2.4 Hermite插值

Newton与Lagrange及分段线性插值: y=f(x),

其Newton，Lagrange及分段线性插值多项式$P_n(x)$，$N_n(x)$，$S_1(x)$

满足插值条件: $P_n(x_i)=N_n(x_i)=S_1(x_i)=f(x_i)$, i=0,1,2,…n

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x) \qquad l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}=\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}w_n(x)$$

$$N_n(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\dots+c_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1}) \qquad c_i=f[x_0,\dots,x_i]$$

$$R_n(x)=f[x,x_0,\dots,x_n]w_n(x)$$

$$S_1(x)=y_i\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+y_{i+1}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \quad ,x\in[x_i,x_{i+1}]$$

$$|f(x)-S_1(x)|\le\frac{1}{8}Mh^2,\ x\in[a,b],M=\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

2.4 Hermite插值

Newton与Lagrange及分段线性插值的不足:

Lagrange，Newton及分段线性插值多项式$P_n(x)$，$N_n(x)$，$S_1(x)$

满足插值条件: $P_n(x_i)=N_n(x_i)=S_1(x_i)=f(x_i)$, i=0,1,2,…n

Lagrange, Newton与分段线性插值多项式与y= f(x)在插值节点具有相同的函数值----“过点”.

但在插值节点上y=f(x)与$y=P_n(x)$等一般不“相切”，$f'(x_i)\neq P_n'(x_i)$. ——光滑性较差

Hermite插值:

求与y=f(x)在插值节点 x_0, x_1, …, x_n 上有相同函数值及导数值(甚至高阶导数值)的插值多项式.

Hermite插值

Problem2.5: 已知函数$y=f(x)$在插值节点$a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$上的函数值$f(x_i)$与导数值$f'(x_i)$,$i=0,1,2,\ldots n$. 求多项式$H(x)$，使:

$$H(x_i)=f(x_i),\quad H'(x_i)=f'(x_i)\quad i=0,1,2,\ldots n.$$

对于以上问题,可用两种方法求$H(x)$.

方法一:待定系数法.

由$2n+2$个插值条件，可唯一确定一个次数不超过$2n+1$次的多项式.

（1）$H(x)$是$2n+1$次多项式;

（2）令$H(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{2n+1}x^{2n+1}$;

（3）由$2n+2$个插值条件建立关于$a_0,a_1,\ldots a_{2n+1}$的线性方程组. 解得$H(x)$.

方法二:基函数法.

Hermite插值

Problem: 已知$f(x_i)$，$f'(x_i)$，$i=0,1,\ldots n$. 求$H_{2n+1}(x)$:

$$H_{2n+1}(x_i)=f(x_i),\quad H'_{2n+1}(x_i)=f'(x_i),\ i=0,1,2,\ldots n.$$

基函数法:

（1）$2n+2$个已知量$f(x_i)$, $f'(x_i)$，　$i=0,1,2,\ldots n$.

（2）构造$2n+2$个 基函数$\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$，　$i=0,1,2,\ldots n$.

（3）使$H_{2n+1}(x)$为$2n+2$个基函数的线性组合:

$$H_{2n+1}=\alpha_0(x)f(x_0)+\alpha_1(x)f(x_1)+\ldots+\alpha_n(x)f(x_n)$$
$$+\beta_0(x)f'(x_0)+\beta_1(x)f'(x_1)+\ldots+\beta_n(x)f'(x_n).$$

这些基函数有**什么限制**？如何求呢?

Hermite插值基函数

如果: $\alpha_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$ $\quad b_i(x_j)=0$

$\alpha_i'(x_j)=0$ $\quad \beta_i'(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$

$$\begin{aligned}H_{2n+1}(x_j) &= f(x_0)a_0(x_j)+\ldots+f(x_j)a_j(x_j)+\ldots+f(x_n)a_n(x_j)\\ &\quad +f'(x_0)b_0(x_j)+\ldots+f'(x_j)b_j(x_j)+\ldots+f'(x_n)b_n(x_j)\\ &= f(x_j)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H'_{2n+1}(x_j) &= f(x_0)a_0'(x_j)+\ldots+f(x_j)a_j'(x_j)+\ldots+f(x_n)a_n'(x_j)\\ &\quad +f'(x_0)b_0'(x_j)+\ldots+f'(x_j)b_j'(x_j)+\ldots+f'(x_n)b_n'(x_j)\\ &= f'(x_j)\end{aligned}$$

Hermite插值基函数

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}\\ &\alpha_i'(x_j)=0\end{aligned}\right\}(\mathrm{I})$$

$$l_i(x)=\prod_{j\neq i}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

$a_i(x)$ ①degree=2n+1, ②有根 $x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ 且都是2重根

$\Rightarrow a_i(x)=(a_1x+b_1)l_i^2(x)$ 因 $a_i(x_i)=1, a_i'(x_i)=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_1x_i+b_1=1\\ a_1l_i^2(x_i)+(a_1x_i+b_1)\times 2l_i(x_i)l_i'(x_i)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_1x_i+b_1=1\\ a_1+2l_i'(x_i)=0\end{cases}$$

$$\alpha_i(x)=[1-2(x-x_i)\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_k}]l_i^2(x)$$

