复变函数与积分变换试题(二)

一、填空题

(1) 复数 $\dfrac{-2i}{1+i}$ 的模为_____， 辐角主值为________。

(2) 函数 $f(z)=y^2-ix^2$ 在何处可导？__________________；

何处解析？_______________。

(3) $\mathrm{Ln}(\sqrt{3}+i)^2$ 的值为______________________。

(4) 函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-(1+i)z+i}$ 在 $z=0$ 处展开成泰勒级数的

收敛半径为___。

(5) $z=0$ 为函数 $f(z)=\exp(\frac{1-\cos z}{z^2})$ 的何种类型的奇点?

____________。

(6) 积分 $\oint_{|z|=1}\frac{1-\sin z}{z(z-2)}\mathrm{d}z$ 的值为______。

(7) 映射 $f(z)=z^2+2z$ 在 $z=-i$ 处的旋转角为_______。

伸缩率为______。

(8) 函数 $f(t)=1+2\cos 2t$ 的 Fourier 变换为

___________________________________。

二、计算下列积分。

1. $\oint_{|z|=2} \dfrac{e^z - 1}{z(z-1)^2} dz$.

2. $\oint_{|z|=2} z^2 e^{\frac{1}{z}} \sin\dfrac{1}{z} dz$.

3. $\int_0^{2\pi} \dfrac{d\theta}{2\cos\theta - \sqrt{5}}$.

4. $\int_0^{+\infty} \dfrac{x \sin 2x}{x^2+1} dx$.

三、已知 $u(x, y) = 4xy^3 + ax^3y$，求常数 a 以及函数 $v(x, y)$，使得 $f(z) = u + iv$ 为解析函数，且满足 $f(1) = 0$.

四、将函数 $f(z) = \dfrac{1-i}{z^2 - (1+i)z + i}$ 分别在 $z = 0$ 和 $z = 1$ 处展开为洛朗级数。

五、求区域 $D=\{z:-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Im}z<\frac{\pi}{2},\ \mathrm{Re}z<0\}$ 在映射 $w=\dfrac{e^z-i}{e^z+i}$ 下的像区域。

六、求把区域 $D=\{z:|z-1|>1,\ \mathrm{Re}\,z>0\}$ 映射到单位圆内部的保形映射。

七、利用 Laplace 变换求解微分方程组:

$$\begin{cases} x''(t)-y''(t)-y(t)=t\,e^t, & x(0)=y(0)=0, \\ x'(t)-y'(t)-x(t)=-\sin t, & x'(0)=y'(0)=1. \end{cases}$$

八、设函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析，且满足 $|f(z)-2|<2$,

证明: $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{f''(z)-4f'(z)}{f^2(z)-4f(z)}\,dz=0.$

复变函数与积分变换试题(二) 解答

一、填空题

(1) 复数 $\dfrac{-2i}{1+i}$ 的模为 $\underline{\sqrt{2}}$，辐角主值为 $\underline{-\dfrac{3\pi}{4}}$。

(2) 函数 $f(z)=y^2-ix^2$ 在何处可导？ $\underline{\text{在直线 } x=y \text{ 上}}$；

何处解析？ $\underline{\text{处处不解析}}$。

(3) $\mathrm{Ln}(\sqrt{3}+i)^2$ 的值为 $\underline{\ln 4+i(\pi/3+2k\pi)}$。

(4) 函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-(1+i)z+i}$ 在 $z=0$ 处展开成泰勒级数的

收敛半径为 $\underline{1}$。

(5) $z=0$ 为函数 $f(z)=\exp\left(\dfrac{1-\cos z}{z^2}\right)$ 的何种类型的奇点?

