复变函数与积分变换试题(一)

一、填空题

(1) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3$ 的模为____，辐角主值为____。

(2) $\mathrm{Ln}\,(-1)$ 的值为____________________，

$\mathrm{e}^{-3+\frac{\pi}{4}i}$ 的值为________________。

(3) 映射 $w=z^3-z$ 在 $z=i$ 处的旋转角为____，伸缩率为____。

(4) 函数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 在区域 D 内解析的充要条件为________________________。

(5) $\dfrac{1}{z(4-3z)}$ 在 $z_0=1+i$ 处展开成泰勒级数的收敛半径为______。

(6) $z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$ 的何种类型的奇点？__________。

(7) $\oint_{|z|=\frac{1}{4}}\dfrac{e^z}{(z-\pi)^3(z+1/2)}dz=$____。

(8) 已知 $f(t)=\dfrac{1}{2}[\delta(t+t_0)+\delta(t-t_0)+\delta(t+\dfrac{t_0}{2})+\delta(t-\dfrac{t_0}{2})]$，求 $\mathscr{F}[f(t)]=$________________。

二、验证 $u(x,y)=2(x-1)y$ 是调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使 $f(2)=-i$.

三、将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 分别在 $z=1$ 与 $z=2$ 处展开为洛朗级数。

四、计算下列各题。

1. $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z\sin z}{z^3}\,dz$.

2. $\oint_{|z|=2} z e^{\frac{1}{z-1}}\,dz$.

3. $\int_0^{\pi}\dfrac{d\theta}{1+\sin^2\theta}$.

4. $\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx$.

5. 已知 $f_1(t)=e^{-t}u(t)$，$f_2(t)=t\,u(t)$，求 $f_1(t)*f_2(t)$.

五、求区域 $D=\{z:\mathrm{Re}z>0,\ 0<\mathrm{Im}z<1\}$ 在映射 $w=\dfrac{i}{z}$ 下的像。

六、设区域 $D=\{z:|z+i|<2,\ \mathrm{Im}\,z>0\}$，求一共形映射将 D 映射为单位圆域。_

七、利用 Laplace 变换求解微分方程：

$$y''+y=t,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=-2.$$

八、设函数 $f(z)$ 在 $|z|\le R$ 上解析，证明：

$$\frac{R^2-|z|^2}{2\pi i}\oint_{|\xi|=R}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)(R^2-\bar{z}\xi)}\mathrm{d}\xi=f(z),\quad (|z|<R).$$

复变函数与积分变换试题(一) 解答

一、填空题

(1) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3$ 的模为 $\underline{\ 1\ }$，辐角主值为 $\underline{\ \pi\ }$。

(2) $\mathrm{Ln}(-1)$ 的值为 $\underline{(2k+1)\pi i,\ \ k=0,\pm1,\pm2,\cdots}$，

$e^{-3+\frac{\pi}{4}i}$ 的值为 $\underline{e^{-3}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)}$。

(3) 映射 $w=z^3-z$ 在 $z=i$ 处的旋转角为 $\underline{\ \pi\ }$，伸缩率为 $\underline{\ 4\ }$。

(4) 函数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 在区域 D 内解析的充要条件为 $\underline{u,v\text{ 在 }D\text{ 内可微，且满足 }C-R\text{ 方程}}$。

(5) $\dfrac{1}{z(4-3z)}$ 在 $z_0 = 1 + i$ 处展开成泰勒级数的收敛半径为 $\underline{\dfrac{\sqrt{10}}{3}}$。

(6) $z = 0$ 是 $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1} - \dfrac{1}{z}$ 的何种类型的奇点？ 可去奇点。

(7) $\oint_{|z|=\frac{1}{4}} \dfrac{e^z}{(z-\pi)^3(z+1/2)} dz = \underline{0}$。

(8) 已知 $f(t) = \dfrac{1}{2}[\delta(t+t_0) + \delta(t-t_0) + \delta(t+\dfrac{t_0}{2}) + \delta(t-\dfrac{t_0}{2})]$，

求 $\mathscr{F}[f(t)] = \underline{\cos\omega t_0 + \cos\dfrac{\omega t_0}{2}}$。

二、验证 $u(x, y) = 2(x-1)y$ 是调和函数，并求以 $u(x, y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使 $f(2) = -i$.

