

DS

FSYo

July 24, 2024

SCOI2014 方伯伯的玉米田

方伯伯在自己的农田边散步，他突然发现田里的一排玉米非常的不美。这排玉米一共有 N 株，它们的高度参差不齐。方伯伯认为单调不下降序列很美，所以他决定先把一些玉米拔高，再把破坏美感的玉米拔除掉，使得剩下的玉米的高度构成一个单调不下降序列。方伯伯可以选择一个区间，把这个区间的玉米全部拔高 1 单位高度，他可以进行最多 K 次这样的操作。拔玉米则可以随意选择一个集合的玉米拔掉。问能最多剩多少株玉米，来构成一排美丽的玉米。 $n \leq 10^4, k \leq 500, a_i \leq 5000$ 。

SCOI2014 方伯伯的玉米田

性质：拔高的最右边的一个后缀。

设 $f_{i,j}$ 表示到 i ，前面拔了 j 次。我们枚举上一个保留的玉米以及拔高的次数，那么

$$f_{i,j} = 1 + \max f(x, y) (x < i, y \leq j, a_x + y \leq a_i + j)$$

将 $(y, a_x + y)$ 作为点放在平面上，那么就是一个矩阵求 \max 。

总共要求 nk 次，修改也是 nk 次，使用二维树状数组，每次修改 $\log A \times \log K$ ，注意二维树状数组的空间是 Ak 的。

复杂度 $O(nk \log A \log k)$ 。

NOI2010 超级钢琴

有 n 个音符，编号为 1 至 n 。第 i 个音符的美妙度为 a_i 。
我们要找到 k 段超级和弦组成的乐曲，每段连续的音符的个数 x 满足 $L \leq x \leq R$ ，求乐曲美妙度的最大值。
 $n, k \leq 10^5$ 。

NOI2010 超级钢琴

求出前缀和，那么就是要找最大的 $sum_i - sum_j$ ，我们维护三元组 (i, l, r) 表示可以找一个 $sum_i - sum_j (j \in [l, r])$ ，用堆取出最大值即可。
要用到 st 表，复杂度 $O((n + k) \log n)$ 。

CF1098D Eels

小 V 有一个水缸和一堆鱼，水缸初始是空的，小 V 接下来会向水缸内加入一些鱼，同时也可能将已加入的鱼捞出来。

水缸里的鱼会相互攻击，直到只有一条鱼为止。也就是说如果有 n 条鱼，则会发生 $n - 1$ 次攻击。如果一条鱼的重量为 A ，另一条鱼重量为 B ，如果 $A \leq B$ ，则 B 鱼会吃掉 A 鱼，然后 B 鱼体重变为 $A + B$ 。

对于一场攻击来说，如果一条鱼的重量为 A ，另一条鱼重量为 B ，如果 AB 满足条件： $A \leq B$ 而且 $B \leq 2A$ 那么我们定义这场攻击是危险的。

现在小 V 会有 q 次操作，包括加入一条体重为 x 的鱼，或捞出一条水缸内的、体重为 x 的鱼。小 V 想知道，在每次操作后，水缸内能发生的最多的危险攻击次数是多少。 $q \leq 10^6$ 。

CF1098D Eels

注意到策略就是从小到大合并

这样是不劣的，因为 $a + b$ 若大于 c 则不会超过 $2c$

故我们只需要统计以下的个数： $[2 \sum_{j < i} a_j < a_i]$

一个观察是这样的个数是 \log 的

继续观察得到若我们按 $[2^0, 2^1), [2^1, 2^2) \dots$

分组，每组只可能第一个满足条件

那么我们对这 \log 组每组检查一下就可以了。

Shower

P 大一层楼的澡堂有 m 个坑位，每天有 n 个人要洗澡，每个人前去洗澡的时间为 t_i ，每个人洗澡的时间固定为 T 。

i 在 t_i 时刻去洗澡时如果没有坑位就只有等待直到有一个人洗完。

假设 i 开始洗澡的时间为 s_i ，那么他会产生 $s_i - t_i$ 的不满意度。

另外在接下来的 q 天，在第 i 天的时候， x_i 洗澡的时间会修改到 t'_i 。注意第 i 天的修改不会持续到第 $i+1$ 天。

你需要对每一天求出所有人不满意度的和。

$1 \leq m \leq 5, 1 \leq n \leq 5 \times 10^5, 1 \leq q \leq 10^5, 1 \leq t_i, T \leq 10^8$ 。