可去奇点 。

(6) 积分 $\oint_{|z|=1}\dfrac{1-\sin z}{z(z-2)}\,\mathrm{d}z$ 的值为 $-\pi i$ 。

(7) 映射 $f(z)=z^2+2z$ 在 $z=-i$ 处的旋转角为 $-\dfrac{\pi}{4}$ 。

伸缩率为 $2\sqrt{2}$ 。

(8) 函数 $f(t)=1+2\cos 2t$ 的 Fourier 变换为

$2\pi[\delta(\omega)+\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)]$ 。

二、1. $\oint_{|z|=2} \dfrac{e^z - 1}{z(z-1)^2} dz.$

解 (1) 令 $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z(z-1)^2}$，则有

$z_1 = 0$ 为 $f(z)$ 的可去奇点， $\mathrm{Res}[f(z), 0] = 0.$

$z_2 = 1$ 为 $f(z)$ 的二阶极点，

$$\mathrm{Res}[f(z), 1] = \lim_{z \to 1} [(z-1)^2 f(z)]'$$

$$= \lim_{z \to 1} \left(\frac{e^z - 1}{z}\right)' = \lim_{z \to 1} \frac{z e^z - e^z + 1}{z^2} = 1.$$

(2) 原式 $= 2\pi i (\mathrm{Res}[f(z), 0] + \mathrm{Res}[f(z), 1]) = 2\pi i.$

二、2. $\oint_{|z|=2} z^2 e^{\frac{1}{z}} \sin\frac{1}{z}\,dz.$

解 令 $f(z)=z^2 e^{\frac{1}{z}} \sin\frac{1}{z}$，则 $z=0$ 为 $f(z)$ 的<u>本性奇点</u>，

$$f(z)=z^2\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}+\cdots\right)$$

$$=\cdots+\left(-\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!}\right)\frac{1}{z}+\cdots,$$

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=-\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!}=\frac{1}{3}.$$

原式 $=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),0]=\dfrac{2\pi i}{3}.$

二、3. $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\cos\theta-\sqrt{5}}$.

解 (1) 令 $z=e^{i\theta}$，则 $\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$，$\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{iz}$，

$$原式=\oint_{|z|=1}\frac{1}{2\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)-\sqrt{5}}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{iz}=\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{i(z^2-\sqrt{5}z+1)}.$$

(2) 令 $f(z)=\frac{1}{i(z^2-\sqrt{5}z+1)}$，则 $f(z)$ 有两个一阶极点：

$z_1=(\sqrt{5}-1)/2$， $z_2=(\sqrt{5}+1)/2$. （z_2 不在 $|z|<1$ 内）

$$原式=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),z_1]=2\pi i\left.\frac{1}{i(2z-\sqrt{5})}\right|_{z=z_1}=-2\pi.$$

二、4. $\int_0^{+\infty} \dfrac{x\sin 2x}{x^2+1}\mathrm{d}x.$

解 (1) 令 $f(z)=\dfrac{z\mathrm{e}^{i2z}}{z^2+1}$,

则 $f(z)$ 在上半平面只有一个一阶极点 $z=i$,

$$\mathrm{Res}[f(z),i]=\left.\frac{z\mathrm{e}^{i2z}}{2z}\right|_{z=i}=\frac{1}{2\mathrm{e}^2}.$$

(2) 原式 $=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\sin 2x}{x^2+1}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),i]\right)=\frac{\pi}{2\mathrm{e}^2}.$$

三、已知 $u(x, y)=4xy^3+ax^3y$，求常数 a 以及函数 $v(x, y)$，使得 $f(z)=u+iv$ 为解析函数，且满足 $f(1)=0$.

解 (1) 首先 $u(x, y)$ 必须为调和函数，即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

$$\Rightarrow \quad 6axy+24xy=0,$$

$$\Rightarrow \quad a=-4,$$

即得 $u(x, y)=4xy^3-4x^3y$.

三、已知 $u(x, y) = 4xy^3 + ax^3y$，求常数 a 以及函数 $v(x, y)$，使得 $f(z) = u + iv$ 为解析函数，且满足 $f(1) = 0$.

解 (1) $u(x, y) = 4xy^3 - 4x^3y$.

(2) 方法1 利用偏积分法求解。

由 $u_x = 4y^3 - 12x^2y = v_y$，得

$$v = \int (4y^3 - 12x^2y)\,\mathrm{d}y = y^4 - 6x^2y^2 + \underline{\varphi(x)},$$

由 $u_y = 12xy^2 - 4x^3 = -v_x = 12xy^2 - \varphi'(x)$，得

$$\varphi'(x) = 4x^3, \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = x^4 + c,$$

即得 $v(x, y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + c$.

三、已知 $u(x, y) = 4xy^3 + ax^3y$，求常数 a 以及函数 $v(x, y)$，使得 $f(z) = u + iv$ 为解析函数，且满足 $f(1) = 0$.

