动态规划—决策单调性优化DP 学习笔记

决策单调性

对于最优性问题，常有状态转移方程：$f_i = \min / \max\{f_j \dots\}$，

形象的：如果 i 的最优转移点是 j，i' 的最优转移点是 j'，当 $i < i'$ 时，有 $j \le j'$，则称该 DP 问题具有决策单调性。

即：i 单增，其最优转移点单调不减。

如何发现一个转移方程具有决策单调性？打表。

使用

一、离线决策单调性

形如：$f(i,j) = \min\limits_{k \le j}\{f(i-1,k) + \operatorname{cost}(k,j)\}$，转移分层.

形象的：$f(i,j)$ 表示将前 j 个物品分为 i 端的最小花费，则原式意为，枚举一个 k 个，将前 k 个分为 $i-1$ 段，再加上后面这一段所需的花费。

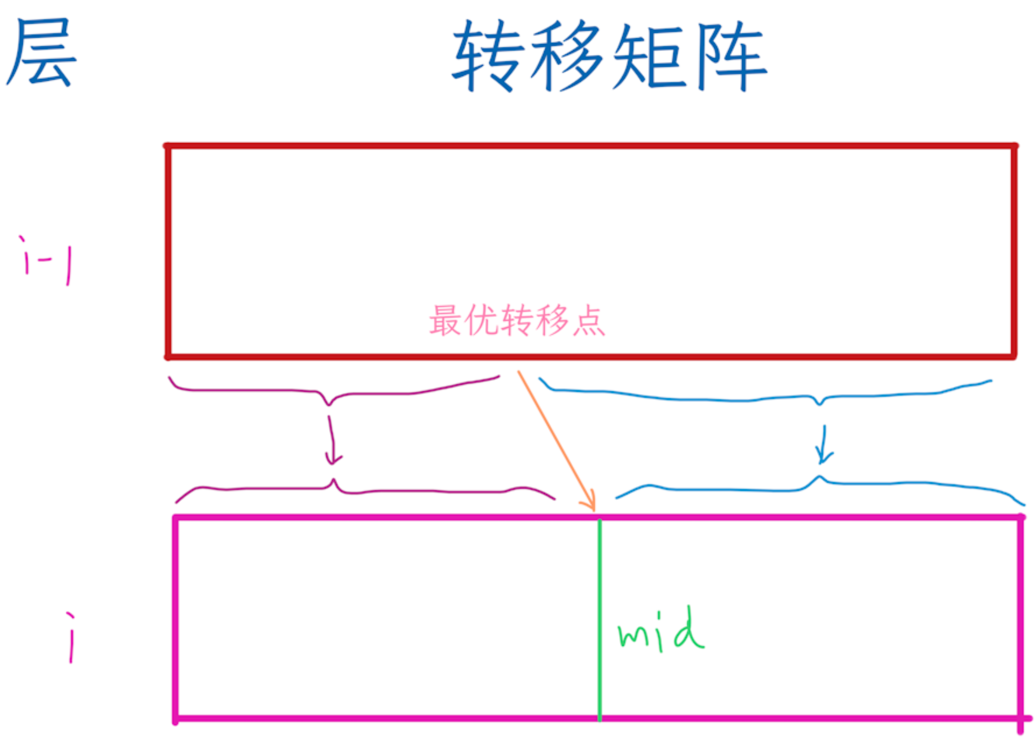
那么此时，最 native 的算法是，三层循环枚举，时间复杂度就是 $O(nm^2)$ 的。

决策单调性：设 k 为 $f(i,j)$ 的最优转移点，k' 为 $f(i,j')$ 的最优转移点，当 $j < j'$ 时有 $k \le k'$，则该 DP 具有决策单调性。

形象的：对于每一层（固定 i 不变），j 单增，其最优转移点（在 $i-1$ 层上）单调不减。

因此，我们可以一层一层的 DP，对于第 i 层，我们先算 $f(i,\mathrm{mid})$，其中 $\mathrm{mid} = m/2$；同时求出 $f(i,\mathrm{mid})$ 的最优转移点 $f(i-1,\mathrm{opt})$。那么 $[1,i-1]$ 的最优转移点只能在 $f(i-1,1\dots\mathrm{opt})$ 中取，$[i+1,n]$ 的最优转移点只能在 $f(i-1,\mathrm{opt}\dots n)$ 中取。

如图：



递归下去，即：

$s(i,l,r,p,q)$ 表示算 $f(i,l\dots r)$ 且最优转移点只可能在 $f(i-1,p\dots q)$中，先算 $f(i,\mathrm{mid})$ 的值（即枚举 p 到 q），求出最优转移点 opt。

然后递归求解：$s(i,l,r,p,q)\to\begin{cases}s(i,l,\mathrm{mid}-1,p,\mathrm{opt})\\ s(i,\mathrm{mid}+1,r,\mathrm{opt},q)\end{cases}$.

则时间复杂度为 $O(nm\log m)$。

例题：CF321E Ciel and Gondolas.

