线性代数（未完成）

Linear Algebra

RainPPR

2024-05-13

Table of contents

向量

向量

可以将**向量**视为坐标系中，一个一端在原点，一端指向坐标系中某个点的线段。

或者称为一个从原点指出的箭头，于是很自然的写出坐标表示，

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

这种写法也叫做**二元数组**。

向量

为了简便，也可以记为 (a, b)，这非常直观的表示坐标轴中的位置。

这对坐标这指出了如何从原点到达这个向量所指的位置，即坐标的位置:

其中 a 表示沿 x 方向走多远，b 表示沿 y 方向走多远，正负表示方向。

空间向量定义类似，(a, b, c) 中，c 表示沿 z 方向走多远，正负表示方向。

向量

而写作

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

的，也叫做**三元数组**。

另外，当我们在讨论坐标系内的一组（可能是无限个）向量时，

通常把他们抽象为一组点，分别表示原点到这个点所表示的向量。

向量加法

向量加法

将一个向量固定在原点，其余向量一次首尾相连，类似于对实数的操作。

则其和为原点到最后一个向量末尾的线段，就是这些向量的和。

可以把向量看做坐标系中的某种运动，因此位移合成，即向量加法。

当我们把向量看成上述两步（两个坐标轴方向），就容易得出公式，

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

向量数乘

向量数乘

向量数乘就是将向量伸缩 k 倍，从几何看就是缩放，类似于对实数的操作。

其中，我们定义了此操作为几何意义上的**缩放**，乘的数也称标量。

我们可以类比将实数加法拓展到乘法的过程，这也是非常直观的，

$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}$$

线性组合

线性组合

在若干向量中，有两个向量最特殊，

$$\hat{\imath} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\jmath} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

于是，我们可以把向量 (a, b) 看成上面两个向量的缩放，即

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath}$$

这种缩放向量并相加的思想很重要，我们称 $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ 为 xy 坐标系的**基向量**。

线性组合

这意味着，把向量的坐标看为标量，那么基向量就是这些标量缩放的对象。

于是，我们就可以通过这些基向量，来构建整个坐标系。

那么我们引出一个重要的问题：如果我们选择不同的基向量呢?

我们不严谨的，选择两个向量，大部分都可以构成整个坐标系。

这意味着，当我们用一组数来表示向量的时候，它就依赖于我们选择的基。

线性组合

我们会发现，如果我们固定其中一个基向量，然后随意缩放另一个。

你会发现，其和端点，在坐标系中画出了一道优美的直线。

于是，我们移动一个，再移动另一个，就可以得到一个面了哦。

那么，如果无限缩放下去，就会填满整个坐标系，也就是表示了整个坐标系。

同时也很容易得出，如果两个基向量共线，就只能得到一个过原点的直线了。

同时，也容易发现，如果两个基向量都是零向量，那么只能得到原点一处。

线性组合

最后，我们引出定义，称

$$a\vec{v} + b\vec{w}$$

为 $\vec{v}$ 和 $\vec{w}$ 的**线性组合**。

所有可以表示为给定向量线性组合的向量的集合，被称为给定向量的**张成空间**。

也许在看两个向量所张成的空间铺满了整个平面会有些抽象，

我们考虑，在三维空间内，两组不共线的向量张成的空间是什么样的。

不难的，是一个过原点的平面，即这个平面上的点的集合就是这其张成空间。

线性组合

三维中的两个的向量呢？其线性组合类似的定义为，

$$a\vec{v} + b\vec{w} + c\vec{u}$$

考虑在一个已经有两个向量的张成空间中，加入第三个向量，

当我们加入的第三个向量与前两个之一共线，或者正好落在了前两个的张成空间中，

那么其三个的张成空间没有拓展。

线性组合

定义：多个向量中删去一个，不影响其张成空间的，称他们为**线性相关**的。

或者，如果一个向量可以表示为另外两个向量的线性组合，则称他们是线性相关的。

另外，如果加入的新向量完全拓展了其张成空间，则称其为**线性无关**的。

此时，我们可以引入基的严格定义：

向量空间的一组**基**是张成该空间的一个线性无关的向量集。

线性变换

线性变换

变换，可以简单的认为是一种的函数，此处的变换是向量到向量的函数。

而变换这个说法，正好对应了变换这个过程，这是很直观的。

实际上变换可能很复杂，但是**线性变换**指的是满足下面两条的变换：

坐标系中的直线经过线性变换依旧是直线，且变换前后坐标系原点不动。

即线性变换是对空间的一种变换，满足网格线保持平行，且等距分布。

注意此时一定不能只关注一部分直线，但是可以考虑一些特殊的直线。

考虑在平面内，如何用数值来准确描述一个线性变换?

根据上面基向量的思想，我们只需要记录 $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ 的变换位置即可。

感性理解，我们可以根据变化的 $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ 推断出述任意向量位置。

有一个性质，若一向量可以表示为，

$$\vec{v} = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath}$$

那么在 $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ 变换后的 $\hat{\imath}', \hat{\jmath}'$ 中，在原坐标系中，有，

$$\vec{v} = a\hat{\imath}' + b\hat{\jmath}'$$

线性变换

代数表示,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to x\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} ax+cy \\ bx+dy \end{bmatrix}$$

我们通常把 a, b, c, d 这四个数封装在一个东西中，称为**矩阵**，对于上面的,

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

左边一列右边一列（称为矩阵的列）分别表示变换之后的 $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ 基，$(a, b), (c, d)$。

线性变换

因此可以定义出矩阵乘向量的简化形式,

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}$$

其中，左边的矩阵可以理解为一个函数，对于右边的向量操作。

线性变换

根据这个，可以得出很多有意思的矩阵，

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} : 逆时针旋转 90^\circ$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : 剪切、错切$$

在变换的时候，可以先对 $\hat{\imath}$ 变换，再对 $\hat{\jmath}$ 变换，可以方便一点。

如果变换的 $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ 是线性相关的，那么就会丢失一个维度，使张成空间成为一个直线。

线性变换

注：线性的严格定义，若一个变换 L 满足，

$$L(\vec{v}+\vec{w}) = L(\vec{v}) + L(\vec{w})$$
$$L(c\vec{v}) = cL(\vec{v})$$

则称 L 是线性的。

矩阵乘法

矩阵乘法

考虑如果把两个线性变换合并，比如上文提到的选择和剪切，如何?

