

# 目录

s));	态规划	经典题目
1.	基础影	<b>=</b>
	1.1.	上帝选人
	1.2.	最大正方形面积
	1.1.	方格取数
	1.2.	数字三角形 2
	1.3.	多重背包
	1.4.	混合背包
	1.5.	有依赖的背句问题



# 动态规划经典题目

# 1. 基础题目

# 1.1. 上帝选人

#### 【河野猫球】

世界上的人都有智商 IQ 和情商 IQ。我们用两个数字来表示人的智商和情商,数字大就代表其相应智商或情商高。现在你面前有 N 个人,这 N 个人的智商和情商均已知,请你选择出尽量多的人,要求选出的人中不存在任意两人;和 j,i 的智商大于 j 的智商但 i 的情商小于 j 的情商。

#### 【輸入】

第一行一个正整数 N,表示人的数量。

第二行至第 N+1 行,每行两个正整数,分别表示每个人的智商和情商。

#### 【鈴出】

仅一行,为最多选出的人的个数。

#### 【样例輸入】

```
3
100 100
120 90
110 80
```

### 【样例輸出】

2

# 【问题分析】

原题中的要求"不存在任意两人i和j,i的智商大于j的智商,但i的情商小于j的情商。" 将其转化成: 就是要求不存在i,j满足:如果(iq[i] > iq[j]),但(eq[i] < eq[j])。 即选出的人i和j要满足:(IQ[i] >= IQ[j]) and(EQ[i] >= EQ[j]) 或者(IQ[i] <= IQ[j]) and(EQ[i] <= EQ[j])

#### 【解题思路】

- 1. 将所有人 IQ (或者 EQ) 从大到小排序。
- 2. 求 EQ(或者 EQ ) 的最长非递增子序列长度

# 【参考代码】

```
#include <algorithm>
using namespace std;
struct node
{
    int iq,eq;
}e[1010];
int n,f[1010];
bool cmp(const node &x,const node &y)//排序比较函数,按iq降序排序
{
    return x.iq>y.iq;
}
int main()
{
    scanf("%d",&n);
    for(int i=l;i<=n;i++)
    {
        scanf("%d%d",&e[i].iq,&e[i].eq);
        f[i]=l;
    }
```



```
sort(e+1,e+n+1,cmp);
for(int i=n;i;i--)
{
    for(int j=i+1;j<=n;j++)
    {
        if(e[i].eq>=e[j].eq)
        {
            f[i]=max(f[i],f[j]+1);
        }
    }
}
int ans=f[1];
for(int i=2;i<=n;i++)
{
    ans=max(ans,f[i]);
}
printf("%d\n",ans);
return 0;
}</pre>
```

# 1.2. 最大正方形面积

# 【问题描述】

给定一个 R 行 C 列的 O1 矩阵,求一个最大的正方形全 1 子矩阵,并输出该最大正方形子矩阵的面积。

#### 【輸入】

第一行给出两个正整数 R.C,表示矩阵有 R 行 C 列;

接下来 R 行 C 列给出这个 O1 矩阵, 行内相邻两元素用一个空格隔开。

R, C<=1000 o

#### 【鈴出】

一个数,为该最大正方形子矩阵的面积。

# 【样例輸入】

# 【样例輸出】

9

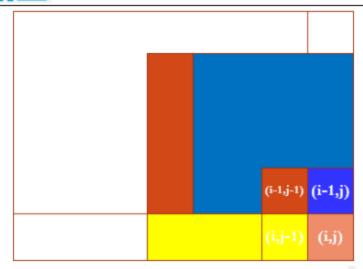
# 【算法分析】

f[i][j]定义为以(i,j)为右下角顶点的最大正方形边长。

# 最大正方形边长:

```
ans=max{f[i][j]} 1<=i<=R, 1<=j<=C。
最大面积: ans*ans
if(a[i][j]=0) f[i][j]=0;
```





```
if(a[i][j]==1)
情况 1: f[i][j]=f[i-1][j]+1
情况 2: f[i][j]=f[i-1][j-1]+1
情况 3: f[i][j]=f[i][j-1]+1
综上三种情况:
当 a[i][j]=1
f[i][j]=min{f[i][j-1], f[i-1][j], f[i-1][j-1]}+1;
```