7

Hermite插值基函数

Chapter 2
插值方法

$$\left.\begin{aligned}&\beta_i(x_j)=\mathbf{0}\\&\beta_i'(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}\mathbf{0} & i\neq j\\ \mathbf{1} & i=j\end{cases}\end{aligned}\right\}(\text{II})\quad \boxed{b_i(x)}$$

①degree=2n+1,

②有根 $x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_n$

且除了x_i都是2重根

$$\Rightarrow b_i(x)=c(x-x_i)l_i^2(x) \quad 因\ b_i'(x_i)=1 \quad \Rightarrow c=1$$

$$\Rightarrow b_i(x)=(x-x_i)l_i^2(x)$$

所求的Hermite插值多项式为

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}\{f(x_i)[1-2(x-x_i)\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_k}]l_i^2(x)+f'(x_i)(x-x_i)l_i^2(x)\}$$

HUST

8

Hermite插值多项式的唯一性

Chapter 2
插值方法

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}\{f(x_i)[1-2(x-x_i)\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_k}]l_i^2(x)+f'(x_i)(x-x_i)l_i^2(x)\}$$

注：Hermite插值多项式是唯一的 （证：若$H_{2n+1}(x)$与 $G_{2n+1}(x)$都是所求的Hermite插值多项式，则$F(x)=H_{2n+1}(x)-G_{2n+1}(x)$有n+1个二重根$x_0, x_1, \ldots, x_n$，又$\deg(F(x))\leqslant 2n+1$, 故$F(x)=0$.)

HUST

9

Hermite插值余项$R_{2n+1}(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)=?$

Chapter 2
插值方法

回顾: **lagrange插值余项**

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w(x)$$

其中$W(x)=(x-x_0)(x-x_1)..(x-x_n)$

x_0，x_1，**...,** x_n为$R_n(x)$的根，$R_n(x)$有**n+1**阶零点.

显然,它们是Hermite插值余项$R_{2n+1}(x)$的二重根,

即$R_{2n+1}(x)$有2n+2阶零点.

类似得 $$R_{2n+1}(x)=K(x)w^2(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}w^2(x)$$

HUST

10

Hermite插值余项$R_{2n+1}(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)$

Chapter 2
插值方法

定理2.4 设区间[a,b]含有互异节点$x_0, x_1, ...x_n$,而f(x)在[a,b]内存在直到2n+2阶导数,则满足插值条件:

$$H_{2n+1}(x_i)=f(x_i),\ H'_{2n+1}(x_i)=f'(x_i),\quad i=0,1,...n$$

的Hermite插值多项式$H_{2n+1}(x)$的余项

$$R_{2n+1}(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}w^2(x)$$

其中，ξ∈ [a,b]且与x的位置有关，$W(x)=(x-x_0)(x-x_1)..(x-x_n)$

证明:

由插值条件：$H_{2n+1}(x_i)=f(x_i)$, $H'_{2n+1}(x_i)=f'(x_i)$，i=0,1,...n，则

$R_{2n+1}(x_i)=H_{2n+1}(x_i)-f(x_i)=0$；$R'_{2n+1}(x_i)=H'_{2n+1}(x_i)-f'(x_i)=0$，

则可令$R_{2n+1}(x)=K(x)W^2(x)$，构造辅助函数并应用Rolle定理证明。

HUST

定理2.4的证明:

（1）在插值节点x_0~x_n处,$R_{2n+1}(x_i)=0$,余项公式显然成立.

（2）对于[a,b]中异于插值节点x_0~x_n的x,考虑辅助函数

$$F(t)=f(t)-H_{2n+1}(t)-K(x)w^2(t)=R_{2n+1}(t)-K(x)w^2(t)$$

∵ $F(x_0)=F(x_1)=F(x_2)=\ldots=F(x_n)=F(x)=0$

由Rolle定理,存在$\xi_0\in(x_0,x_1)$,使$F'(\xi_0)=0$

类似,共有n+1个互异点$\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n$使$F'(t)=0$

∵ $\dfrac{dw^2(t)}{dt}=2w(t)w'(t)$ ∴ $F'(x_0)=F'(x_1)=F'(x_2)=\ldots=F'(x_n)=0$

$F'(t)$有2n+2个互异根$\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n$, $x_0, x_1,\ldots,x_n$, 由Rolle定理,

则存在$\xi\in(a,b)$. 使: $F^{(2n+2)}(\xi)=f^{(2n+2)}(\xi)-K(x)(2n+2)!=0.$

注:当n=1时，满足插值条件

$$H_3(x_i)=f(x_i),\quad H'_3(x_i)=f'(x_i),\quad i=0,1$$

的插值公式:

$$\alpha_0(x)=(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0})(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2,\quad \alpha_1(x)=(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1})(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2,$$

$$\beta_0(x)=(x-x_0)(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2,\qquad \beta_1(x)=(x-x_1)(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2,$$

$$H_3(x)=f(x_0)\alpha_0(x)+f(x_1)\alpha_1(x)+f'(x_0)\beta_0(x)+f'(x_1)\beta_1(x).$$

$$R_3(x)=f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2,\ x_0<\xi<x_1.$$

例题2.7 依据下列数据表构造插值多项式

X	Y	Y′
0	0	3
1	1	9

解:

$$H_3(x) = 0\alpha_0(x) + 1\alpha_1(x) + 3b_0(x) + 9b_1(x)$$

$$= (1 + 2\frac{x-1}{0-1})(\frac{x-0}{1-0})^2 + 3(x-0)(\frac{x-1}{0-1})^2 + 9(x-1)(\frac{x-0}{1-0})^2$$

$$= -2x^3 + 3x^2 + 3x(x^2 - 2x + 1) + 9x^2(x-1)$$

$$= 10x^3 - 12x^2 + 3x$$

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-0)^2(x-1)^2 \quad ,$$

$0 < \xi < 1$ and depending on x.

