第二章　　插值方法 /* Interpolation */

引言

表示两个变量x, y内在关系一般由函数式y=f(x)表达。
但在实际问题中，有两种情况:

1. 由实验观测而得到的一组离散数据(函数表)，虽然这种函数关系式y=f(x)存在且连续，但未知。

2. 函数解析表达式已知，但计算复杂，不便使用。通常也造函数表。如，y=sin(x), y=lg(x)。

有时要求不在表上的函数值，怎么办?

引言

办法：根据所给的$y=f(x)$的函数表，

构造一个简单的连续函数$g(x)$近似代替$f(x)$。

Def: $g(x)$为逼近函数，$f(x)$为被逼近函数。

近似代替即逼近的方法有很多种，通常是：插值方法。

已知：$f(x)$的的函数表

x	x_0	x_1	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_n

求$g(x)$使 $g(x_i)=y_i$ ，$i=0,1,2,3 \ldots n$.

Def: $g(x)$为$f(x)$的插值函数，$f(x)$为被插值函数。

引言

构造$g(x)$的方法还有：

一致逼近、最佳均方逼近和数据拟合。

简单函数$g(x)$指可用四则运算计算的函数：

如：有理函数(分式函数)、多项式或分段多项式。

当$g(x)$为多项式时，该插值方法称为代数多项式插值，称插值函数$g(x)$为插值多项式。

本章主要介绍多项式插值的理论与方法。

它在实践中应用很广。

插值区间

Problem I：已知y=f(x)的函数表

x	x_0	x_1	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_n

且$x_i(i=0,1,\ldots,n)$两两互异，$x_i \in [a,b]$，

求次数不超过n的多项式

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \quad (2.1)$$

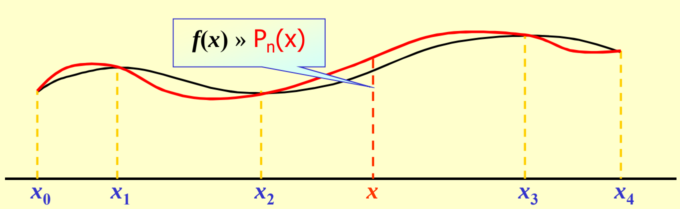
使得 $P_n(x_i)=y_i \quad i=0,1,\cdots,n \quad (2.2)$

插值条件

Def：n+1个互异点$x_0,x_1,\ldots,x_n$称为**插值节点**，其所在区间[a,b]为**插值区间**，(2.2)式为**插值条件**。

多项式插值问题的几何意义

多项式$P_n(x)$，其几何曲线过给定的y=f(x)的n+1个点$(x_i，y_i)$，i=0,1,2,…,n.



插值多项式的唯一性

对于Prbloem I中的$P_n(x)$是否存在？解是否唯一？如何求？

显然，关键是求$P_n(x)$ 的系数$a_0,a_1,\ldots,a_n$.

定理2.1 在n+1个互异的插值结点$x_0,x_1,\ldots,x_n$ 上满足插值条件(2.2)的次数不超过n的代数多项式$P_n(x)$存在且唯一。

分析：为求 $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \quad (2.1)$

主要考虑插值条件

$$P_n(x_i)=y_i \qquad i=0,1,\cdots,n \qquad (2.2)$$

定理2.1的证明

证明：由插值条件，有，

$$\left.\begin{array}{l}
P_n(x_0)=a_0+a_1x_0+a_2x_0^{\ 2}+\cdots+a_nx_0^{\ n}=y_0\\
P_n(x_1)=a_0+a_1x_1+a_2x_1^{\ 2}+\cdots+a_nx_1^{\ n}=y_1\\
\qquad\qquad\vdots\\
P_n(x_n)=a_0+a_1x_n+a_2x_n^{\ 2}+\cdots+a_nx_n^{\ n}=y_n
\end{array}\right\} \quad (2.3)$$