# 【参考代码】

```
#include<iostream>
#include<cstring>
using namespace std;
const int maxn=1010;
int a[maxn] [maxn], f [maxn] [maxn], r, c, mmax=0;
int main()
   cin>>r>>c;
   for(int i=1;i<=r;i++)
        for(int j=1;j<=c;j++)
            cin>>a[i][j];
    for(int i=1;i<=r;i++)
        for(int j=1;j<=c;j++)
            if(a[i][j]==1)
                f[i][j]=min(min(f[i][j-1],f[i-1][j-1]),f[i-1][j])+1;
                mmax=max(f[i][j], mmax);
    cout<<mmax*mmax<<endl;
    return 0;
```

}

# 1.1. 方格取数

#### 【问题描述】

设有 N×N 的方格图,我们在其中的某些方格中填入正整数,而其它的方格中则放入数字 0。如下图所示:

A٠٠

•								
	0₽	0₽	043	0₽	043	0₽	0₽	042
	0₽	043	13∉	0₽	043	6₽	0₽	042 €
	0₽	0↔	047	0₽	7₽	0₽	0₽	047
	0₽	0₽	0₽	14∻	0₽	0₽	0₽	042 €
	0₽	21₽	0₽	0₽	0₽	4₽	0₽	0₽
	0₽	0₽	15∉	0₽	0₽	0₽	0₽	0₽
	0₽	14∻	0₽	0₽	043	0₽	o.	043 €
	0₽	0₽	04	0₽	043	0₽	0₽	047

В

某人从图中的左上角的 A 出发,可以向下行走,也可以向右行走,直到达右下角的 B 点。在走过的路上,他可以取走方格中的数(取走后的方格中将变为数字 0)。此人从 A 点到 B 点共走了两次,试找出两条这样的路径,使得取得的数字和为最大。

# 【輸入】

第一行为一个整数 N(N ≤ 10),表示 N × N 的方格图。接下来的每行有三个整数,第一个为行号数,第二个为列号数,第三个为在该行、该列上所放的数。一行 0 0 0 表示结束。

#### 【鈴出】

包含一个整数,表示两条路径上取得的最大的和。

#### 【样例輸入】

8
2 3 13
2 6 6
3 5 7
4 4 14
5 2 21
5 6 4
6 3 15
7 2 14
0 0 0

#### 【样例輸出】

67

#### 【算法分析】

一个四重循环枚举两条路分别走到的位置。由于每个点均从上或左继承而来,故内部有四个 if,分别表示两个点从上上、上左、左上、左左继承来时,加上当前两个点所取得的最大值。a[i][j]表示(i,j)格上的值,sum[i][j][h][k]表示第一条路走到(i,j),第二条路走到(h,k)时的最优解。例如,sum[i][j][h][k]=max{sum[i][j][h][k],sum[i-1][j][h-1][k]+a[i][j]+a[h][k]},表示两点均从上面位置走来。

当(i, j) <> (l, k)) 时

当(i, j) = (h, k)时



[j]:

# 【参考代码】

```
#include<cstdio>
#include<algorithm>
using namespace std;
int a[51][51];
int sum[51][51][51][51];
int n,i,j,h,k,x,y,z;
int main()
scanf ("%d%d%d%d", &n, &x, &y, &z);
   while (x&&y&&z)
        a[x][y]=z;
        scanf ("%d%d%d", &x, &y, &z);
for (int i=1;i<=n;i++)
    for (int j=1;j<=n;j++)
        for (int h=1;h<=n;h++)
            for (int k=1; k<=n; k++)
                int tmpl=max(sum[i-1][j][h-1][k],sum[i][j-1][h][k-1]);
                int tmp2=max(sum[i-1][j][h][k-1],sum[i][j-1][h-1][k]);
                sum[i][j][h][k]=max(tmpl,tmp2)+a[i][j];
                if (i!=h && j!=k)
                    sum[i][j][h][k]+=a[h][k];
            }
    }
printf("%d\n", sum[n][n][n][n]);
return 0;
```

