华中科技大学计算机科学与技术学院 2020~2021 第一学期

“ 算法设计与分析 ” 考试试卷（A 卷）

考试方式 闭卷 考试日期 2020-12-02 考试时长 150 分钟

专业班级 ________ 学 号 ________ 姓 名 ________

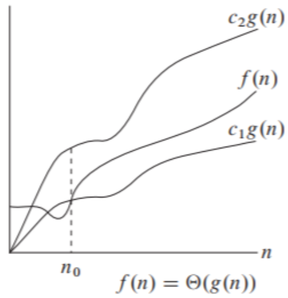
题号	一	二	三	四	五	六	七	总分	核对人
分值	20	8	21	12	14	10	15	100	
得分									

分 数	
评卷人	

一、简答题（1、2 小题每小题 4 分，3、4 小题每小题 6 分，共 20 分）。

解答内容不得超过装订线

1） 已知 g(n)是 f(n)的一个渐近紧确界，f(n)和 g(n)的函数关系如下图所示，请说明该图所反映出的相关性质。



$f(n) = \Theta(g(n))$

2） 什么是结点成本估计函数？在$\widehat{C}(x) = f\big(h(x)\big) + g(x)$中，h(x)的作用和意义是什么？

3） GREEDY_ACTIVITY_SELECTOR（活动选择问题的贪心算法）的设计思想是什么？

已知 10 个活动{a_1，a_2，…, a_{10}}的集合 S，每个活动的开始时间 s_i 和结束时间 f_i 如下:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s_i	1	3	0	5	3	5	8	7	2	12
f_i	3	5	6	7	9	9	11	12	14	17

给出一个用 GREEDY_ACTIVITY_SELECTOR(s,f)算法求解该活动选择问题所得到的解。

4） 对给定的流网络 G 和流量 f，在由 f 所诱导的 G 的残存网络 G_f 中将存在哪些边？如何计算它们的残存容量？相比 Ford-Fulkerson 算法，Edmonds-Karp 算法的不同之处是什么？带来了什么改进？

分　数	
评卷人	

二、（8 分）求下列递归式的渐近紧确界。

要求：写出必要的计算过程。

$$\boldsymbol{T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}}$$

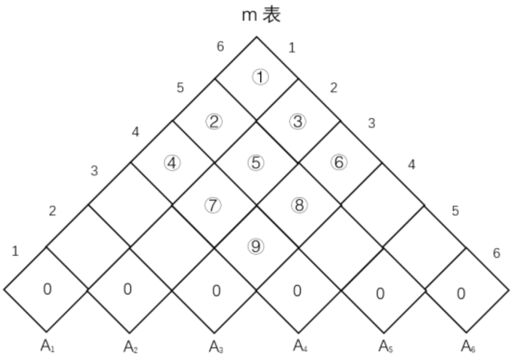
分 数	
评卷人	

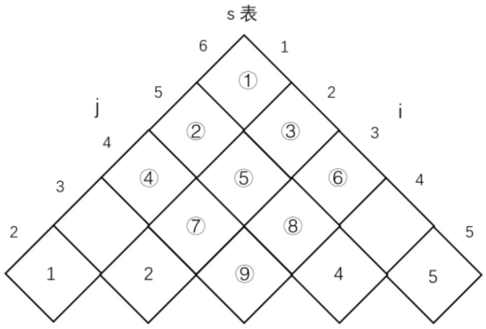
三、（21 分）矩阵链乘问题：已知矩阵规模序列⟨5,14,9,12,5,10,17⟩，求该矩阵链乘问题的最优括号化方案。

提示：对 n 个矩阵的链<$A_1,A_2,\cdots,A_n$>，记 m[i,j] 为计算矩阵链 $A_{i,j}$ 所需的标量乘法运算次数的最小值：

$$m[i,j]=\begin{cases}0 & \text{if } i=j\,,\\ \min\limits_{i\le k<j}\{m[i,k]+m[k+1,j]+p_{i-1}p_kp_j\} & \text{if } i<j\,.\end{cases}$$

算法要计算的 m 表和 s 表如下：





1)请分别将以上 m 表和 s 表中编号①~⑨单元的计算结果填到下表对应的单元格中。(9 分)

编号	(9)	(8)	(7)	(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)
m									
s									

2）给出其中 m[3,4]和 s[3,4]、m[2,5]和 s[2,5]、m[1,6]和 e[1,6]的计算过程。（9 分）

（1）m[3,4]、s[3,4]:

（2）m[2,5]、s[2,5]:

（3）m[1,6]和 e[1,6]

解答内容不得超过装订线

3）推导该矩阵链乘的最优括号化方案，要求写出推导过程。（3 分）

分　数	
评卷人	

四、（12 分）已知有向图如以下图 a 所示，执行 Bellman-Ford 算法求源点 s 到其它各结点的最短路径。请在图 b～图 e 中的各个结点内填写算法第一次至第四次松弛操作后各结点的 d 值。设每次松弛操作对边的处理次序都是：(t, x)、(t, y)、(t, z)、(x, t)、(y, x)、(y, z)、(z, x)、(z, s)、(s, t)、(s, y)。