解 (1) $u(x, y) = 4xy^3 - 4x^3y$.

(2) 方法2 利用全微分法求解。

由 $v_y = u_x = 4y^3 - 12x^2y$，$v_x = -u_y = 4x^3 - 12xy^2$，

得 $\mathrm{d}v = (4x^3 - 12xy^2)\mathrm{d}x + (4y^3 - 12x^2y)\mathrm{d}y$

$$= \mathrm{d}x^4 - 6y^2\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^4 - 6x^2\mathrm{d}y^2$$

$$= \mathrm{d}(x^4 + y^4 - 6x^2y^2),$$

即得 $v(x, y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + c$.

三、已知 $u(x, y)=4xy^3+ax^3y$，求常数 a 以及函数 $v(x, y)$，

使得 $f(z)=u+iv$ 为解析函数，且满足 $f(1)=0$.

解 (1) $u(x, y)=4xy^3-4x^3y$.

(2) $v(x, y)=x^4+y^4-6x^2y^2+c$.

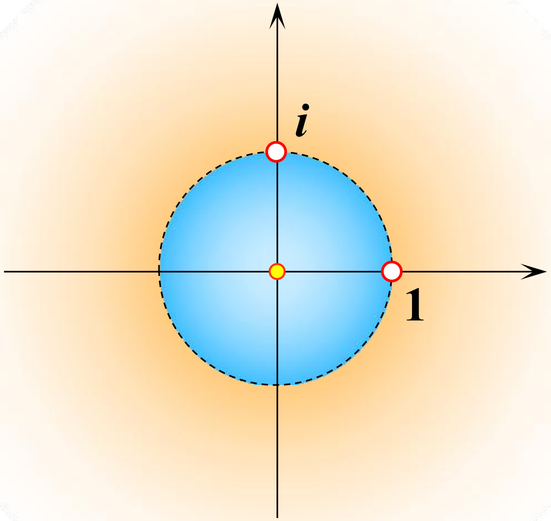
(3) $f(z)=4xy^3-4x^3y+i(x^4+y^4-6x^2y^2+c)$,

由 $f(1)=0$, $\Rightarrow$ $c=-1$,

即得 $f(z)=4xy^3-4x^3y+i(x^4+y^4-6x^2y^2-1)$.

四、将函数 $f(z)=\dfrac{1-i}{z^2-(1+i)z+i}$ 分别在 $z=0$ 和 $z=1$ 处展开为洛朗级数。

解 $f(z)=\dfrac{1-i}{(z-1)(z-i)}=\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z-i}.$



(1) 在 $z=0$ 处展开。

① 当 $|z|<1$ 时,

$$f(z)=-\frac{1}{1-z}+\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{i}}$$

$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}z^n+\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{i^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{i^{n+1}}-1\right]z^n.$$

四、将函数 $f(z)=\dfrac{1-i}{z^2-(1+i)z+i}$ 分别在 $z=0$ 和 $z=1$ 处展开为洛朗级数。

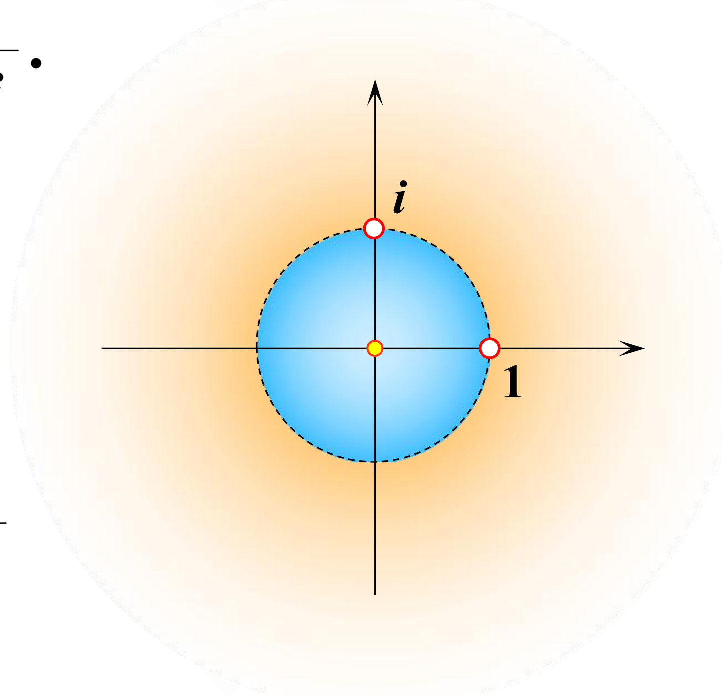
解 $f(z)=\dfrac{1-i}{(z-1)(z-i)}=\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z-i}.$

