

國立政治大學統計學系
Department of Statistics College of Commerce National
Chengchi University

碩士論文
Master's Thesis

基於貝氏技能更新與深度神經交互模型的體育分
析
Sports Analytics with Bayesian Skill Updates and Deep Neural
Interaction Models

指導教授 (Advisor) : 翁久幸 博士

研究生 (Student) : 李永濬 撰

中華民國 114 年 7 月
July 2025

摘要

本研究提出一套專為體育對決預測任務設計的深度學習架構，結合貝式技能更新機制、特徵交互建模與時序特徵處理，有效強化模型對選手能力動態變化與非遞移性效應的表徵能力。核心方法包括貝氏後驗更新以追蹤選手能力浮動與不確定性，特徵交互網路結合指數移動平均（EMA）特徵，以捕捉非遞移性效應並強化模型對當下賽局的判斷能力。

為進一步提高模型的穩健性與泛化能力（generalization ability），本研究採用預訓練凍結骨幹網路（frozen backbone）策略，以獲取穩定表徵後進行整合層微調，降低對特定模組的依賴。實驗結果顯示，所提方法在多項體育競技對決資料集上顯著優於傳統對決模型，展現了貝式推論與深度神經網路在體育對決預測上的整合潛力。

關鍵詞：深度學習、貝式定理、神經網路、非遞移性、對決預測

Abstract

This study proposes a deep learning framework specifically designed for sports matchup prediction tasks. The framework integrates Bayesian skill updating, feature interaction modeling, and temporal feature processing to improve the model's capacity to capture dynamic variations in athlete performance and intransitivity effects. Methods include Bayesian posterior updates to capture fluctuations and uncertainty in player states, and a feature interaction network augmented with exponential moving average (EMA) features to capture intransitivity effects while enhancing the model's judgment in current matchups.

To further improve model robustness and generalization ability, we adopt a frozen backbone training strategy. This allows stable representation learning before fine-tuning the integration layers, thereby reducing dependency on specific components. Experimental results demonstrate that the proposed method significantly outperforms traditional matchup models across multiple sports datasets, highlighting the integration potential of Bayesian inference and deep neural networks in sports prediction tasks.

Keywords: Deep learning, Bayes' theorem, Neural network models, Intransitivity, Matchup prediction

目次

第一章	緒論	1
第二章	文獻探討	3
第一節	Bradley-Terry 模型	3
第二節	TrueSkill 模型	3
第三節	Blade-Chest 模型	4
第四節	NeuralAC 模型：合作與競爭效應	5
第五節	Bayes by Backprop	6
第三章	研究方法	10
第一節	基於變分推論的技能分佈模組	13
第二節	特徵交互學習建模	18
第三節	Frozen Backbone Training（凍結骨幹訓練）策略	22
第四章	實驗	25
第一節	資料來源與結構	25
第二節	特徵工程	26
第三節	實驗結果	30
第五章	結論	44
參考文獻		45
附錄 A：不確定性參數 σ_i 變化推導		47
第一節	背景與定義	47
第二節	先驗 KL 項探討	50
第三節	概似項探討	51
第四節	總結	53

圖次

圖 3-1	End-to-end 訓練流程圖	11
圖 3-2	Frozen Backbone 訓練流程圖	12
圖 4-1	最終重新訓練流程	32
圖 4-2	NeuralAC 的 AUC 表現	32
圖 4-3	KL 權重與 Learning Rate 的搜尋結果	33
圖 4-4	BT 模型與 BaS 模型在場次與勝率關係中的技能分數散佈圖。	35
圖 4-5	選手 σ 收斂趨勢圖	36
圖 4-6	不同訓練策略與模型架構下的驗證 AUC 比較圖	42
圖 4-7	子模組訓練階段的梯度貢獻占比圖	43



表次

表 4-1	特徵變數與說明	25
表 4-2	EMA 特徵篩選結果	28
表 4-3	BaS 與 BT 模型性能比較	35
表 4-4	顯著性檢定	35
表 4-5	依 σ 值排序的選手資料	36
表 4-6	FiN 模組超參數搜尋空間	37
表 4-7	合作與競爭模組隨機搜索 5 次種子試驗的前五超參數組合	37
表 4-8	兩階段測試結果中競爭與合作模組之效能比較	38
表 4-9	LeBron 之 Pairwise Scores：競爭與合作分數	39
表 4-10	Stephen Curry 之 Pairwise Scores：競爭與合作分數	39
表 4-11	不同模型在不同年份範圍的預測 AUC 比較 (mean \pm std)	43
表 A-1	KL 項對 σ_i 的解析梯度與其趨勢控制效果	50

第一章 緒論

在競技對局分析中，準確預測比賽結果對於傳統體育與電子競技領域皆具重要意義，不僅有助於賽事策略規劃，也能促進運動相關統計與賽事數據分析有的發展。對決型預測任務中，主流方法多以 Bradley–Terry 類模型為基礎，透過選手或團隊間的技能值參數差異建構勝率的機率模型，提供直觀且可解釋的比較結構；或是將隊伍特徵向量納入線性可分的分類模型框架進行勝負預測，然而實際競技對局結果常呈現非遞移性 (*non-transitivity*) 結構，難以僅用線性或單一參數加以刻畫，例如球隊 A 擅長破解球隊 B 的戰術，B 又能擊敗 C，但 C 可能剛好具備應對 A 的特點，此種循環克制關係即稱為非遞移性，在數學上可表達為：

$$\begin{cases} \text{若 } A > B \text{ 且 } B > C, \text{ 則 } A > C, \text{ (遞移性)} \\ \text{若 } A > B \text{ 且 } B > C, \text{ 但 } C > A, \text{ (非遞移性)} \end{cases} \quad (1.1)$$

顯示不存在一個能將所有對手以線性順序（全序）排列、並一致解釋所有對戰結果的排序結構。若未能捕捉此結構，模型將難以對特定對局進行細緻判斷。

為突破模型在非遞移性建模上的限制，Chen and Joachims (2016a) 提出 Blade–Chest 架構，使用雙向向量刻畫攻防相剋關係，成功捕捉電子競技領域（如《Dota 2》、《英雄聯盟》）的非遞移交互結構。進一步地，NeuralAC 模型 (Gu et al., 2021) 在 Blade–Chest 上融合團隊合作與基礎技能值假設，在電子競技資料上取得顯著的對局預測成果。

然而，正如 Chen and Joachims (2016a) 所指出，Blade–Chest 模型在傳統體育（如 NBA、MLB）上的應用成效有限，主要原因包括：(1) 頂尖職業運動員經過嚴格選拔，實力分布相對均衡，使得非遞移性效果較難顯現；(2) 賽程設計（例如種子排序）可能導致早期對戰實力差距過大，進而淹沒潛在的非遞移訊號。

本研究進一步將 NeuralAC 模型應用於 NBA 資料時觀察到，在訓練資料上，模型能有效區分勝負，預測準確率甚至可達 90% 以上，顯示其確實能識別球隊之間的非遞移性結構。然而，當進行跨賽季的預測時，模型表現卻顯著下降。本研究推測，這可能與球員轉隊、陣容更替、新秀加入等動態變動有關，使得即便模型能在歷史資料中學到非遞移性訊號，仍難以將這些特徵有效應用於未來賽季的預測。這種對特定陣容對戰結構的過度依賴，可能進一步降低模型在實務應用上

的穩健性。

基於此觀察，本研究認為，非遞移性模型所學到的可能偏向「陣容對陣的優勢」，然而傳統體育聯盟（如 NBA）球員流動性高，導致純粹依賴歷史對陣交互訊號在未來賽季難以維持預測能力。因此，本研究嘗試在非遞移性建模基礎上進行以下改進，平衡模型對「歷史對陣結構」與「當下特徵狀態」的依賴，以提升跨賽季的穩健性與泛化能力。

本研究提出 **BaSFiN** (Bayesian Skill–Feature Interaction Network) 模型架構，包含以下主要創新與改進：

- 貝氏技能更新：將 Bradley–Terry 技能值模組改為基於貝式後驗更新的策略，且引入技能估計的不確定性，以還原球員每場狀態的浮動差異，並透過後驗分布刻畫選手隨時間變化的能力，提升模型對技能波動的適應性。
- 時序特徵平滑 (**EMA**)：在輸入端引入指數移動平均 (**EMA**) 處理歷史統計特徵，使模型在辨識對局時能同時考慮球員近期狀態與長期趨勢，減緩對靜態陣容交互的過度依賴。
- 情境化嵌入學習：借鑑 Chen and Joachims (2016b) 的設計，結合球員歷史統計向量 \mathbf{p}_i 與主客場情境向量 \mathbf{z}_g ，強化模型對具體比賽條件的辨識能力。
- 模組整合策略 (**Frozen Backbone**)：進一步採用預訓練凍結骨幹網路 (*frozen backbone*) 策略，以獲取穩定表徵後進行整合層微調，避免模型在最終預測時過度依賴單一模組，提升整體系統的穩健性與可解釋性。

實驗結果顯示，**BaSFiN** 在 NBA 資料上的 AUC、準確率等多項指標皆優於現有基線方法，證明結合貝式推論、特徵交互建模與時序平滑策略，可在傳統體育預測場景中實現更高的實務應用價值。此外，本研究亦針對 NBA 中明星球員進行追蹤實驗分析，觀察在引入 EMA 特徵後模型對於非遞移性交互的捕捉是否具備可信度與穩定性。

第二章 文獻探討

第一節 Bradley-Terry 模型

Bradley and Terry (1952) 提出的 Bradley-Terry 模型 (BT 模型) 是一種經典的對決預測方法。該模型假設選手的能力為靜態參數，並且勝率由以下公式決定：

$$P(A \text{ beats } B) = \frac{\exp(s_A)}{\exp(s_A) + \exp(s_B)}, \quad (2.1)$$

其中 s_A 與 s_B 分別為選手 A 與 B 的潛在能力值。雖然該模型以結構簡單、解釋性強著稱，但在處理非遞移性對局結構及選手能力隨時間變動的情境下，其假設顯得侷限。

第二節 TrueSkill 模型

TrueSkill (Herbrich et al., 2006) 是一套基於貝氏推論的經典技能評估系統，該模型的核心概念是將選手能力 s_i 表示為常態分佈 $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ ，其中 μ_i 表示選手 i 的平均技能水平， σ_i^2 表示對該技能的不確定性。初始時，系統假設所有選手能力分佈為

$$\mathcal{N}\left(\mu_0 = 25, \sigma_0^2 = \left(\frac{25}{3}\right)^2\right)$$

為了刻畫比賽過程的隨機性，TrueSkill 定義選手的對局表現參數 p_i 為

$$p_i \sim \mathcal{N}(s_i, \beta^2),$$

其中 β^2 為隨機性變數，反映比賽中不可預測的波動，若比賽為團隊對抗，則團隊表現為

$$t_j = \sum_{i \in A_j} p_i,$$

其中 A_j 表示團隊 j 的選手集合。

在比賽結果給定後，TrueSkill 透過因子圖 (factor graph) 和期望傳播 (expectation propagation, EP) 進行推論，逐步更新每位選手的 μ_i 與 σ_i^2 ，使模型能動態反

映選手能力隨時間變化的估計。基於更新後的技能參數，對決勝率可進一步以如下公式計算：

$$P(A \text{ beats } B) = \Phi \left(\frac{\mu_A - \mu_B}{\sqrt{\sum_{i \in A} \sigma_i^2 + \sum_{i \in B} \sigma_i^2 + \beta^2 \cdot (|A| + |B|)}} \right),$$

其中 Φ 為標準常態分布的累積分布函數， $\mu_A = \sum_{i \in A} \mu_i$ ， $\mu_B = \sum_{i \in B} \mu_i$ ，而 $|A|$ 、 $|B|$ 分別為團隊 A 與 B 的選手人數。

TrueSkill 的優勢在於其能在每場比賽後更新技能分布，不僅提供勝率預測，還能評估選手技能的不確定性，對於持續進行的賽季資料或多人對局特別有用。然而，將 TrueSkill 應用於深度學習框架中仍面臨挑戰。首先，基於因子圖的推論計算複雜度高，尤其在涉及多隊伍或大規模資料集時，因子圖結構會顯著增大，導致推論步驟成本高昂。其次，TrueSkill 的參數更新仰賴顯式的貝氏推論與期望傳播來計算後驗邊際分布，這與深度神經網絡的端對端梯度優化流程並不相容。因此，如何在神經網絡中納入類似的技能不確定性建模，並保持可微分與高效訓練，成為後續方法設計的重要研究方向。

第三節 Blade-Chest 模型

Blade - Chest 模型 (Chen and Joachims, 2016a) 將選手能力拆分為攻擊向量 (Blade) 與防守向量 (Chest)，以便捕捉非遞移性的競爭結構。該模型通過對決函數 $M(a, b)$ 計算選手 a 相較於選手 b 的優勢，並使用 sigmoid 函數計算勝率：

$$\Pr(a \text{ beats } b) = \frac{1}{1 + \exp(-M(a, b))},$$

其中 $M(a, b) > 0$ 表示 $\Pr(a \text{ beats } b) > 0.5$ ，即選手 a 更可能勝過選手 b ，在本研究中採用其提出之內積版本 (Blade-Chest-Inner Model)，其對決函數定義為：

$$M(a, b) = \mathbf{a}_{\text{blade}} \cdot \mathbf{b}_{\text{chest}} - \mathbf{b}_{\text{blade}} \cdot \mathbf{a}_{\text{chest}}, \quad (2.2)$$

其中 $\mathbf{a}_{\text{blade}}, \mathbf{a}_{\text{chest}}, \mathbf{b}_{\text{blade}}, \mathbf{b}_{\text{chest}} \in \mathbb{R}^d$ 分別為選手 a 和 b 的攻擊與防守向量，內積版本在多項實驗中展現較高的預測精度，尤其在對抗性對局中表現優異 (Chen and Joachims, 2016a)。

為提升模型對對局環境的適應性，同年 Chen and Joachims (2016b) 將對局情境

特徵 \mathbf{z}_g 納入 Blade-Chest 模型，通過結合選手特徵與情境特徵生成 Blade 和 Chest 向量，並採用串接（Concatenation, CONCAT）模式，具體定義如下：

$$a_{\text{blade}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_g) = f \left(B \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{z}_g \end{bmatrix} \right), \quad a_{\text{chest}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_g) = f \left(C \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{z}_g \end{bmatrix} \right). \quad (2.3)$$

其中， $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{d_p}$ 為選手 a 的特徵向量，包含唯一識別選手的屬性，例如身份標識、年齡、國籍、世界排名等。 $\mathbf{z}_g \in \mathbb{R}^{d_g}$ 為對局情境特徵，例如場地條件或主客場狀態。 B 和 C 為尺寸 $d \times (d_p + d_g)$ 的參數矩陣，用於將串接後的特徵向量轉換為 Blade 和 Chest 向量， f 為非線性激活函數（如 $\tanh(\cdot)$ ），此擴展使 Blade-Chest 模型能同時考慮選手屬性與比賽情境，但在長期動態變化及跨賽季泛化的應用上，仍有進一步優化的潛力。

第四節 NeuralAC 模型：合作與競爭效應

Neural Attentional Cooperation-competition (NeuralAC) 模型 (Gu et al., 2021) 進一步透過深度學習建模隊伍內的合作效應（Cooperation Effect）與隊伍間的競爭效應（Competition Effect），並與基礎技能值模組完美融合。

模型架構

NeuralAC 的核心在於同時考量三種影響對局結果的因素：個體效應（Individual Effects）、隊內合作效應（Intra-team Cooperation）、隊間競爭效應（Inter-team Competition）。其隊伍 A 的總體實力量化分數函數可表示為：

$$S_A = \sum_{i \in T_A} w_i + F_{\text{coop}}(T_A) + F_{\text{comp}}(T_A, T_B), \quad (2.4)$$

$$P(A \text{ beats } B) = \frac{1}{1 + \exp(-(S_A - S_B))}, \quad (2.5)$$

其中：

- w_i 為個體能力值，代表選手自身的實力。
- $F_{\text{coop}}(T_A)$ 為隊內合作效應，表示隊員之間的協同影響，透過元素逐一相乘

與神經網路建模：

$$F_{\text{coop}}(T_A) = \sum_{i \in T_A} \sum_{j \in T_A, i \neq j} f_1(\mathbf{v}_i \odot \mathbf{v}_j), \quad (2.6)$$

其中 \mathbf{v}_i 為選手的合作向量， \odot 表示元素逐一相乘 (element-wise product)， f_1 為多層感知機 (Multi-Layer Perceptron，後續以 MLP 表示)，負責學習非線性關係。

- $F_{\text{comp}}(T_A, T_B)$ 為隊間競爭效應，表示選手與對手之間的對抗性互動：

$$F_{\text{comp}}(T_A, T_B) = \sum_{i \in T_A} \sum_{j \in T_B} f_2(\mathbf{p}_i \odot \mathbf{c}_j), \quad (2.7)$$

其中 \mathbf{p}_i 為選手的競爭優勢向量 (Strength Vector)， \mathbf{c}_j 為對手的弱點向量 (Weakness Vector)， \odot 表示元素逐一相乘，兩者透過多層感知機 (MLP) 學習對抗關係。