Shower

可以把人按 $\text{mod } m$ 分组，这样每组是独立的。

对于每一组答案为 $\sum_{i=1}^n \max_{j <= i} (t_j - jT) - (t_i - iT)$ 。

于是问题变成了每次询问查 m 次区间的单调栈，区间的单调栈可以通过预处理整个序列的单调栈，在查询的时候二分到第一个大于某个数的点得到。

复杂度 $O(n \log n + mq \log n)$ 。

Shower 2

P 大的澡堂需要排队，每个人有一个偏好 l_i, r_i 。如果第 i 个人去洗澡时，发现有 $> r_i$ 个人排队，他会直接离开（因为排队的人实在太多），如果有 $[0, l_i)$ 个人排队，他也会离开（因为人太少了，排队时不能聊天，比较没意思，还不如去其他楼层的澡堂碰碰运气）。故第 i 个人会在当前排队人数在 $[l_i, r_i]$ 时选择排队。

现在有 n 个人， q 次询问，第 j 次询问给定 L_j, R_j ，假设当前澡堂没有空位了（所以到了就要排队），问编号为 $L_j, L_j + 1, \dots, R_j$ 的人依次去洗澡，最终会有几个人排队。（假设这些人在排队的这些时候，一直没有人洗完澡空出位置）

形式化题意，给定 l_i, r_i ，设分段函数 $f_i(x) = x + [x \in [l_i, r_i]]$ ，多次询问 $f_R(f_{R-1} \dots f_L(0))$

$n, q \leq 10^6$ 。

Shower 2

每个人有个 L_i, R_i , 表示从 $x \in [L_i, R_i]$ 开始洗, 他会排队。
每次二分求出 $[L_i, R_i]$, 可以树状数组二分。

gym102155 J

一个序列，你要划分成两个，每个序列的贡献计算如下： a_i 贡献为前缀最大值 - a_i ，最小化贡献。 $n \leq 10^5$ 。

gym102155 J

考虑 DP, 设 $f_{i,j}$ 表示到 i , 一个序列的前缀最大值为 $1 \sim i$ 的最大值, 另一个的最大值是 j 的最小贡献。

那么考虑 $i+1$, 若为前缀最大值, 则 $f_{i,j} \rightarrow f_{i+1,j}$ 或 $f_{i,j} \rightarrow f_{i+1,max}$ 。

否则,

$f_{i,j \leq a_{i+1}} \rightarrow f_{i+1,a_{i+1}}, f_{i,j} \rightarrow f_{i+1,j} + \max - b_{a_{i+1}}, f_{i,j \geq a_{i+1}} \rightarrow f_{i+1,j} + b_j - b_{a_{i+1}}$ 。

操作为区间加, 区间每个数加 b_i , 那么我们用分块维护, 对于块内维护凸包, 记录加的 b_i 的次数就可以了。

(b 是离散化的数组)

CF1408H Rainbow Triples

给定长为 n 的序列 p ，你需要找出尽量多的三元组，满足：
 $p_a = p_c = 0, p_b \neq 0$ ，所有 p_b 互不相同， $n \leq 5 \times 10^5$ 、

CF1408H Rainbow Triples

设选出来 k 个，那么一定可以调整到用最前面和最后面 k 个 0，并且第一个和第一个配对！

(自己那一边配对是不优的，如果配对包涵的话换一下还是合法)

那么由 Hall 定理，就是要判断每个区间中颜色数是否 \geq 区间长度，即设位置为 a_i, b_i ，那么 $[a_i, b_i]$ 的颜色个数要 $\geq j - i + 1$ 。