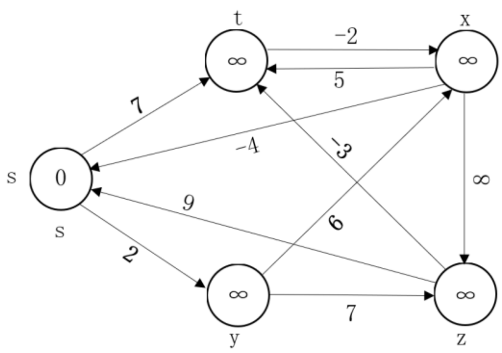


图 a

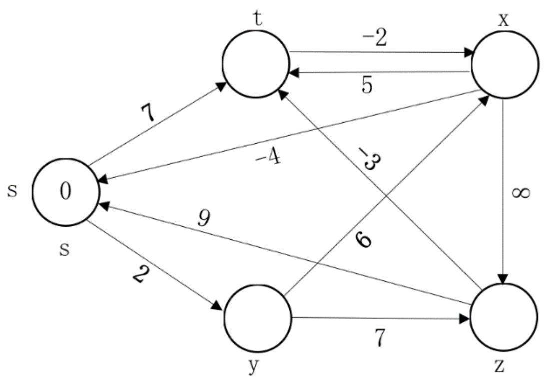


图 b

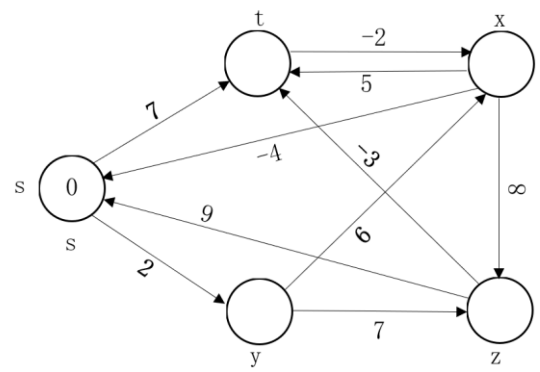


图 c

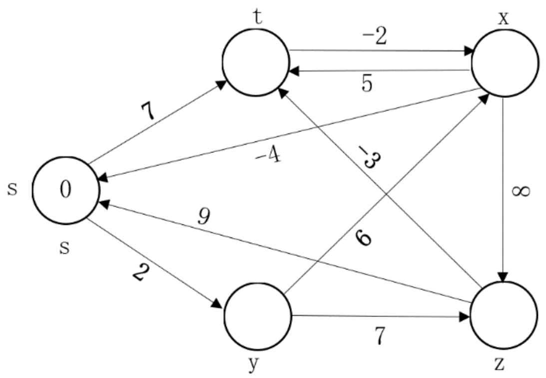


图 d

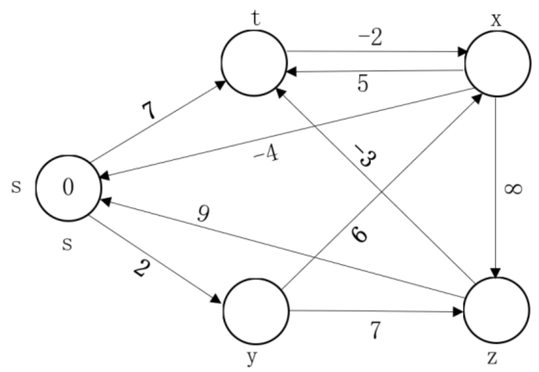


图 e

分　数	
评卷人	

五、（14 分）。给定两个集合 A 和 B。各包含 n 个正整数。你可以按需要任意重排每个集合。重排后，令 a_i 为集合 A 的第 i 个元素，b_i 为集合 B 的第 i 个元素。于是你得到回报 $\prod_{i=1}^{n} a_i^{b_i}$ 。设计一个贪心算法最大化你的回报（只描述算法思想，不要求伪代码描述）。证明你的算法是正确的，并分析运行时间。

解答内容不得超过装订线

分　数	
评卷人	

六、（10 分）0/1 背包问题是指：已知各有重量($w_1, w_2, \cdots, w_n$)和效益值($p_1, p_2, \cdots, p_n$)的 n 件物品，及一个可容纳 M 重量的背包，一件物品在背包有足够剩余容量时可以选择装或不装，但如果装，就必须装入它的全部，不能只装它的一部分(注：没有足够剩余容量时不能装)。问怎样装包才能在不超过背包容量 M 的前提下，使得装入背包的物品的总效益最大（这里设所有的 $w_i>0$, $p_i>0$，$1\leqslant i\leqslant n$)。问题的解用向量（$x_1, x_2, \cdots, x_n$）表示，其中，x_i表示物品 i 被放入背包的比例（对于 0/1 背包问题，x_i的取值只能是 1 或者 0)，物品 i 对背包效益的贡献是 p_ix_i，同时占用 w_ix_i的重量。

记 $f_i(X)$为在背包有剩余容量 X 时，只考虑物品 1～i 装包所能带来的最大效益，则 $f_n(M)$即为对容量为 M 的背包，n 件物品装包所可能带来的最大效益。

1）证明 0/1 背包问题满足最优子结构性。

2）请写出基于 $f_i(X)$的状态转移方程。

分　数	
评卷人	

七、（15 分）将 n 个作业分配给 k 个处理机并行处理。任意作业 i（$1\leqslant i\leqslant n$）的开始时间和结束时间不限，但一旦开始，将以不可抢占方式运行 r_i 时间，然后结束。

（1）请使用分支-限界法设计一个算法，求将这 n 个作业分配给 k 个处理机并使得完成全部作业总用时最短的调度方案，即从 t_0 时刻开始执行第一个作业，到最后一个作业完成的时刻，总用时最少的调度方案，要求给出算法的伪代码描述。

（2）如果用回溯法求解该问题，试从时间和空间两个角度分析两种算法的异同和优劣（不要求具体写出回溯算法，仅从性质上讨论二者的异同即可）。

解答内容不得超过装订线