此外，NeuralAC 引入了注意力機制 (Attention Mechanisms)，確保不同角色在對局中的重要性權重有所區別，以調整合作與競爭關係的影響力：

$$a_{\text{coop}}^{ij} = \frac{\exp(\mathbf{v}_i^T \mathbf{W}_{\text{coop}} \mathbf{v}_j)}{\sum_{j \in T_A, j \neq i} \exp(\mathbf{v}_i^T \mathbf{W}_{\text{coop}} \mathbf{v}_j)}, \quad (2.8)$$

$$a_{\text{comp}}^{ij} = \frac{\exp(\mathbf{p}_i^T \mathbf{W}_{\text{comp}} \mathbf{c}_j)}{\sum_{j \in T_B} \exp(\mathbf{p}_i^T \mathbf{W}_{\text{comp}} \mathbf{c}_j)}. \quad (2.9)$$

NeuralAC 模型在電子競技 (如 Dota 2、LoL、TFT) 場景中，透過學習隊內合作與隊間競爭的交互效應，已證實其對非遞移性與非線性結構的捕捉能力 (Gu et al., 2021)。然而，其假設選手能力相對穩定、角色定位明確，較契合電子競技中角色固定的場景，對於球員流動性高、陣容持續變動的傳統體育賽事 (如 NBA)，該模型仍有改進空間。

第五節 Bayes by Backprop

本研究的貝氏技能更新模組需要在深度神經網絡中引入參數不確定性的推論方法，為此本研究參考並採用了 Blundell et al. (2015) 所提出的 **Bayes by Backprop** 框架。**Bayes by Backprop** 是一種在神經網絡中引入權重不確定性的方法，通過學

習權重 \mathbf{w} 的後驗分佈 $P(\mathbf{w} | \mathcal{D})$ ，以改善傳統神經網絡在不確定性表達和過擬合問題上的限制。其建基於變分推論框架 (Graves, 2011)，核心技術不僅適用於神經網絡權重，還具廣泛應用潛力，可拓展至多維參數的不確定性建模場景。以下以 \mathbf{w} 表示參數向量（如神經網絡權重）， \mathcal{D} 表示資料集， $\theta \in \Theta$ 為變分參數， $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ 為參數空間，對其關鍵技術進行描述。

一、變分推論與 Kullback-Leibler (KL) 散度展開

由於精確計算後驗分佈 $P(\mathbf{w} | \mathcal{D})$ 涉及不可解析的邊際概似函數，Blundell et al. 採用變分推論 (variational inference)，通過參數化分佈 $q(\mathbf{w} | \theta)$ 近似真實後驗，並最小化 KL 散度來優化近似程度。

$$\begin{aligned}
\theta^* &= \arg \min_{\theta} \text{KL}[q(\mathbf{w} | \theta) || P(\mathbf{w} | \mathcal{D})] \\
&= \arg \min_{\theta} \int q(\mathbf{w} | \theta) \log \frac{q(\mathbf{w} | \theta)}{P(\mathbf{w} | \mathcal{D})} d\mathbf{w} \\
&= \arg \min_{\theta} \int q(\mathbf{w} | \theta) \log \frac{q(\mathbf{w} | \theta)}{P(\mathbf{w})P(\mathcal{D} | \mathbf{w})/P(\mathcal{D})} d\mathbf{w} \\
&= \arg \min_{\theta} \int q(\mathbf{w} | \theta) \left[\log \frac{q(\mathbf{w} | \theta)}{P(\mathbf{w})P(\mathcal{D} | \mathbf{w})} + \log P(\mathcal{D}) \right] d\mathbf{w} \\
&= \arg \min_{\theta} \int q(\mathbf{w} | \theta) \log \frac{q(\mathbf{w} | \theta)}{P(\mathbf{w})P(\mathcal{D} | \mathbf{w})} d\mathbf{w} \\
&= \arg \min_{\theta} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w} | \theta)} [\log q(\mathbf{w} | \theta) - \log P(\mathbf{w}) - \log P(\mathcal{D} | \mathbf{w})] \\
&= \arg \min_{\theta} \text{KL}[q(\mathbf{w} | \theta) || P(\mathbf{w})] - \mathbb{E}_{q(\mathbf{w} | \theta)} [\log P(\mathcal{D} | \mathbf{w})].
\end{aligned} \tag{2.10}$$

最終整理為變分自由能 (variational free energy)：

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}, \theta) = \text{KL}[q(\mathbf{w} | \theta) || P(\mathbf{w})] - \mathbb{E}_{q(\mathbf{w} | \theta)} [\log P(\mathcal{D} | \mathbf{w})], \tag{2.11}$$

其中 $\text{KL}[q(\mathbf{w} | \theta) || P(\mathbf{w})]$ 為正則化項，衡量變分後驗與先驗的差異； $\mathbb{E}_{q(\mathbf{w} | \theta)} [\log P(\mathcal{D} | \mathbf{w})]$ 為概似項，衡量數據擬合程度。

二、參數優化

變分自由能 $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \theta)$ ，參見式 (2.10)) 亦可寫為：

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}, \theta) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}|\theta)} [f(\mathbf{w}, \theta)], \quad \text{其中 } f(\mathbf{w}, \theta) = \log q(\mathbf{w} | \theta) - \log P(\mathbf{w}) - \log P(\mathcal{D} | \mathbf{w}),$$

其優化目標是找到參數 θ^* :

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} \mathcal{F}(\mathcal{D}, \theta),$$

然而， $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \theta)$ 涉及的期望值部分 $\mathbb{E}_{q(\mathbf{w}|\theta)} [f(\mathbf{w}, \theta)]$ 通常無法解析計算，因此直接對其求導進行梯度下降優化面臨挑戰。為解決此問題，Blundell et al. (2015) 使用重參數化技巧，實現可計算的梯度估計，並通過近似方法逼近 \mathcal{F} ，最終完成優化。

通過抽樣一個獨立於 θ 的隨機變數 $\epsilon \sim q(\epsilon)$ ，將隨機變數 \mathbf{w} 轉換為一個確定性函數形式，並通過變數變換 $\mathbf{w} = h(\epsilon, \theta)$ 生成 \mathbf{w} 。在高斯變分後驗的情況下，假設 $q(\mathbf{w} | \theta) = \mathcal{N}(\mathbf{w} | \mu, \text{diag}(\sigma^2))$ ，其中 $\theta = (\mu, \rho)$ ， $\sigma = \log(1 + \exp(\rho))$ ，以確保 σ 恒正，則生成之 \mathbf{w} 樣本為：

$$\mathbf{w} = \mu + \log(1 + \exp(\rho)) \circ \epsilon, \quad \epsilon \sim \mathcal{N}(0, I),$$

其中 \circ 表示逐元素相乘。這種重參數化使得 $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \theta)$ 的期望可改寫為：

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}, \theta) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}|\theta)} [f(\mathbf{w}, \theta)] = \mathbb{E}_{q(\epsilon)} [f(h(\epsilon, \theta), \theta)].$$

接下來，為了優化 θ ，需要計算 $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \theta)$ 對 θ 的梯度：

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{F}(\mathcal{D}, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}|\theta)} [f(\mathbf{w}, \theta)].$$

由於 $q(\epsilon)$ 不依賴於 θ ，微分可以移入期望值函數內：

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{F}(\mathcal{D}, \theta) = \mathbb{E}_{q(\epsilon)} \left[\frac{\partial f(\mathbf{w}, \theta)}{\partial \mathbf{w}} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \theta} + \frac{\partial f(\mathbf{w}, \theta)}{\partial \theta} \right].$$

這一步將不可解析的期望值微分轉換為可計算的梯度形式。然而，這一期望仍然無法直接計算，因此需要進一步引入蒙地卡羅抽樣來近似。具體而言，通過從

$q(\epsilon)$ 中抽取 n 個樣本 $\epsilon^{(i)}$ ，生成對應的權重樣本 $\mathbf{w}^{(i)} = h(\epsilon^{(i)}, \theta)$ ，其中梯度近似為：

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{F}(\mathcal{D}, \theta) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f(\mathbf{w}^{(i)}, \theta)}{\partial \mathbf{w}} \frac{\partial \mathbf{w}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\partial f(\mathbf{w}^{(i)}, \theta)}{\partial \theta} \right].$$

同時， $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \theta)$ 本身亦可通過蒙地卡羅抽樣近似：

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}, \theta) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{w}^{(i)}, \theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\log q(\mathbf{w}^{(i)} | \theta) - \log P(\mathbf{w}^{(i)}) - \log P(\mathcal{D} | \mathbf{w}^{(i)})].$$

以高斯變分後驗為例。對於參數 μ 和 ρ ，梯度分別為：

$$\Delta_\mu = \frac{\partial f(\mathbf{w}, \theta)}{\partial \mathbf{w}} + \frac{\partial f(\mathbf{w}, \theta)}{\partial \mu}, \quad \Delta_\rho = \frac{\partial f(\mathbf{w}, \theta)}{\partial \mathbf{w}} \frac{\epsilon}{1 + \exp(-\rho)} + \frac{\partial f(\mathbf{w}, \theta)}{\partial \rho},$$

其中 $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mu} = 1$ ， $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \rho} = \frac{\epsilon}{1 + \exp(-\rho)}$ ， $\alpha > 0$ 為學習率。參數更新如下：

$$\mu \leftarrow \mu - \alpha \Delta_\mu, \quad \rho \leftarrow \rho - \alpha \Delta_\rho,$$

透過此方法抽樣不僅用於近似 \mathcal{F} ，還通過梯度估計實現了 θ 的優化，使變分推論與梯度下降無縫銜接，成為優化不確定參數的重要理論基礎。

Minibatches 與 KL 權重調整

為適應大規模數據，對每個小批量 $\mathcal{D}_m \subset \mathcal{D}$ ，概似項按比例調整：

$$\mathbb{E}_{q(\mathbf{w}|\theta)}[\log P(\mathcal{D}|\mathbf{w})] \approx \frac{|\mathcal{D}|}{|\mathcal{D}_m|} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}|\theta)}[\log P(\mathcal{D}_m|\mathbf{w})]. \quad (2.12)$$

同時引入 KL 權重調整 (KL re-weighting)：

$$\mathcal{F}_i(\mathcal{D}_i, \theta) = \lambda_i \cdot \text{KL}[q(\mathbf{w}|\theta) || P(\mathbf{w})] - \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}|\theta)}[\log P(\mathcal{D}_i|\mathbf{w})] \quad (2.13)$$

其中 λ_i 為第 i 個小批量的權重係數，滿足 $\sum_{i=1}^M \lambda_i = 1$ ，並且 $\lambda_i = \frac{2^{M-i}}{2^M - 1}$ 。其中 M 為總批量數。此策略使訓練初期更關注數據擬合，後期增強正則化，實現穩定訓練 (Blundell et al., 2015)。

透過上述技術，使神經網絡能在端對端訓練中建模不確定性，並與梯度優化流程無縫整合。本研究在技能更新模組中即採用此變分推論策略，作為估計球員能力後驗分佈的核心方法，進一步捕捉選手表現的波動與不確定性。

第三章 研究方法

本研究提出 BaSFiN (Bayesian Skill-Feature Interaction Network) 模型，旨在提升傳統體育競技的對決預測效能。整體架構結合了三大核心設計要素：首先，貝氏技能模組 (Bayesian Skill Module, BaS) 透過整合先驗假設與資料概似，推估選手的能力分佈，進而反映其表現的不確定性與變化幅度；其次，特徵交互模組 (Feature Interaction Network, FiN) 進一步學習隊內合作效應與隊間競爭效應，捕捉非線性與非遞移性的對戰結構；最後，設計整體訓練流程以探索不同模組整合策略的影響。

為統一建模目標與輸出解釋，本研究將主場隊伍 A 視為預測基準，所有模組的勝率預測輸出 $\hat{p} \in [0, 1]$ 皆定義為「隊伍 A 取勝的機率」。當 $\hat{p} > 0.5$ 時即判斷 A 隊獲勝， $\hat{p} \leq 0.5$ 則預測 B 隊獲勝。此設定亦適用於所有子模組與最終整合層，確保 $\hat{p}_{\text{BaS}}, \hat{p}_{\text{Coop}}, \hat{p}_{\text{Comp}}, \hat{p}_{\text{final}}$ ，均有一致的方向與解釋。另外本研究將所有對局結果統一為二元標籤 y ：

$$\begin{cases} y = 1, \text{ 主場隊伍 } A \text{ 取勝} \\ y = 0, \text{ 客場隊伍 } B \text{ 取勝} \end{cases}$$

各模組皆以此為目標進行監督式學習，統一使用對數損失 (log-loss) 作為基礎損失函數形式：

$$\mathcal{L} = - \sum_{i=1}^M (y_i \log \hat{p}_i + (1 - y_i) \log(1 - \hat{p}_i)) \quad (3.1)$$

其中 \hat{p}_i 為第 i 場對局的模型預測勝率， y_i 為對應真實比賽結果。

BaSFiN 的訓練流程包含四個主要損失函數：貝氏技能模組損失 \mathcal{L}_{BaS} 、合作模組損失 $\mathcal{L}_{\text{Coop}}$ 、競爭模組損失 $\mathcal{L}_{\text{Comp}}$ ，以及最終整合損失 $\mathcal{L}_{\text{Unified}}$ 。其中僅 \mathcal{L}_{BaS} 額外包含 KL 散度正則項以實現貝氏後驗約束 (詳見式 3.5)，其餘則使用對數損失衡量預測勝率與真實結果的差異。

為便於理解 BaSFiN 的設計與完整訓練流程，本研究於 圖 3-1 和 圖 3-2 中，分別展示端對端訓練 (End-to-End Training) 與凍結骨幹策略 (Frozen Backbone) 的模型架構。兩圖中，黑色箭頭表示前向傳播 (forward propagation)，紅色箭頭表示反向梯度更新 (back-propagation)，以清楚呈現資訊流向與參數優化路徑。後續章節將詳細介紹各模組設計、訓練策略以及最終整合方式，並於實驗中比較不

