动态规划—斜率优化DP

适用情况

适用于求解最优解（最大、最小）问题。

可以将转移方程可以化为 $\begin{bmatrix} \text{仅与 } i \text{ 有关} & \text{是我们想要最大/最小化的} \\ \text{仅与 } j \text{ 有关} & \text{是已知的} \\ \text{与 } i \text{ 和 } j \text{ 都有关} & \text{是两项相乘} \end{bmatrix}$ 三部分的，

都可以考虑用斜率优化。

形式化的：原式可化为 $dp_i = \min\limits_{j \in [l,r]} \{\mathrm{y}_j - k_i x_j\} - a_i$，

其中 y、k、x 均为人为规定与 dp 和常数有关的式子。

应用

前置知识：初中几何

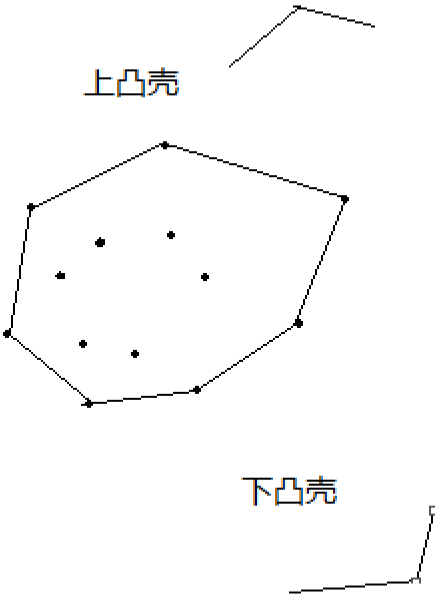
1. 斜率

   已知两个点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$，$\mathrm{B}(x_2, y_2)$，则直线 AB 斜率为 $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$。

2. 纵截距

   直线 $y = kx + b$ 的纵截距为 b；即与 y 轴交点的纵坐标。

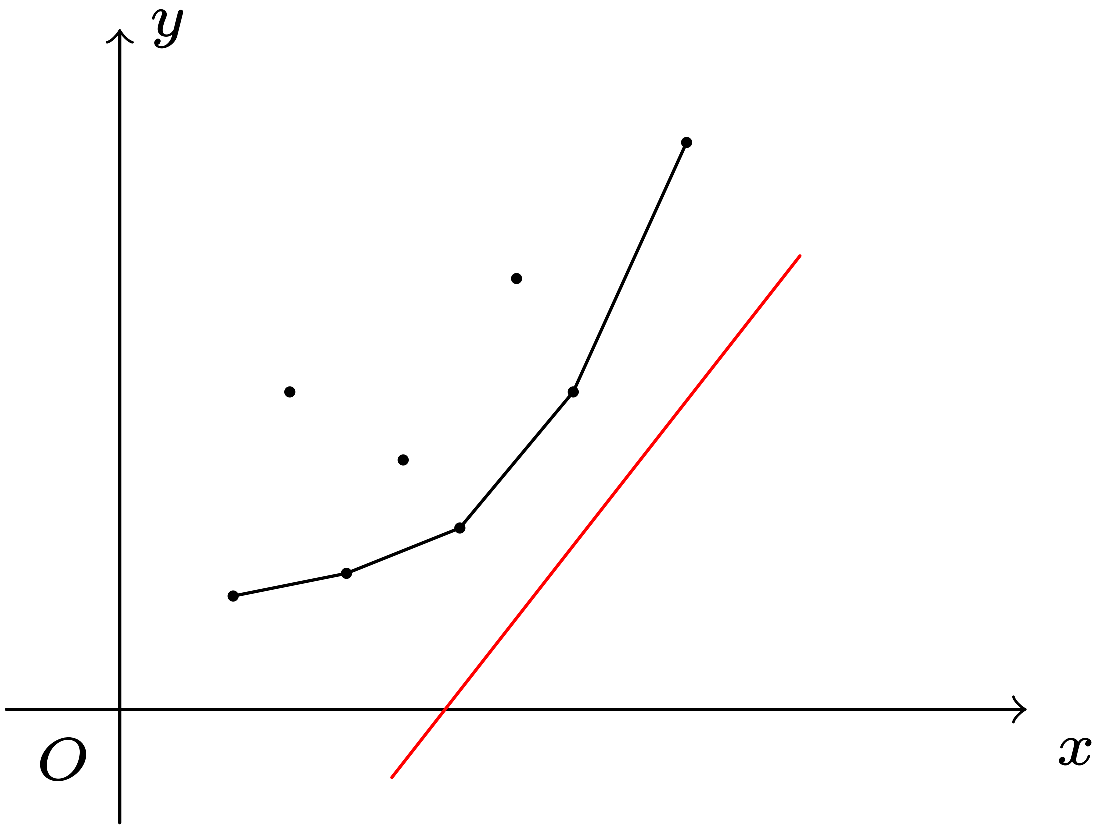
3．凸壳



求解步骤

设 A_i、B_i，使状态转移方程转化为	$f_i = \min(f_j + (A_i - B_j)^2)$
当 i 从 j 转移来时，丢掉 $\min$	$f_i = f_j + {A_i}^2 + {B_j}^2 - 2 \times A_i \times B_j$
将仅和 j 有关的放在左边，其他的放在右边	$f_j + {B_j}^2 = 2 \times A_i \times B_j + f_i - {A_i}^2$
设 $\begin{cases} y_j & = f_j + {B_j}^2 \\ k_i & = 2 \times A_i \\ x_j & = B_j \\ b_i & = f_i - {A_i}^2 \end{cases}$ ，原式转换为	$y_j = k_i x_j + b_i$
转移方程就写作	$b_i = \min\{y_j - k_i x_j\}$