例: 用 Hermite插值求满足下列条件的四次多项式$H_4(x)$与余项。

$$H_4(0) = 0, H_4(1) = 1, H_4(2) = 1, H_4'(0) = 0, H_4'(1) = 1.$$

分析: 考虑$x_0=0$,$x_1=1$,$x_2=2$ 的插值问题。

解: 基函数法

设 $H_4(x) = f(x_0)a_0(x) + f(x_1)a_1(x) + f(x_2)a_2(x) + f'(x_0)b_0(x) + f'(x_1)b_1(x)$

$$H_4(x) = a_1(x) + a_2(x) + b_1(x) \quad \text{其中}$$

$$\begin{cases} a_1(0) = a_1(2) = 0, a_1(1) = 1 \\ a_1'(0) = a_1'(1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2(0) = a_2(1) = 0, a_2(2) = 1 \\ a_2'(0) = a_2'(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1(0) = b_1(1) = b_1(2) = 0 \\ b_1'(0) = 0, b_1'(1) = 1 \end{cases}$$

$$a_1(x) = x^2(x-2)^2$$

$a_1(x)$ $\quad a_1(x) = (ax+b)(x-0)^2(x-2)$

又: $a_1(1) = 1, a_1'(1) = 0 \Rightarrow$ a=1, b=-2

$$H_4(0)=0, H_4(1)=1, H_4(2)=1, H_4'(0)=0, H_4'(1)=1.$$

$$\begin{cases} a_2(0)=a_2(1)=0, a_2(2)=1 \\ a_2'(0)=a_2'(1)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1(0)=b_1(1)=b_1(2)=0 \\ b_1'(0)=0, b_1'(1)=1 \end{cases}$$

$a_2(x)$ $a_2(x)=c(x-0)^2(x-1)^2,\ a_2(2)=1 \Rightarrow c=\dfrac{1}{4} \Rightarrow a_2(x)=\dfrac{1}{4}x^2(x-1)^2$

$b_1(x)$ $b_1(x)=d(x-0)^2(x-1)(x-2)$ $\Rightarrow b_1(x)=-x^2(x-1)(x-2)$

$b_1'(1)=1 \Rightarrow d=-1$

$$\therefore H_4(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2$$

$$R_4(x)=f(x)-H_4(x)=K(x)(x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2),$$

$$K(x)=\frac{f^{(5)}(x_x)}{5!}, 0<x_x<2$$

$$H_4(0)=0, H_4(1)=1, H_4(2)=1, H_4'(0)=0, H_4'(1)=1.$$

方法二（基于承袭性）：

考虑$x_0=0$，$x_1=1$ 的标准Hermite插值问题

$$H_3(0)=0, H_3(1)=1, H_3'(0)=0, H_3'(1)=1 \Rightarrow H_3(x)=-x^3+2x^2$$

if ： $H_4(x)=H_3(x)+A(x-0)^2(x-1)^2$ and $H_4(2)=1$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{4}$$

@ 求Hermite多项式的基本步骤:

• 写出相应于条件的 $\alpha_i(x)$，$\beta_i(x)$ 的组合式;

‚ 对每一个 $\alpha_i(x)$，$\beta_i(x)$ 找出尽可能多的条件给出的根;

ƒ 根据多项式的总次数和根的个数写出表达式;

„ 根据尚未利用的条件解出表达式中的待定系数;

… 最后完整写出 $H(x)$。

HW:
作业二 #5，6

分段三次（Hermite）插值

分段线性插值：具有一致收敛性，折线不光滑。

$$f(x) \approx S_1(x) = y_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1}\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]; \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

$|f(x)-S_1(x)| \le Mh^2/8; \quad x \in [a,b]$

三次Hermite插值：两条曲线在插值节点相切，光滑但不收敛

$$H_3(x) = f(x_0)\alpha_0(x) + f(x_1)\alpha_1(x) + f'(x_0)\beta_0(x) + f'(x_1)\beta_1(x).$$

$$\alpha_0(x) = (1 + 2\frac{x-x_0}{x_1-x_0})(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2, \quad \alpha_1(x) = (1 + 2\frac{x-x_1}{x_0-x_1})(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2,$$

$$\beta_0(x) = (x-x_0)(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2, \qquad \beta_1(x) = (x-x_1)(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2,$$

$$R_3(x) = f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2. x_0 < \xi < x_1.$$