▼ 点击查看代码

仅核心代码。

暴力：

```
inline int cost(const int x, const int y) {
    return (s[y][y] - s[y][x - 1] - s[x - 1][y] + s[x - 1][x - 1]) >>
1;
} signed main() {
```

```
    int n = ur, k = ur;
    for (int i = 1; i <= n; ++i) for (int j = 1; j <= n; ++j) s[i][j] = ur + s[i - 1][j] + s[i][j - 1] - s[i - 1][j - 1];
    memset(f, 0x3f, sizeof f); for (int i = 0; i <= n; ++i) f[i][0] = 0;
    for (int i = 1; i <= k; ++i) for (int j = 0; j <= n; ++j) {
        for (int t = 0; t <= j; ++t) f[i][j] = min(f[i][j], f[i - 1][t] + cost(t + 1, j));
    } printf("%d\n", f[k][n]);
    return 0;
}
```

决策单调性优化：

```
inline int cost(const int x, const int y) {
    return (s[y][y] - s[y][x - 1] - s[x - 1][y] + s[x - 1][x - 1]) >> 1;
} void solve(int i, int l, int r, int p, int q) {
    if (l > r) return;
    int j = l + r >> 1, opt = 0;
    for (int t = p; t <= q && t <= j; ++t) {
        int e = f[i - 1][t] + cost(t + 1, j);
        if (f[i][j] > e) f[i][j] = e, opt = t;
    }
    solve(i, l, j - 1, p, opt);
    solve(i, j + 1, r, opt, q);
} signed main() {
    int n = rr, k = rr;
    for (int i = 1; i <= n; ++i) for (int j = 1 ; j <= n; ++j) s[i][j] = rr + s[i - 1][j] + s[i][j - 1] - s[i - 1][j - 1];
    memset(f, 0x3f, sizeof f); f[0][0] = 0;
    for (int i = 1; i <= k; ++i) solve(i, 0, n, 0, n);
    printf("%d\n", f[k][n]);
    return 0;
}
```

二、离线决策单调性

一维 DP，形如：$f_r = \min\limits_{l=1}^{r-1}\{f_l + \operatorname{cost}(l,r)\}$.

其决策单调性为 i 单增，其最优转移点 j 单调不见，比如：`11122222244` 这种。

- 算法大概就是：单调队列里放一个三元组：表示当前,[l,r]区间由j这个转移点转移过来最优
- 一开始：取出队首，就知道i从哪转移了。
- 然后算出f[i]，现在加入i这个转移点。
- 开始判断，能不能把队尾整个弹出。如果能，就弹
- 直到不再能整个弹出，就得看看从哪断开。一个一个判？T飞了。
- 只需要搞一个二分即可。

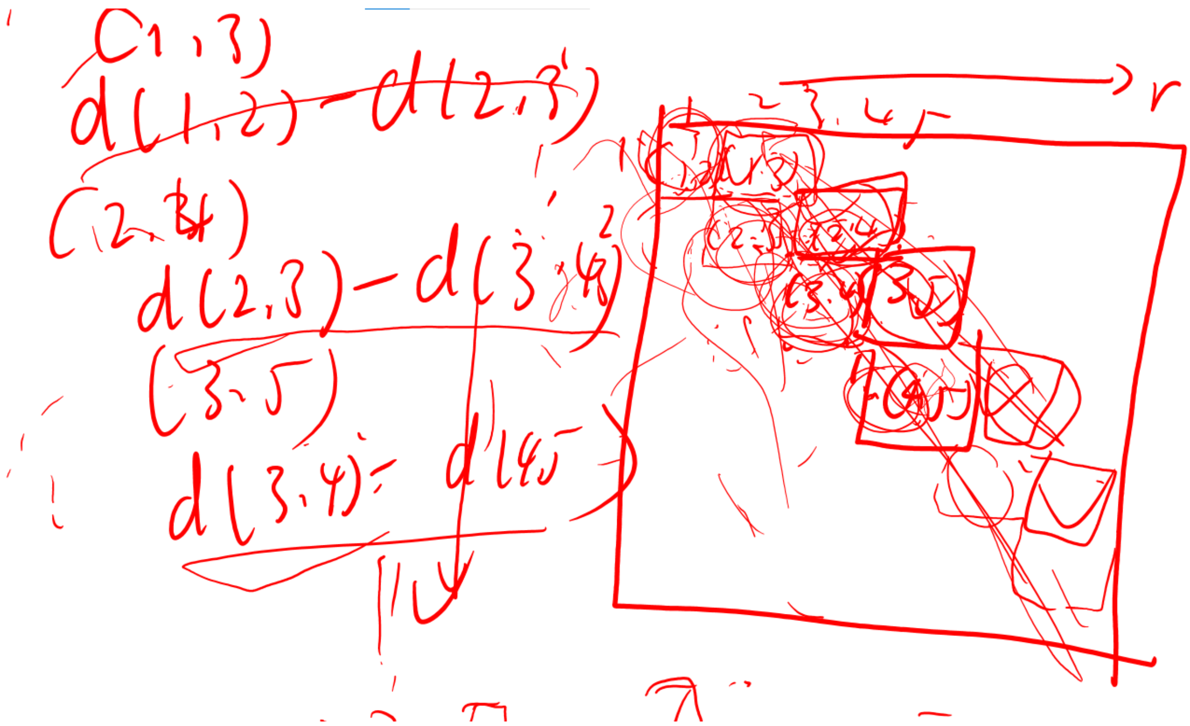
没听懂 zhq 老师讲的，等着看 wzm 的回放。。。

三、区间 DP 决策单调性

对于最优化的区间 DP，设 $d_{i,j}$ 为 $f_{i,j}$ 的最优转移点，具有决策单调性的条件为 $d_{l,r-1} \le d_{l,r} \le d_{l+1,r}$。

求解方法：按长度枚举区间；计算 f_{lr} 的时候，从 $d_{l,r-1}$ 枚举到 $d_{l+1,r}$。

时间复杂度：$O(n^2)$，神奇的证明（By zhq）如图：



题单

见：https://www.luogu.com.cn/training/386809

Reference

[1] https://oi-wiki.org/dp/opt/quadrangle/

[2] https://www.cnblogs.com/lnzwz/p/12444390.html

[3] https://www.cnblogs.com/lhm-/p/12229791.html

[4] https://www.luogu.com.cn/blog/command-block/dp-di-jue-ce-dan-diao-xing-you-hua-zong-jie

---

合集：学习笔记

标签：算法 ，学习笔记