同流程對模型效能的影響。

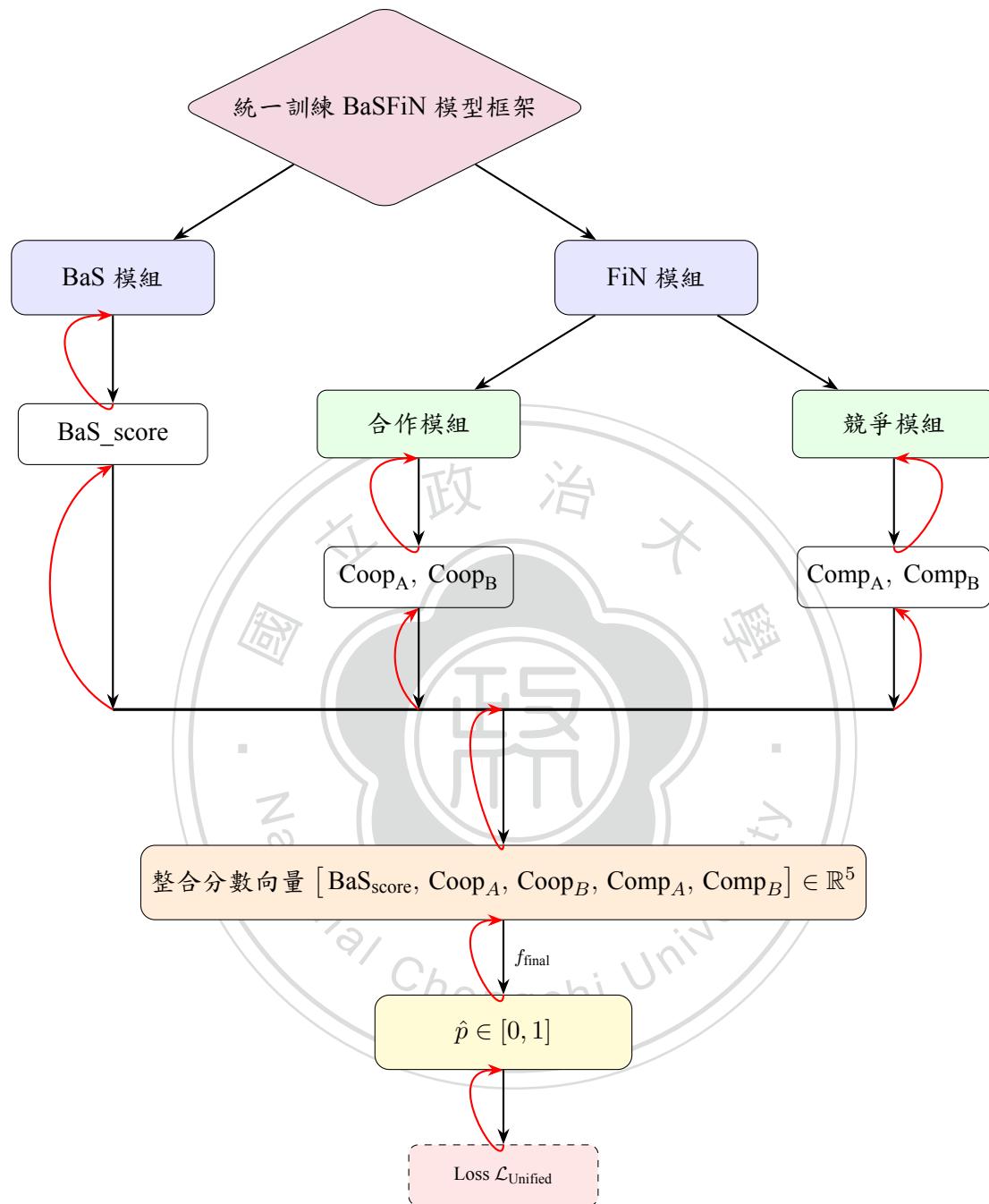


圖 3-1: end-to-end 訓練流程圖：共同訓練至整合分數層，經最終 MLP 輸出預測 \hat{p} ，並通過反向傳播優化所有模組參數。

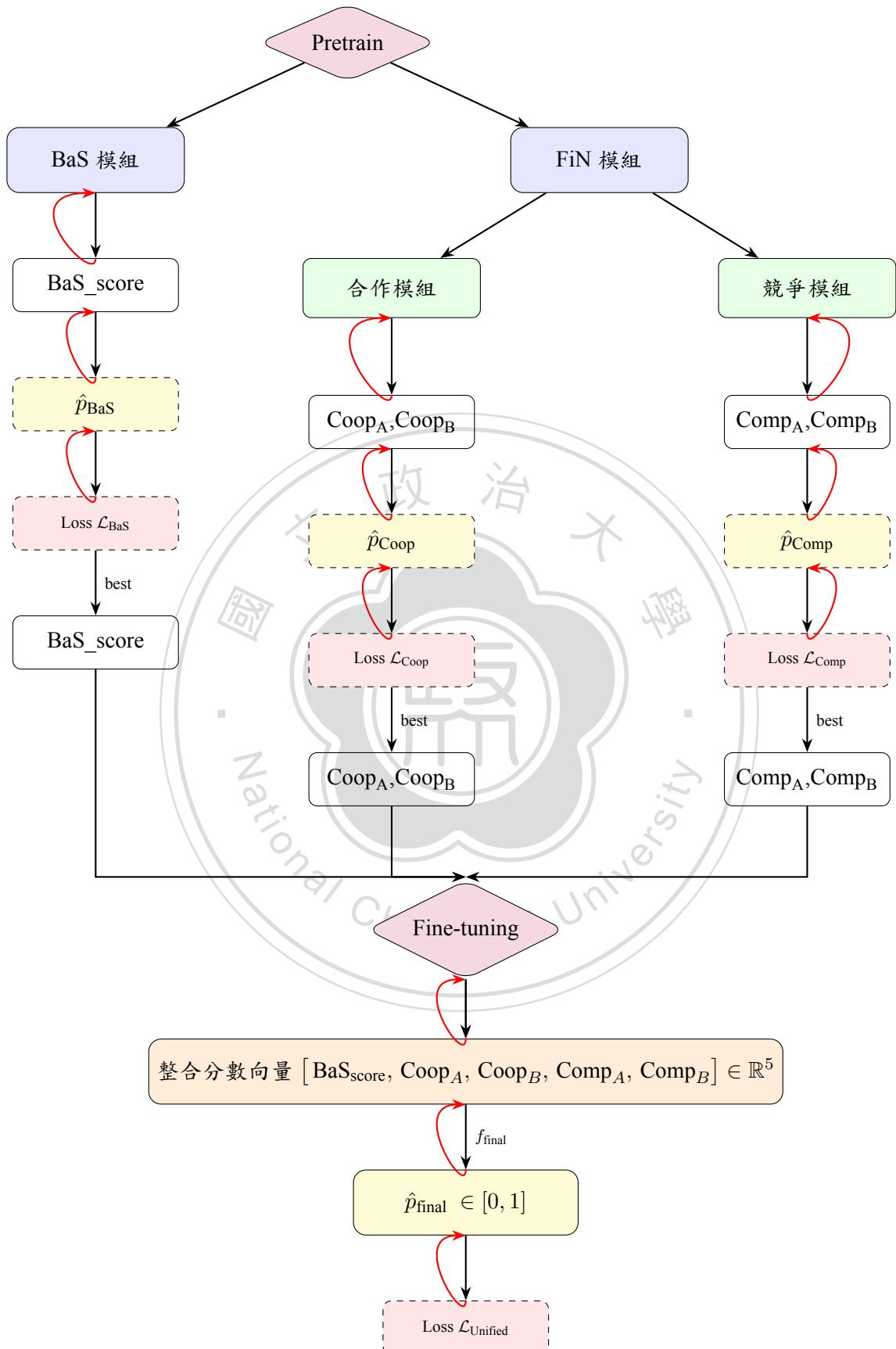


圖 3-2: **Frozen Backbone** 訓練流程圖：第一階段各子模組以 \hat{p} 與損失 \mathcal{L} 進行前向與反向傳播，並於獨立訓練完後將分數匯聚至第二階段並整合模組與微調，經最終 MLP 層輸出最終預測 \hat{p}_{final} 。

第一節 基於變分推論的技能分佈模組

為適應 NBA 球員能力的變異性並捕捉其不確定性，本研究將原始 Bradley-Terry (BT) 模組的靜態能力值 s_i 替換為概率分佈形式，進一步借鑑 Blundell et al. (2015) 提出的變分推論 (Variational Inference)、重參數化技巧 (Reparameterization Trick) 及蒙地卡羅抽樣 (Monte Carlo Sampling) 等核心方法，將不確定性建模引入神經網絡，從而在 NBA 數據中實現對能力值的有效學習與更新。

一、技能分佈與對決概率

假設共有 K 名球員，編號為 $i = 1, 2, \dots, K$ ，其技能水平以連續隨機變數 $s_i \in \mathbb{R}$ 表示，技能先驗分佈設定為標準常態分佈：

$$P(s_i) = \mathcal{N}(0, 1).$$

相較於 TrueSkill 模型中採用的先驗參數 $\mu_0 = 25$ 、 $\sigma_0 = 25/3$ (Herbrich et al., 2006)，本研究選擇標準常態分佈作為先驗及初始變分分佈，旨在避免先驗假設對 NBA 對局資料的偏誤，確保模型具有更好的通用性與中立性，以符合 NBA 賽事特性。

為捕捉比賽過程中的隨機變動（如臨場狀態波動或突發事件），引入每場比賽中的實際表現變數 r_i ，其分佈為：

$$r_i \sim \mathcal{N}(s_i, \beta^2), \quad \beta^2 = 0.25,$$

其中 β 控制比賽隨機性的強度，獨立於技能水平。

基於上述定義，可進一步建構：

- 個人技能表現：

$$r_i \sim \mathcal{N}(s_i, \beta^2), \quad s_i | D \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2), \quad \beta^2 = 0.25,$$

- 隊伍總體表現：

$$t_A = \sum_{i \in T_A} r_i, \quad t_A \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i \in T_A} s_i, \sum_{i \in T_A} (\sigma_i^2 + \beta^2)\right),$$

- 兩隊表現差異：

$$\Delta = t_A - t_B, \quad \Delta \sim \mathcal{N} \left(\sum_{i \in T_A} s_i - \sum_{i \in T_B} s_i, \sum_{i \in T_A} \sigma_i^2 + \sum_{i \in T_B} \sigma_i^2 + \beta^2 \cdot (|T_A| + |T_B|) \right).$$

其中 $|T_A| = |T_B| = 5$ 表示每隊球員數量，總方差包含技能不確定性 σ_i^2 及賽事隨機性 β^2 兩部分。對於第 n 場對局，獲勝的概率為標準正態累積分佈函數 (CDF) 值：

$$P(T_A \text{ 贏 } T_B \text{ 於第 } n \text{ 場}) = \Phi(Z_n), \quad (3.2)$$

其中， $Z_n = \frac{\Delta_n}{V_n}$ ， $\Delta_n = t_A - t_B$ 表示第 n 場對局中兩隊表現差， V_n 為該場次表現差的標準差，而 $\Phi(\cdot)$ 則為標準常態分布 (standard normal distribution) 的累積分布函數 (cumulative distribution function, CDF)。

本研究定義 **BaS_{score}** 為第 n 場對局的標準化技能差，並作為後續模型架構中的核心輸入變數，用以結合其他模組進行勝率預測與建模。

$$\text{BaS}_{\text{score}} = Z_n = \frac{\Delta_n}{V_n}, \quad (3.3)$$

二、變分後驗分佈與參數優化

本研究需優化的參數集合定義為

$$\theta = \{(\mu_i, \rho_i)\}_{i=1}^K, \quad \sigma_i = \log(1 + \exp(\rho_i))$$

以上述形式確保標準差 $\sigma_i > 0$ 。對應的變分後驗分佈假設為獨立高斯分布：

$$q(\mathbf{s} \mid \mu, \rho) = \prod_{i=1}^K \mathcal{N}(s_i \mid \mu_i, \sigma_i^2).$$

先驗分佈為標準常態：

$$P(\mathbf{s}) = \prod_{i=1}^K \mathcal{N}(s_i \mid 0, 1).$$

給定包含 N 場對局的資料集 $\mathcal{D} = \{(T_A^{(n)}, T_B^{(n)}, y_n)\}_{n=1}^N$ ，其中 $y_n = 1$ 表示隊伍

$T_A^{(n)}$ 勝出，否則為 0。設概似遵循伯努利分佈：

$$\log P(\mathcal{D} \mid \mathbf{s}) = \sum_{n=1}^N [y_n \log p_n + (1 - y_n) \log(1 - p_n)], \quad \text{其中 } p_n \text{ 由式(3.2) 定義}。$$

變分推論優化參數 θ ，其目標函數為變分自由能 (Variational Free Energy)：

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}, \theta) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{s} \mid \theta)}[-\log P(\mathcal{D} \mid \mathbf{s})] + \text{KL}(q(\mathbf{s} \mid \theta) \parallel P(\mathbf{s})),$$

KL 散度因兩者均為高斯分佈，可通過解析解計算，表達為：

$$\text{KL}(q(\mathbf{s} \mid \theta) \parallel P(\mathbf{s})) = \sum_{i=1}^K \frac{1}{2} (\sigma_i^2 + \mu_i^2 - 1 - 2 \log \sigma_i). \quad (3.4)$$

透過最小化 \mathcal{F} ，實現對技能分佈的有效學習與對決概率的準確估計。

優化流程

參考 Blundell et al. (2015) 的方法 (詳見 2-5-2 節)，具體步驟如下：

1. 抽樣獨立隨機變數：從 $\mathcal{N}(0, 1)$ 中抽取 M 個獨立隨機變數 $\epsilon_i^{(m)}$ ， $m = 1, \dots, M$ 。
2. 生成技能樣本：計算 $s_i^{(m)} = h(\epsilon_i^{(m)}, \theta) = \mu_i + \sigma_i \epsilon_i^{(m)}$ ，其中 $\sigma_i = \log(1 + \exp(\rho_i))$ 。
3. 計算隊伍表現差：令 $\Delta_n^{(m)} = t_{A,n}^{(m)} - t_{B,n}^{(m)}$ ，其中 $t_{A,n}^{(m)} = \sum_{i \in T_A} s_{i,n}^{(m)}$ ，得到第 m 次抽樣對決概率 $p_n^{(m)} = \Phi(\Delta_n^{(m)} / V_n)$ 。
4. 計算損失：定義損失函數

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \mathcal{F}(\mathcal{D}, \theta) = \underbrace{\text{KL}[q(\mathbf{s} \mid \theta) \parallel P(\mathbf{s})]}_{\text{解析解可得}} + \underbrace{\mathbb{E}_{q(\mathbf{s})}[-\log P(\mathcal{D} \mid \mathbf{s})]}_{\text{需抽樣估計}} \\ &= \text{KL}[q(\mathbf{s} \mid \theta) \parallel P(\mathbf{s})] + \mathbb{E}_{q(\epsilon)}[f(h(\epsilon, \theta), \theta)] \\ &\approx \text{KL}[q(\mathbf{s} \mid \theta) \parallel P(\mathbf{s})] + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M f(h(\epsilon^{(m)}, \theta), \theta), \quad \epsilon^{(m)} \sim \mathcal{N}(0, 1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中 $f(h(\epsilon^{(m)}, \theta), \theta) = -\log P(\mathcal{D} \mid \mathbf{s}^{(m)})$

5. 梯度估計：

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta} \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left(\frac{\partial f(\mathbf{s}^{(m)}, \theta)}{\partial \mathbf{s}^{(m)}} \frac{\partial \mathbf{s}^{(m)}}{\partial \theta} + \frac{\partial f(\mathbf{s}^{(m)}, \theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \text{KL}[q(\mathbf{s} | \theta) \| P(\mathbf{s})], \quad (3.6)$$

其中 KL 項 = $\sum_{i=1}^K \frac{1}{2} (\sigma_i^2 + \mu_i^2 - 1 - 2 \log \sigma_i)$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu_i} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left(\frac{\partial f(\mathbf{s}^{(m)}, \theta)}{\partial s_i^{(m)}} + \frac{\partial f(\mathbf{s}^{(m)}, \theta)}{\partial \mu_i} \right) + \mu_i, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho_i} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left(\frac{\partial f(\mathbf{s}^{(m)}, \theta)}{\partial s_i^{(m)}} \frac{\epsilon_i^{(m)}}{1 + \exp(-\rho_i)} + \frac{\partial f(\mathbf{s}^{(m)}, \theta)}{\partial \rho_i} + \left(\sigma_i - \frac{1}{\sigma_i} \right) \frac{\epsilon_i^{(m)}}{1 + \exp(-\rho_i)} \right). \quad (3.8)$$

6. 參數更新：利用梯度下降法更新參數

$$\mu_i \leftarrow \mu_i - \eta \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu_i}, \quad \rho_i \leftarrow \rho_i - \eta \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho_i} \quad (3.9)$$

其中 η 為學習率。

為提升預測穩定性，評估時取多次抽樣的平均概率：

$$\hat{p}_n = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M p_n^{(m)}. \quad (3.10)$$

本研究中 σ_i 為衡量潛在技能不確定性的參數，其更新機制並非嚴格遵循傳統貝式後驗公式（如 TrueSkill 所採之高斯置信度傳播 (Gaussian Belief Propagation)），而是建構於變分推論之深度學習框架。在經典貝式設定中， σ_i 會隨資料量增加單調下降，反映模型對參數估計的信心提升。相較之下，本研究將 σ_i 視為損失函數中的可學習參數，其更新由梯度決定，使模型得以依據預測結果即時調整：在每次 mini-batch 的反向傳播中，若預測正確，梯度促使 σ_i 減小；若預測錯誤，則可能使其增加，雖然更新未必單調下降，然隨樣本累積、迭代增加、預測正確率提升，下降梯度的期望值逐漸占優，最終仍驅動 σ_i 穩穩定下降並收斂，呼應「資料越多，信心越高」之經典貝式原則（數學推導見附錄 A，實驗結果見 4-3-3 節）。

三、KL 權重

KL 散度項的權重 λ_i 用以調節正則化強度，控制模型在先驗約束與資料擬合之間的平衡。在每個訓練批次中，模型的目標函數定義為變分自由能：

$$\mathcal{F}_i(\mathcal{D}_i, \theta) = \lambda_i \cdot \text{KL}[q(\mathbf{s} | \theta) \| P(\mathbf{s})] - \mathbb{E}_{q(\mathbf{s}|\theta)} [\log P(\mathcal{D}_i | \mathbf{s})], \quad (3.11)$$

其中 θ 為變分後驗分佈的參數集合。其對應的參數更新方式為：

$$\theta \leftarrow \theta - \eta \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta}, \quad (3.12)$$

由此可見，在學習率 η 下，KL 權重 λ_i 將直接影響損失函數中來自先驗項的梯度強度，進而主導參數更新方向與速度。若 λ_i 設定過高，模型將過度依賴先驗分佈，限制其從資料中學習的能力；反之，若 λ_i 過低，則正則化力道不足，容易造成過擬合，尤其在資料稀疏的樣本（如少場次選手）上更為明顯。

此外，本研究觀察到，在 NBA 比賽資料中，少場次球員往往分布於不同的小批次中，導致 Blundell et al. (2015) 所提出的 *mini-batch-scaled KL reweighting* 策略（詳見 2-5-2 節）難以有效調節每一批次的正則化強度。

因此，為因應上述 mini-batch reweighting 難以適應少場次球員的問題，本研究改採用固定的 KL 權重 λ_i ，並同步將學習率 η_i 納入搜尋流程。具體而言，透過 uniform 分布隨機搜尋策略，聯合探索能夠兼顧正則化強度與學習穩定性的參數組合，其搜尋空間定義如下：

$$\begin{cases} \log_{10}(\lambda_i) \sim \mathcal{U}(\log_{10}(min), \log_{10}(max)), \\ \log_{10}(\eta_i) \sim \mathcal{U}(\log_{10}(min), \log_{10}(max)) \end{cases} \quad (3.13)$$

此策略可提升模型在多樣化樣本分布條件下的學習彈性，進而強化泛化能力與穩健性，特別是在處理樣本數差異懸殊（如少場次球員）的情境下更具效果。

第二節 特徵交互學習建模

一、模型構成向量

為提升模型對球員歷史表現的建模能力並捕捉特徵間複雜交互，本研究設計整合性向量輸入機制，融合球員靜態資訊、動態表現與比賽環境資訊。參考 Chen and Joachims (2016b) 所提出之 CONCAT 模組架構(詳見數學式2.3)，將選手向量 \mathbf{x}_i 與比賽情境特徵 \mathbf{z}_g 串接作為輸入特徵，建構表徵以強化模型感知對局環境之能力。

類比上述概念，本研究進一步引入選手的動態表現向量 $\mathbf{p}_{i,k}$ ，作為對局情境的延伸表徵，強調選手當前狀態對比賽交互結果的關鍵影響。具體結構如下所示：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{z}_g \end{bmatrix} \xleftarrow{\text{CONCAT}} \mathbf{p}_{i,k} = \begin{bmatrix} \text{feature}_1 \\ \vdots \\ \text{feature}_n \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