(1) 在 $z=0$ 处展开。

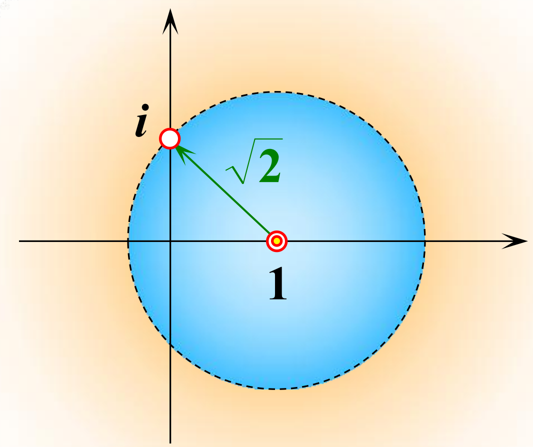
② 当 $|z|>1$ 时，

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{i}{z}}$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{z^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(1-i^n)\frac{1}{z^{n+1}}.$$



四、将函数 $f(z)=\dfrac{1-i}{z^2-(1+i)z+i}$ 分别在 $z=0$ 和 $z=1$ 处展开为洛朗级数。



解 $f(z)=\dfrac{1-i}{(z-1)(z-i)}$.

(2) 在 $z=1$ 处展开。

① 当 $0<|z-1|<\sqrt{2}$ 时,

$$f(z)=\frac{1-i}{z-1}\cdot\frac{1}{(z-1)+(1-i)}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-1}{i-1}}$$

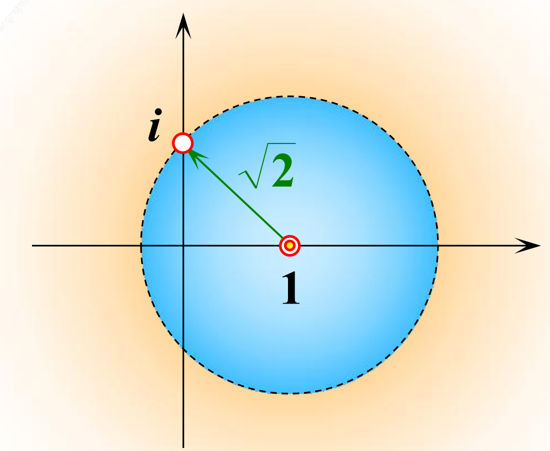
$$=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-1)^n}{(i-1)^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-1)^{n-1}}{(i-1)^n}.$$