解 (1) 由 $u_{xx} = 0$，$u_{yy} = 0$，$\Rightarrow \quad u_{xx} + u_{yy} = 0$,

故 $u(x, y)$ 为调和函数。

(2) 方法1 利用偏积分法求解。

由 $u_x = 2y = v_y$，$\Rightarrow \quad v = \int 2y\,\mathrm{d}y = y^2 + \varphi(x)$,

由 $u_y = 2x - 2 = -v_x = -\varphi'(x)$,

$\Rightarrow \quad \varphi(x) = -x^2 + 2x + c$,

即得 $v(x, y) = -x^2 + 2x + y^2 + c$.

二、验证 $u(x,y)=2(x-1)y$ 是调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使 $f(2)=-i$.

解 (2) 方法2　利用全微分法求解。

由 $u_x=2y=v_y$，　$u_y=2x-2=-v_x$，

有 $\mathrm{d}v=(-2x+2)\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y=\mathrm{d}(-x^2+2x+y^2)$,

即得 $v(x,y)=-x^2+2x+y^2+c$.

(3) $f(z)=2(x-1)y+i(-x^2+2x+y^2+c)$.

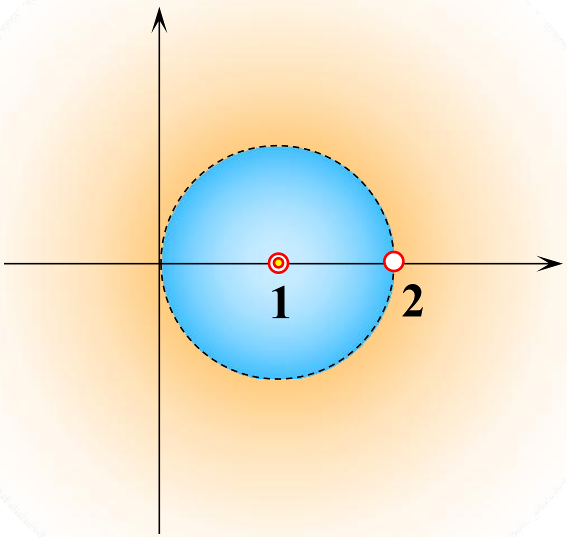
由 $f(2)=-i$，　$\Rightarrow$　$c=-1$,

即得 $f(z)=2(x-1)y+i(-x^2+2x+y^2-1)$.

三、将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 分别在 $z=1$ 与 $z=2$ 处展开为洛朗级数。

解 (1) 在 $z=1$ 处展开。

① 当 $0<|z-1|<1$ 时,



$$f(z)=-\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-(z-1)}$$

$$=-\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-1}.$$

三、将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 分别在 $z=1$ 与 $z=2$ 处展开为洛朗级数。

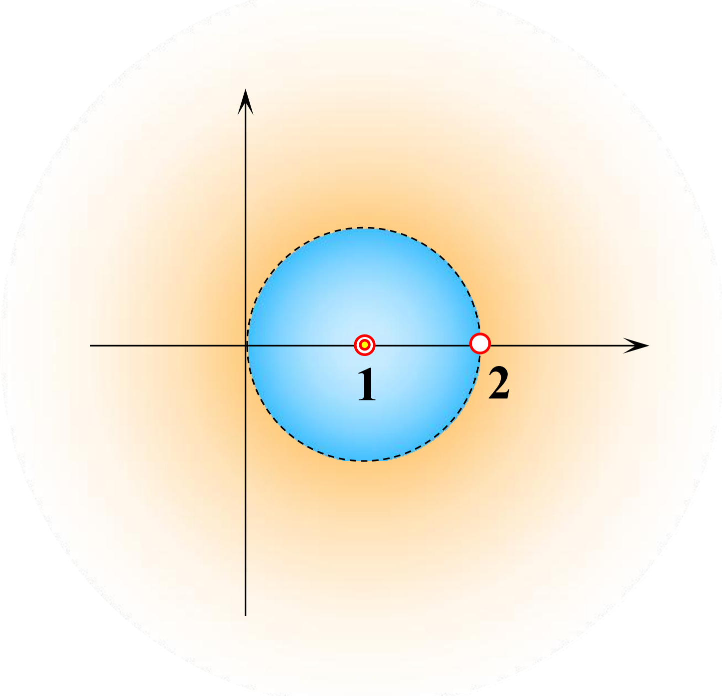
解 (1) 在 $z=1$ 处展开。

② 当 $|z-1|>1$ 时，

$$f(z)=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{(z-1)-1}$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z-1}}$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+2}}.$$