#### 【算法分析】

本题满足"曼哈顿距离",可优化状态变量为三维数组。

#### 【参考代码】

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int a[10][10];
int dp[20][10][10];
int f(int a,int b,int c,int d)
{
    return max(max(max(a,b),c),d);
}
int main()
```



# 1.2. 数字三角形 2

### 【问题描述】

有一个数字三角形,从最顶层出发,每一步只能向左下或右下方向走。编程求从最顶层到最底层的一条路所经过位置上的数字之和模(%)100的最大值。

# 【輸入】

第一行: n(1<=n<=25),数字三角形共有 n 行; 以下 R 行: 依次表示数字三角形中每行中的数字。 每个数都是非负的,且<=100.

> 1 99 98 1 1 1

# 【編出】

一个正整数,路径上数字之和 模 100的最大值。

# 【样例输入】

```
3
1
90 9
9 10 99
```

#### 【样例輸出】



20

# 【算法分析】

```
错误分析:
```

```
定义 f[i][j]表示到达第 i 行第 j 列位置的最优值,则: f[i][j]=\max\{(f[i-1][j-1]+a[i][j])\%100,(f[i-1][j]+a[i][j])\%100\}, 初始值: f[1][1]=a[1][1], \max\{f[n][i]\}即为所求。 上述分析错误,因为不具备最优子结构。 正确做法:
```

定义 f[i][j][k]表示到达第 i 行第 j 列位置能否得到 k(0 <=k <=99)。 f[i][j][k]=f[i][j][k] || f[i-1][j-1][(k-a[i][j]+100)%100] || f[i-1][j][(k-a[i][j]+100)%100];

初始值:f[1][1][a[1][1]]=true,其余均为false。

```
#include <cstdio>
#include <algorithm>
using namespace std;
const int M = 100;
bool f[30][30][M];
int n,a[30][30];
int main()
{
   scanf("%d", &n);
   for(int i=1;i<= n;i++)
    for(int j=1;j<=i;j++)
        scanf("%d", &a[i][j]);
   f[1][1][a[1][1]] = true;
    for(int i=1;i<=n;i++)
        for(int j= 1;j<=i;j++)
            for (int k=0; k<M; k++)
                f[i][j][k]=f[i][j][k] || f[i-1][j-1][(k-(a[i][j]%M)+ M)%M]
                           /||f[i-1][j][(k-(a[i][j]%M)+M)%M];
    int ans = 0;
    for(int i=1;i<=n;++i)
        for(int j=0; j<M;++j)
            if(f[n][i][j])
            {
                ans=max (ans, j);
```



```
}
}
printf("%d", ans);
return 0;
}
```

# 1.3. 多重背包

有 N 种物品和一个容量为 V 的背包。第 i 种物品最多有 n[i]件可用,每件费用是 w[i],价值是 o[i]。求解将哪些物品装入背包可使这些物品的费用总和不超过背包容量,且价值总和最大。

#### 基本算法:

这题目和完全背包问题很类似。基本的方程只需将完全背包问题的方程略微一改即可,因为对于第 i 种物品有 n[i]+1 种策略: 取 0 件,取 1 件……取 n[i] 件。令 f[i][v]表示前 i 种物品恰放入一个容量为 v 的背包的最大权值,则: f[i][v]= $nax{f[i-1][v-k*w[i]]+k*o[i][0<=k<=n[i]}。复杂度是 <math>0(V*\Sigma n[i])$ 。

#### 【问题描述】

为了庆贺班级在校运动会上取得全校第一名成绩,班主任决定开一场庆功会,为此拨款购买奖品犒劳运动员。期望拨款金额能购买最大价值的奖品,可以补充他们的精力和体力。

#### 【輸入】

第一行二个数 n(n<=500), m(m<=6000), 其中 n 代表希望购买的奖品的种数, m 表示拨款金额。

接下来 n 行,每行 3 个数,v 、w 、s ,分别表示第 i 种奖品的价格、价值(价格与价值是不同的概念)和可购买的数量(买 0 件到 s 件均可),其中 v <=100,w <=1000,s <=100。

#### 【鈴出】

第一行:一个数,表示此次购买能获得的最大的价值(注意!不是价格)。

#### 【样例输入】

```
5 1000
80 20 4
40 50 9
30 50 7
40 30 6
20 20 1
```

# 【样例輸出】

1040

#### 【参考代码】

#### 【解法—】朴素算法