19

三次（Hermite）插值

Chapter 2
插值方法

$$\alpha_0(x)=(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0})(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2,\quad \alpha_1(x)=(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1})(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2,$$

$$\beta_0(x)=(x-x_0)(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2,\qquad \beta_1(x)=(x-x_1)(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2,$$

$$H_3(x)=f(x_0)\alpha_0(x)+f(x_1)\alpha_1(x)+f'(x_0)\beta_0(x)+f'(x_1)\beta_1(x).$$

$$y(x)=y(x_0+th)\Rightarrow y'(t)=y'(x)\cdot x'(t)=hy'$$

$x=x_0+th,\ \ h=x_1-x_0$；$t\in[0,1]$			
$x=x_0$	x_1	$t=0$	1
$y=y_0$	y_1	y_0	y_1
$y'=y_0'$	y_1'	hy_0'	hy_1'

$$\begin{cases}\alpha_0(t)=(t-1)^2(2t+1)\\ \alpha_1(t)=t^2(-2t+3)\end{cases}\qquad \begin{cases}\beta_0(t)=t(t-1)^2\\ \beta_1(t)=t^2(t-1)\end{cases}$$

$$H_3(x)=y_0\alpha_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right)+y_1\alpha_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right)+hy_0'\beta_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right)+hy_1'\beta_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right)$$

两条曲线f(x)与$H_3(x)$在插值节点相切，光滑但不收敛。

20

分段三次（Hermite）插值

Chapter 2
插值方法

- 已知划分 D 的每个节点 x_i 处对应的 y_i 和y_i'，求作具有划分 D 的分段三次多项式 $S_3(x)$，满足：

$$S_3(x_i)=y_i,\quad S_3'(x_i)=y_i'\qquad i=0,1,\cdots,n$$

$S_3(x)$ 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是一个三次 Hermite 插值多项式，且：

$$\begin{cases}S_3^{[i]}(x_i)=y_i\\ S_3'^{[i]}(x_i)=y_i'\end{cases}\qquad \begin{cases}S_3^{[i]}(x_{i+1})=y_{i+1}\\ S_3'^{[i]}(x_{i+1})=y_{i+1}'\end{cases}$$

21

分段三次（Hermite）插值（续）

$$H_3(x)=y_0\alpha_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right)+y_1\alpha_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right)$$
$$+hy_0'\beta_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right)+hy_1'\beta_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right)$$

$$\begin{cases}\alpha_0(t)=(t-1)^2(2t+1)\\ \alpha_1(t)=t^2(-2t+3)\end{cases}\qquad \begin{cases}\beta_0(t)=t(t-1)^2\\ \beta_1(t)=t^2(t-1)\end{cases}$$

$$S_3^{[i]}(x)=y_i\alpha_0\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)+y_{i+1}\alpha_1\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)\qquad x\in[x_i,x_{i+1}],\quad h_i=x_{i+1}-x_i$$
$$+h_iy_i'\beta_0\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)+h_iy_{i+1}'\beta_1\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)\qquad i=0,1,\cdots,n-1$$

22

分段三次（Hermite）插值（续）

分段三次 Hermite 插值的插值余项:

$$\left|f(x)-S_3(x)\right|\le\frac{1}{384}h^4\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|\qquad h=\max h_i$$

- h 足够小（例如小于 1）时，分段三次 Hermite 插值的插值余项远小于分段线性插值的插值余项，故前者的插值精度更高。
- 分段三次 Hermite 插值的插值曲线比分段线性插值的曲线更光滑，但光滑度仍不够: $S_3(x)\in C^1[a,b]$.
- 三次样条插值: 在插值节点处连续，一阶与二阶导数也连续，属于$C^2[a,b]$函数类。

Review

Hermite插值: 已知函数y=f(x)在插值节点$a\le x_0<x_1<\ldots<x_n\le b$上的函数值$f(x_i)$与导数值$f'(x_i)$, $i=0,1,2,\ldots n$. 求多项式H(x)，使:

$$H(x_i)=f(x_i),\quad H'(x_i)=f'(x_i)\quad i=0,1,2,\ldots n.$$

基函数法: $H_{2n+1}=\alpha_0(x)f(x_0)+\alpha_1(x)f(x_1)+\ldots+\alpha_n(x)f(x_n)+\beta_0(x)f'(x_0)+\beta_1(x)f'(x_1)+\ldots+\beta_n(x)f'(x_n)$.

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}\{f(x_i)[1-2(x-x_i)\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_k}]l_i^2(x)+f'(x_i)(x-x_i)l_i^2(x)\}$$

$$R_{2n+1}(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}w^2(x)$$

不规则Hermite插值：基函数法与基于承袭性法，余项估计与证明。

分段三次Hermite插值: $S_3(x)$ Î $C^1[a,b]$ 了解

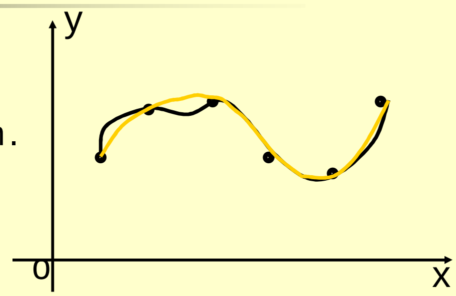
三次样条插值：分段三次式 $S(x)$ Î $C^2[a,b]$ 了解

2.6 三次样条插值

给定节点: $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$,

及函数值y_k=¦(x_k)，$k=0，1,\ldots,n$.