針對第 k 場對局，球員集合 S 中每位球員 i 的向量定義如下：

- 球員信息向量 $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{d_a}$ ：為每位球員的固定嵌入向量，通過學習獲取其身份特徵表徵，該向量在所有對局中保持不變，旨在捕捉每位球員的靜態個人屬性與潛在非遞移性特徵，其本質上能區分不同選手的隱含風格與特性，使模型能學習隊伍間的相生或相剋結構。
- 動態特徵向量 $\mathbf{p}_{i,k} \in \mathbb{R}^{d_p}$ ：使用指數移動平均 (EMA) 方法，根據選手於前 $k - 1$ 場對局之歷史表現動態生成，包含命中率、失誤、平均得分等統計特徵 (詳見 4-2-1, 4-2-2 節)。本研究視 $\mathbf{p}_{i,k}$ 為動態比賽情境的等價表徵。
- 主客場情境特徵 $\mathbf{z}_g \in \mathbb{R}^{d_g}$ ：表示對局之場地資訊。於本研究中設為一標量，其中 $z_g = 1$ 表示主場， $z_g = 0$ 表示客場。

此設計兼顧個體身份與環境狀態，強化模型對選手即時狀態之感知能力，並作為後續 FiN 模型輸入依據，以捕捉隊內協同與對間競爭行為間之交互關係。

二、競爭對抗交互模型 (Competitive Module)

模型針對每場對局生成 $n_{\text{team}} \times n_{\text{team}}$ 個配對，計算交互分數並預測對局結果，細節如下所述。

特徵嵌入向量

對於隊伍 A 的球員 i 和隊伍 B 的球員 j ，在交互（隊伍 A 進攻、隊伍 B 防守）中，模型會為每位球員生成對應的輸入向量：

隊伍 A 球員 i 的輸入向量 隊伍 B 球員 j 的輸入向量

$$\mathbf{v}_{i,A} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{p}_{i,k} \\ \mathbf{z}_g \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d_a+d_p+1} \quad \mathbf{v}_{j,B} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_j \\ \mathbf{p}_{j,k} \\ \mathbf{z}_g \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d_a+d_p+1} \quad (3.15)$$

隨後，通過非線性映射函數 f_{blade} 和 f_{chest} ，將輸入特徵向量 $\mathbf{v}_{i,A}, \mathbf{v}_{j,B} \in \mathbb{R}^{d_a+d_p+1}$ 分別映射為進攻向量 \mathbf{b}_{iA} (Blade) 和防守向量 \mathbf{c}_{jB} (Chest)：

$$\mathbf{b}_{iA} = f_{\text{blade}}(\mathbf{v}_{i,A}) = W_{\text{blade}}^{(2)} \left(\text{Swish}(W_{\text{blade}}^{(1)} \mathbf{v}_{i,A} + \mathbf{b}_{\text{blade}}^{(1)}) \right) + \mathbf{b}_{\text{blade}}^{(2)}, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{c}_{jB} = f_{\text{chest}}(\mathbf{v}_{j,B}) = W_{\text{chest}}^{(2)} \left(\text{Swish}(W_{\text{chest}}^{(1)} \mathbf{v}_{j,B} + \mathbf{b}_{\text{chest}}^{(1)}) \right) + \mathbf{b}_{\text{chest}}^{(2)}, \quad (3.17)$$

設輸入維度 $d_{\text{in}} = d_a + d_p + 1$ ，整體映射過程可概括如下，以進攻映射為例：

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{d_{\text{in}}} &\rightarrow \mathbb{R}^{2d_{\text{mid}}^{\text{comp}}} \quad (\text{Linear: } W_{\text{blade}}^{(1)} \in \mathbb{R}^{2d_{\text{mid}}^{\text{comp}} \times d_{\text{in}}}, \mathbf{b}_{\text{blade}}^{(1)} \in \mathbb{R}^{2d_{\text{mid}}^{\text{comp}}}) \\ &\rightarrow \mathbb{R}^{2d_{\text{mid}}^{\text{comp}}} \quad (\text{Swish}) \\ &\rightarrow \mathbb{R}^{d_{\text{mid}}^{\text{comp}}} \quad (\text{Linear: } W_{\text{blade}}^{(2)} \in \mathbb{R}^{d_{\text{mid}}^{\text{comp}} \times 2d_{\text{mid}}^{\text{comp}}}, \mathbf{b}_{\text{blade}}^{(2)} \in \mathbb{R}^{d_{\text{mid}}^{\text{comp}}}) \end{aligned}$$

Swish 函數定義為 $\text{Swish}(x) = x \cdot \sigma(x)$ ， σ 為 sigmoid 函數，其平滑且可保留負值的特性，特別適用於建模本研究中包含正負影響的輸入特徵，有助於捕捉非線性效應。此外，該 MLP 先將輸入維度擴展至兩倍中間層維度，再投影回輸出維度，屬於常見的多層感知機設計模式，用以提升模型的非線性表達能力。

隊伍間競爭建模與預測機制

針對隊伍 A 與隊伍 B 間所有可能的 n_{team}^2 組球員配對 (i, j) ，模型將隊伍 A 中第 i 位球員的 Blade 向量與隊伍 B 中第 j 位球員的 Chest 向量進逐元素相乘，生成交互向量 $\mathbf{e}_{i,j} = \mathbf{b} \odot \mathbf{c}$ ，並透過 f_{score} 計算競爭分數：

$$\begin{cases} \text{Comp}_{i,j} = f_{\text{score}}(\mathbf{b}_{i,A} \odot \mathbf{c}_{j,B}), & \text{pairwise score} \\ \text{Comp}_A = \sum_{i \in T_A} \sum_{j \in T_B} f_{\text{score}}(\mathbf{b}_{i,A} \odot \mathbf{c}_{j,B}), & \text{team-level score for A} \\ \text{Comp}_B = \sum_{j \in T_B} \sum_{i \in T_A} f_{\text{score}}(\mathbf{b}_{j,B} \odot \mathbf{c}_{i,A}), & \text{team-level score for B} \end{cases} \quad (3.18)$$

$$f_{\text{score}}(\cdot) = W_{\text{score}}^{(2)} \left(\text{Dropout} \left(\text{Swish} \left(W_{\text{score}}^{(1)} \mathbf{e} + \mathbf{b}_{\text{score}}^{(1)} \right) \right) \right) + b_{\text{score}}^{(2)}. \quad (3.19)$$

整體映射過程可概括如下：

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{d_{\text{mid}}^{\text{comp}}} &\rightarrow \mathbb{R}^{d_{\text{mlp}}^{\text{comp}}} && (\text{Linear: } W_{\text{score}}^{(1)} \in \mathbb{R}^{d_{\text{mlp}}^{\text{comp}} \times d_{\text{mid}}^{\text{comp}}}, \mathbf{b}_{\text{score}}^{(1)} \in \mathbb{R}^{d_{\text{mlp}}^{\text{comp}}}) \\ &\rightarrow \mathbb{R}^{d_{\text{mlp}}^{\text{comp}}} && (\text{Swish, Dropout with rate } r) \\ &\rightarrow \mathbb{R}^1 && (\text{Linear: } W_{\text{score}}^{(2)} \in \mathbb{R}^{1 \times d_{\text{mlp}}^{\text{comp}}}, b_{\text{score}}^{(2)} \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

其中， $d_{\text{mlp}}^{\text{comp}}$ 為競爭分數計算的中間層維度。模型在 Swish 後加入 Dropout 隨機丟棄神經元以減少過擬合風險並提升泛化能力。

為量化對局中兩隊之相對競爭優勢，將分數差經由 Sigmoid 函數轉換為隊伍 A 的勝率預測：

$$\hat{p} = \sigma(\Delta_{\text{Comp}}) = \frac{1}{1 + \exp(-(\text{Comp}_A - \text{Comp}_B))}. \quad (3.20)$$

其中， $\hat{p} \in [0, 1]$ 表示隊伍 A 的預測勝率，可作為子模組預訓練之優化目標（詳見 圖 3-2），促使模型有效捕捉隊伍間的競爭強度。原始分數 Comp_A 與 Comp_B 亦被保留，作為後續整合模組之輸入，以保留隊伍互動的完整資訊並學習更高階的關聯結構。

三、對內合作協同模型 (Cooperation Module)

合作模型輸入向量與嵌入映射

本研究沿用 Gu et al. (2021) 所提出的合作分數模型架構，惟針對輸入向量設計進行改進：

$$\mathbf{v}_{i,A} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{p}_{i,k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d_a+d_p} \quad (3.21)$$

由於隊內合作屬於內部交互行為，並不涉及對抗性或場地因素，故本模組不納入主客場特徵 \mathbf{z}_g ，專注於建模球員間的協同模式，為進一步增強輸入特徵的表達能力，本研究使用一非線性映射模組，將原始特徵向量映射至潛在嵌入空間，轉換過程如下：

$$\mathbf{co}_{i,A} = f_{coop}(\mathbf{v}_{i,A}) = W_{coop}^{(2)} \left(\text{Swish} \left(W_{coop}^{(1)} \mathbf{v}_{i,A} + \mathbf{b}_{coop}^{(1)} \right) \right) + \mathbf{b}_{coop}^{(2)}, \quad (3.22)$$

其維度轉換過程可概括如下：

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{d_a+d_p} &\rightarrow \mathbb{R}^{2d_{mid}^{coop}} \quad (\text{Linear: } W_{coop}^{(1)} \in \mathbb{R}^{2d_{mid}^{coop} \times (d_a+d_p)}, \mathbf{b}_{coop}^{(1)} \in \mathbb{R}^{2d_{mid}^{coop}}) \\ &\rightarrow \mathbb{R}^{2d_{mid}^{coop}} \quad (\text{Swish}) \\ &\rightarrow \mathbb{R}^{d_{mid}^{coop}} \quad (\text{Linear: } W_{coop}^{(2)} \in \mathbb{R}^{d_{mid}^{coop} \times 2d_{mid}^{coop}}, \mathbf{b}_{coop}^{(2)} \in \mathbb{R}^{d_{mid}^{coop}}) \end{aligned}$$

其中 d_{mid}^{coop} 為最終合作嵌入向量空間的維度，並同樣使用 Swish 激活與「先擴展至兩倍維度再收縮」的設計以增強非線性表達能力。

合作建模與勝率預測機制

本模組旨在捕捉隊伍內球員間的潛在協同互動，以計算合作分數並用於勝率預測。針對隊伍 A 與 B ，模型考慮隊內所有互不相同的球員對 (i, j) ，將其嵌入向量 $\mathbf{co}_{i,A}$ 、 $\mathbf{co}_{j,A}$ 執行元素相乘後，輸入至分數函數 $f_{score}(\cdot)$ ，以獲得合作分數：

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Coop}_{i,j} = f_{score}(\mathbf{co}_{i,A} \odot \mathbf{co}_{j,A}), & \text{pairwise score} \\ \text{Coop}_A = \sum_{i \in T_A} \sum_{j \in T_A, i \neq j} f_{score}(\mathbf{co}_{i,A} \odot \mathbf{co}_{j,A}), & \text{team-level for A} \\ \text{Coop}_B = \sum_{i \in T_B} \sum_{j \in T_B, i \neq j} f_{score}(\mathbf{co}_{i,B} \odot \mathbf{co}_{j,B}), & \text{team-level for B} \end{array} \right. \quad (3.23)$$

分數函數 f_{score} 採用與 3-2-2 所定義相同的多層感知機（MLP）結構，包含 Swish 激活與 Dropout 機制，用以建模非線性協同強度，詳細設計請參見式 (3.19)。

為衡量兩隊間之相對合作優勢，定義合作分數差並經由 Sigmoid 函數轉換為隊伍 A 的勝率預測：

$$\hat{p} = \sigma(\Delta_{\text{Coop}}) = \frac{1}{1 + \exp(-(C_{\text{Coop}}_A - C_{\text{Coop}}_B))}. \quad (3.24)$$

其中， $\hat{y} \in [0, 1]$ 表示隊伍 A 的預測勝率，作為子模組預訓練階段之監督信號（詳見 圖 3-2），以促使模型學習隊伍內部合作行為與勝率間的關聯。合作分數 C_{Coop}_A 、 C_{Coop}_B 同樣保留於模型架構中，作為後續整合模組的輸入特徵，以強化整體表徵能力。

四、注意力機制

為考慮隊內合作與隊間競爭中各角色的重要性差異，本模型參考並延伸了先前研究 (NeuralAC (Gu et al., 2021)) 中的注意力機制(詳見數學式2.8,2.9)，引入了角色權重 a_{coop}^{ij} 、 a_{comp}^{ij} ，用以自適應調整各球員在合作與競爭中的影響力：

$$\text{Comp}_A = \sum_{i \in T_A} \sum_{j \in T_B} a_{\text{comp}}^{ij} \cdot f(\mathbf{b}_{i,A}^{\text{blade}} \odot \mathbf{c}_{j,B}^{\text{chest}}), \quad \text{Coop}_A = \sum_{i \in T_A} \sum_{\substack{j \in T_A \\ j \neq i}} a_{\text{coop}}^{ij} \cdot f(\mathbf{e}_{i,A} \odot \mathbf{e}_{j,A}), \quad (3.25)$$

$$\text{Comp}_B = \sum_{j \in T_B} \sum_{i \in T_A} a_{\text{comp}}^{ji} \cdot f(\mathbf{b}_{j,B}^{\text{blade}} \odot \mathbf{c}_{i,A}^{\text{chest}}), \quad \text{Coop}_B = \sum_{i \in T_B} \sum_{\substack{j \in T_B \\ j \neq i}} a_{\text{coop}}^{ij} \cdot f(\mathbf{e}_{i,B} \odot \mathbf{e}_{j,B}), \quad (3.26)$$

此外，注意力機制是否啟用將作為超參數進行調整，以評估其對模型表現的影響。

第三節 Frozen Backbone Training (凍結骨幹訓練) 策略

為平衡 NBA 對決中對個人能力、團隊合作與競爭分數的需求，本研究採用 **Frozen Backbone** 架構 (類似於 Rusu et al. (2016); Li et al. (2023))。該方法先分段獨立預訓練各子模組，固定其參數以保留已學得的特徵表徵，隨後再進行最終整合層的微調，以提升整體預測表現與泛化能力。

相較於 **End-to-End Training** (端到端訓練)(詳見 圖 3-1)，Frozen Backbone 策略可降低模型在同時學習多個異質性模組時的干擾，避免特定模組過度主導，並改善在高維異質對局資料上的穩定性與可解釋性。

一、Frozen Backbone 執行機制：預訓練與微調流程

本研究設計了三個相互獨立的子模組，各自專注於對局中不同層面的訊息，並在 Frozen Backbone 架構下進行分段預訓練與最終微調(詳見 圖 3-2)：

- 個人能力模組：基於貝氏的技能更新模組，計算隊伍間的個人能力分數 BaS_{score} ，詳見數學式 3.3。
- 競爭交互模組：建模隊 A 對隊 B 和隊 B 對隊 A 的競爭優勢，生成競爭分數 $Comp$ ，詳見數學式 3.25。
- 合作交互模組：捕捉隊伍內的合作效應，計算隊 A 和隊 B 的合作分數 $Coop$ ，詳見數學式 3.23。

Frozen Backbone 策略下，三個子模組將先進行獨立預訓練以最適化其目標函數，固定參數後僅在最後整合層進行微調，促使模型在保持專門結構解釋力的同時，提升整體預測效能。

二、最終整合與勝率輸出

最終將各子模組所輸出的五維分數作為輸入特徵傳入最終整合層，定義如下：

$$\mathbf{v}_{score} = [BaS_{score}, Comp_A, Comp_B, Coop_A, Coop_B] \in \mathbb{R}^5. \quad (3.27)$$

$$\hat{p} = \frac{1}{1 + \exp(-f_{final}(\mathbf{v}_{score}))} \in [0, 1], \quad (3.28)$$

最終輸出勝率機率，其中 $f_{final}(\cdot)$ 為最終整合 MLP，專門建模各分數模組間的線性與非線性關聯結構。

$$f_{final}(\mathbf{v}_{score}) = W_{final}^{(3)} \left(\text{Dropout} \left(\text{Swish} \left(W_{final}^{(2)} \left(\text{Swish} \left(W_{final}^{(1)} \text{BN}(\mathbf{v}_{score}) + \mathbf{b}_{final}^{(1)} \right) \right) + \mathbf{b}_{final}^{(2)} \right) \right) \right) + \mathbf{b}_{final}^{(3)}, \quad (3.29)$$

整體映射過程可概括如下：

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^5 &\rightarrow \mathbb{R}^5 && (\text{BatchNorm}) \\&\rightarrow \mathbb{R}^{2d_{\text{prob}}} && (\text{Linear: } W_{\text{final}}^{(1)} \in \mathbb{R}^{2d_{\text{prob}} \times 5}, \mathbf{b}_{\text{final}}^{(1)} \in \mathbb{R}^{2d_{\text{prob}}}) \\&\rightarrow \mathbb{R}^{2d_{\text{prob}}} && (\text{Swish}) \\&\rightarrow \mathbb{R}^{d_{\text{prob}}} && (\text{Linear: } W_{\text{final}}^{(2)} \in \mathbb{R}^{d_{\text{prob}} \times 2d_{\text{prob}}}, \mathbf{b}_{\text{final}}^{(2)} \in \mathbb{R}^{d_{\text{prob}}}) \\&\rightarrow \mathbb{R}^{d_{\text{prob}}} && (\text{Swish, Dropout with rate } r) \\&\rightarrow \mathbb{R}^1 && (\text{Linear: } W_{\text{final}}^{(3)} \in \mathbb{R}^{1 \times d_{\text{prob}}}, b_{\text{final}}^{(3)} \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