这个新的变换显然也是线性变换，我们称其为前两个独立变化的复合变换。

代数的，

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

右面的，即复合矩阵，于是我们定义**矩阵乘法**形如，

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

矩阵乘法

注意矩阵乘法是右结合性，即从右往左读，类似复合函数，

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

此时可以考虑矩阵乘法的数值表示。

考虑右边的矩阵变换的基向量，再通过左边的矩阵变换，

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ h \end{bmatrix}$$

即，

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

矩阵乘法

可以看这个网站理解：https://rainppr.gitee.io/matrixmultiplication.xyz/。

容易发现,

$$M_1 M_2 \neq M_2 M_1$$

即矩阵乘法没有交换律，但是

$$(AB)C = A(BC)$$

即矩阵乘法具有结合律。

三维空间中的线性变换

如果我们去尝试想象整个三维空间会很复杂，

因此只考虑三个基向量，$\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$。

将三个基向量作为列的形式，依次记录在矩阵中，形如，

三维空间中的线性变换

和二维类似的,

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \\ gx + hy + iz \end{bmatrix}$$

行列式

行列式

我们发现，有的线性变换是在向外拉伸空间，有的则是在向内挤压空间。

那么，具体被拉伸了多少呢？具体的，单位面积的缩放比例是多少。

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

例如，上线性变换将空间拉伸了 6 倍。这个缩放比例，叫做线性变换的**行列式**，

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = 6$$

这个值意味着，任意形状的图形，其面积经过变换后都会拉伸这个倍数。

如果一个线性变换的行列式为 0，这意味着这个线性变换使一些维度消失了。

行列式

然而，行列式是允许出现负数值的，这意味着空间被翻转了。

具体的，正常情况下，$\hat{\jmath}$ 在 $\hat{\imath}$ 的左侧，因此如果反过来了，就意味着空间被翻转。

也被称为，**空间的定向**发生改变，此时行列式的绝对值表示缩放倍数。

放在三维中，只需要考虑 $1 \times 1 \times 1$ 的正方体即可。

三维空间的定向使用**右手定则**，

食指、中指分别指向 $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$，此时若拇指指向 $\hat{k}$，则行列式为正，反之为负。

那么如何计算呢？给出一个简单的公式，

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$$

因此，如果 b, c 有一个为零，那么行列式的值即 ad，平行四边形的面积。

更进阶的公式（具体如何计算自己百度），

$$
\begin{aligned}
&\det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right) \\
&= a\det\left(\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix}\right) \\
&- b\det\left(\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix}\right) \\
&+ c\det\left(\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

有性质,

$$\det(M_1 M_2) = \det(M_1)\det(M_2)$$

高斯消元

高斯消元

形如，额没有形。

每一项都是简单的一元，不存在三角函数等高级函数，

比如，

$$\begin{cases} 2x + 5y + 3z = -3 \\ 4x + 0y + 8z = 0 \\ 1x + 3y + 0z = 2 \end{cases}$$

可以发现这个东西类似向量乘法，

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

简记为，

$$A\vec{x} = \vec{v}$$

则解方程的过程，相当于找到一个向量 $\vec{x}$ 在经过 A 的变换后，恰好等于 $\vec{v}$。

对于 $\det A \neq 0$ 的情况，显然解是唯一的，我们可以通过找到 A 的逆的方式来求解。

这个线性变换为 A 的逆，记为，A^{-1}。例如逆时针旋转 90° 的逆，为顺时针旋转 90°。

高斯消元

那么，AA^{-1} 就对应一个什么都不做的变换，形如

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

那么，我们可以这么解方程，

$$\begin{gathered} A\vec{x} = \vec{v} \\ AA^{-1}\vec{x} = A^{-1}\vec{v} \\ \vec{x} = A^{-1}\vec{v} \end{gathered}$$

由上，一个线性变换存在逆的充要条件，即其行列式不为零。

因为行列式为零一位置压缩维度，那么损失的维度就不存在信息来复原了。

如果一个线性变换把维度确定为 k 维，那么其**秩**为 k，或者说变换后空间的维数。

因此，对于一个 $n \times n$ 的矩阵，其秩最大为 n，即张成了整个 n 维空间，称为**满秩**。

经过变换所有能得到的向量的集合成为线性变换的**列空间**。

或者说，就是一个矩阵的列张成的空间。

于是我们更严谨的定义线性变换的秩为，其列空间的维数。

因为线性变换不操作原点，因此零向量一直存在于列空间中。

经过变换后，所有落在零向量的向量组成了其**零空间**（或**核**）。

非方阵

非方阵

此时就存在内在的维度变化，例如，

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

意味着把 $\hat{\imath}$ 变换到 $(3,4,5)$，把 $\hat{\jmath}$ 变换到 $(1,1,9)$。

这是一个三行两列的矩阵，记作 3×2 的矩阵。

这个矩阵的列空间，是一个过三维原点的二维平面。

但是因为传入的就是二维的，因此这个矩阵也是满秩的。

NOT THE END.（咕咕咕