基本技巧——根号分治 学习笔记

根号分治与其说是一个算法，更不如说是一种思想（trick）。

定义

根号分治，是一种对数据进行点分治的分治方式，它的作用是优化暴力算法；类似于分块，但应用范围比分块更广。

具体来说，对于所进行的操作，按照某个点 B 划分，分为大于 B 及小于 B 两个部分，两部分使用不同的方式处理。（一般以根号为分界，即 $B=\sqrt{n}$，因为这样复杂度最平衡）

简而言之，根号分治就是：对数据范围分块处理，将多个暴力算法“拼接在一起”，实现优化复杂度的作用。

算法思路

理论基础

具体思路如下：

- 对于数据的种类少的部分，可以全部维护；
- 对于另一部分，不方便维护的，可以暴力求解。

题目特征

1. 能将原问题分为一个大问题（即前文说的 $>\sqrt{n}$）和一个小问题（即前文说的 $<\sqrt{n}$）；
2. 小问题的情况不多，可以**维护所有可能的答案**或**用离线算法求解**；大问题可以用暴力求解；
3. 题目中某个值的总数量一定：比如图论中所有点的度数之和为 m，或字符串长度为 n；
4. 数据范围长得比较奇怪，比如 10^{10}，既不像是筛法，又不像是什么数位 DP。

求解方法

因此，一般来说，根号分治的题目可以分为**预处理阶段**和**枚举阶段**：

- 预处理阶段：通过不同的算法将分成的两块分别计算；
- 枚举阶段：将两部分合并为一个结果，通常会用到数学知识。

具体步骤：

1. 找到两种暴力算法，复杂度分别为 $O(b)$ 和 $O(n/b)$；
2. 根据 n 的大小选取算法，则复杂度为：$O(\min\{b, n/b\})$；
3. 根据基本不等式，$\min\{b, n/b\} \le n$；
4. 取分界点 $B = \sqrt{n}$，对分界点左、右分别选择较优的算法，复杂度降为 $O(\sqrt{n})$。

应用

例题

题目：P3396 哈希冲突

题意：给定长为 n 的序列 value，和 m 个操作：

- `A x y` ：询问 $\sum \text{value}_i \, [i \bmod x = y]$；
- `C x y` ：修改 $\text{value}_x = y$。

▼ 点击查看题解

考虑两种暴力解法：

1. 预处理 模 i 为 j 的下标，其中的元素之和；时间复杂度：$O(n^2) + O(m)$；
2. 暴力求 每次询问都遍历 $\text{k}i + j \ (\text{k} \in \mathbb{Z}^+)$；时间复杂度：$O(mn)$。

考虑优化，即将两种算法合并：

1. 模数 $< \sqrt{n}$：使用方法 (1)，时间复杂度：$O(n\sqrt{n}) + O(m)$；
2. 模数 $> \sqrt{n}$：使用方法 (2)，时间复杂度：$O(m\sqrt{n})$；

因此，优化后的总时间复杂度为 $O((n+m)\sqrt{n})$。代码如下：

```
const int N = 1.5e5 + 10;
const int M = 390;

int arr[N];
int f[M][M];

signed main() {
```

```
    int n = ur, m = ur; int b = sqrt(n);
    for (int i = 1; i <= n; ++i) {
        arr[i] = ur;
        for (int j = 1; j < b; ++j) f[j][i % j] += arr[i];
    } while (m--) {
        char op[2]; scanf("%s", op);
        int x = ur, y = ur; if (op[0] == 'C') {
            for (int i = 1; i < b; ++i) f[i][x % i] += y - arr[x];
            arr[x] = y;
        } else if (x < b) {
            printf("%d\n", f[x][y]);
        } else {
            int sum = 0; for (int i = y; i <= n; i += x) {
                sum += arr[i];
            } printf("%d\n", sum);
        }
    }
    return 0;
}
```

练习题

见：https://www.luogu.com.cn/training/386103

Reference

[1] https://blog.csdn.net/qq_35684989/article/details/127190872

[2] https://www.cnblogs.com/weixin2024/p/17032201.html

[3] https://www.luogu.com.cn/blog/Amateur-threshold/pu-li-mei-xue-qian-tan-gen-hao-fen-zhi

[4] https://zhuanlan.zhihu.com/p/594018645

[5] https://www.luogu.com.cn/blog/340940/gen-hao-fen-zhi-xue-xi-bi-ji

[6] https://www.cnblogs.com/ray52033/p/15011464.html

[7] https://www.luogu.com.cn/blog/blue/solution-p3396

合集：学习笔记

标签：算法 ，学习笔记