四、将函数 $f(z)=\dfrac{1-i}{z^2-(1+i)z+i}$ 分别在 $z=0$ 和 $z=1$ 处展开为洛朗级数。

解 $f(z)=\dfrac{1-i}{(z-1)(z-i)}.$

(2) 在 $z=1$ 处展开。

② 当 $|z-1|>\sqrt{2}$ 时,

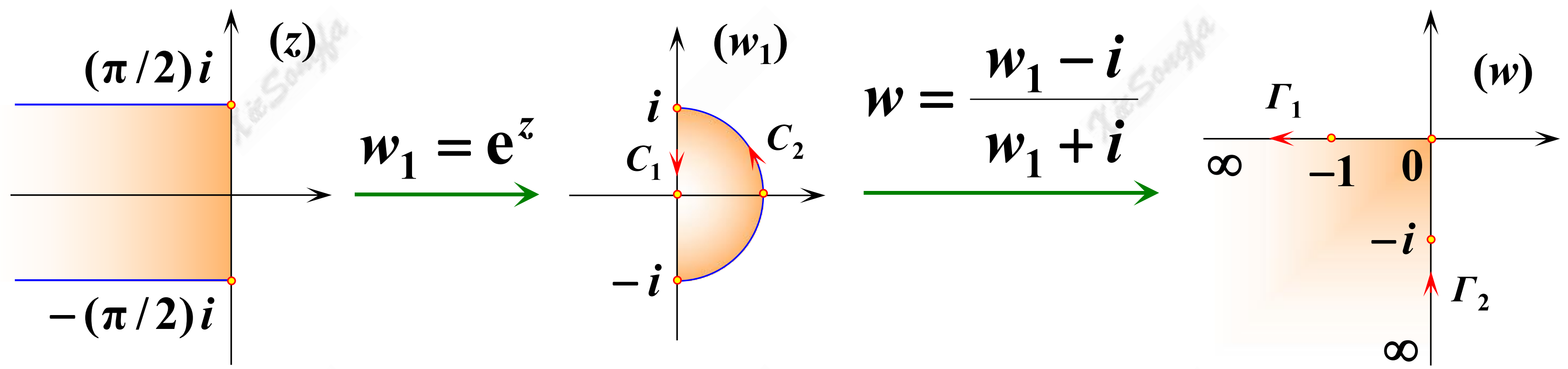


$$f(z)=\frac{1-i}{z-1}\cdot\frac{1}{(z-1)+(1-i)}=\frac{1-i}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{i-1}{z-1}}$$

$$=\frac{1-i}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i-1)^n}{(z-1)^n}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i-1)^{n+1}}{(z-1)^{n+2}}.$$

五、求区域 $D=\{z:-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Im}z<\frac{\pi}{2},\ \mathrm{Re}z<0\}$ 在映射 $w=\frac{e^z-i}{e^z+i}$ 下的像区域。

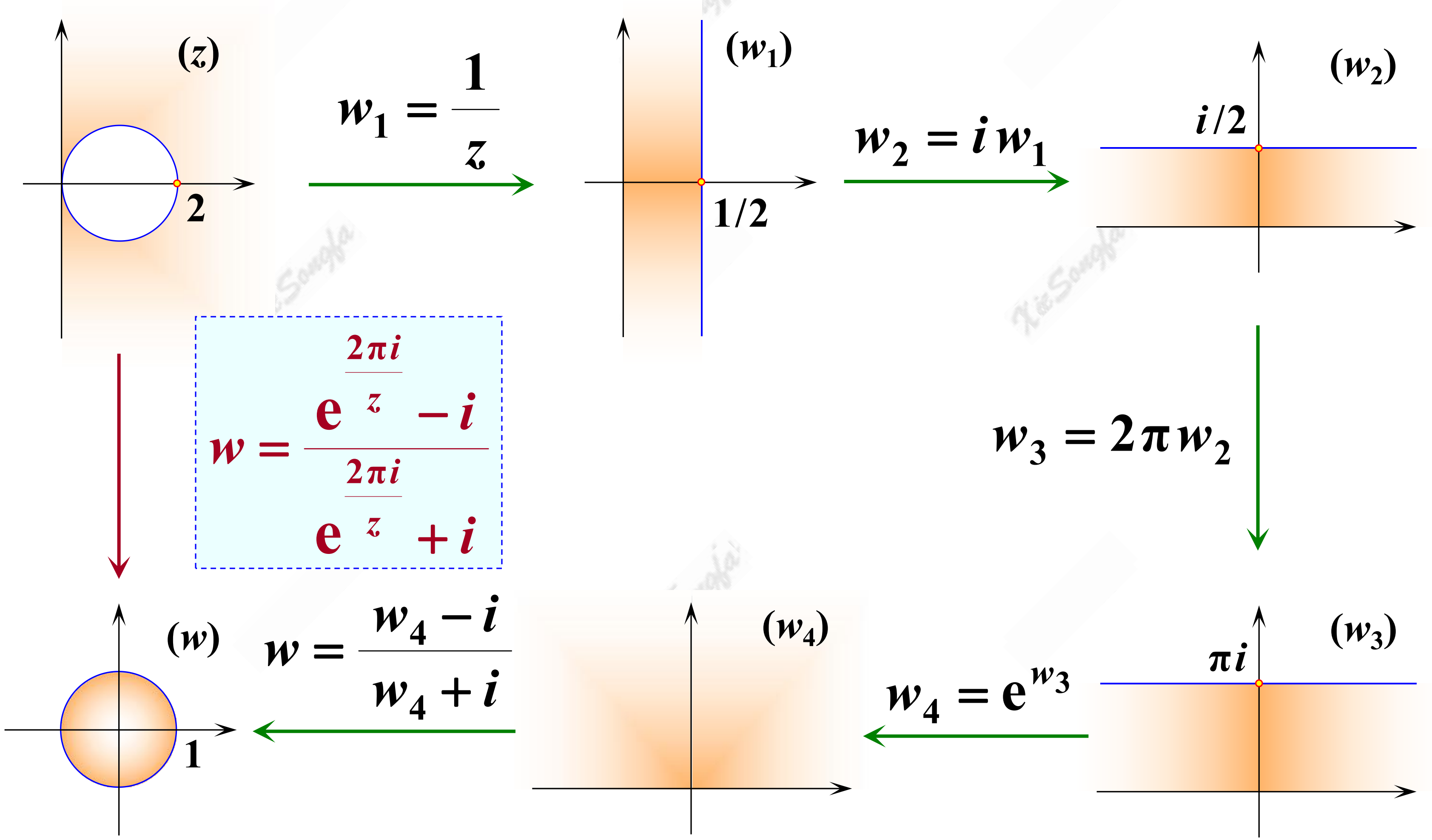
解 令 $w_1=e^z$，则 $w=\frac{w_1-i}{w_1+i}$.