即n+1个点(x_i,y_i), $i=0,1,\ldots,n$.



定义: 给定节点$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$,及其上的函数值

y_k=¦(x_k), $k=0，1,\ldots,n$.如果函数S(x)满足:

(1) S(x)是一个分段的三次多项式且$S(x_k)=y_k$;

(2) $S(x)$ Î $C^2[a,b]$.

则称S(x)是区间[a,b]上的三次样条插值函数.

$S(x)$在区间$[x_{i-1},x_i]$上是三次多项式，

$S(x)=a_ix^3+b_ix^2+c_ix+d_i$，

有4个待定系数，要确定$S(x)$共需4n个待定系数.

$S(x_i)=y_i$， $i=0,1,\ldots,n$，有2n个条件.

$S'(x_i-0)=S'(x_i+0)$， $i=1,2\ldots,n-1$，有n-1个条件

$S''(x_i-0)=S''(x_i+0)$， $i=1,2\ldots,n-1$，有n-1个条件

共有4n-2个条件.

为了得到唯一的三次样条函数，可在区间$[a,b]$的端点$x_0=a$，$x_n=b$上各加一个条件，称为边界条件.常用的边界条件有

(1) $S'(x_0)=y'_0$， $S'(x_n)=y'_n$；

(2) $S''(x_0)=y''_0$， $S''(x_n)=y''_n$；

(3) 假设$f(x)$是以b-a为周期的周期函数，这时要求

求三次样条插值函数的三转角方程

$S(x_0+0)=S(x_n-0)$

$S'(x_0+0)=S'(x_n-0)$ $S(x)$为周期样条函数.

$S''(x_0+0)=S''(x_n-0)$

若假设$S'(x_i)=m_i$，$i=0,1,\ldots,n$，利用分段Hermite插值多项式，

当$x\in[x_{i-1},x_i]$时，有

$$S(x)=\frac{1}{h_i^3}\left[(x_i+2x-3x_{i-1})(x-x_i)^2y_{i-1}+(3x_i-2x-x_{i-1})(x-x_{i-1})^2y_i\right]$$

$$+\frac{1}{h_i^2}\left[(x-x_{i-1})(x-x_i)^2m_{i-1}+(x-x_{i-1})^2(x-x_i)m_i\right]$$

其中$h_i=x_i-x_{i-1}$.为了确定$S(x)$，只需确定m_i，$i=0,1,\ldots,n$.

可利用$S''(x_i-0)=S''(x_i+0)$来求出m_i .

当$x \in [x_{i-1},x_i]$时,由于

$$S(x)=\frac{1}{h_i^3}\left[(x_i+2x-3x_{i-1})(x-x_i)^2 y_{i-1}+(3x_i-2x-x_{i-1})(x-x_{i-1})^2 y_i\right]$$

$$+\frac{1}{h_i^2}\left[(x-x_{i-1})(x-x_i)^2 m_{i-1}+(x-x_{i-1})^2(x-x_i)m_i\right]$$

所以 $$S'(x)=\frac{2}{h_i^3}\left\{\left[(x-x_i)^2+(x_i+2x-3x_{i-1})(x-x_i)\right]y_{i-1}\right.$$

$$\left.+\left[(3x_i-2x-x_{i-1})(x-x_{i-1})-(x-x_{i-1})^2\right]y_i\right\}$$

$$+\frac{1}{h_i^2}\left\{\left[(x-x_i)^2+2(x-x_{i-1})(x-x_i)\right]m_{i-1}\right.$$

$$\left.+\left[(x-x_{i-1})^2+2(x-x_{i-1})(x-x_i)\right]m_i\right\}$$

$$S''(x)=\frac{6}{h_i^3}(2x-x_{i-1}-x_i)(y_{i-1}-y_i)$$

$$+\frac{2}{h_i^2}\left[(3x-x_{i-1}-2x_i)m_{i-1}+(3x-2x_{i-1}-x_i)m_i\right]$$

于是有

$$S''(x_i-0)=\frac{6}{h_i^2}(y_{i-1}-y_i)+\frac{2}{h_i}(m_{i-1}+2m_i)$$

$$S''(x_i+0)=\frac{6}{h_{i+1}^2}(y_{i+1}-y_i)-\frac{2}{h_{i+1}}(2m_i+m_{i+1})$$

由连续性条件$S''(x_i-0)=S''(x_i+0)$可得

$$\frac{1}{h_i}m_{i-1}+2\left(\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i+1}}\right)m_i+\frac{1}{h_{i+1}}m_{i+1}=3\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}^2}+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i^2}\right)$$

两侧同除以 $(\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i+1}})$, 并记 $\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}=\lambda_i$, $\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}=1-\lambda_i=\mu_i$,

$3(\lambda_i f[x_{i-1},x_i]+\mu_i f[x_i,x_{i+1}])=g_i$,则有

$\lambda_i m_{i-1}+2m_i+\mu_i m_{i+1}=g_i$, $i=1,2,\ldots,n-1$. (*)

再结合不同的边界条件,可得关于m_i的方程组.

