动态规划—区间DP 学习笔记

不含四边形不等式优化。

定义

线性动态规划的局限性在于，它只能顺推或倒退，而不能有子区间依赖的问题。

区间动态规划是线性动态规划的扩展，它将问题划分为若干个子区间，并通过定义状态和状态转移方程来求解每个子区间的最优解，最终得到整个区间的最优解。

区间动态规划常用于解决一些涉及区间操作的问题，是一种高效的求解区间最优值的方法，可以有效地解决各种区间问题。

性质

1. 子区间可拆分：即能将问题分解为能两两合并的形式；
2. 子区间独立性：即将区间 $[l,r]$ 拆分为两个区间后，这两个区间内无论怎么变化，都不应影响到另一区间的最优值；
3. 子区间可合并：即能将两个或多个部分进行整合。

求解方法

通常需要定义一个二维状态 $dp_{i,j}$ 来表示子区间的状态，有时也会根据情况增加维度；常见的 i 与 j 的含义有：

- 从第 i 个物品到第 j 个物品的最优值；
- 从第 i 个物品开始，长度为 j 的区间最优值；
- 前 i 个物品分为 j 段时的最优值。

然后对整个问题设最优值，枚举合并点，将问题分解为左右两个部分，最后合并两个部分的最优值得到原问题的最优值；常见的区间拆分方式有：

- $[l,r] \Rightarrow [l,k]+[k+1,r]$.
- $[l,r] \Rightarrow [l,k-1]+[k,r]$.

- $[l,r] \Rightarrow [l,k-1]+[k+1,r]$.

最重要的是保证拆分的子区间的［可拆分、独立性、可合并］（见上方性质）。

最常见的形式是：令状态 $f(i,j)$ 表示将下标位置 i 到 j 的所有元素合并能获得的价值的最大值，那么 $f(i,j)=\max\{f(i,k)+f(k+1,j)+\text{cost}\}$，$\text{cost}$ 为将这两组元素合并起来的代价。

应用

套路：区间包含的处理

例如：有区间 $A:[l,r]$ 和 $B:[a,b]$，且 $a\geq l, b\leq r$，即 $B\subseteq A$。

则可以考虑先考虑用 dp 处理其中一类区间，另一类特殊处理。

套路：环的处理

断环为链：从任意位置将环拆解为一条链，并将这条链延长两倍；

新的链长度为 $2\times n$ 且第 i 个元素与第 $n+i$ 个元素相同；

用动态规划求解后，取 $f(1,n),f(2,n+1),\dots,f(n-1,2n-2)$ 中的最优值，即为最后的答案。

习题

见：https://www.luogu.com.cn/training/384114

Reference

[1] https://oi-wiki.org/dp/interval/

[2] https://blog.csdn.net/DUXS11/article/details/131577410

合集：学习笔记

标签：算法 ，学习笔记