其中 d_{prob} 為中間層維度超參數，同樣採用「先擴展至兩倍維度再收縮」的設計；Batch Normalization 標準化輸入分數範圍，並搭配 Swish 與 Dropout 機制以提升表達能力並抑制過擬合。最終透過此架構有效建模各分數模組間的關聯，並輸出穩健的勝率預測。



第四章 實驗

第一節 資料來源與結構

本研究數據擷取自籃球數據平台 <https://www.basketball-reference.com>，整合其基礎統計（Basic Stats）與進階統計（Advanced Stats）資料模組。數據集涵蓋 2009–2024 年共 16 個賽季的 NBA 資料，並以 2013–2024 為主要實驗資料。

本研究所使用之資料變數涵蓋球員對局表現的多個層面，輸入特徵共計 37 項，涵蓋基礎技術統計與進階效率指標，從得分表現、進攻/防守貢獻、使用率至效率等不同面向量化球員在場上的整體表現（變數說明詳見表 4-1）。預測目標則設定為單場對局的勝負結果，若主隊獲勝則標記為 1，反之則標記為 0，作為對決模型之輸出變數。

表 4-1：特徵變數與說明

變數	英文全稱	中文說明	變數	英文全稱	中文說明
FG	Field Goals	投籃命中數	ORB%	Offensive Rebound Percentage	進攻籃板率
FGA	Field Goal Attempts	投籃出手數	DRB	Defensive Rebounds	防守籃板
FG%	Field Goal Percentage	投籃命中率	DRB%	Defensive Rebound Percentage	防守籃板率
3P	3-Point Made	三分命中數	TRB	Total Rebounds	總籃板
3PA	3-Point Attempts	三分出手數	TRB%	Total Rebound Percentage	總籃板率
3P%	3-Point Percentage	三分命中率	STL	Steals	搶斷
FT	Free Throws Made	罰球命中數	BLK	Blocks	蓋帽
FTA	Free Throw Attempts	罰球出手數	STL%	Steal Percentage	搶斷率
FT%	Free Throw Percentage	罰球命中率	BLK%	Block Percentage	蓋帽率
AST	Assists	助攻數	DRtg	Defensive Rating	防守效率
PTS	Points	得分	MP	Minutes per Game	每場對局上場時間(分)
TS%	True Shooting Percentage	真實投籃命中率	TOV	Turnovers	失誤
eFG%	Effective Field Goal Percentage	有效投籃命中率	PF	Personal Fouls	犯規
3Par	3-Point Attempt Rate	三分出手比率	GmSc	Game Score	對局綜合評分
FTr	Free Throw Rate	罰球比率	+/-	Plus-Minus	正負分
AST%	Assist Percentage	助攻比率	TOV%	Turnover Percentage	失誤率
USG%	Usage Percentage	進攻使用率	BPM	Box Plus-Minus	綜合影響力指標
ORtg	Offensive Rating	進攻效率	NRtg	Net Rating	淨效率值
ORB	Offensive Rebounds	進攻籃板			

第二節 特徵工程

一、EMA 指數移動平均特徵

為捕捉球員隨比賽場次推移的動態表現特徵，本研究採用簡單指數平滑（Simple Exponential Smoothing, SES）方法生成動態特徵向量 $\mathbf{p}_{i,k} \in \mathbb{R}^{d_p}$ ，表徵球員 i 在第 k 場比賽前的狀態。以下闡述指數移動平均（EMA）的生成流程，包括計算方式、參數估計及特徵篩選。

指數移動平均計算

對於球員 i 在特徵 m （如得分、助攻等）的歷史數據序列 $\{x_{i,m,k}\}_{k=1}^{K_i}$ ，其中 K_i 為球員 i 的總比賽場次，EMA 值 $e_{i,m,k}$ ：

$$e_{i,m,k} = \begin{cases} l_{i,m,0}, & k = 1, \\ \alpha_{i,m}x_{i,m,k-1} + (1 - \alpha_{i,m})e_{i,m,k-1}, & k \geq 2, \end{cases} \quad (4.1)$$

亦可將 (4.1) 展開為以下 closed-form 形式：

$$e_{i,m,k} = (1 - \alpha_{i,m})^{k-1}l_{i,m,0} + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{i,m}(1 - \alpha_{i,m})^{j-1}x_{i,m,k-j}, \quad (4.2)$$

其中 $e_{i,m,k}$ 為特徵 m 在場次 k 的 EMA 值， $y_{i,m,k-1}$ 為前一場的觀測值， $\alpha_{i,m} \in [0, 1]$ 為平滑參數， $l_{i,m,0}$ 為初始水平值。

SES 參數估計與回退機制

本研究透過 Python 的 statsmodels 套件實現簡單指數平滑（Simple Exponential Smoothing, SES），該方法通過最小化均方誤差（MSE）來估計平滑係數 $\alpha_{i,m}$ 與初始水平 $l_{i,m,0}$ (Seabold and Perktold, 2010)：

$$(\hat{\alpha}_{i,m}, \hat{l}_{i,m,0}) = \arg \min_{\alpha \in [0,1], l_0} \sum_{k=1}^{K_i} (x_{i,m,k} - \hat{e}_{i,m,k})^2, \quad (4.3)$$

為使當 SES 擬合因樣本數過少或資料變動幅度大而估計失敗時仍保持穩健，定義全體訓練集球員對特徵 m 的平均初始水平為

$$\bar{l}_m = \frac{1}{|\mathcal{D}_{\text{train}}|} \sum_{i \in \mathcal{S}} \sum_{k \in \mathcal{D}_{\text{train}}} x_{i,m,k}, \quad (4.4)$$

並依下列分段規則回退 (fallback) 至基線參數 (將 $\hat{\alpha}_{i,m}$ 設為定值) :

$$(\hat{\alpha}_{i,m}, \hat{l}_{i,m,0}, \hat{e}_{i,m,k}) = \begin{cases} (0.05, \bar{l}_m, \bar{l}_m), & K_i \leq 1 \text{ or } |\{x_{i,m,k}\}| = 1, \\ (0.05, \bar{l}_m, \hat{e}_{i,m,k}), & \text{SES 擬合失敗或 } \hat{\alpha}_{i,m} \notin [0, 1], \\ (\hat{\alpha}_{i,m}, \hat{l}_{i,m,0}, \hat{e}_{i,m,k}), & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4.5)$$

式 (4.5) 中，前兩支為基線估計 (baseline estimation)，用以避免在有效觀測不足或 SES 擬合異常時產生不穩定的平滑結果；第三支則在資料充足且擬合成功時，採用標準 SES 所得之最優參數與 EMA 值。

特徵篩選

為確保剔除擬合不佳的特徵，本研究以均方根誤差 (RMSE) 作為評估指標：

$$\text{RMSE}_{i,m} = \sqrt{\frac{1}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} (x_{i,m,k} - \hat{e}_{i,m,k})^2}, \quad (4.6)$$

$$\overline{\text{RMSE}}_m = \frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{i \in \mathcal{S}} \text{RMSE}_{i,m}. \quad (4.7)$$

若 $\overline{\text{RMSE}}_m \geq 10$ ，則剔除特徵 m ，最終儲存為張量。

表 4-2: EMA 特徵篩選結果

特徵	平均 RMSE	α 分佈 (均值 ± 標準差)	特徵	平均 RMSE	α 分佈 (均值 ± 標準差)
FG	2.0222	0.0725 ± 0.1721	TS%	0.1861	0.0498 ± 0.1837
FGA	3.1425	0.1210 ± 0.2162	eFG%	0.1967	0.0455 ± 0.1753
FG%	0.1686	0.0421 ± 0.1599	3PAr	0.1320	0.0973 ± 0.1930
3P	0.8855	0.0607 ± 0.1593	FTr	0.2630	0.0501 ± 0.1793
3PA	1.4711	0.1011 ± 0.1922	AST%	7.5814	0.0691 ± 0.1757
3P%	0.2033	0.0433 ± 0.1491	USG%	4.5253	0.1086 ± 0.2130
FT	1.4753	0.0663 ± 0.1862	ORB	0.9889	0.0558 ± 0.1787
FTA	1.8244	0.0668 ± 0.1830	ORB%	3.8902	0.0526 ± 0.1807
FT%	0.3464	0.0519 ± 0.1767	DRB	1.8770	0.0686 ± 0.1815
AST	1.4818	0.0815 ± 0.1900	DRB%	6.9098	0.0573 ± 0.1750
PTS	5.1348	0.0804 ± 0.1785	TRB	2.2454	0.0700 ± 0.1761
MP	5.6272	0.1444 ± 0.2315	TRB%	3.9770	0.0553 ± 0.1678
STL	0.8162	0.0499 ± 0.1806	STL%	1.4773	0.0470 ± 0.1774
BLK	0.6254	0.0472 ± 0.1674	BLK%	1.9839	0.0465 ± 0.1601
TOV	1.0383	0.0663 ± 0.1963	PF	1.1998	0.0544 ± 0.1841
GmSc	5.2191	0.0657 ± 0.1813	ORtg*	30.2629	0.0512 ± 0.1658
DRtg*	10.5700	0.0617 ± 0.1868	+/-*	10.1920	0.0432 ± 0.1575
NRtg*	31.9877	0.0571 ± 0.1798			

* 表示因平均 RMSE ≥ 10 而被剔除的特徵。

α 分佈：對應特徵在所有球員上的平滑參數 $\alpha_{i,m}$ 之樣本均值與標準差。

表 4-2 展示各特徵的平均 RMSE，以及 $\alpha_{i,m}$ 在全體球員上的樣本均值與標準差。因特徵 ORtg、DRtg、+/- 與 NRtg 之平均 RMSE 超過 10，故被剔除；最終保留 33 個特徵。

二、球員貢獻加權與標準化

為了從個人層面的數據中提取更精確的特徵表示，本研究在完成球員特徵的指數移動平均 (EMA) 估計 $\mathbf{e}_{i,k} = [e_{i,1,k}, \dots, e_{i,d,k}] \in \mathbb{R}^d$ 後，進一步考慮該球員在比賽中的實際出場時間，進行出場時間加權處理：

$$\mathbf{e}_{i,k}^{\text{adj}} = \mathbf{e}_{i,k} \times \frac{MP_{i,k}}{48}, \quad (4.8)$$

其中 $MP_{i,k}$ 為球員 i 在第 k 場對局中的上場時間 (分鐘)，48 為 NBA 單場比賽的標準時間。此加權處理可視為球員實際貢獻程度的線性縮放。

接著，為統一各特徵的尺度、提升模型訓練穩定性，對每個特徵維度 $m \in \{1, \dots, d\}$ 套用 z-score 標準化，最終產生球員在場次 k 的表現向量 (performance vector) $\mathbf{p}_{i,k}$ ：

$$p_{i,m,k} = \frac{e_{i,m,k}^{\text{adj}} - \mu_m}{\sigma_m}, \quad m = 1, \dots, d, \quad (4.9)$$

其中 μ_m 、 σ_m 分別為特徵 m 在訓練集中的平均與標準差， $\mathbf{p}_{i,k} = [p_{i,1,k}, \dots, p_{i,d,k}] \in \mathbb{R}^d$ 則作為最終輸入模型的特徵向量。

三、評估指標

本研究採用三項指標以評估模型性能：曲線下面積（Area Under the ROC Curve, AUC）、準確率（Accuracy）以及對數損失（Logarithmic Loss, Logloss）。

使用混淆矩陣元素來定義各種比率，令真陽性、真陰性、假陽性、假陰性分別為

$$TP, TN, FP, FN.$$

真陽性率（True Positive Rate, TPR）與假陽性率（False Positive Rate, FPR）定義為

$$TPR = \frac{TP}{TP + FN}, \quad FPR = \frac{FP}{FP + TN}. \quad (4.10)$$

曲線下面積（AUC）

AUC 衡量模型對正負類別的整體區分能力，其數學形式為 ROC 曲線下對 FPR 軸從 0 到 1 的積分：

$$AUC = \int_0^1 TPR(FPR) d(FPR). \quad (4.11)$$

AUC 越接近 1 表示分類器的區分能力越佳；對於類別不平衡問題尤為穩健，能避免單純以準確率評價時的偏差。

準確率（Accuracy）

Accuracy 度量模型對所有樣本預測正確的比例：

$$Accuracy = \frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FN}. \quad (4.12)$$

對數損失（Logloss）

Logloss 用於評估模型預測機率與真實標籤之間的偏差：

$$\text{Logloss} = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[y_i \log(p_i) + (1 - y_i) \log(1 - p_i) \right], \quad (4.13)$$

其中 y_i 為第 i 筆樣本的真實標籤（0 或 1）， p_i 為模型預測為正類的機率， N 為樣本總數。

在訓練過程中，本研究模型均採用早停策略：以驗證集 AUC 作為指標，若連續 5 個訓練週期內 AUC 無提升，即提前終止訓練並保存當前最佳模型參數，確保模型具備最優的類別區分能力且避免過擬合。

第三節 實驗結果

一、實驗設置

重複實驗與批次策略

為降低隨機初始化所造成的結果波動，本研究針對每組超參數配置，分別以五組固定的隨機種子執行獨立訓練，並取其結果平均作為最終評估指標，以提升實驗結果的穩定性與可重現性，並且鑑於 NBA 系統中 30 支球隊資料分佈之特性，訓練階段採用批次大小為 32 的小批次策略，有助於更精細地擷取樣本間的變異。

優化器與參數更新

本研究使用自適應動量估計搭配權重衰減（Adaptive Moment Estimation with decoupled weight decay, AdamW）(Loshchilov and Hutter, 2017)，並以 PyTorch 框架實現 (Paszke et al., 2019)。AdamW 將動量優化（Momentum Optimizer）與權重衰減（可視為 L2 正則化的實作形式）整合，並將兩者更新過程明確分離，有助於提升模型的收斂穩定性與泛化能力。

標準梯度下降法的參數更新公式為

$$\theta_t = \theta_{t-1} - \eta \nabla_{\theta} L(\theta_{t-1}) \quad (4.14)$$

其中 θ_t 為第 t 步參數， η 為學習率， $\nabla_{\theta} L(\theta_{t-1})$ 為損失函數 $L(\theta)$ 的梯度。若加入 L2 懲罰項，則：

$$\theta_t = \theta_{t-1} - \eta \nabla_{\theta} L(\theta_{t-1}) - \eta \lambda \theta_{t-1}, \quad (4.15)$$

其中 $\eta \lambda \theta_{t-1}$ 等效於懲罰項 $\lambda \|\theta_{t-1}\|^2$ ，用以限制參數幅度，降低模型複雜度。

AdamW 於此基礎結合動量優化並將 L2 懲罰獨立處理，其更新式為

$$\theta_t = \theta_{t-1} - \eta \frac{\hat{m}_t}{\sqrt{\hat{v}_t} + \epsilon} - \eta \lambda \theta_{t-1}, \quad (4.16)$$

其中 \hat{m}_t 與 \hat{v}_t 分別為經偏差校正後的一階與二階動量估計； \hat{m}_t 乃對損失梯度 $\nabla_{\theta}L(\theta_{t-1})$ 之指數加權平均，代表更新方向與速度，常數 ϵ 用以避免除零情況。

超參數設定

本研究在預訓練階段將各模組的初始學習率設為 $\eta = 0.0001$ ，在最終整合層微調階段則使用較小的學習率 1×10^{-5} 以提升穩定性。所有模組均使用 $\epsilon = 10^{-8}$ 作為數值穩定項，並針對除 BaS 模組以外的模組加入 L2 懲罰係數 $\lambda = 0.005$ 以控制模型複雜度，此外考量到 BaS 模組在訓練時其收斂特性與其他模組不同，本研究對其進行獨立的學習率搜尋 (LR search)，以獲得最佳化效果。

權重初始化

為穩定初期激活值與梯度的分佈，本研究線性層 (linear layers) 之權重矩陣 W 均採用 Xavier 初始化（又稱 Glorot 初始化）(Glorot and Bengio, 2010)，並統一使用均匀分佈 (uniform) 初始。該方法假設神經元輸入與輸出之方差應保持一致，以避免在前向或反向傳播過程中發生梯度爆炸或消失，提升各層在初始階段的表現穩定性。初始化權重服從以下均勻分佈：

$$W_{ij} \sim U\left(-\sqrt{\frac{6}{n_{in} + n_{out}}}, \sqrt{\frac{6}{n_{in} + n_{out}}}\right) \quad (4.17)$$

學習率調度

為抑制學習率過高導致的訓練震盪並促進後期收斂，本研究採用基於驗證表現的學習率遞減策略 (learning rate decay based on validation plateau, ReduceLROnPlateau, ReduceLROnPlateau) (Paszke et al., 2019)。當驗證集 AUC 在連續 2 個訓練週期內未見改善時（此設定基於本研究實驗經驗調整），即啟動學習率遞減機制，按以下分段函數更新：

$$\eta_{t+1} = \begin{cases} \eta_t & \text{if AUC improves within 2 epochs,} \\ \max(\eta_t \cdot 0.5, 10^{-6}) & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (4.18)$$