若边界条件为:m_0=y¢$_0$,m_n=y¢$_n$,代入(*)式可得

$$\begin{pmatrix} 2 & m_1 & & & & \\ l_2 & 2 & m_2 & & & \\ & O & O & O & & \\ & & O & O & O & \\ & & & l_{n-2} & 2 & m_{n-2} \\ & & & & l_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ M \\ M \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 - l_1 y_0' \\ g_2 \\ M \\ M \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} - m_{n-1} y_n' \end{pmatrix}$$

若边界条件为:S¢¢(x_0)=y¢¢$_0$,S¢¢(x_n)=y¢¢$_n$,则有

$$2m_0 + m_1 = 3f[x_0, x_1] - \tfrac{1}{2} h_1 y_0'' = g_0$$

$$m_{n-1} + 2m_n = 3f[x_{n-1}, x_n] + \tfrac{1}{2} h_n y_n'' = g_n$$

连同(*)式一起,可得

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ l_2 & 2 & m_2 & & & \\ & O & O & O & & \\ & & O & O & O & \\ & & & l_{n-1} & 2 & m_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ M \\ M \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ M \\ M \\ g_{n-1} \\ g_n \end{pmatrix}$$

若边界条件为周期性边界条件,

由S¢(x_0+0)=S¢(x_n-0) ,和 S¢¢(x_0+0)=S¢¢(x_n-0),有

$m_0 = m_n$

$l_n m_{n-1} + 2m_n + m_n m_1 = g_n$

其中:

$$l_n = \frac{h_1}{h_1 + h_n}, \quad m_n = 1 - l_n = \frac{h_n}{h_1 + h_n}, \quad g_n = 3\left(l_n f[x_0, x_1] + m_n f[x_{n-1}, x_n]\right)$$

于是有

$$\begin{pmatrix} 2 & m_1 & & & & l_1 \\ l_2 & 2 & m_2 & & & \\ & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & & \\ & & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \\ & & & l_{n-1} & 2 & m_{n-1} \\ m_n & & & & l_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \mathrm{M} \\ \mathrm{M} \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \mathrm{M} \\ \mathrm{M} \\ g_{n-1} \\ g_n \end{pmatrix}$$

对应不同的边界条件，只要求出相应的线性方程组的解，便得到三次样条函数在各区间$[x_{i-1},x_i]$上的表达式.

由于三个方程组的系数矩阵都是严格对角占优矩阵,所以都有唯一解,前两个方程组均可用追赶法求解,第三个方程组可用LU分解法或Gauss消元法求解.

设¦(0)=1,¦(1)=0,¦(2)=-1,¦(3)=0,¦¢(0)=1,¦¢(3)=0,

试求¦(x)在区间[0,3]的三次样条插值函数S(x).

解: 这里$h_1=h_2=h_3=1$,$y¢_0=1$, $y¢_3=0$,计算参数有

$l_1=l_2=m_1=m_2=1/2$, $g_1=-3$,$g_2=0$

于是有 $\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, 解得 $m_1 = -\dfrac{28}{15}, m_2 = \dfrac{7}{15}$

故有

$$S(x) = \begin{cases} (x-1)\left(\dfrac{17}{15}x^2 - 2x - 1\right) & x \in [0,1] \\ (x-1)\left(\dfrac{3}{5}x^2 - \dfrac{14}{15}x - \dfrac{23}{15}\right) & x \in [1,2] \\ (x-3)^2\left(\dfrac{31}{15} - \dfrac{23}{15}x\right) & x \in [2,3] \end{cases}$$

33

2.7 曲线拟合的最小二乘法

Chapter 2
插值方法

在生产与科研中,常给出一组离散数据

$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots\ldots(x_N,y_N)$

要确定变量 x与 y的函数关系y=f(x)，从数据中学**习模型**。

近似方法一：构造插值多项式$P_n(x)$， 使$P_n(x_i)=y_i$ $i=1\sim N$
（过点）

近似方法二：曲线拟合

Problem: 已知 N个观测数据$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots\ldots(x_N,y_N)$
求一个多项式 P(x)能最好地反映这些点的总趋势。

（不过点）

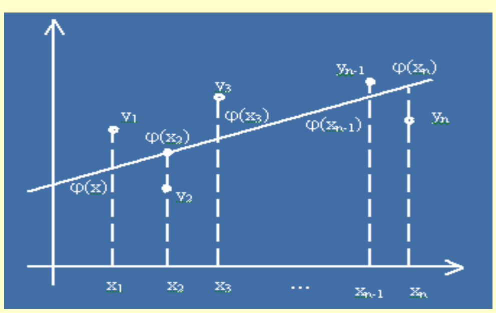
HUST

34

直线拟合

Chapter 2
插值方法

假设数据点(x_i,y_i) $i=1\sim N$大致成一条直线,
此时拟合曲线为一直线,它从这些点附近通过.
设此拟合直线为$\hat{y}=a+bx$ 显然$\hat{y}(x_i)=a+bx_i\neq y_i$