三、将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 分别在 $z=1$ 与 $z=2$ 处展开为洛朗级数。

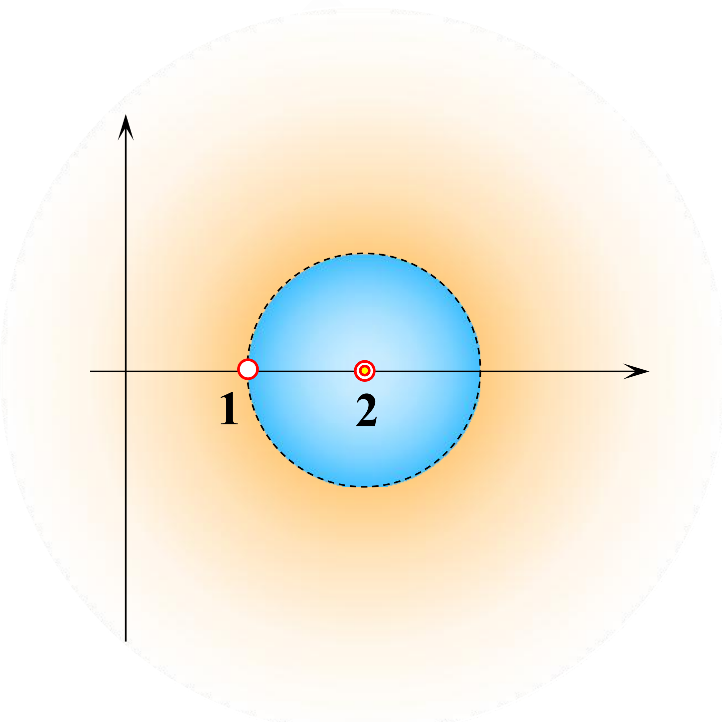
解 (2) 在 $z=2$ 处展开。（简略）

① 当 $0<|z-2|<1$ 时，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-2)^{n-1}.$$

② 当 $|z-2|>1$ 时，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^{n+2}}.$$



四、1. $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z\sin z}{z^3}\,dz$.

解 方法1 利用留数求解。

在 $|z|<1$ 内，$z=0$ 为二阶极点，

$$\text{原式}=\frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i\lim_{z\to 0}\left(z^2\frac{e^z\sin z}{z^3}\right)'=1.$$

方法2 利用高阶导数公式求解。

$$\text{原式}=\frac{1}{2!}(e^z\sin z)''\Big|_{z=0}=1.$$

四、2. $\oint_{|z|=2} z e^{\frac{1}{z-1}} \mathrm{d}z.$

解 在 $|z|<2$ 内，$z=1$ 为本性奇点，

$$z e^{\frac{1}{z-1}} = [(z-1)+1](1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{3!(z-1)^3}+\cdots)$$

$$=\cdots+(\frac{1}{2!}+1)\frac{1}{z-1}+\cdots,$$

原式 $=2\pi i\cdot\frac{3}{2}=3\pi i.$

四、3. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta}$.

解 (1) 原式 $\displaystyle=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\frac{1-\cos 2\theta}{2}}=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}(2\theta)}{3-\cos 2\theta}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\cos\theta}$,

令 $z=e^{i\theta}$, 则 $\cos\theta=\dfrac{z^2+1}{2z}$, $\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$,

原式 $\displaystyle=\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{\left(3-\frac{z^2+1}{2z}\right)iz}=2i\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-6z+1}$.

四、3. $\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta}$.

解 (1) 原式 $=\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{\left(3-\frac{z^2+1}{2z}\right)iz}=2i\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-6z+1}$.