```
#include <cstdio>
#include <iostream>
using namespace std;
int v[6002], w[6002], s[6002];
int f[6002];
int n,m;
int main()
{
    scanf("%d%d",&n,&m);
    for (int i=l;i<=n;i++)
    {
        scanf("%d%d%d",&v[i],&w[i],&s[i]);
    }
    for(int i=l;i<=n;i++)</pre>
```



```
{
    for(int j=m;j>=0;j--)
    {
        for(int k=0;k<=s[i];k++)
        {
            if(j-k*v[i]<0)
            {
                break;
            }
            f[j]=max(f[j],f[j-k*v[i]]+k*w[i]);
        }
    }
    printf("%d",f[m]);
    return 0;
}</pre>
```

#### 【优化算法】进行二进制优化,转换为01 背包

基本思想是转化为 01 背包求解,方法是:将第 i 种物品分成若干件物品,其中每件物品有一个系数,这件物品的费用和价值均是原来的费用和价值乘以这个系数。使这些系数分别为 1,2,4,...,2  $^{\circ}k$ -1, $_{n}[i]$ -2  $^{\circ}k$ +1,且 k 是满足  $_{n}[i]$ -2  $^{\circ}k$ +1>0 的最大整数(注意:这些系数已经可以组合出 1  $^{\circ}n[i]$ 内的所有数字)。例如,如果  $_{n}[i]$ 为 13,就将这种物品分成系数分别为 1,2,4,6 的四件物品。

这样就将第:种物品分成了 O(logn[i])种物品,将原问题转化为了复杂度为 O(V\*Σlogn[i])的 O1 背包问题,有很大改进。

```
#include<cstdio>
using namespace std;
int v[10001],w[10001],f[6001];
int n,m,n1;
int max(int a,int b)
   return a>b?a:b;
int main()
   scanf ("%d%d", &n, &m);
   for(int i=1;i<=n;i++)
        int x,y,s,t=1;
        scanf ("%d%d%d", &x, &y, &s);
       while(s>=t)
            v[++n1] =x*t; //相当于 n1++; v[n1] =x*t;
           w[n1]=y*t;
           s-=t;
           t*=2;
       v[++n1]=x*s;
       w[n1]=y*s;//把s以2的指数分堆: 1,2,4,…,2^(k-1),s-2^k+1,
    for(int i=1;i<=n1;i++)
        for(int j=m;j>=v[i];j--)
            f[j]=max(f[j],f[j-v[i]]+w[i]);
    printf("%d\n",f[m]);
```



```
return 0;
```

# 1.4. 混合背包

如果将 01 背包、完全背包、多重背包混合起来。也就是说,有的物品只可以取一次(01 背包),有的物品可以取无限次 (完全背包),有的物品可以取的次数有一个上限(多重背包)。

# 01 背包与完全背包的混合

考虑到在 01 背包和完全背包中最后给出的伪代码只有一处不同,故如果只有两类物品:一类物品只能取一次,另一类物品可以取无限次,那么只需在对每个物品应用转移方程时,根据物品的类别选用顺序或逆序的循环即可,复杂度是 0(VII)。

#### 伪代码如下:

```
for i=1..N

if 第 i 件物品是 01 背包

for v=V..0

f[v]=max{f[v], f[v-w[i]]+c[i]};

else if 第 i 件物品是完全背包

for v=0..V

f[v]=max{f[v], f[v-w[i]]+c[i]};
```

## 再加上多重背包

如果再加上有的物品最多可以取有限次,那么原则上也可以给出 O(VN)的解法:遇到多重背包类型的物品用单调队列解即可。但如果不考虑超过 NOIP 范围的算法的话,用多重背包中将每个这类物品分成  $O(\log n[i])$ 个 01 背包的物品的方法也已经很优了。

# 【沁野猫球】

一个旅行者有一个最多能用 V 公斤的背包,现在有 n 件物品,它们的重量分别是 W1,W2,..., Wn,它们的价值分别为 C1,C2,...,Cn。有的物品只可以取一次(01 背包),有的物品可以取无限次(完全背包),有的物品可以取的次数有一个上限(多重背包)。求解将哪些物品装入背包可使这些物品的费用总和不超过背包容量,且价值总和最大。

## 【輸入】

第一行: 二个整数, V(背包容量, V<=200), N(物品数量, N<=30);

第 2...N+1 行:每行三个整数 Wi,Ci,Pi,前两个整数分别表示每个物品的重量,价值,第三个整数若为 0,则说明此物品可以购买无数件,若为其他数字,则为此物品可购买的最多件数 (Pi)。

# 【鈴出】

仅一行,一个数,表示最大总价值。

#### 【样例輸入】