其中 η_t 為當前學習率。此動態調整機制有助於模型在訓練後期精緻化權重更新，提升收斂穩定性與泛化能力。

Final Retraining

由於本研究資料具時間序列特性，若僅使用訓練集對未來兩年進行預測，易導致模型失真。因此，在模型選定階段，採用驗證集進行超參數挑選後，將驗證集併入訓練集進行最終模型訓練，以提升泛化能力，後續實驗中，若提及「Final Retraining」，均表示模型採用此重新訓練策略。此流程如圖 4-1 所示

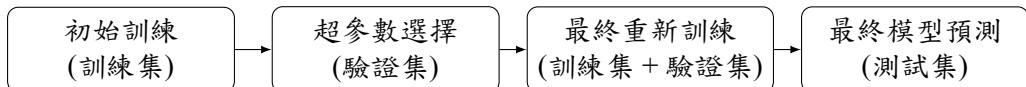
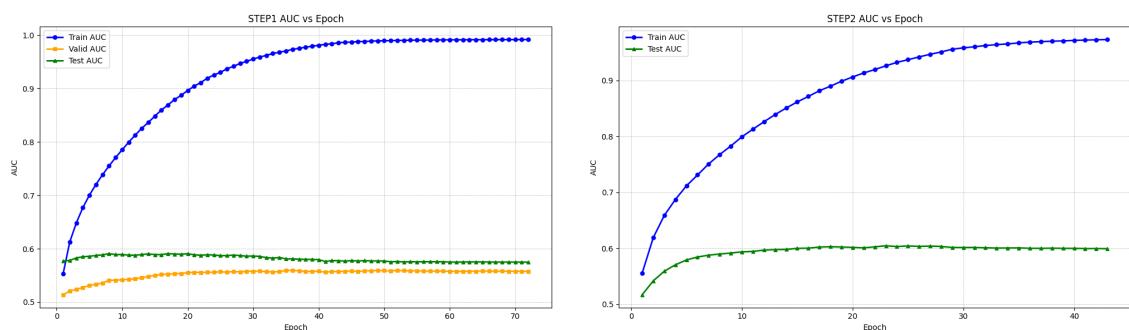


圖 4-1：最終重新訓練流程：初始使用前 10 年資料進行訓練，通過第 11 年驗證集選擇最佳超參數後，合併前 11 年資料進行最終重新訓練，最終模型於第 12 年測試集進行預測。

二、原 NeuralAC 模型

在本研究資料上，原始 NeuralAC 模型展現出明顯的「訓練與泛化落差」。如圖 4-2a 所示，Train AUC 快速接近 1.0，顯示其能精確擬合觀測資料中的非遞移性對抗結構。然而，Valid AUC 與 Test AUC 長期維持在 0.6 以下，顯示其在未見資料上的泛化能力有限，顯示模型可能過度依賴當下球員組合、角色分工與歷史對戰關係，並可能缺乏對球員流動、陣容變動及個人狀態波動的適應能力。

換言之，NeuralAC 雖能在靜態、角色固定的場景中良好學習對抗模式，但在跨季預測、球員轉隊或陣容調整等真實情境下，難以有效推論未觀測組合的勝率。經最終再訓練（Final Retraining）後，Test AUC 僅達 0.6045（見圖 4-2b），顯示即使增加資料量以彌補過擬合問題，模型在長期結構泛化與陣容適應性上仍受限。



(a) STEP1 訓練過程中 Train AUC 遠高於 Valid AUC 與 Test AUC，表明過擬合現象。
(b) STEP2 Final Retraining 後 Train AUC 與 Test AUC 間差距依舊明顯，性能提升有限。

圖 4-2：原 NeuralAC 模型在 STEP1 與 STEP2 的 AUC 表現：顯示過擬合與性能限制。

三、貝氏技能模組 (BaS)

超參數選擇

貝氏技能模組 (BaS) 的核心為變分推論架構，透過蒙地卡羅抽樣 (Monte Carlo Sampling) 進行近似推論以捕捉後驗分布的不確定性。本研究在每一次前向傳播中進行 100 次權重抽樣，以提升參數後驗的估計精度並穩定變分自由能最適化。

此外，為尋找最佳的變分正則化強度與最佳化參數，本研究對 KL 權重 (KL Weight) 與學習率 (Learning Rate, LR) 同時進行隨機搜尋 (random search)，採用對數均勻分佈 (log-uniform) 抽樣 100 組超參數組合進行評估，詳見3-1-3節：

$$\begin{cases} \log_{10}(\lambda_i) \sim \mathcal{U}(\log_{10}(0.001), \log_{10}(0.1)) \\ \log_{10}(\eta_i) \sim \mathcal{U}(\log_{10}(0.0005), \log_{10}(0.05)) \end{cases} \quad (4.19)$$

其中 λ_i 與 η_i 分別為第 i 組候選設定的 KL 權重與學習率。

實驗結果顯示，最佳超參數為 KL 權重 = 0.03796 與學習率 = 0.04685，對應驗證集 AUC = 0.6484，但由於該組合中學習率較大，模型在訓練時更傾向於更新新進球員，導致整體學習較不穩定。因此，本研究採用次佳且較穩定的超參數組合：KL 權重 = 0.0351 與學習率 = 0.01，其對應驗證集 AUC 為 0.6459，進一步比較 BaS 與傳統 BT 模型在測試集上的實際預測表現。

VALID AUC Surface: KL Weight vs. Learning Rate

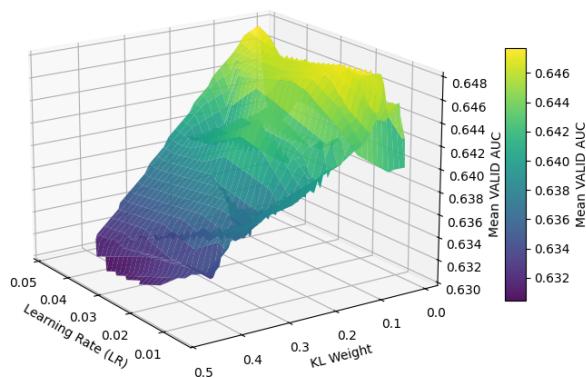


圖 4-3: KL 權重與 Learning Rate 的隨機搜尋結果：VALID AUC 隨兩超參數變化的曲面圖，顯示 KL 權重與學習率對模型的影響。

Bradley–Terry (BT) 模型實驗設定

本研究實驗中實作的 Bradley–Terry (BT) 模型，核心假設為：每位球員具有固定的潛在技能值 θ_i ，以隊伍內所有成員的技能值總和作為隊伍實力指標，定義如下：

$$\Theta_A = \sum_{i \in A} \theta_i, \quad \Theta_B = \sum_{j \in B} \theta_j.$$

比賽結果的勝率則透過 $\text{sigmoid}(\sigma(\cdot))$ 函數轉換為機率形式：

$$\hat{p} = \sigma(\Theta_A - \Theta_B),$$

在實作上，本研究以參數向量化的方式為每位球員建立一個可學習的實值參數 θ_i ，透過最大化比賽勝負結果的對數概似函數進行訓練，對應的損失函數為：

$$\mathcal{L}_{BT} = - \sum_{n=1}^N \left(y_n \log \hat{p}_n + (1 - y_n) \log (1 - \hat{p}_n) \right), \quad (4.20)$$

此設計保留 Bradley–Terry 模型的統計本質：藉由最大化對數概似來估計靜態技能分數，作為基準比較，檢驗本研究 BaS 模型在引入貝氏後驗推論與技能不確定性後的改進效果。

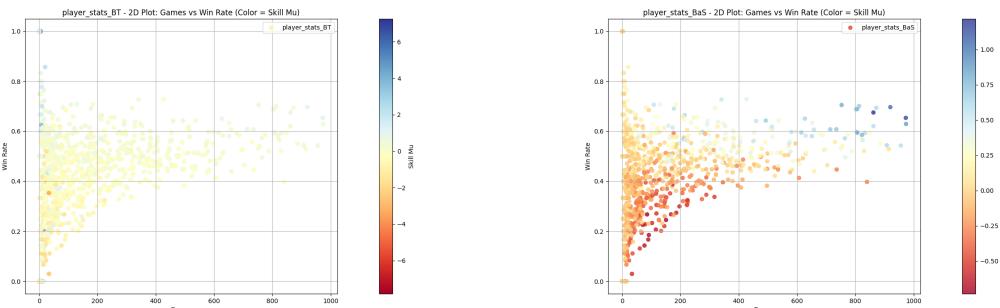
模型性能比較與顯著性分析

為深入比較 BT 與 BaS 模型的建模差異，圖 4-4 顯示兩模型學習到的「技能分數」在不同場次與歷史勝率下的分布。可觀察到，BT 模型由於採用最大概似損失進行參數估計，主要依賴勝負結果進行驅動，對於出賽次數極低卻剛好取勝的球員（例如替補或新秀）也可能給予不合理地高技能分數，因為其歷史勝率被高估。而對於長期出賽、維持穩定高勝率的核心球員，BT 模型無法自然結合場次規模進行可信度調整。

相對地，BaS 模型透過貝氏後驗變分推論進行參數更新，結合了對場次與勝率兩個維度的共同建模，能自動平衡有限樣本下的不確定性估計，避免對小樣本異常勝率的過度擬合。圖中可見 BaS 模型在場次較多的球員群體上展現更平滑且一致的技能分數趨勢，顯示其學習到的技能分布更符合預期且具備穩健性。

在此基礎上，進一步比較兩模型在 Test 資料集的預測效能。表 4-3 顯示 BaS 在 AUC、Accuracy 與 Log Loss 等指標上均優於 BT，且在最終重新訓練後的提升

尤為顯著。此外，表 4-4 呈現的 DeLong 與 McNemar 檢定結果亦確認此改進在統計上具顯著性。



(a) 傳統 BT 模型：場次 vs 歷史勝率（顏色表示技能分數）。
(b) BaS 模型：場次 vs 歷史勝率（顏色表示技能分數）。

圖 4-4: BT 模型與 BaS 模型在場次與勝率關係中的技能分數散佈圖。

階段	指標	BaS	BT
第一階段 (Test)	AUC	0.6459	0.5949
	Accuracy	0.6116	0.5724
	Log Loss	0.6617	0.8690
第二階段 (Test)	AUC	0.6815	0.6133
	Accuracy	0.6389	0.5830
	Log Loss	0.6449	0.7978

表 4-3: BaS 與 BT 模型性能比較：比較兩模型在第一階段與第二階段的 Test 性能，包括 AUC、Accuracy 及 Log Loss 值。

檢定方法與目標	統計量	p 值
DeLong Test (AUC)	$z = 4.3986$	1.0894×10^{-5}
McNemar Test (Accuracy)	$\chi^2 = 19.8843$	8.2272×10^{-6}

表 4-4: Final Retraining 後 BaS 與 BT 模型性能差異的顯著性檢定結果。

不確定性研究

為進一步解釋 BaS 模型在效能上的優勢，以下分析設計中 σ_i 的學習行為。此處的 σ_i 為技能後驗分布的標準差，用於度量後驗不確定性，反映樣本資訊量與推論精度的差異。

首先，本文統計所有選手於訓練結束後的 σ_i 分布，結果顯示多數樣本的 σ_i 隨訓練逐步下降，驗證模型具備有效的「不確定性收斂」能力，在全部 1151 名選手中，最終 σ_i 仍高於先驗設定 ($\sigma_i > 1.0$) 者僅 19 名，比例約 1.65%，且這些

選手多數上場次數不足五場，顯示資料量不足為導致高不確定度的主要原因（見表 4-5）。

此外，進一步選擇表中 σ 最低的前五名選手，追蹤其 σ 隨週期 \times 批次變化的更新（圖 4-5），觀察到期曲線局部雖呈現鋸齒狀（當批次預測失誤時會短暫回升），但長期趨勢仍穩定下降並收斂，且由於變分推論中包含 KL 散度先驗約束項，後驗不確定性並不會無限制地趨近於零，而是會在一個受正則化項控制的範圍內達到平衡，最終收斂於反映資料資訊量與先驗約束之間權衡的穩定水平。此結果驗證了「隨樣本累積、迭代次數增加、預測正確率提高，正確梯度在期望上占優，不確定性逐步下降並收斂」的理論推導（詳見附錄 A）。

表 4-5: 按 σ 值排序的選手基本資料：其中 μ 表示技能值， σ 表示技能不確定性。

ID	上場次數	勝率	技能值 (μ)	不確定性 (σ)
132	862	0.6752	1.1135	0.4212
438	974	0.6294	0.7710	0.4223
1	973	0.6536	1.0068	0.4264
355	920	0.6967	0.8855	0.4300
544	908	0.5441	0.5250	0.4305
⋮				
1121	3	0.3333	-0.0247	1.0040
1140	1	1.0000	0.0515	1.0046
830	2	0.5000	0.0228	1.0050
1017	6	0.5000	0.0420	1.0057
1254	5	0.6000	0.1115	1.0059

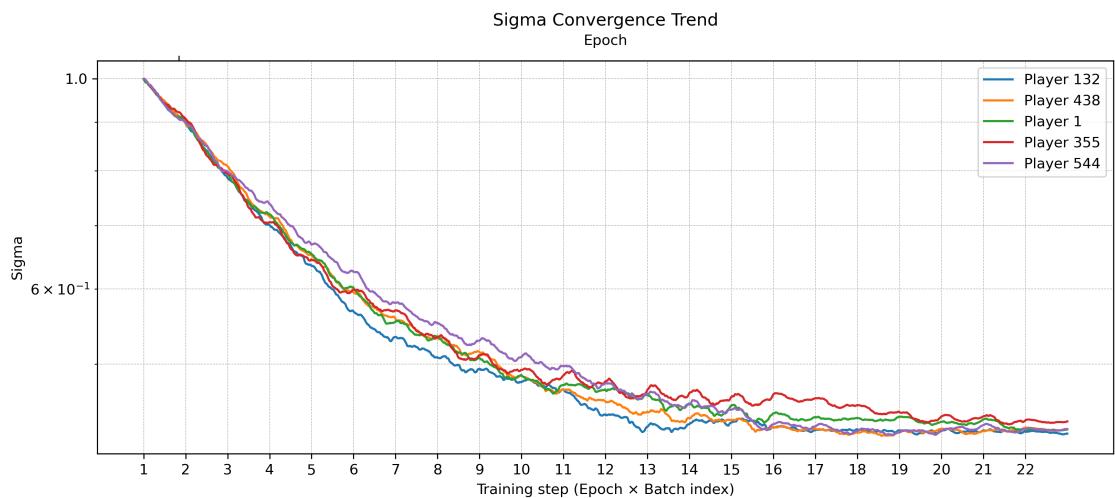


圖 4-5: 選手 σ 收斂趨勢圖

四、特徵交互模組 (FiN)

承接前節對 BaS 模組的詳細分析，本節聚焦於另一關鍵組件——特徵交互模組 (FiN)。和前述 BaS 模組的貝氏後驗建模不同，FiN 模型專注於特徵交互結構的神經網路設計，主要包含合作模組 (Cooperation Module, Coop) 與競爭模組 (Competition Module, Comp)。兩者皆採用相似的網路架構，包含球員信息向量編碼、向量映射層、pairwise score MLP 與可選的注意力機制，僅在功能分工與變數命名上略有差異。本章節統一彙整說明兩模組的超參數設定與搜尋策略，提供完整且一致性的比較基準。

超參數搜尋空間與最佳組合結果

為比較合作模組 (Coop) 與競爭模組 (Comp) 在一致超參數設計下的表現，本研究先定義統一的超參數搜尋空間，並採取隨機搜索 (Random Search) 策略，各模組分別隨機抽取 100 組進行訓練與驗證。搜尋範圍詳見表 4-6，其中表中的 $\mathcal{U}(a, b)$ 表示在區間 $[a, b]$ 上進行均勻分布 (uniform distribution) 的隨機抽樣，以驗證集 AUC 作為評估指標，表 4-7 呈現兩模組各自表現最佳的前五組超參數配置，並列出 AUC 範圍，作為後續分析之基準。

表 4-6: FiN 模組超參數搜尋空間

超參數	符號	抽樣分布
球員信息向量維度	d_a	$d_a \sim \mathcal{U}(16, 64)$
向量映射中間層維度	d_{mid}	$d_{\text{mid}} \sim \mathcal{U}(16, 64)$
MLP 分數隱藏層維度	d_{mlp}	$d_{\text{mlp}} \sim \mathcal{U}(16, 64)$
丟棄率 (Dropout)	r	$r \sim \mathcal{U}(0.1, 0.4)$
是否使用注意力機制	NeedAtt	{True, False}

表 4-7: 合作與競爭模組隨機搜索 5 次種子試驗的前五超參數組合

合作模組						競爭模組					
d_a	d_{mid}	NeedAtt	Dropout	d_{mlp}	AUC	d_a	d_{mid}	NeedAtt	Dropout	d_{mlp}	AUC
49	29	True	0.169	56	0.6930	50	37	True	0.364	53	0.6931
22	63	False	0.398	32	0.6916	30	21	True	0.380	45	0.6918
36	42	True	0.181	50	0.6912	41	59	True	0.211	44	0.6904
47	45	True	0.138	18	0.6911	23	42	True	0.184	47	0.6892
53	48	False	0.395	42	0.6909	17	28	False	0.320	30	0.6873
超參數組合驗證 AUC 範圍						超參數組合驗證 AUC 範圍					
[0.6748, 0.6930]						[0.6735, 0.6931]					