记 $e_i=y_i-\hat{y}(x_i)$ 从而有$e_1,e_2,\ldots\ldots e_N$ 称之为残差

$e_1,e_2,\ldots\ldots e_N$总体最小 ⇔ $e=(e_1,e_2,\ldots\ldots e_N)^T$的长度最小

HUST

直线拟合

向量的长度 ||x|| ($x\in R^n$)介绍如下

$||x||_2 = (x_1^2+x_2^2+\ldots\ldots+x_n^2)^{0.5}$

$||x||_1 = \Sigma |x_i|$

$||x||_\infty = \max|x_i|$

Problem 2.9 已知N组数据$(x_1,y_1), (x_2,y_2),\ldots\ldots,(x_N,y_N)$，求一条直线 y=a+bx（即求a，b），使

$$Q(a,b)=\|e\|_2^2=e_1^2+e_2^2+\cdots+e_N^2=\sum_{i=1}^{N}[y_i-(a+bx_i)]^2=\min$$

注：这是一个优**化**问题，使**Q(a,b)=min**的***a,b***构成的直线**y=a+bx**称为**Problem 2.9**的最小二乘拟合直线。

$$Q(a,b)=\|e\|_2^2=e_1^2+e_2^2+\cdots+e_N^2=\sum_{i=1}^{N}[y_i-(a+bx_i)]^2$$

求拟合直线关键是求 a,b,使Q(a,b)最小,即优**化**问题的解，这可称之为最小二乘拟合。

由微积分学知， 求Q(a,b)的极小值点,可解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial a}=0\\[2mm]\dfrac{\partial Q}{\partial b}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}Na+b\sum_{i=1}^{N}x_i=\sum_{i=1}^{N}y_i\\[2mm] a\sum_{i=1}^{N}x_i+b\sum_{i=1}^{N}x_i^2=\sum_{i=1}^{N}x_iy_i\end{cases} \quad *$$

称*为正规方程组。解*可得a,b，则$\hat{y}$=a+bx 为所求。

说明：正规方程组的解存在且唯一,且是最小二乘拟合问题的解。

求解优化问题的下降迭代法

$$\min_{a,b} Q(a,b)=\min_{a,b}\sum_{i=1}^{N}[y_i-(a+bx_i)]^2$$

用向量表示： $t=(a,b)^T$,则上述问题表示为 $\min_{t\in R^2} Q(t)$

下降迭代法: $\begin{cases} t_0 \\ t_{k+1}=t_k+h_k d_k \text{, s.t. } Q(t_{k+1})<Q(t_k) \end{cases}$

其中η_k称为步长因子，d_k称为下降方向向量。

最速下降法(梯度下降法) $d_k=-\nabla Q(t_k)$

$$\begin{cases} t_0 \\ t_{k+1}=t_k-h\cdot\nabla Q(t_k) \end{cases}$$

例 有数据表

i	1	2	3	4	5
x_i	165	123	150	123	141
y_i	187	126	172	125	148

求其一次拟合曲线 。

解: 因$(x_1,y_1),\ldots,(x_5,y_5)$ 近似于一直线，故设其最小二乘拟合直线为y=a+bx，则其正规方程组为

$$\begin{cases} 5a+702b=758 \\ 702a+99864b=108396 \end{cases}$$

$$\therefore a=-60.939227 \qquad b=1.513812$$

所求的最小二乘拟合直线为y=-60.939227+1.513812x

使用梯度下降法求解

$$Q(a,b)=\sum_{i=1}^{N}[y_i-(a+bx_i)]^2$$

$$\nabla Q=\begin{pmatrix}\frac{\partial Q}{\partial a}\\ \frac{\partial Q}{\partial b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\sum_{i=1}^{N}[y_i-(a+bx_i)]\\ -2\sum_{i=1}^{N}x_i[y_i-(a+bx_i)]\end{pmatrix}=-2\left\{\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{N}y_i\\ \sum_{i=1}^{N}x_iy_i\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}N & \sum_{i=1}^{N}x_i\\ \sum_{i=1}^{N}x_i & \sum_{i=1}^{N}x_i^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\right\}$$

$$@-2\left\{v\_y-m\_x\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\right\}$$

$$=-2\left\{\begin{pmatrix}758\\ 108396\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 702\\ 702 & 99864\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{cases}t_0\\ t_{k+1}=t_k+2h\cdot\{v\_y-m\_x\cdot t_k\}\end{cases}$$

多项式拟合

N个点(x_i,y_i)，从草图上直观判断它们近似于一条m 次曲线。

Problem：已知$(x_1,y_1),\ldots\ldots(x_N,y_N)$，求作m 次多项式(m<<N)，使其最好地反映这N个点的总趋势。

解：令$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_mx^m$，$(a_m\neq 0)$

记$e_i=y_i-y(x_i)$

要实现最好反映… ó $\|e\|_2=\left\|\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\\ \vdots\\ e_N\end{pmatrix}\right\|_2=\min$

即使$Q=Q(a_0,a_1,\ldots\ldots a_m)=\Sigma[y_i-(a_0+a_1x_i+\ldots a_m x_i^m)]^2$最小。

∴ 求拟合多项式 ó 求Q的极小值点$(a_0,a_1,\ldots\ldots a_m)$

$$\therefore \frac{\partial Q}{\partial a_i}=0 \quad i=0\sim m$$ 从而正规方程组为

$$\begin{cases} a_0N + a_1\sum_{i=1}^{N} x_i + \ldots + a_m\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,m} = \sum_{i=1}^{N} y_i \\ a_0\sum_{i=1}^{N} x_i + a_1\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2} + \ldots + a_m\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,m+1} = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \\ \vdots \\ a_0\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,m} + a_1\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,m+1} + \ldots + a_m\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2m} = \sum_{i=1}^{N} x_i^{\,m} y_i \end{cases}$$