(2) 记 $f(z)=\frac{1}{z^2-6z+1}$，则 $f(z)$ 有两个简单极点:

$z_1=3-2\sqrt{2}$，$z_2=3+2\sqrt{2}$.（z_2 不在 $|z|<1$ 内）

原式 $=2i\cdot 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),z_1]=-4\pi\cdot\left.\frac{1}{2z-6}\right|_{z=z_1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

四、4. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx.$

解 令 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+9)}$,

在上半平面有两个简单极点：$z_1=i$，$z_2=3i$.

$$\operatorname{Res}[f(z),z_1]=\frac{e^{iz}}{[(z^2+1)(z^2+9)]'}\bigg|_{z=i}=\frac{e^{-1}}{16i},$$

$$\operatorname{Res}[f(z),z_2]=\frac{e^{-3}}{-48i},$$

$$原式=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[2\pi i\left(\frac{e^{-1}}{16i}-\frac{e^{-3}}{48i}\right)\right]=\frac{\pi(3e^{-1}-e^{-3})}{48}.$$

四、5. 已知 $f_1(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，$f_2(t)=t\,u(t)$，求 $f_1(t)*f_2(t)$.

解 $$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\underline{f_2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\underline{f_2[-(\tau-t)]}\mathrm{d}\tau.$$

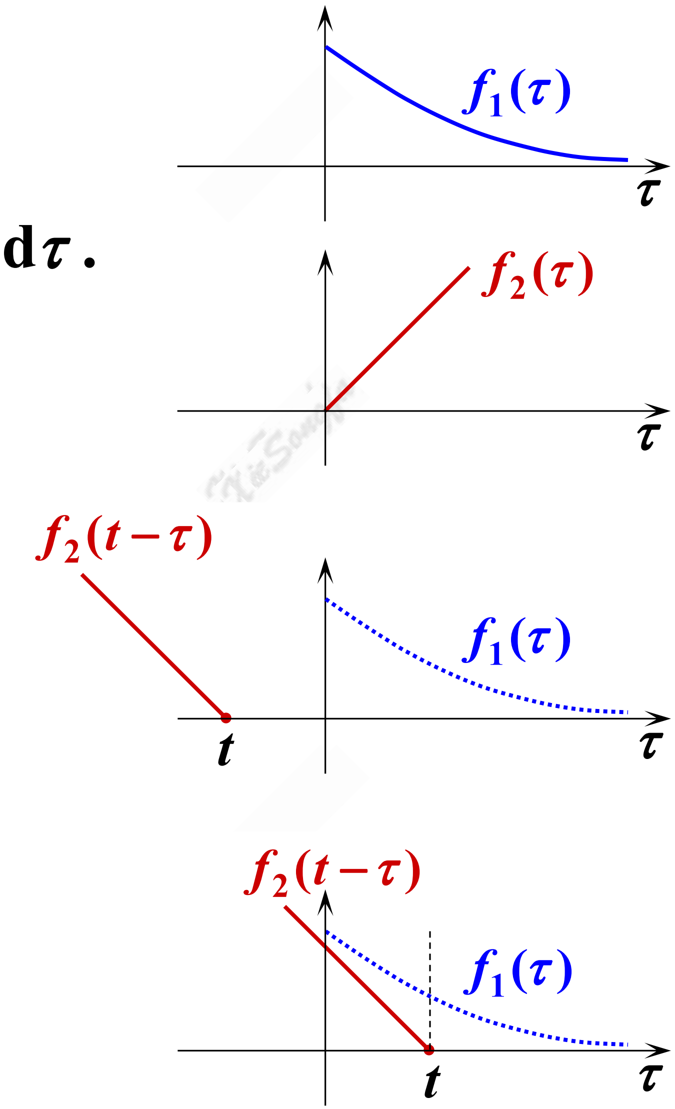
(1) 当 $t\le 0$ 时，

$$f_1(t)*f_2(t)=0.$$

(2) 当 $t>0$ 时，

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{-\tau}(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=(t-1)+\mathrm{e}^{-t}.$$



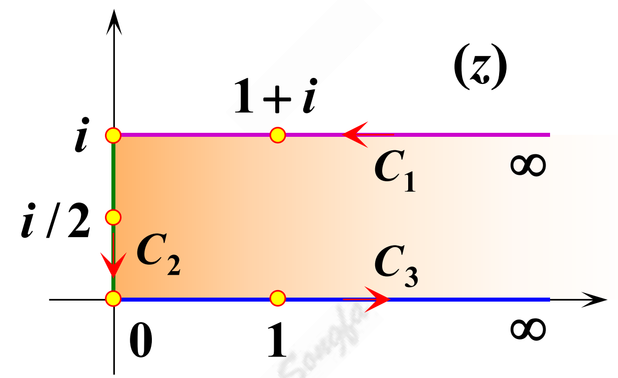
五、求区域 $D=\{z:\mathrm{Re}z>0,\ 0<\mathrm{Im}z<1\}$ 在映射 $w=\dfrac{i}{z}$ 下的像。

