SI}{N}$。那么有$S(t+\Delta t)-S(t)=-\beta\frac{S(t)\times I(t)}{N}\Delta t$，$I(t+\Delta t)-I(t)=\beta\frac{S(t)\times I(t)}{N}\Delta t$。这里我们可以借用高数的知识：
- $\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}=-\beta\frac{S(t)\times I(t)}{N}$,则$\frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{dt}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}=-\beta\frac{\mathrm{S\times I}}{\mathrm{N}}$,

微分方程 | 传染病模型

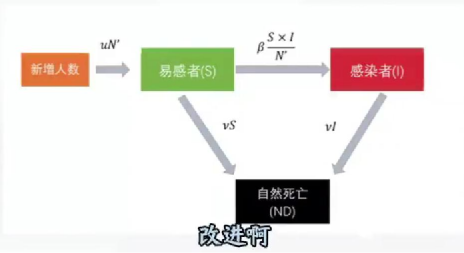
对于SI模型的拓展:
(1):考虑某种使得参数β降低的因素(例如禁止大规模聚会、采取隔离措施等)
例如：第60期后禁止大规模聚会，使得传染强度beta缩小为原来的10倍
我们下面画了两张图，分别是模拟200期的图像和模拟1000期的图像，可以看出，第60期后，疾病的传染速度有了明显的下降。



微分方程 | 传染病模型

(2): 增加人口自然出生率和死亡率，但不考虑疾病的死亡率 假定初始总人口数为$N(=S+I)$, 疾病流行期间，人口出生率和自然死亡率分别为μ和v, 不考虑因病死亡，新增人都是易感染者，初始时单位时间内感染人数为$\beta\frac{SI}{N}$。

注意，由于总人数 N 不再固定，因此我们在后期不断对总人数 N 进行更新，新的总人口N'的计算公式仍然为 S+I。其状态转移图形为：

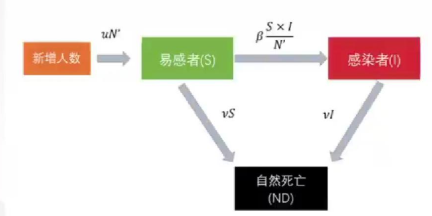


改进啊

微分方程 | 传染病模型

对应的微分方程组为:

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt}=-\beta\dfrac{S\times I}{N'}+uN'-vS\\ \dfrac{dI}{dt}=\beta\dfrac{S\times I}{N'}-vI\\ \dfrac{dND}{dt}=vS+vI\end{cases}\quad \text{，且}N'=S+I$$



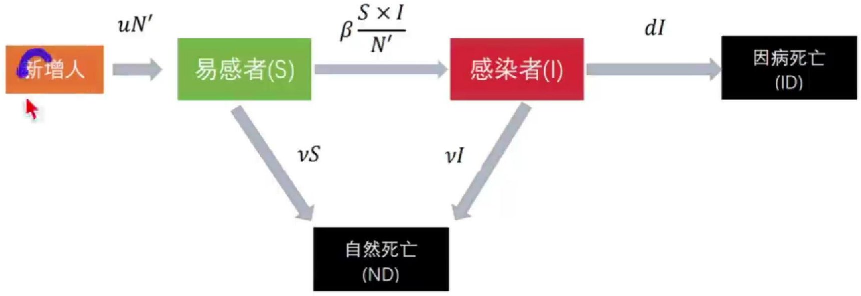
微分方程 | 传染病模型

(3):不考虑人口自然出生率和死亡率，只考虑疾病的死亡率假定因病的死亡率为d,不考虑人口自然出生率和死亡率。其状态转移图形为:

对应的微分方程组为:
$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta\frac{S\times I}{N'} \\ \frac{dI}{dt} = \beta\frac{S\times I}{N'} - dI \text{ ，且} N' = S + I \\ \frac{dID}{dt} = dI \end{cases}$$

微分方程 | 传染病模型

4):同时考虑人口自然出生率和死亡率和疾病的死亡率 疾病流行期间，人口出生率和自然死亡率分别为μ和v,因病的死亡率为d,其状态转移图形为:



微分方程 | 传染病模型

对应的微分方程组为:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dS}{dt} = -\beta \dfrac{S \times I}{N'} + uN' - vS \\
\dfrac{dI}{dt} = \beta \dfrac{S \times I}{N'} - dI - vI \\
\dfrac{dID}{dt} = dI \\
\dfrac{dND}{dt} = vS + vI
\end{cases}
$$

，且 $N' = S + I$