競爭與合作模組整體預測性能

為驗證研究方法章中提出的 EMA 動態特徵設計對模組效能的影響（見式3.14），表 4-8 呈現競爭模組與合作模組於兩階段測試集上的整體預測表現，分析引入動態特徵是否能提升模型效果。

表 4-8：兩階段測試結果中競爭與合作模組之效能比較

模型設計	競爭模組		合作模組	
	AUC	ACC	AUC	ACC
第一階段				
加入動態特徵	0.7263	0.6656	0.7217	0.6628
未加入動態特徵	0.6397	0.6039	0.6440	0.6066
第二階段：最終測試表現				
加入動態特徵	0.7313	0.6679	0.7244	0.6630
未加入動態特徵	0.6737	0.6303	0.6790	0.6324

整體而言，表 4-8 的結果驗證了本研究的設計理念：引入動態特徵（EMA）可有效提升模型在跨時序預測下的準確率與穩健性。相比僅靠陣容信息的設定，加入時序特徵後能在不同賽季及陣容變動的情境下，捕捉到球員近期狀態及趨勢，降低對固定對陣結構的過度擬合風險，為建立可跨季適用的對局預測模型提供更具實務價值的解決方案。

選手合作競爭分數

在整體預測表現驗證後，為深入分析 FiN 模組所學到的合作與競爭結構，本研究進一步觀察 Pairwise Score，即兩球員之競爭與合作交互分數，且為減少偶發樣本對模型估計的影響，本研究以「至少打一整季」為原則，設計兩道篩選規則，以確保樣本中球員間交互分數的觀測具有足夠代表性與穩定性：

- 隊內合作：同隊至少 50 場（約等於一季 60% 出賽），以確保合作關係具實質意義。
- 競爭對位：至少 5 場直接對位，排除例行賽偶發對位，涵蓋至少一次系列賽交手。

作為模型在實際案例層級應用的示例，以下分別分析 LeBron James 與 Stephen Curry 兩位明星球員在 2013–2023 資料期間的 Pairwise Score 結構。

表 4-9: LeBron 之 Pairwise Scores : 競爭與合作分數

LeBron 攻 → 守			攻 → LeBron 守			隊內合作		
T_A	T_B	$score$	T_B	T_A	$score$	T	T	$score$
James	Jennings	0.525	Durant	James	0.088	James	McGee	0.22
James	Lillard	0.391	Green	James	0.067	James	Haslem	0.21
James	Young	0.391	Doncic	James	0.064	James	Irving	0.19
\vdots								
James	Boozer	-0.002	Prince	James	-0.318	James	Green	0.03
James	Randle	-0.002	Kidd– Gilchrist	James	-0.340	James	Kuzma	0.03
James	Garnett	-0.003	Bogdanović	James	-0.387	James	Schröder	0.03
$score \in [-0.555, 0.566]$			$score \in [-0.806, 0.405]$			$score \in [-0.171, 0.359]$		

表 4-10: Stephen Curry 之 Pairwise Scores : 競爭與合作分數

Curry 攻 → 守			攻 → Curry 守			隊內合作		
T_A	T_B	$score$	T_B	T_A	$score$	T	T	$score$
Curry	Westbrook	0.430	Durant	Curry	0.257	Curry	Bogut	0.36
Curry	Irving	0.408	Chris Paul	Curry	0.230	Curry	Green	0.35
Curry	Redick	0.368	Leonard	Curry	0.178	Curry	Pachulia	0.15
\vdots								
Curry	Gobert	0.000	Chandler	Curry	-0.467	Curry	Poole	0.00
Curry	Aminu	-0.001	Jordan	Curry	-0.471	Curry	Durant	0.01
Curry	Vučević	-0.001	LaVine	Curry	-0.504	Curry	Wiggins	0.01
$score \in [-0.555, 0.566]$			$score \in [-0.806, 0.405]$			$score \in [-0.171, 0.359]$		

Pairwise Score 合理性分析與討論

本節將深入檢視模型學到的選手間交互分數，評估其是否能合理對應實際比賽策略與歷史對位結果，從表 4-9 與表 4-10 估得的 *Pairwise Scores* 與公開比賽紀錄整體趨勢一致，顯示其在捕捉競爭與合作效應時具備良好解釋力。為避免符號混淆，以下說明記號意義：

- 攻擊 → 防守 (offense → defense)：分數越高代表進攻者在該對位擁有更大優勢；負值則表示防守者抑制效果較佳。
- 對手攻擊 → 我方防守 (rival offense → our defense)：分數越低 (越負) 代表我方防守壓制力越強；正值則顯示對手有明顯進攻優勢。
- 隊內合作分數：正值愈高代表兩名隊友同時在場時能產生更強正面化學效應；負值或趨近零則顯示互補度有限。

競爭分數 (Competition Scores)

- **LeBron James**

- **LeBron 攻 → 對手守**

高分：Brandon Jennings、Damian Lillard、Trae Young——三位均為體型較小且主要以外線進攻為主的後衛，歷史賽事顯示 LeBron 經常利用身材優勢背身或切入得分，模型給予高優勢分數。

低分：Kevin Garnett、Carlos Boozer、Julius Randle——皆為身材條件相近且對抗能力更強的防守者，能在身體對位上限制 LeBron 的進攻，模型分數亦與此類歷史對戰情況相符。

- 對手攻 → **LeBron 守**

高分：Kevin Durant、Luka Dončić——此類具備高水準單打能力的進攻核心能在 LeBron 面前持續施加威脅，模型呈現較高分數，對應歷史系列賽中 LeBron 承受的防守壓力。低分：Tayshaun Prince、Michael Kidd-Gilchrist——顯示 LeBron 面對進攻依賴性較低的側翼時能有效限制對手。

- **Stephen Curry**

- **Curry 攻 → 對手守**

高分：Russell Westbrook、Kyrie Irving——歷年對戰中 Curry 往往取得高得分並創造助攻，顯示模型能捕捉到此進攻優勢。

低分：Rudy Gobert、DeAndre Jordan——具備良好防守範圍與臂展的內線防守者能有效延阻傳球或干擾出手路徑，模型分數接近零或為負，顯示進攻端優勢受限。

- 對手攻 → **Curry 守**

高分：Chris Paul、Kevin Durant——歷史季後賽中兩人經常透過單打或擋拆進攻針對 Curry，模型的高分亦顯現出此類對位時防守端的相對不足。

低分：Tyson Chandler、DeAndre Jordan——主要依賴禁區終結的中鋒在對位時對 Curry 的進攻威脅有限，模型分數捕捉到防守端壓力較小的特性。

整體而言，此方向性的分段結果顯示模型能在不同攻守角色下區分進攻優勢與防守抑制效果，並在多數情況下與歷史交手特性相符。

合作分數 (Cooperation Scores)

- **LeBron James 與 Kyrie Irving——高分**

此組合被評為「聯盟最致命的進攻搭檔之一」Lowe (2017)，模型亦給予顯著合作加成，顯示其有效捕捉兩人間的互補特性。

- **LeBron James 與 JaVale McGee、Udonis Haslem——高分**

McGee 與 Haslem 皆擅長籃下終結與接應，能有效配合 LeBron 的傳球視野與切入牽制。此類「傳球 + 接應」型合作常見於 LeBron 所屬奪冠球隊的體系中，模型對此組合給予高分，顯示其強大捕捉能力。

- **Stephen Curry 與 Draymond Green、Andrew Bogut——高分**

三人於 2015–2018 年期間構成 Golden State Warriors 核心進攻組合。Green 擅長高位策應與擋拆手遞手，Bogut 擅長籃下終結與掩護，兩者皆有助於發揮 Curry 的無球跑動與外線牽制。模型對此組合賦予高合作分數，合理反映出其戰術互補性。

- **Durant-Curry 合作分數偏低 —— 模型侷限**

此組合雖在歷史上同場時展現出極高的進攻效率，但因團隊定位與角色分配特性，使模型未能完全呈現其真實效益；後續研究可考慮納入站位熱圖與角色分配 (*positioning / role allocation*) 等空間特徵，以進一步補強雙核心分工體系的量化解釋力。

整體而言，多數 Pairwise Score 足以呼應歷史系列賽勝負走勢，然而仍有少數組合（例如 Durant-Curry）因團隊定位與角色分配特性，使模型未能完全呈現其真實效益；後續研究可考慮納入站位熱圖與角色分配 (*positioning / role allocation*) 等空間特徵，以進一步補強雙核心分工體系的量化解釋力。

五、BaSFiN 模型設計比較

在前述章節中，本研究已分別詳細介紹貝氏技能模組 (BaS)、特徵交互模組 (FiN) 等各子模組的設計細節與獨立效能表現。然而，真實的對局預測場景中，往往需要整合多種訊息來源與建模觀點，才能全面捕捉球員技能分布、隊伍合作結構與對戰非遞移性等複雜特徵。因此，本節進一步討論並比較 BaSFiN 模型在進行多模組整合時的架構設計與訓練策略，旨在評估各種組合方案在最終對局預測任務上的整體效果。

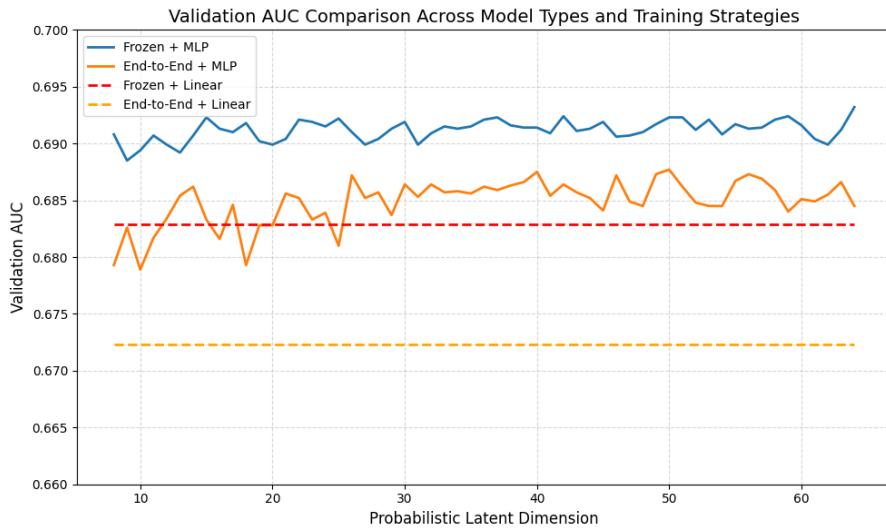


圖 4-6: 不同訓練策略與模型架構下的驗證 AUC 比較圖

本文設計四種整合策略並進行比較，結合了兩個主要設計維度：(1) 訓練策略（端對端聯合訓練 vs. 預訓練後凍結骨幹）以及 (2) 最終機率層結構（線性層 vs. 多層感知機 MLP），以系統性評估不同方案的整體效果。如圖 4-6 所示，採用凍結策略並使用 MLP 機率層的設計可在不同機率中間層數維度下穩定取得較高的驗證 AUC，顯示了模組化預訓練與非線性彙整層對於遷移到新領域的優勢。

為了進一步分析端對端訓練下各子模組的學習狀況，圖 4-7 顯示了訓練過程中各子模組的參數梯度貢獻占比變化。此處的「梯度貢獻」是以模組內所有可訓練參數的絕對梯度計算而得，公式如下：

$$\text{paramgrad}_{\text{module}} = \sum_{\text{parameters}} |\nabla \mathcal{L}| \quad (4.21)$$

$$\text{Contribution}_{\text{module}}(\%) = \frac{\text{paramgrad}_{\text{module}}}{\sum_{\text{all modules}} \text{paramgrad}} \times 100\% \quad (4.22)$$

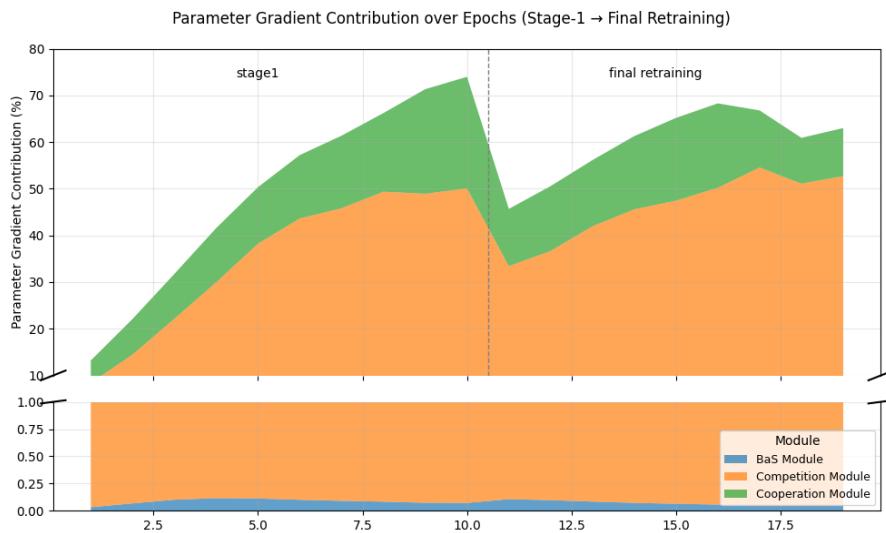


圖 4-7: 子模組訓練階段的梯度貢獻占比圖

此指標可視為反向傳播過程中各模組獲得的參數更新信號強度，進而反映其相對的學習貢獻。圖中可見，競爭模組（Competition Module）與合作模組（Cooperation Module）在大多數 epoch 中主導了梯度更新，而 BaS 模組（BaS Module）的更新幅度則顯著較低，約為 0.14%。這顯示在端對端聯合訓練下（詳見圖 3-1），優化方向將傾向其他模組而忽略 BaS 模組的調整。儘管 BaS 模組在預測能力上相對較弱，其基於貝氏推論的結構能在不確定情境下提供穩定、保守的推論基礎；若長期更新不足，將可能削弱整體模型在多樣化場景下的穩健性與解釋性。

模型比較

表 4-11: 不同模型在不同年份範圍的預測 AUC 比較 (mean \pm std)

Model	2009–2020	2010–2021	2011–2022	2012–2023	2013–2024
BT	0.6175 ± 0.0139	0.5835 ± 0.0095	0.5966 ± 0.0159	0.5956 ± 0.0150	0.6414 ± 0.0127
NAC	0.5876 ± 0.0362	0.5367 ± 0.0076	0.5664 ± 0.0230	0.5624 ± 0.0165	0.5724 ± 0.0268
BaSFN	0.7036 ± 0.0014	0.6691 ± 0.0010	0.6880 ± 0.0009	0.6725 ± 0.0018	0.7288 ± 0.0012

整體而言，表 4-11 顯示，本研究所提出的 BaSFN 模型在所有年份跨度的預測情境下，AUC 均顯著優於 BT 與 NAC 基線模型，且其標準差亦較小，顯示出在跨季資料分布變動下的穩定性與一致性表現。此結果支持了本研究設計理念：結合貝氏技能推論、特徵交互建模以及時序動態特徵的整合式架構，能有效提升傳統體育賽事預測場景中的泛化能力與實務應用價值。

第五章 結論

本研究結合貝氏技能模組以刻畫選手的基本能力，提供全域且穩定的預測基礎；並進一步將動態 EMA 特徵融入合作與競爭模組中，以捕捉隊內化學效應及對位競爭優勢對比，增強對局層級的預測解釋力。訓練策略上採用 Frozen Backbone 以確保各子模組先充分學習，再進行機率層微調，能有效平衡跨賽季泛化性與特定對局的細部適應性，最終顯著提升模型整體的預測性能。

實驗結果顯示，本研究所提出的 BaSFiN 模型在多次試驗中取得平均驗證 AUC 顯著高於 BT 與 NAC 等基線方法，展現了跨不同對局場景下穩健的預測表現。此外，子模組所學得的 Pairwise Scores 能對應多數歷史系列賽的勝負趨勢，提供教練團隊針對對手特性與潛在對位優勢進行分析的參考依據。

本研究也展示了透過分段式訓練策略將領域知識結構納入機器學習流程的可行性，能在保留對抗賽事非遞移性特徵的同時，避免模型過度擬合並維持在未見資料上的良好表現。未來可進一步結合站位熱圖、角色分配（positioning／role allocation）等空間特徵，以強化對分工體系及現代戰術設計的建模解釋能力，並期望能實際應用於球隊對局分析、賽前準備及策略決策支援中，發揮實際賽事管理的應用價值。

參考文獻

- Blundell, C., Cornebise, J., Kavukcuoglu, K., and Wierstra, D. (2015). Weight uncertainty in neural networks. In *Proceedings of the 32nd International Conference on Machine Learning*, pages 1613–1622. PMLR.
- Bradley, R. A. and Terry, M. E. (1952). Rank analysis of incomplete block designs: I. the method of paired comparisons. *Biometrika*, 39(3/4):324–345.
- Chen, S. and Joachims, T. (2016a). Modeling intransitivity in matchup and comparison data. In *Proceedings of the Ninth ACM International Conference on Web Search and Data Mining*, pages 227–236.
- Chen, S. and Joachims, T. (2016b). Predicting matchups and preferences in context. In *Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, pages 775–784.
- Glorot, X. and Bengio, Y. (2010). Understanding the difficulty of training deep feedforward neural networks. In *Proceedings of the Thirteenth International Conference on Artificial Intelligence and Statistics*, pages 249–256. JMLR Workshop and Conference Proceedings.
- Graves, A. (2011). Practical variational inference for neural networks. *Advances in neural information processing systems*, 24.
- Gu, Y., Liu, Q., Zhang, K., Huang, Z., Wu, R., and Tao, J. (2021). Neuralac: Learning cooperation and competition effects for match outcome prediction. In *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, volume 35, pages 4072–4080.
- Herbrich, R., Minka, T., and Graepel, T. (2006). Trueskill™: a bayesian skill rating system. *Advances in neural information processing systems*, 19.
- Li, M., Wu, J., Wang, X., Chen, C., Qin, J., Xiao, X., Wang, R., Zheng, M., and Pan, X. (2023). Aligndet: Aligning pre-training and fine-tuning in object detection. In *Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision*, pages 6866–6876.