其系数矩阵的行列式为

关于 $a_0,a_1,\ldots,a_n$的非齐次线性方程组

$$\begin{vmatrix}
1 & x_0 & x_0^{\ 2} & \cdots & x_0^{\ n}\\
1 & x_1 & x_1^{\ 2} & \cdots & x_1^{\ n}\\
 & & \cdots & & \\
1 & x_n & x_n^{\ 2} & \cdots & x_n^{\ n}
\end{vmatrix}=V_n(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}(x_i-x_j)\neq 0$$

$$(\because i\neq j, x_i\neq x_j)$$

$\therefore$ 方程组(2.3)的解 $a_0,a_1,\cdots,a_n$存在且唯一，

$\therefore$ 插值多项式 存在且唯一。

例1 给定f(x)的函数表，求f(x)的次数不超过3的插值多项式。

x	-1	1	2	5
y	-7	7	4	35

解：设$P_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$，则

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ -4 \\ 35 \end{pmatrix}$$

解方程组得 $a_0=10, a_1=5, a_2=-10, a_3=2$，

即$P_3(x)=10+5x-10x^2+2x^3$，

n=20,在 10^8次/秒的计算机上用**传统**方法计算需几十万年!

2.2 Lagrange 插值——线性插值

Problem 2.1 已知函数y=f(x)的函数表

x	x_0	x_1
y	y_0	y_1

求次数不超过1的多项式$P_1(x)=a_0+a_1x$，满足插值条件 $P_1(x_0)=y_0$, $P_1(x_1)=y_1$.

分析：过点(x_0,y_0),(x_1,y_1)作直线$y=P_1(x)$ —线性插值。

解：由点斜式方程，

$$y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

$$y=P_1(x)=y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1-\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_0$$

$$P_1(x)=\underbrace{\frac{x-x_1}{x_0-x_1}}_{l_0(x)}y_0+\underbrace{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}}_{l_1(x)}y_1=\sum_{i=0}^{1}l_i(x)y_i$$

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\ l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

称为线性插值基函数，而$P_1(x)$是它们的线性组合。

线性插值基函数的性质

$$P_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1 = \sum_{i=0}^{1} l_i(x)y_i$$

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\ l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \qquad \Rightarrow l_0(x)+l_1(x)=1$$

$$\begin{aligned} l_0(x_0)&=1,\ l_0(x_1)=0\\ l_1(x_0)&=0,\ l_1(x_1)=1 \end{aligned} \quad \Rightarrow l_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\quad i,j=0,1$$

δ_{ij} **/* Kronecker Delta */**

线性插值

例2.2 已知lg2.71=0.4330,lg2.72=0.4364.求y=lg2.718.

分析: 对y=lgx ,给出了两点(2.71,0.4330)=(x_0,y_0),

(2.72,0.4364)=(x_1,y_1)

为求lg2.718构造简单的插值多项式作为lgx的近似。

解: 已知(x_0,y_0)= (2.71,0.4330),(x_1,y_1)=(2.72,0.4364)
利用线性插值，则

$$P_1(x)=\frac{x-2.72}{2.71-2.72}*0.4330+\frac{x-2.71}{2.72-2.71}*0.4364$$

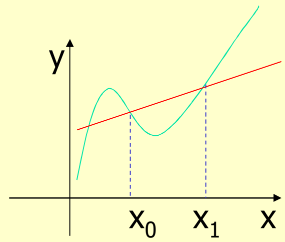
$$=0.34x-0.4884$$

$$\therefore \lg x \approx P_1(x) \Rightarrow \lg 2.718 \approx P_1(2.718)=0.43572$$

2.2.2 抛物插值

线性插值:

用直线$y=P_1(x)$近似曲线$y=f(x)$



当插值区间较大或曲线在$[x_0,x_1]$凸凹变化大时，线性插值的误差很大。

为了减小误差，用简单的曲线(抛物线)去近似代替复杂曲线$y=f(x)$。二次多项式函数的曲线为抛物线，所以构造插值函数$P_2(x)$，即$n=2$。

抛物插值

Problem2.2 已知$y=f(x)$的函数表，x_0, x_1, x_2为互异节点，求一个次数不超过2的多项式

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

$P_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$： $P_2(x_0)=y_0$, $P_2(x_1)=y_1$, $P_2(x_2)=y_2$

几何意义: $P_2(x)$为过三点(x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2)的**抛物线**