```
10 3
2 1 5
3 3 1
4 5 4
```

#### 【样例輸出】

11

#### 【样例解释】

选第一件物品1件和第三件物品2件。

```
#include<cstdio>
using namespace std;
int m, n;
```



```
int w[31], c[31], p[31], f[201];
int maxx(int x,int y)
   return x>y?x:y;
}
int main()
{
   scanf ("%d%d", &m, &n);
   for(int i=1;i<=n;i++)
        scanf("%d%d%d", &w[i], &c[i], &p[i]);
   for(int i=1;i<=n;i++)
        if (p[i] ==0) //完全背包
            for(int j=w[i];j<=m;j++)
                f[j]=\max(f[j],f[j-w[i]]+c[i]);
        else
            for(int j=l;j<=p[i];j++)//01 背包和多重背包
                for (int k = m; k >= w[i]; k--)
                    f[k] = \max(f[k], f[k-w[i]]+c[i]);
            }
   printf("%d", f[m]);
   return 0;
```

# 【参考代码二】转换成多重背包

```
#include<cstdio>
using namespace std;
int m, n;
int w[31], c[31], p[31], f[201];
int maxx(int x,int y)
{
    return x>y?x:y;
}
int main()
{
    scanf("%d%d",sm,sn);
    for(int i=1;i<=n;i++)
    {
        scanf("%d%d%d",sw[i],sc[i],sp[i]);
        if(p[i]==0)//转换成多重背包,未做数据清洗
        {
            p[i]=m/w[i];
        }
    }
    for(int i=1;i<=n;i++)
    {
        for(int j=1;j<=p[i];j++)//01 背包和多重背包
        {
```

12



```
for (int k = m; k >= w[i]; k--)
{
          f[k] = maxx(f[k], f[k-w[i]]+c[i]);
     }
    }
}
printf("%d", f[m]);
return 0;
}
```

# 1.5. 有依赖的背包问题

这种背包问题的物品间存在某种"依赖"的关系。也就是说,i 依赖于 j,表示若选物品 i,则必须选物品 j。为了简化起见,我们先设没有某个物品既依赖于别的物品,又被别的物品所依赖;另外,没有某件物品同时依赖多件物品。

NOIP2006中金明的预算方案一题就是此类问题。

#### 【问题描述】

金明今天很开心,家里购置的新房就要领钥匙了,新房里有一间金明自己专用的很宽敞的房间。更让他高兴的是,妈妈昨天对他说:"你的房间需要购买哪些物品,怎么布置,你说了算,只要不超过M元钱就行"。今天一早,金明就开始做预算了,他把想买的物品分为两类:主件与附件,附件是从属于某个主件的,下表就是一些主件与附件的例子:

主件 附件

电脑 打印机,扫描仪

书柜 图书

书桌 台灯,文具

工作椅 无

如果要买归类为附件的物品,必须先买该附件所属的主件。每个主件可以有 0 个、1 个或 2 个附件。附件不再有从属于自己的附件。金明想买的东西很多,肯定会超过妈妈限定的 N 元。于是,他把每件物品规定了一个重要度,分为 5 等:用整数 1 -5 表示,第 5 等最重要。他还从因特网上查到了每件物品的价格(都是 10 元的整数倍)。他希望在不超过 N 元(可以等于 N 元)的前提下,**使每件物品的价格与重要度的季积的总和最大。** 

设第 j 件物品的价格为 v[j],重要度为 w[j],共选中了 k 件物品,编号依次为 j1, j2, ···, jk 则所求的总和为:  $v[j1] \times w[j1] + v[j2] \times w[j2] + ··· + v[jk] \times w[jk] 。$ 

请你帮助金明设计一个满足要求的购物单。

#### 【輸入】

第1行,为两个正整数,用一个空格隔开:

N, m (其中 N(<32000)表示总钱数, m(<60)为希望购买物品的个数。)

从第 2 行到第 m+1 行,第 j 行给出了编号为 j-1 的物品的基本数据,每行有 3 个非负整数: v,p,q(其中 v 表示该物品的价格(v<10000),p 表示该物品的重要度(1-5),q 表示该物品是主件还是附件。如果=0,表示该物品为主件,如果 q>0,表示该物品为附件,q 是所属主件的编号)。

#### 【全出】

一个正整数,为不超过总线数的物品的价格与重要度乘积的总和的最大值(<200000)。

## 【样例輸入】