Loshchilov, I. and Hutter, F. (2017). Decoupled weight decay regularization. *arXiv preprint arXiv:1711.05101*.

Lowe, Z. (2017). Why the lebron-kyrie pick-and-roll is the deadliest weapon in the nba.

Paszke, A., Gross, S., Massa, F., Lerer, A., Bradbury, J., Chanan, G., Killeen, T., Lin, Z., Gimelshein, N., Antiga, L., Desmaison, A., Köpf, A., Yang, E. Z., DeVito, Z., Raison, M., Tejani, A., Chilamkurthy, S., Steiner, B., Fang, L., Bai, J., and Chintala, S. (2019). Pytorch: An imperative style, high-performance deep learning library. *CoRR*, abs/1912.01703.

Rusu, A. A., Rabinowitz, N. C., Desjardins, G., Soyer, H., Kirkpatrick, J., Kavukcuoglu, K., Pascanu, R., and Hadsell, R. (2016). Progressive neural networks. *arXiv preprint arXiv:1606.04671*.

Seabold, S. and Perktold, J. (2010). Statsmodels: Econometric and statistical modeling with python. In *Proceedings of the 9th Python in Science Conference*.

附錄 A：不確定性參數 σ_i 變化推導

第一節 背景與定義

一、機率假設

本節說明本研究中貝氏技能模組（BaS）所採用的機率建模假設，涵蓋選手技能的先驗分佈、變分後驗近似形式、對局勝率的機率模型，以及資料觀測下的對數概似函數。

先驗分佈

假設每位選手 i 的潛在技能 s_i 服從標準常態先驗分佈：

$$P(s_i) = \mathcal{N}(0, 1), \quad \log P(s_i) = -\frac{1}{2}(s_i^2 + \log 2\pi).$$

後驗分佈

使用變分推斷，設 s_i 的變分後驗分佈為對角高斯分佈：

$$q(s_i | \theta_i) = \mathcal{N}(s_i | \mu_i, \sigma_i^2),$$

其中 $\theta_i = (\mu_i, \sigma_i)$ ，並通過重新參數化表示：

$$s_i = \mu_i + \sigma_i \cdot \epsilon_i, \quad \epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

機率模型

對於第 n 場比賽，設 T_A 、 T_B 為兩隊選手集合，則隊伍表現差定義為：

$$\Delta_n = \sum_{i \in T_A} s_i - \sum_{i \in T_B} s_i, \quad v_n = \sqrt{\sum_{i \in T_A} \sigma_i^2 + \sum_{i \in T_B} \sigma_i^2 + 2.5}, \quad (1)$$

勝率為：

$$p_n = \Phi \left(\frac{\Delta_n}{v_n} \right) = \Phi(z_n) \quad (2)$$

其中 $\phi(\cdot)$ 為標準常態分布的 PDF， $\Phi(\cdot)$ 為其 CDF。

資料與概似

設訓練資料為 $\mathcal{D} = \{y_n\}_{n=1}^N$ ，其中 $y_n = 1$ 表示 T_A 勝。對數概似為：

$$\log P(\mathcal{D} | s) = \sum_{n=1}^N [y_n \log p_n + (1 - y_n) \log(1 - p_n)]. \quad (3)$$

二、變分推論與梯度推導

本節針對貝氏技能模組 (BaS) 所採用的變分推論流程，詳細推導其損失函數（變分自由能）與參數梯度，作為後續不確定性學習機制的理論基礎。

損失函數與目標

使用變分自由能作為損失函數：

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \mathcal{F}(\mathcal{D}, \theta) = \underbrace{\text{KL}[q(\mathbf{s} | \theta) \| P(\mathbf{s})]}_{\text{解析解可得}} + \underbrace{\mathbb{E}_{q(\mathbf{s})}[-\log P(\mathcal{D} | \mathbf{s})]}_{\text{需抽樣估計}} \\ &= \text{KL}[q(\mathbf{s} | \theta) \| P(\mathbf{s})] + \mathbb{E}_{q(\epsilon)}[f(h(\epsilon, \theta), \theta)], \\ &\approx \text{KL}[q(\mathbf{s} | \theta) \| P(\mathbf{s})] + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M f(h(\epsilon^{(m)}, \theta), \theta), \quad \epsilon^{(m)} \sim \mathcal{N}(0, 1) \end{aligned}$$

其中 $f(h(\epsilon^{(m)}, \theta), \theta) = -\log P(\mathcal{D} | \mathbf{s}^{(m)})$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_i} \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left(\frac{\partial f^{(m)}}{\partial \mathbf{s}^{(m)}} \frac{\partial \mathbf{s}^{(m)}}{\partial \sigma_i} + \frac{\partial f^{(m)}}{\partial \sigma_i} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \text{KL}[q(\mathbf{s} | \theta) \| P(\mathbf{s})] \quad (4)$$

其中 KL 項 = $\sum_{i=1}^K \frac{1}{2} (\sigma_i^2 + \mu_i^2 - 1 - 2 \log \sigma_i)$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_i} \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left(\frac{\partial f^{(m)}}{\partial \mathbf{s}^{(m)}} \cdot \epsilon_i^{(m)} + \frac{\partial f^{(m)}}{\partial \sigma_i} \right) + \left(\sigma_i - \frac{1}{\sigma_i} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial f^{(m)}}{\partial s_i^{(m)}} = \frac{\partial \log P(\mathcal{D} | s^{(m)})}{\partial s_i^{(m)}} = \sum_{n:i \in T_A} \left[\frac{y_n}{p_n^{(m)}} - \frac{1-y_n}{1-p_n^{(m)}} \right] \cdot \phi\left(\frac{\Delta_n^{(m)}}{v_n}\right) \cdot \frac{1}{v_n}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial f^{(m)}}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial \log P(\mathcal{D} | s^{(m)})}{\partial \sigma_i} = \sum_{n=1}^N \phi(z_n^{(m)}) \cdot \left(\frac{\epsilon_i^{(m)}}{v_n} - \frac{\Delta_n^{(m)} \sigma_i}{v_n^3} \right) \cdot \left[\frac{y_n}{p_n^{(m)}} - \frac{1-y_n}{1-p_n^{(m)}} \right]. \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} &\approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[\left(- \sum_{n:i \in T_A} \left[\frac{y_n}{p_n^{(m)}} - \frac{1-y_n}{1-p_n^{(m)}} \right] \cdot \phi\left(\frac{\Delta_n^{(m)}}{v_n}\right) \cdot \frac{1}{v_n} \cdot \epsilon_i^{(m)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(- \sum_{n=1}^N \phi(z_n^{(m)}) \cdot \left(\frac{\epsilon_i^{(m)}}{v_n} - \frac{\Delta_n^{(m)} \sigma_i}{v_n^3} \right) \cdot \left[\frac{y_n}{p_n^{(m)}} - \frac{1-y_n}{1-p_n^{(m)}} \right] \right) \right] + \left(\sigma_i - \frac{1}{\sigma_i} \right) \\ &= \mathbb{E}_{q(\epsilon)} \left[\left(- \sum_{n:i \in T_A} \left[\frac{y_n}{p_n^{(m)}} - \frac{1-y_n}{1-p_n^{(m)}} \right] \cdot \phi\left(\frac{\Delta_n^{(m)}}{v_n}\right) \cdot \frac{1}{v_n} \cdot \epsilon_i^{(m)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(- \sum_{n=1}^N \phi(z_n^{(m)}) \cdot \left(\frac{\epsilon_i^{(m)}}{v_n} - \frac{\Delta_n^{(m)} \sigma_i}{v_n^3} \right) \cdot \left[\frac{y_n}{p_n^{(m)}} - \frac{1-y_n}{1-p_n^{(m)}} \right] \right) \right] + \left(\sigma_i - \frac{1}{\sigma_i} \right). \quad (8) \end{aligned}$$

由於 ϵ_i 的期望為零，蒙地卡羅平均下可忽略含 ϵ_i 的項，最終使 $\partial F / \partial \sigma_i$ 的符號主要來自以下兩個項目：

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_i} \propto \underbrace{\left[\left(\sigma_i - \frac{1}{\sigma_i} \right) - \sum_{n=1}^N \overline{\phi(z_n)} \frac{\Delta_n \sigma_i}{v_n^3} \left(\frac{y_n}{p_n} - \frac{1-y_n}{1-p_n} \right) \right]}_{\text{先驗相似項梯度}} \quad (9)$$

其中 $\overline{(\cdot)}$ 表示對抽樣樣本的蒙地卡羅平均，以下推導為簡明起見採單一抽樣樣本近似形式，但在實作時可用多筆抽樣樣本平均以降低方差。

三、梯度方向

為分析模型中不確定性參數 σ_i 的學習趨勢，本節整理其更新規則與對應的梯度關係，說明當 $\partial F / \partial \sigma_i$ 為正或負時， σ_i 將如何變動，進而反映模型信心的調整方向。

$$\sigma_i \leftarrow \sigma_i - \alpha \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} \quad \alpha > 0, \quad \Delta \sigma_i = \begin{cases} \text{減小,} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} > 0, \\ \text{增大,} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} < 0. \end{cases} \quad (10)$$

第二節 先驗 KL 項探討

由於前述式(9)已顯示 $\frac{\partial F}{\partial \sigma_i}$ 的主要貢獻可分為「先驗相似項」與「概似項」兩部分，以下首先針對其中的先驗 KL 項進行詳細推導與解釋。

變分自由能中的 KL 散度為

$$KL[q(\mathbf{s} | \theta) \| P(\mathbf{s})] = \sum_{i=1}^K \frac{1}{2} (\sigma_i^2 + \mu_i^2 - 1 - 2 \log \sigma_i) \quad (11)$$

根據式9可得其對 σ_i 的解析梯度為

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_i} KL = \sigma_i - \frac{1}{\sigma_i}, \quad (12)$$

本研究稱之為先驗相似項。其作用與物理意義可整理如下：

名稱	公式中的項	符號判斷與效果
先驗相似項	$\sigma_i - \frac{1}{\sigma_i}$	$\text{sign}\left(\sigma_i - \frac{1}{\sigma_i}\right) = \begin{cases} < 0, & 0 < \sigma_i < 1, \\ > 0, & \sigma_i > 1 \end{cases} \Rightarrow \text{推動} \sigma_i \text{收斂至} 1$

表 A-1 : KL 項對 σ_i 的解析梯度與其趨勢控制效果

KL 項作用分析

- KL 項對 σ_i 的解析梯度為 $\sigma_i - \frac{1}{\sigma_i}$ ，為一單調遞增函數，在 $\sigma_i = 1$ 處為 0。
- 當 $\sigma_i < 1$ 時，梯度為負，更新方向使 σ_i 增大，對應模型對該潛在技能尚不具備充分信心時的「補償性擴張」。
- 當 $\sigma_i > 1$ 時，梯度為正，推動 σ_i 收縮，限制過大不確定性所可能造成的模型遲鈍與資訊弱化。
- 因此，KL 項不參與資料適配，而是作為一個結構性正則項，透過將 σ_i 向 1 推動，提供穩定學習的收斂中心，在不確定性學習中扮演「先驗約束與信心

平衡器」的角色。

第三節 概似項探討

在式(9)中，我們已將 $\frac{\partial F}{\partial \sigma_i}$ 的主要來源拆解為「先驗相似項」與「概似項」兩部分，且上一章已詳細分析了先驗 KL 項的收斂作用，本章則進一步探討概似項的貢獻與行為。

考慮到訓練過程中資料是以批次樣本為單位進行累積更新，以下分析先從最簡單的單一樣本 ($N = 1$) 情境著手，推導其梯度方向與符號特性。

一、單一樣本 ($N = 1$) 的梯度符號探討

根據式910可將概似向梯度整理為分段形式：

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_i} \propto \Delta_1 \begin{cases} \frac{1}{p_1}, & y_1 = 1, \\ -\frac{1}{1-p_1}, & y_1 = 0, \end{cases}$$

由於 $p_n \in (0, 1)$; $\forall n$ ，故正負性等價於：

$$\text{sign}\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_i}\right) = \begin{cases} \text{sign}(\Delta_1), & y_1 = 1, \\ -\text{sign}(\Delta_1), & y_1 = 0. \end{cases}$$

換句話說：

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_i} = \begin{cases} > 0, & (y_1 = 1, \Delta_1 > 0) \text{ 或 } (y_1 = 0, \Delta_1 < 0), \\ < 0, & (y_1 = 1, \Delta_1 < 0) \text{ 或 } (y_1 = 0, \Delta_1 > 0). \end{cases} \quad (13)$$

根據式(13)，當模型預測正確， $\frac{\partial F}{\partial \sigma_i} > 0$ ，導致 σ_i 隨更新規則而減小，反映模型對該特徵的不確定性降低；反之，若預測錯誤，則 $\frac{\partial F}{\partial \sigma_i} < 0$ ，使得 σ_i 增加，反映模型的不確定性提升。此時模型 σ_i 的變動幅度完全由單筆資料的成敗決定。

二、批次樣本 ($N \geq 1$) 的梯度期望

為了進一步理解在實際訓練時以批次樣本進行參數更新時的行為，本節考慮 $N \geq 1$ 的批次設定。為了更清楚地分析批次平均下的梯度方向，我們定義每筆樣本的「貢獻」為 g_n ：

$$g_n = \Delta_n \left[\frac{y_n}{p_n} - \frac{1-y_n}{1-p_n} \right], \quad \bar{g}^{(\text{batch})} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g_n. \quad (14)$$

若批次內預測正確樣本比例大於 50%，則 $\mathbb{E}[\bar{g}^{(\text{batch})}] > 0$ ，從而使概似項梯度 $\mathbb{E}[\partial F / \partial \sigma_i] > 0$ ，使 σ_i 在該更新後下降。

三、隨訓練輪數的累積效應

設整體訓練進行 T 次迭代，記 \bar{g}_t 為第 t 步的批次平均貢獻，則

$$\sum_{t=1}^T \bar{g}_t \quad \text{隨 } T \text{ 增加而累積.}$$

1. 早期階段：此時模型尚未學會有效判別，多數批次中正負 \bar{g}_t 值交錯，導致 σ_i 呈現波動，但整體趨勢仍往下降。
2. 訓練穩定後：模型參數 μ_i 已經收斂至能準確預測勝負，滿足以下條件：

$$\Delta_n > 0 \iff y_n = 1, \quad \Delta_n < 0 \iff y_n = 0,$$

故幾乎所有訓練步驟中皆有 $\bar{g}_t > 0$ 。在固定或遞減學習率下，

$$\sum_{t=1}^T \bar{g}_t \longrightarrow \text{常數},$$

使得 σ_i 以遞減但趨於平緩的方式收斂。

四、概似項分析結論

1. 批次平均：固定批次大小下，梯度等於各樣本貢獻平均；當正確預測佔優勢， σ_i 呈下降趨勢。

2. 隨訓練收斂：隨著訓練輪數增加，預測正確率提高，正向梯度在期望上佔優勢； σ_i 持續下降，最終與先驗相似正則項平衡，收斂於非零穩定值，避免過度自信亦不脫離先驗範圍。

第四節 總結

綜合式(9)可知

$$\text{sign}\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_i}\right) \approx \text{概似梯度所決定的符號} + \text{先驗相似項的微幅修正},$$

在訓練早期，由於模型尚未掌握資料特徵，預測誤差較大、正確率偏低，但梯度訊號強烈且明確，來自概似項的梯度通常幅度遠大於先驗項，導致不確定性參數 σ_i 呈現明顯下降趨勢，反映模型逐步「累積信心」的特性。

隨著訓練輪數增加，模型參數(μ_i)已被調整至能較準確預測比賽結果，使得每批樣本中預測正確的比例逐漸提高。由於正確樣本會在期望上提供負向梯度，而錯誤樣本的貢獻則較少，批次平均梯度在期望下穩定為負，推動 σ_i 緩慢下降，反映對該潛在技能的「收斂式信心增強」。

然而，若 σ_i 過度下降，模型將呈現過度自信。此時先驗相似項(由KL項導出)發揮正則化作用，提供對 $\sigma_i = 1$ 的吸引力。這能適度上拉不確定性，避免其趨近零或不合理擴張。

因此，整體而言， σ_i 的學習是一個動態平衡過程：在概似項的驅動下，根據預測成敗調整信心；在先驗項的約束下，維持穩健的信念範圍。最終， σ_i 收斂至一個非零、穩定的值——反映該特徵在模型中的判別力與不確定性，並有效兼顧資料學習與先驗信念，不僅有助於提升模型表現，也能降低過擬合的風險。