方法: 基函数法，构造基函数$l_0(x)$, $l_1(x)$, $l_2(x)$（三个二次式）

使$P_2(x)= y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x)$满足插值条件。

$$l_0(x_0)=1,\ l_0(x_1)=0,\ l_0(x_2)=0$$
$$l_1(x_0)=0,\ l_1(x_1)=1,\ l_1(x_2)=0$$
$$l_2(x_0)=0,\ l_2(x_1)=0,\ l_2(x_2)=1$$

$$l_i(x_j)=\delta_{ij} \quad i,j=0,1,2$$

抛物插值

求二次多项式$l_0(x)$: $l_0(x_0)=1$ $l_0(x_1)=0$ $l_0(x_2)=0$

$<=>$ $l_0(x)=C(x-x_1)(x-x_2)$ 只须求C=?

由$l_0(x_0)=1$ 得 $C(x_0-x_1)(x_0-x_2)=1$

$\therefore$ $C=1/(x_0-x_1)(x_0-x_2)$

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

同法求得: $l_1(x)$, $l_2(x)$,即抛物插值的插值基函数如下:

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

抛物插值问题Problem 2.2的解:

$$P_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

2.2.3 Lagrange插值公式

Problem2.3 已知y=f(x)在两两互异节点$x_0,x_1,\ldots,x_n$的函数值$y_0,y_1,\ldots,y_n$, 求*n*次多项式 $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$

满足插值条件$P_n(x_j)=y_j$. $j=0,1,2,3,\ldots,n$

基函数法: 求n+1个n次多项式 $l_0(x),l_1(x),\ldots,l_n(x)$, 使

$$P_n(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+\ldots+y_nl_n(x).$$

$P_n(x)$须满足插值条件 $P_n(x_j)=y_j$, $j=0,1,2,3,\ldots,n$

即$y_0l_0(x_j)+y_1l_1(x_j)+\ldots+y_jl_j(x_j)\ldots+y_nl_n(x_j)=y_j$

$$l_0(x_j)=0,l_1(x_j)=0,\cdots,l_j(x_j)=1,\cdots,l_n(x_j)=0$$

$$j=0,1,2,\cdots,n$$

$$\Leftrightarrow l_k(x_j)=d_{kj}=\begin{cases}1 & k=j\\0 & k\neq j\end{cases}\quad k,j=0,1,2,\cdots,n$$

Lagrange插值公式

Chapter 2 插值方法

$l_k(x_0)=0,\ldots,l_k(x_{k-1})=0,l_k(x_{k+1})=0,\ldots,l_k(x_n)=0$

即$l_k(x)$有n个0点$x_0,x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n$

$\therefore l_k(x)=C(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)$　　又$l_k(x_k)=1$

$\therefore C(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)=1$

与节点有关 而与 f 无关

$$\therefore C=\frac{1}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

$$\therefore l_k(x)=\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}=\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

$$\therefore P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k l_k(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k\Big(\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\Big)$$ Lagrange插值多项式

（当n=1，n=2时分别就是线形插值与抛物插值公式）

HUST

2.2.4 插值余项　/* Remainder */

Chapter 2 插值方法

函数y=f(x)与其 Lagrange插值多项式$P_n(x)$:

(1) $P_n(x_i)= f(x_i) =y_i$,　i=0,1,2,…,n

(2) 而对于插值区间[a,b]内插值节点x_i(i=1,2,…,n)以外的点x，一般$P_n(x)\neq f(x)$，存在误差。

Def: $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$为$P_n(x)$的截断误差或插值余项。

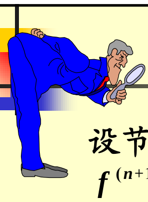
(1) => $R_n(x_i)=0$, i=0,1,2,…,n

(2) => 若$x \neq x_i$,可能 $R_n(x) \neq 0$,

利用Lagrange插值公式$P_n(x)$来计算，结果是否可靠，要看余项$R_n(x)$是否足够小。

$R_n(x)$=？

HUST



设节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$，且 f 满足条件 $f \in C^n[a,b]$，$f^{(n+1)}$ 在 $[a\,,b]$ 内存在，考察截断误差 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