令$S_l=\Sigma x_i^{\,l}$ (l=0,1, …,2m), $f_l=\Sigma\, x_i^{\,l}y_i$ (l=0,1, …, m)，则有:

$$\begin{cases} S_0a_0 + S_1a_1 + \cdots + S_ma_m = f_0 \\ S_1a_0 + S_2a_1 + \cdots + S_{m+1}a_m = f_1 \\ \vdots \\ S_ma_0 + S_{m+1}a_1 + \cdots + S_{2m}a_m = f_m \end{cases}$$

1. 对称
2. 次对角线元素相等

两个问题:

1. 正规方程组是否有解?
2. 若有解 $(a_0,a_1,\ldots a_m)^T$,该解是否使$Q(a_0,a_1,\ldots a_m)$最小?

定理: ①正规方程组的解存在且唯一,

②而且其解就是使 $Q(a_0,a_1,\ldots a_m)$ 达到最小的点

一般的最小二乘拟合

Problem: 已知变量 x 与y 的N 个观测值

$(x_1,y_1), (x_2,y_2), \ldots\ldots, (x_N,y_N)$

由x与y 的物理意义或N 个点的草图判断拟合函数P(x)∈ Φ

(Φ为函数类)，且$\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x)$为Φ的一组基函数，

则拟合函数$y=p(x)=a_0\Phi_0(x)+a_1\Phi_1(x)+\ldots+a_n\Phi_n(x)$，其残差

$$Q(a_0,a_1,\ldots a_n)=\Sigma[p(x_i)-y_i]^2$$

$$=\Sigma[a_0\Phi_0(x_i)+a_1\Phi_1(x_i)+\ldots+a_n\Phi_n(x_i)-y_i]^2$$

∴求$a_0,a_1,\ldots a_n$，使$Q(a_0,a_1,\ldots a_n)=\min$

$$=>\frac{\partial Q}{\partial a_0}=0,\frac{\partial Q}{\partial a_1}=0,\ldots,\frac{\partial Q}{\partial a_n}=0$$

若令 $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \Phi_k=\begin{pmatrix} \Phi_k(x_1) \\ \Phi_k(x_2) \\ \vdots \\ \Phi_k(x_N) \end{pmatrix}$ 由向量的内积得正规方程组为

$$\varphi a=b$$

其中

$$\Phi=\begin{pmatrix} (\Phi_0,\Phi_0) & (\Phi_0,\Phi_1) & \ldots & (\Phi_0,\Phi_n) \\ (\Phi_1,\Phi_0) & (\Phi_1,\Phi_1) & \ldots & (\Phi_1,\Phi_n) \\ & \vdots & & \\ (\Phi_n,\Phi_0) & (\Phi_n,\Phi_1) & \ldots & (\Phi_n,\Phi_n) \end{pmatrix}$$

$$a=\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} (\Phi_0,y) \\ (\Phi_1,y) \\ \vdots \\ (\Phi_n,y) \end{pmatrix}$$

应用

例 解矛盾方程 $\begin{cases} x_1-15.5=0 \\ x_2-6.1=0 \\ x_1+x_2-20.9=0 \end{cases}$

HW:
作业二 #7

解：令$Q(x_1,x_2)=(x_1-15.5)^2+(x_2-6.1)^2+(x_1+x_2-20.9)^2$

为使$Q(x_1,x_2)=\min$，则

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x_1} &= 2(x_1-15.5)+2(x_1+x_2-20.9)=0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x_2} &= 2(x_2-6.1)+2(x_1+x_2-20.9)=0 \end{aligned}\right\}$$

$$=> x_1 = 15.266 \qquad x_2 = 5.867$$

小结

本章介绍了已知数据表构造近似函数的两种方法：

1. 插值方法(用基函数与待定系数法建立公式)

Lagrange插值公式:节点间不等距,用于数值微积分,
方程求根的近似公式的构造

Newton插值公式:用于增加节点与等距节点的插值

Hermite插值公式:提高逼近函数的光滑性

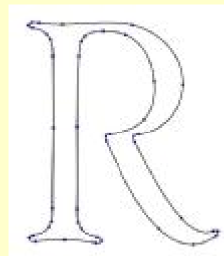
分段线性插值(样条函数插值)

2. 曲线拟合（插值多项式$P_n(x)$的次数依赖于节点个数，而拟合多项式则不然）

要求：① 掌握插值公式的推导原理
② 掌握公式的形式特征
③ 掌握余项公式的及其证明方法

An Example from Prof. Olson at UIUC

Fonts == interpolation



- how to we “contain” our interpolation?
- splines
- Postscript (Adobe): rasterization on-the-fly. Fonts, etc are defined as cubic Bezier curves (linear interpolation between lower order Bezier curves)
- TrueType (Apple): similar, quadratic Bezier curves, thus cannot convert from TrueType to PS (Type1) losslessly

HUST