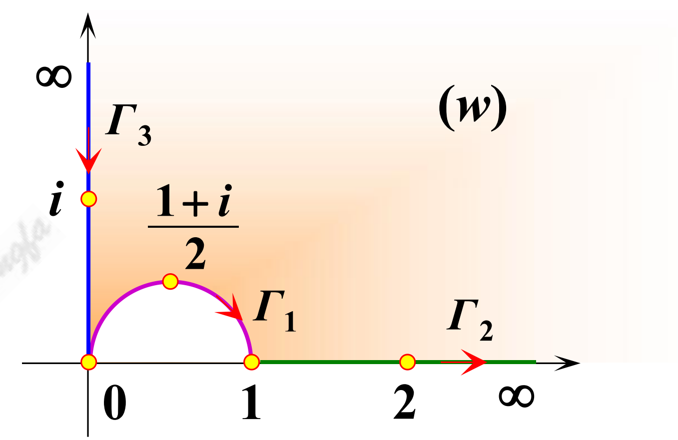
解

$$C_1\left\{\begin{matrix}\infty & \to & 0\\ 1+i & \to & (1+i)/2\\ i & \to & 1\end{matrix}\right\}\Gamma_1$$

$$C_2\left\{\begin{matrix}i & \to & 1\\ i/2 & \to & 2\\ 0 & \to & \infty\end{matrix}\right\}\Gamma_2$$

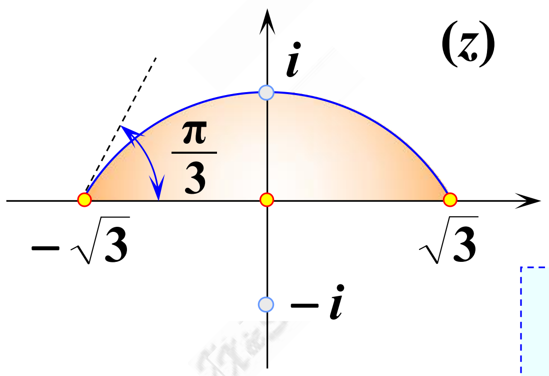
$$C_3\left\{\begin{matrix}0 & \to & \infty\\ 1 & \to & i\\ \infty & \to & 0\end{matrix}\right\}\Gamma_3$$

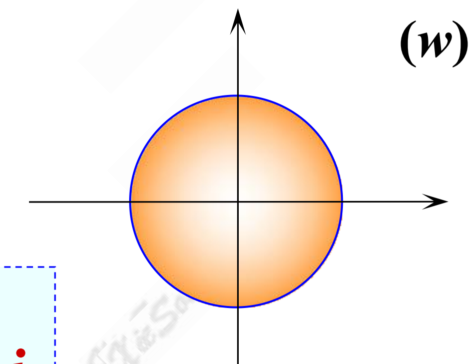




六、设区域 $D=\{z:|z+i|<2,\ \mathrm{Im}\,z>0\}$，求一共形映射将 D 映射为单位圆域。_

解

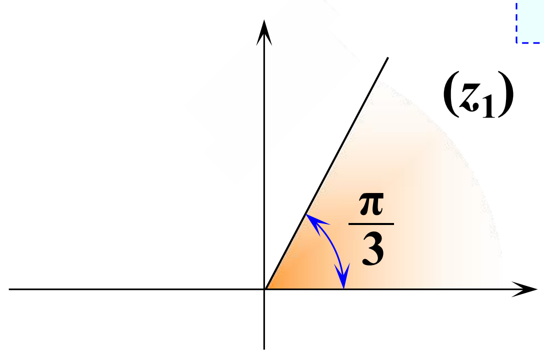




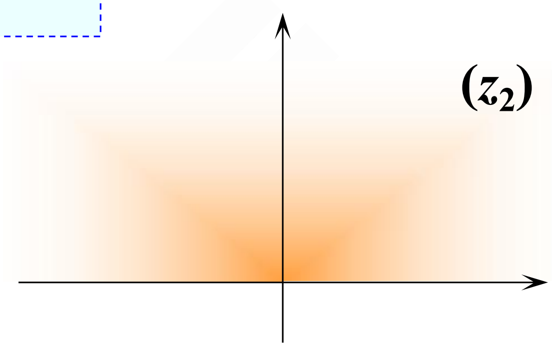
$$z_1=-\frac{z+\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}$$