Rolle's Theorem: 若 $\varphi(x)$ 充分光滑，$\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = 0$，则存在 $\xi \in (x_0, x_1)$ 使得 $\varphi'(\xi) = 0$。

推广：若 $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0 \Rightarrow \xi_0 \in (x_0, x_1),\ \xi_1 \in (x_1, x_2)$

使得 $\varphi'(\xi_0) = \varphi'(\xi_1) = 0 \Rightarrow \xi \in (\xi_0, \xi_1)$ 使得 $\varphi''(\xi) = 0$

$\varphi(x_0) = \cdots = \varphi(x_n) = 0$

$\Rightarrow$ 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $\varphi^{(n)}(\xi) = 0$

设 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$，且 f 满足条件 $f \in C^n[a,b]$，$f^{(n+1)}$ 在 $[a\,,b]$ 内存在，考察截断误差 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

$R_n(x)$ 至少有 $n+1$ 个根 $\Rightarrow R_n(x) = K(x) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$

任意固定 $x \ne x_i\ (i = 0, \ldots, n)$，考察 $\varphi(t) = R_n(t) - K(x) \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$

$\varphi(t)$ 有 $n+2$ 个不同的根 $x_0, \ldots, x_n, x$

对 t 求导

$\Rightarrow \varphi^{(n+1)}(\xi_x) = 0,\quad \xi_x \in (a, b)$

$\|$

$f^{(n+1)}(\xi_x) - \cancel{P_n^{(n+1)}}(\xi_x) - K(x)(n+1)! = R_n^{(n+1)}(\xi_x) - K(x)\ (n+1)!$

$\Rightarrow K(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

插值余项

定理1：设函数y=f(x)的n阶导数$y=f^{(n)}(x)$在[a,b]上连续，$y=f^{(n+1)}(x)$在(a,b)上存在；插值结点为$a\le x_0<x_1<\ldots<x_n\le b$，$P_n(x)$是f(x)的n次拉格朗日插值多项式；则对任意$x\in[a,b]$有：

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w_n(x)$$

其中$\xi\in(a,b)$，ξ依赖于x，$w_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_n)$

- 通常不能确定ξ，而是估计$\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le M_{n+1}$，$\forall x\in(a,b)$ 将$\dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}|x-x_i|$作为误差估计上限。
- 当$f(x)$为任一个次数$\le n$的多项式时，$f^{(n+1)}(x)\equiv 0$，可知 $R_n(x)\equiv 0$，即插值多项式对于次数$\le n$的多项式是精确的。

当$f(x)\equiv 1$，$P_n(x)=f(x)\equiv 1$，即$l_0(x)+l_1(x)+\cdots+l_n(x)\equiv 1$

HW: 作业二 #1, 2

例2.3 已知y=lg(x)的函数表如右，求lg2.718并估计其误差.

x	2.71	2.72	2.73
y=lgx	0.4330	0.4346	0.4362

解：$$P_2(x)=\frac{(x-2.72)(x-2.73)}{(2.71-2.72)(2.71-2.73)}*0.4330+\frac{(x-2.71)(x-2.73)}{(2.72-2.71)(2.72-2.73)}*0.4346+\frac{(x-2.71)(x-2.72)}{(2.73-2.71)(2.73-2.72)}*0\cdot 4362$$

$$=13038x^2-7092.08x+96459.032\qquad \therefore \lg 2.718\approx P_2(2.718)=0.48$$

$$\because R_2(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\quad \xi\in[x_0,x_2]$$

$$\because f(x)=\lg x\Rightarrow f'''(x)=\frac{2}{x^3\ln 10}\Rightarrow \max_{2.71\le x\le 2.73}\left|f'''(x)\right|=0.043642$$

$$\left|R_2(2.718)\right|\le\frac{0.043642}{6}\left|(2.718-2.71)(2.718-2.72)(2.718-2.73)\right|=1.39654\times 10^{-9}$$

Newton插值——引言

1.已知y=f(x)的n+1个互异节点$x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n$及其上的函数值$y_i=f(x_i)$,i=0,1,2,...,n,利用基函数法求出其上的Lagrange 插值多项式： $P_n(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+\ldots+y_nl_n(x)$