(首先二分 k)，枚举 j ，可以维护出 $[l, b_j]$ 的颜色数，用线段树维护。

CF1408H Rainbow Triples

注意到在 b_i 处的修改相当于是对 $[1, a_i]$ 区间 -1 。

那么我们就不用二分了，若发现有位置 p 的值 < 0 ，那么说明 $[a_p, b_j]$ 中的颜色个数少了，我们将当前答案 -1 ，留给下一个 $[a_p, b_{j+1}]$ 去继续判断。

ICPC World Finals 2019 雨落葡萄园

好题，注意到是可以找到一种拓扑序，使得前面的一定落在后面的求出拓扑序只需要考虑 set + 扫描线（只需要用当前横坐标的大小关系），那么只需要知道端点的前驱后继，连边即可。

考虑求出了拓扑序如何做，倒着做，设 $dp_{i,j}$ 表示在考虑到第 i 个线段的遮挡情况后，在第 j 个区间下落落到最下面要戳几个洞。

转移就是考虑当前线段 $[l, r]$ （设为左低右高），那么如果要在 $(l, r]$ 下落，那么要花费 1 的代价，区间加 1。

然后对区间 $[l, r]$ 做一个前缀 min，对于左高右低，同理，要做后缀 min。

ICPC World Finals 2019 雨落葡萄园

考虑线段树如何做前缀后缀 min，我们注意到操作了几次过后都是一样的就可以区间赋值了。

利用 segment beats 的理论，我们考虑在维护区间单增或单减，这样操作是可以赋值的（不满足直接 dfs 下去），复杂度 $O(n \log^2 n)$ 。

修改会增加 $\log n$ 的势能，减少 1 的势能要 $\log n$ 的时间

CF377D Developing Game

有 n 个工人，第 i 个工人的能力是 v_i ，他只与能力在 $[l_i, r_i]$ 之间的人在一起工作，问最多能选出多少人一起工作并输出方案， $n \leq 10^5$ 。

CF377D Developing Game

考虑到一个合法的方案必须有 $\max(l_i) \leq \min(v_i)$, $\max(v_i) \leq \min(r_i)$ 也就是一定存在一个 (L, R) 使得 $L \in [\max(l_i), \min(v_i)]$, $R \in [\max(v_i), \min(r_i)]$ 发现 (L, R) 对应一个坐标, 而 l_i, v_i, r_i 对应一个矩阵, 扫描线即可。

NOIP2016 天天爱跑步

这个游戏的地图可以看作一棵包含 n 个结点和 $n - 1$ 条边的树，每条边连接两个结点，且任意两个结点存在一条路径互相可达。树上结点编号为从 1 到 n 的连续正整数。

现在有 m 个玩家，第 i 个玩家的起点为 s_i ，终点为 t_i 。每天打卡任务开始时，所有玩家在第 0 秒同时从自己的起点出发，以每秒跑一条边的速度，不间断地沿着最短路径向着自己的终点跑去，跑到终点后该玩家就算完成了打卡任务。（由于地图是一棵树，所以每个人的路径是唯一的）

小 c 想知道游戏的活跃度，所以在每个结点上都放置了一个观察员。在结点 j 的观察员会选择在第 w_j 秒观察玩家，一个玩家能被这个观察员观察到当且仅当该玩家在第 w_j 秒也正好到达了结点 j 。小 c 想知道每个观察员会观察到多少人？

$n, m \leq 3 \times 10^5$ 。

NOIP2016 天天爱跑步

把一条路径差分成两条向上到根，两条从根向下的路径。

我们发现，当往上走时，一个点对答案有贡献， $dep[s] - dep[x] = time[x]$

往下走 $len - (dep[t] - dep[x]) = time[x]$

问题就变成了求子树中某个深度有多少点。

使用动态开点线段树，对每层维护即可。

NOI2019 弹跳

跳蚤国有 n 座城市，分别编号为 $1 - n$ ，1 号城市为首都。所有城市分布在一个 $w \times h$ 范围的网格上。每座城市都有一个整数坐标 (x, y) ($1 \leq x \leq w, 1 \leq y \leq h$)，不同城市的坐标不相同。