即所求的像区域为第三象限。

六、求把区域 $D=\{z:|z-1|>1,\ \mathrm{Re}\,z>0\}$ 映射到单位圆内部的保形映射。

解



七、利用 Laplace 变换求解微分方程组:

$$\begin{cases} x''(t)-y''(t)-y(t)=t\,\mathrm{e}^t, & x(0)=y(0)=0, \\ x'(t)-y'(t)-x(t)=-\sin t, & x'(0)=y'(0)=1. \end{cases}$$

解 (1) 令 $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$, $Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$,

对方程组两边取 Laplace 变换,并代入初值,得

$$\begin{cases} s^2X(s)-s^2Y(s)-Y(s)=\dfrac{1}{(s-1)^2}, \\ sX(s)-sY(s)-X(s)=-\dfrac{1}{s^2+1}. \end{cases}$$

七、利用 Laplace 变换求解微分方程组:

$$\begin{cases} x''(t)-y''(t)-y(t)=t\,\mathrm{e}^t, & x(0)=y(0)=0, \\ x'(t)-y'(t)-x(t)=-\sin t, & x'(0)=y'(0)=1. \end{cases}$$

解 (2) 求解代数方程组，得到像函数:

$$\begin{cases} X(s)=\dfrac{1}{(s-1)^2}, \\ Y(s)=-\dfrac{s+1}{(s-1)(s^2+1)}=\dfrac{1}{(s-1)}-\dfrac{s}{s^2+1}. \end{cases}$$

(3) 求 Laplace 逆变换，即得 $\begin{cases} x(t)=t\,\mathrm{e}^t, \\ y(t)=\mathrm{e}^t-\cos t. \end{cases}$

八、设函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析，且满足 $|f(z)-2|<2$，

证明：$\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{f''(z)-4f'(z)}{f^2(z)-4f(z)}\,\mathrm{d}z=0.$

证明 (1) 由函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析，

$\Rightarrow$ $f'(z)$，$f''(z)$，$f^2(z)$ 都在 $|z|<2$ 内解析； **(A)**

由 $|f(z)-2|<2$，可得

$f(z)\neq 0$ 且 $f(z)\neq 4$，

$\Rightarrow$ $f^2(z)-4f(z)=f(z)\cdot[f(z)-4]\neq 0.$ **(B)**

八、设函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析，且满足 $|f(z)-2|<2$，

证明：$\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{f''(z)-4f'(z)}{f^2(z)-4f(z)}\mathrm{d}z=0.$

证明 (2) 由 (A) 和 (B)，可知

$$\frac{f''(z)-4f'(z)}{f^2(z)-4f(z)}$$ 在 $|z|<2$ 内解析，

根据柯西积分定理，即得

$$\oint_{|z|=1}\frac{f''(z)-4f'(z)}{f^2(z)-4f(z)}\mathrm{d}z=0.$$

放松一下吧！……