我们把 (x_j, y_j) 看作二维平面上的点，则 k_i 表示直线斜率，b_i 表示一条过 (x_j, y_j) 的斜率为 k_i 的直线的截距；问题转化为，选择合适的 $j \in [1, i)$，最小化直线的截距。



如图，考虑最 native 的算法：我们将这个斜率为 k_i 的直线从下往上平移，直到有一个点 (x_p, y_p) 在这条直线上，则有 $b_i = y_p - k_i x_p$，这时 b_i 取到最小值。算完 f_i，我们就把 (x_i, y_i) 这个点加入点集中，以做为新的 DP 决策。那么，我们该如何维护点集？

容易发现，此时，b_i 所能取到最小值的点一定在下凸壳上。因此在寻找 p 的时候我们不需要枚举所有 $i-1$ 个点，只需要考虑凸包上的点。

具体的，设 $K(a,b)$ 表示过 (x_a, y_a) 和 (x_b, y_b) 的直线的斜率。考虑队列 $q_l, q_{l+1}, \ldots, q_r$，维护的是下凸壳上的点。

也就是说，对于 $l < i < r$，始终有 $K(q_{i-1}, q_i) < K(q_i, q_{i+1})$ 成立；而我们需要找到一个 $K(q_{e-1}, q_e) \le k_i < K(q_e, q_{e+1})$ 的 e（特别的，当 $e = l$ 或者 $e = r$ 时要特别判断）。

一、若 k_i 关于 i 单调:

可以单调队列维护凸包。

具体的，我们维护一个指针 e 来计算 b_i 最小值，即 q_e 是 i 的最优决策点，由于 k_i 是单调的，则 e 也一定单调，因此 e 的移动次数是均摊 $O(1)$ 的。

在插入一个点 (x_i, y_i) 时，我们要判断是否 $K(q_{r-1}, q_r) < K(q_r, i)$，如果不成立（不形成下凸壳）就将 q_r 弹出，直到等式满足。然后将 i 插入到 q 队尾。

这样我们就将 DP 的复杂度优化到了 $O(n)$；最后概括一下上述斜率优化模板题的算法：

1. 将初始状态入队。
2. 每次使用一条和 i 相关的直线 $f(i)$ 去切维护的凸包，找到最优决策，更新 dp_i。
3. 加入状态 dp_i。如果一个状态（即凸包上的一个点）在 dp_i 加入后不再是凸包上的点，需要在 dp_i 加入前将其剔除。

二、若 k_i 无单调性：

可以在凸壳上二分斜率。

直线的斜率没有单调性，则无法确定 q_l 是否可以弹出队列。

但是不影响原结构（凸壳）的单调性，因此我们在寻找最优决策点，也就是用直线切凸壳的时候，我们将单调队列找队首改为：凸壳上二分。我们二分查找满足 $K(q_{e-1}, q_e) \leq k_i < K(q_e, q_{e+1})$ 那条凸壳边，就可以找到最优决策。

三、若 x_i 无单调性：

见：CDQ/平衡树优化DP（未整理）。

示例代码

例题：P3195 玩具装箱。

```
const int N = 5e4 + 10;

int n, l;
int s[N];
int q[N], dp[N];

int Gx(int k1, int k2) { return (2 * s[k1]) - (2 * s[k2]); }
int Gy(int k1, int k2) { return (dp[k1] + s[k1] * s[k1] + 2 * l * s[k1]) - (dp[k2] + s[k2] * s[k2] + 2 * l * s[k2]); }
int Gv(int i, int j) { return dp[j] + (s[i] - s[j] - l) * (s[i] - s[j] - l); }

signed main() {
    scanf("%lld %lld", &n, &l); ++l;
```

```
    for (int i = 1; i <= n; ++i) { scanf("%lld", s + i); s[i] += s[i - 1] + 1; }
    int st = 0, ed = 1;
    for (int i = 1; i <= n; ++i) {
        while (st + 1 < ed && Gy(q[st + 1], q[st]) <= s[i] * Gx(q[st + 1], q[st])) ++st;
        dp[i] = Gv(i, q[st]);
        while (st + 1 < ed && Gx(q[ed - 1], q[ed - 2]) * Gy(i, q[ed - 1]) <= Gx(i, q[ed - 1]) * Gy(q[ed - 1], q[ed - 2])) --ed;
        q[ed++] = i;
    } printf("%lld\n", dp[n]);
    return 0;
}
```

练习题

见：https://www.luogu.com.cn/training/386804

Reference

[1] https://www.cnblogs.com/littlehb/p/15936381.html

[2] https://oi-wiki.org/dp/opt/slope/

合集：学习笔记

标签：算法 , 学习笔记

#1楼 2023-10-06 12:24 | itdef 回复 引用 删除

配图好用心，赞了

支持(0) 反对(0)