$$w=\frac{\left(-\dfrac{z+\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}\right)^3-i}{\left(-\dfrac{z+\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}\right)^3+i}$$

$$w=\frac{z_2-i}{z_2+i}$$



$$z_2=z_1^3$$



七、利用 Laplace 变换求解微分方程：

$$y''+y=t,\ y(0)=1,\ y'(0)=-2.$$

解 (1) 令 $Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$,

对方程两边取 Laplace 变换， 得

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+Y(s)=\frac{1}{s^2},$$

代入初值， 得

$$s^2Y(s)-s+2+Y(s)=\frac{1}{s^2},$$

求解即得：

$$Y(s)=\frac{s-2}{s^2+1}+\frac{1}{s^2(s^2+1)}=\frac{s^3-2s+1}{s^2(s^2+1)}.$$

七、利用 Laplace 变换求解微分方程：

$$y''+y=t,\ y(0)=1,\ y'(0)=-2.$$

解 (2) 求 Laplace 逆变换。

方法1 利用查表法求解。

$$Y(s)=\frac{s}{s^2+1}-\frac{2}{s^2+1}+\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}$$

$$=\frac{1}{s^2}+\frac{s}{s^2+1}-\frac{3}{s^2+1},$$

$$\Rightarrow\quad y(t)=t+\cos t-3\sin t.$$

$$Y(s)=\frac{s-2}{s^2+1}+\frac{1}{s^2(s^2+1)}=\frac{s^3-2s+1}{s^2(s^2+1)}.$$

七、利用 Laplace 变换求解微分方程：

$$y''+y=t，\ y(0)=1，\ y'(0)=-2.$$

解 (2) 求 Laplace 逆变换。

方法2 利用留数求解。

$Y(s)$ 有一个二阶极点 $s=0$，两个一阶极点 $s=\pm i$.

$$\mathrm{Res}[Y(s)\mathrm{e}^{st},\ 0]=\lim_{s\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{s^3-2s^2+1}{s^2+1}\mathrm{e}^{st}\right)=t.$$

$$Y(s)=\frac{s-2}{s^2+1}+\frac{1}{s^2(s^2+1)}=\frac{s^3-2s+1}{s^2(s^2+1)}.$$

七、利用 Laplace 变换求解微分方程：

$$y''+y=t,\ y(0)=1,\ y'(0)=-2.$$

解 (2) 求 Laplace 逆变换。

方法2 利用留数求解。

$Y(s)$ 有一个二阶极点 $s=0$，两个一阶极点 $s=\pm i$.

$$\mathrm{Res}[Y(s)\,\mathrm{e}^{st},\pm i]=\left(\frac{s^3-2s^2+1}{s^2(s\pm i)}\mathrm{e}^{st}\right)\bigg|_{s=\pm i}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\mp\frac{3}{2i}\right)\mathrm{e}^{\pm it}.$$

$$y(t)=t+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2i}\right)\mathrm{e}^{it}+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2i}\right)\mathrm{e}^{-it}=t+\cos t-3\sin t.$$

八、设函数 $f(z)$ 在 $|z|\le R$ 上解析，证明：

$$\frac{R^2-|z|^2}{2\pi i}\oint_{|\xi|=R}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)(R^2-\bar{z}\xi)}\mathrm{d}\xi=f(z),\quad (|z|<R).$$

证明 (1) 被积函数有两个一阶极点 $\xi_1=z$，$\xi_2=\dfrac{R^2}{\bar{z}}$，

由于 $|z|<R$，故 ξ_2 不在 $|\xi|=R$ 之内。

(2) $$\frac{R^2-|z|^2}{2\pi i}\oint_{|\xi|=R}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)(R^2-\bar{z}\xi)}\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{R^2-|z|^2}{2\pi i}\cdot 2\pi i\cdot\left.\left(\frac{f(\xi)}{R^2-\bar{z}\xi}\right)\right|_{\xi=z}=f(z).$$

放松一下吧！……