其中基函数为：

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}\quad, i=0,1,2,\ldots,n$$

2.若f(x)有直到n+1阶导数，其插值余项为：

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\qquad x\in(a,b)$$

Lagrange 插值虽然易算，但若要增加一个节点时，全部基函数 $l_i(x)$ 都需重新计算。——不具有承袭性

Newton插值——具有承袭性

2.3.1 基函数

Problem 2.4 已知y=f(x)的n+1个互异节点$x_0, x_1, x_2,\ldots, x_n$及函数值$f(x_i)$,i=0,1,2,…,n. 求作n次多项式$N_n(x)$:

$$N_n(x)=C_0+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+C_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

且满足插值条件： $N_n(x_i)=f(x_i),\ i=0,1,2,\cdots,n$

$N_n(x)$是1, $(x-x_0)$,$(x-x_0)(x-x_1)$,…,$(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$的线性组合，

递推定义为：

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_0(x)=1\\&\Phi_i(x)=(x-x_{i-1})\Phi_{i-1}(x)\\&\qquad=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})\\&i=1,2,\ldots,n\end{aligned}\right\}\ (2.9)$$

定义2.1 由(2.9)定义的n+1个多项式称为Newton插值以$x_0, x_1, \ldots, x_n$为节点的基函数。

$$N_n(x)=C_0\Phi_0(x)+C_1\Phi_1(x)+\ldots+C_n\Phi_n(x)$$

求系数

$$N_n(x)=C_0+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+C_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

已知基函数，求$N_n(x)$=>求系数$C_0,C_1,C_2,\ldots,C_n$

$$\overbrace{N_n(x_i)=f(x_i)\quad i=0,1,2,\cdots,n}$$

在公式中，取$x=x_0$有：$N_n(x_0)=C_0$ 而$N_n(x_0)=f(x_0)$ $\therefore C_0=f(x_0)$

在公式中，取$x=x_1$有：$N_n(x_1)=C_0+C_1(x_1-x_0)$，而$N_n(x_1)=f(x_1)$

$$\therefore C_1=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

同理，有：$C_2=[\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}]/(x_2-x_0)$

为了易于计算$C_0,C_1,C_2,\ldots,C_n$引进差商。

2.3.2 差商 /* divided difference */

设函数f(x)在n+1个相异节点 $x_0,x_1,\ldots,x_n$ 上的函数值分别为

$$f(x_0),f(x_1),\ldots,f(x_n)$$

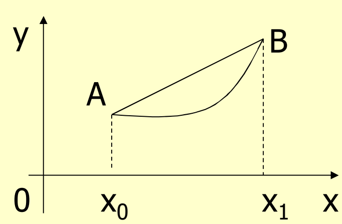
1.一阶差商：称 $\dfrac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$为f(x)关于节点 x_0,x_1的一阶差商，

记为 $f[x_0,x_1]$. /* the 1st divided difference*/

(1) 差商的几何意义：

$f[x_0,x_1]$为弦AB的斜率.

(2) 显然，$f[x_0,x_1]=f[x_1,x_0]$



2.3.2 差商 /* divided difference */

设函数f(x)在n+1个相异节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 上的函数值分别为

$$f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$$

2.二阶差商：$\dfrac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2}=f[x_0,x_1,x_2]$

称为f(x)关于节点 x_0,x_1,x_2 的二阶差商.

3. k阶差商：f(x)在互异节点$x_0, x_1, \ldots, x_k$处的k阶差商为

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k]=\{f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]-f[x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k]\}/(x_0-x_k)$$

一般记忆为：f[A,B,C]={f[A,B]-f[B,C]}/(A-C)

差商表

计算出差商可列表如下：

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	…
x_0	$f(x_0)$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	…
x_1	$f(x_1)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$		…
x_2	$f(x_2)$	$f[x_2,x_3]$			…
x_3	$f(x_3)$				…
…	…	…	…	…	…

计算差商

例: 已知 $f(x)=\sqrt{x}$ 在节点 x=1,4,9的函数值为:

x	1	4	9
f(x)	1	2	3

试构造差商表。

解:

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商
1	1	$f[x_0,x_1]=(1-2)/(1-4)=1/3$	$f[x_0,x_1,x_2]=(1/3-1/5)/(1-9)=-1/60$
4	2	$f[x_1,x_2]=(2-3)/(4-9)=1/5$	
9	3		

2.3.3 差商性质

1. n阶差商可以表示成n+1个函数值的线性组合,即

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

例: $$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

2. (对称性): 差商与节点的顺序无关，例

$f[x_0,x_1,x_2]=f[x_1,x_0,x_2]=\cdots=f[x_0,x_2,x_1]$

3. 若f(x)是x的n次多项式, 则一阶差商$f[x,x_0]$是x的n-1次多项式,

二阶差商$f[x, x_0, x_1]$是x的n-2次多项式;

一般，函数f(x)的k阶差商$f[x,x_0,\ldots, x_{k-1}]$是x的n-k(k≤n)次多项式,

而k>n时，k阶差商为零。 （自学本性质的证明）

2.3.4 Newton插值公式

Chapter 2
插值方法

$x_0, x_1, \ldots, x_n$为[a, b]中互异节点，且x是[a, b]中一点

$$f[x,x_0]=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad => \quad f(x)=f(x_0)+f[x,x_0](x-x_0), \quad (1式)$$

$$f[x,x_0,x_1]=\frac{f[x,x_0]-f[x_0,x_1]}{x-x_1}$$

$$=> \quad f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+f[x,x_0,x_1](x-x_1), \quad (2式)$$

$$f[x,x_0,\boldsymbol{K},x_n]=\frac{f[x,x_0,\boldsymbol{K},x_{n-1}]-f[x_0,x_1,\boldsymbol{K},x_n]}{x-x_n}$$

$$=> f[x,x_0,\boldsymbol{K},x_{n-1}]=f[x_0,x_1,\boldsymbol{K},x_n]+f[x,x_0,\boldsymbol{K},x_n](x-x_n), \quad (n+1式)$$

HUST

牛顿插值 /* Newton's Interpolation */

Chapter 2
插值方法

$$N_n(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+c_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

$$\begin{cases} f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x,x_0] & \cdots\cdots\cdots\cdots \text{①} \\ f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+(x-x_1)f[x,x_0,x_1] & \cdots\cdots\cdots \text{②} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots & \\ f[x,x_0,\ldots,x_{n-1}]=f[x_0,\ldots,x_n]+(x-x_n)f[x,x_0,\ldots,x_n] & \cdots\ (n+1) \end{cases}$$

$$① + (x-x_0)\times ② + \ldots\ \ldots + (x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})\times (n+1)$$

$$\Rightarrow f(x)=\boxed{f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\ldots + f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})}$$
$$\boxed{+f[x,x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)}$$

$N_n(x)$

$$c_i = f[x_0, \ldots, x_i]$$

$R_n(x)$

HUST

Newton插值公式

$f(x)=N_n(x)+R_n(x)$： $R_n(x)=f[x,x_0,\dots,x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1})(x-x_n)$

由于$R_n(x_i)=0$ $\quad i=0,1,2,\dots,n$

$\therefore N_n(x_i)=f(x_i)$ $\quad i=0,1,2,\dots,n$

从而$N_n(x)$为满足插值条件的次数不超过n的多项式

$\therefore N_n(x)$即为Problem2.4的解，

定义：$N_n(x)$为$y=f(x)$在节点$x_0,x_1,\dots,x_n$上的

n阶Newton插值公式;

$R_n(x)=f(x)-N_n(x)=f[x_0,x_1,\dots,x_n,x](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$

为其插值余项。

Newton插值公式

当 n=1 时：

$$N_1(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)$$

$$R_1(x)=f[x,x_0,x_1](x-x_0)(x-x_1)$$

当 n=2 时：

$$N_2(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$R_2(x)=f[x,x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

Review

x	x_0	x_1	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_n

Problem I: 已知y=f(x)的函数表且$x_i(i=0,1,\ldots,n)$两两互异，$x_i\in[a,b]$，求次数不超过n的多项式 $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，使得 $P_n(x_i)=y_i, i=0,1,\ldots,n$.