```
1000 5
800 2 0
400 5 1
300 5 1
400 3 0
500 2 0
```

#### 【样例輸出】



2200

#### 【算法分析】

考虑到每个主件最多只有两个附件,因此我们可以通过转化,把原问题转化为 01 背包问题来解决,在用 01 背包之前我们需要对输入数据进行处理,把每一种物品归类,即:把每一个主件和它的附件看作一类物品。处理好之后,我们就可以使用 01 背包算法了。在取某件物品时,我们只需要从以下四种方案中取最大的那种方案:只取主件、取主件+附件 1、取主件+附件 2、取主件+附件 1+附件 2。很容易得到如下状态转移方程:

```
\begin{split} &f[i,j]=\max\{f[i-1,j],\quad f[i][j]\\ &f[i-1,j-a[i,0]]+a[i,0]*b[i,0],\\ &f[i-1,j-a[i,0]-a[i,1]]+a[i,0]*b[i,0]+a[i,1]*b[i,1],\\ &f[i-1,j-a[i,0]-a[i,2]]+a[i,0]*b[i,0]+a[i,2]*b[i,2],\\ &f[i-1,j-a[i,0]-a[i,1]-a[i,2]]+a[i,0]*b[i,0]+a[i,1]*b[i,1]+a[i,2]*b[i,2]\} \end{split}
```

其中,f[i,j]表示用j元钱,买前i类物品,所得的最大值,a[i,0]表示第i类物品主件的价格,a[i,1]表示第i类物品第1个附件的价格,a[i,2]表示第i类物品第2个附件的价格,b[i,0],b[i,1],b[i,2]分别表示主件、第1个附件和第2个附件的重要度。

```
#include <iostream>
using namespace std;
int w[65][3],v[65][3],f[65][3205];
int main()
   int n,m,c,p,q,i,j,t;
   cin>>n>>m;
   n/=10; //都是 10 的整数倍,因此可以节约空间和时间
   for(i=1;i<=m;i++)
       cin>>c>>p>>q;
       c/=10;
       if(q==0)
           w[i][q]=c;
           v[i][q]=c*p;//同步计算该物品的价格*重要度
       else if(w[q][1]==0)//如果是第一个附件
           w[q][1]=c;
           v[q][1]=c*p;
       else //是第二个附件
           w[q][2]=c;
           v[q][2]=c*p;
   for(i=1;i<=m;i++)
       for(j=0;j<=n;j++)
           f[i][j]=f[i-1][j];
           if(j>=w[i][0]) //放主件
               t=f[i-1][j-w[i][0]]+v[i][0];
               if(t>f[i][j])
```



```
f[i][j]=t;
           }
       if(j>=w[i][0]+w[i][1])//放主件+第一个附件
           t=f[i-1][j-w[i][0]-w[i][1]]+v[i][0]+v[i][1];
           if(t>f[i][j])
               f[i][j]=t;
       if(j>=w[i][0]+w[i][2])//放主件+第二个附件
           t=f[i-1][j-w[i][0]-w[i][2]]+v[i][0]+v[i][2];
           if(t>f[i][j])
               f[i][j]=t;
       if(j>=w[i][0]+w[i][1]+w[i][2])//放主件+两个附件
           t = f[i-1][j-w[i][0]-w[i][1]-w[i][2]]+v[i][0]+v[i][1]+v[i][2];
           if(t>f[i][j])
               f[i][j]=t;
cout<<f [m] [n] *10<<endl;
return 0;
```

15