定理2.1 $P_n(x)$存在且唯一。

Lagrange插值公式： $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}=\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

$$R_n(x)=f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n);\quad \xi_x\in(a,b)$$

Newton插值公式:

$$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots+f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$R_n(x)=f(x)-N_n(x)=f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n,x](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

例: 已知f(x)在六个点的函数值如下表，运用牛顿插值多项式求f(0.596) 的近似值，并估计其误差。

x_k	$f(x_k)$	1阶差商	2阶差商	3阶差商	4阶差商	5阶差商	$x-x_k$
0.4	0.41075	1.1160	0.2800	0.1973	0.0334	-1.1	0.196
0.55	0.57815	1.1860	0.3588	0.2137	-0.1761		0.046
0.65	0.69675	1.2757	0.4336	0.2056			-0.054
0.80	0.88811	1.3841	0.4225				-0.204
0.90	1.02652	1.2979					-0.454
0.596	0.63195						

$$N_4(x)=0.41075+1.11600(x-0.4)+0.28000(x-0.4)(x-0.55)+0.19733(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)+0.0334(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)(x-0.80)$$

$$f(0.596)\approx N_4(0.596)=0.63195$$

$$|R_4(0.596)|=|f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,0.596](0.596-x_0)\cdots(0.596-x_4)|\approx 0.33215\times10^{-4}<0.5\times10^{-4}$$

Newton插值公式

注意：1.在给定节点$x_0,x_1,\ldots,x_n$上的Newton插值公式$N_n(x)$与Lagrange插值公式$P_n(x)$都满足插值条件：

$$N_n(x_i)=P_n(x_i)=f(x_i) \qquad i=0,1,2,\ldots,n$$

由插值多项式的唯一性 $P_n(x)=N_n(x)$

2.由1知$P_n(x)$与$N_n(x)$有相同的余项：

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)\ !}w(x)$$

$$=f(x)-N_n(x)=f[x,x_0,\ \ldots\ ,x_n]w(x)$$

HW:
作业二 #3

定理2.3 在节点$x_0,x_1,\ldots,x_n$所阶定的范围中：$[\min\limits_{0\le i\le n} x_i,\max\limits_{0\le i\le n} x_i]$

内存在一点ξ，使得 $f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}$

2.5 分段低次插值 /* piecewise polynomial approximation */

多项式插值

对于$y=f(x)$ $\quad a\le x\le b$

给定插值结点$x_0,x_1,\ldots,x_n$，构造插值多项式$P_n(x)$，为使$P_n(x)$更好地逼近$f(x)$，一般使：

节点间距较小 => 节点多(n较大) => 插值多项式$P_n(x)$的次数很高

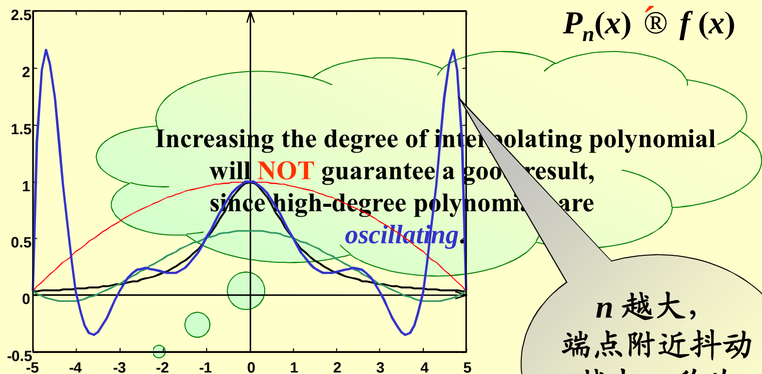
(高次插值)

高次插值使$P_n(x)$在较多点上与$f(x)$相等,但在插值节点外，

误差如何？是否插值多项式$P_n(x)$的次数越高越好？

2.5 分段低次插值 /* piecewise polynomial approximation */

例：在[-5, 5]上考察 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 的 $P_n(x)$。取 $x_i=-5+\frac{10}{n}i \quad (i=0,\dots,n)$



$P_n(x) \nrightarrow f(x)$

n 越大，
端点附近抖动
越大，称为
Runge 现象

分段低次插值

分段插值

思想：将一个区间分成若干小区间,在每个小区间上进行低次插值,将产生的多项式装配成整个大区间上的分段k次式.

其步骤为:

(1) 对[a,b]作分划**Φ** :$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$

(2) 在每个小区间$[x_i,x_{i+1}]$上构造低次插值多项式$P_i(x)$

(3) 将$P_i(x)$,i=0,1,…n-1拼接为[a,b]上的分段多项式g(x)作为f(x)的插值函数，即 $g(x)=P_i(x) \quad x\in[x_i,x_{i+1}]$

一般 $P_i(x)$都为k次式,此时的g(x)记为$S_k(x)$，称其为分段k次式.

(即在分划**Φ**的每个小区间$[x_i,x_{i+1}]$上 $S_k(x)$都为k次式).

Chapter 2
插值方法

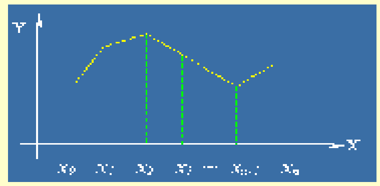
分段线性插值——用折线逼近曲线f(x)

Problem2.6 对$y=f(x)$，$x\in[a,b]$定义区间有分划
$\Phi: a=x_0<x_1<x_2<\ldots\ldots x_n=b$，且已知$y_i=f(x_i)$ $i=0,1,\ldots,n$，

求具有分划**Φ**的分段一次式$S_1(x)$,使：$S_1(x_i)=y_i$,$i=0,1,2,\ldots,n$.

只须求$S_1(x)$在小区间$[x_i,x_{i+1}]$上的表达式，拼装即成。

$$f(x)\approx S_1(x)=y_i\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+y_{i+1}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$$



$$|f(x)-S_1(x)|=\left|\frac{f''(x)}{2!}(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|,\quad x\in(x_i,x_{i+1})$$

$$x\in[x_i,x_{i+1}]$$

HUST

Chapter 2
插值方法

分段线性插值余项

$$|f(x)-S_1(x)|=\left|\frac{f''(x)}{2!}(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|,\quad x\in(x_i,x_{i+1})$$

$$x\in[x_i,x_{i+1}]$$

$$\text{又}\ |f''(x)|\le\max_{x\in[x_i,x_{i+1}]}|f''(x)|\le\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|=M,$$

$$\max_{x\in[x_i,x_{i+1}]}|(x-x_i)(x-x_{i+1})|=\frac{1}{4}(x_{i+1}-x_i)^2=\frac{1}{4}h_i^2\le\frac{1}{4}(\max_{i=0}^{n-1}h_i)^2=\frac{1}{4}h^2$$

定理 设$f(x)\in c^2[a,b]$,$a<x_0<x_1<\ldots<x_n=b$,且$f(x_i)$，$i=0,1,\ldots,n$,
已知，$S_1(x)$为问题2.5的解,则当 $x\in[a,b]$ 时

$$|f(x)-S_1(x)|\le Mh^2/8$$

其中$M=\max|f''(x)|$，$x\in[a,b]$，$h=\max\{h_i, i=0,\ldots n-1\}$

因而$S_1(x)$在$[a,b]$上一直收敛到$f(x)$。

练习

例 要构造对数表$\log_{10}x$，$10 \le X < 100$，怎样选步长h才能使分段一次插值具有六位有效数字？

解: ∵ $1 \leqslant \log_{10}x < 2$，要使结果具有六位有效数字，

∴ 误差限$\varepsilon = 0.5 \times 10^{-5}$，

$$\because \ (\log_{10} x)'' = -\frac{1}{x^2 \ln 10} \quad \therefore M = \max_{10 \le x \le 100} |(\log_{10} x)''| = \frac{1}{10^2 \ln 10}$$

$$\therefore |\log_{10} x - S_1(x)| \le \frac{1}{8} M h^2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10^2 \ln 10} h^2 \le \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$

$$\Rightarrow h \le 0.959705 \times 10^{-1}$$

$$\therefore \quad h = 0.01$$

HW:
作业二 #4