在跳蚤国中共有 m 个弹跳装置，分别编号为 $1 - m$ ，其中 i 号弹跳装置位于 p_i 号城市，并具有参数 t_i, L_i, R_i, D_i, U_i 。利用该弹跳装置，跳蚤可花费 t_i ($t_i > 0$) 个单位时间，从 p_i 号城市跳至坐标满足 $L_i \leq x \leq R_i, D_i \leq y \leq U_i$ ($1 \leq L_i \leq R_i \leq w, 1 \leq D_i \leq U_i \leq h$) 的任意一座城市。需要注意的是，一座城市中可能存在多个弹跳装置，也可能没有弹跳装置。

现在跳蚤国王想知道，对于跳蚤国除首都（1 号城市）外的每座城市，从首都出发，到达该城市最少需要花费的单位时间。跳蚤国王保证，对每座城市，均存在从首都到它的出行方案。

$1 \leq n \leq 70000, 1 \leq m \leq 150000, 1 \leq w, h \leq n, 1 \leq t_i \leq 10000$ 。

NOI2019 弹跳

最短路，问题变成给一个矩阵，找到并删除矩阵中的所有点。
用线段树，每个节点用 *set* 维护（按纵坐标排序），复杂度 $O(n \log^2 n)$ ，
空间 $O(n \log n)$ 。

CF453E Little Pony and Lord Tirek

你有 n 只小马。每只小马有三种属性。

s_i : 时间为 0 时这只小马拥有的法力值。

m_i : 这只小马可以拥有的最大法力值。

r_i : 这只小马单位时间内回复的法力值。

m 个操作, t, l, r 表示在 t 时刻将 $[l, r]$ 中小马的法力吸空, 问吸了多少。
 $n, m \leq 10^5$ 。

CF453E Little Pony and Lord Tirek

可以先算出每个马回满血的时间 t_i 。

然后对于区间 $[l, r]$ 之间的马按 t_i 排序，二分出一个位置使得前面的都回满血，后面的都没有。

处理出 $sum(m_i), sum(r_i)$ 就可以询问了，可以按 t_i 为下标建主席树解决。用 set 维护不同的时间区间，每次就将 $[l, r]$ 不同的 t 的区间拿出来然后全部赋成当前 t ，均摊分析， $O((n + m) \log n)$ 。

CF997E Good Subsegments

给一个排列，一个序列是连续段当且仅当 $\max - \min = r - l$ 。 q 次询问问 $[L, R]$ 中的连续段有多少。 $n \leq 10^5$ 。

CF997E Good Subsegments

我们把询问离线，按 r 排序，用线段树动态维护。

$\max(a_i) - \min(a_i) - (r - l)$ 的最小值以及最小值个数。

考虑新增一个 a_i 的贡献，对于每一个位置 r 会 $+1$ 。

维护两个单调栈，对于 \max, \min 的修改对应于区间加。

于是到一个 r ，我们在线段树中查询 $[l, r]$ 中 0 的个数（查询最小值个数）。

这里查的是强制选 r 的，显然不对，于是扫到一个 r 后打一个标记表示将当前 r 对答案的贡献下放，还需要维护一个下放的答案。

CF1034D Intervals of Intervals

有 n 个区间 $[a_i, b_i]$ 定义区间的区间 $[l, r]$ 的价值是第 l 个区间到第 r 个区间的并的长度，找出 k 个不同的区间的区间，使得总价值最大。
 $n \leq 5 \times 10^5$ 。

CF1034D Intervals of Intervals

考虑二分答案，合法的区间为权值 $\geq mid$ 的区间，我们对这些区间统计个数，用双指针 + set 可以在 $O(n \log A \log n)$ 的时间内求出个数。

优化：双指针经过 r 时看成将 $[a_r, b_r]$ 染色为 r ，那么问的就是颜色 $\geq l$ 的长度。对于一次覆盖，若覆盖了颜色为 pre 的长度为 x ，那么对于 $l \in (pre, r]$ ，答案要加上 x 。可以实现预处理，单次二分就可以线性。最后考虑算答案，要计算 $l \in [1, L]$ 的 $[l, r]$ 的答案。可以每个颜色维护其覆盖的次数。

复杂度 $O(n \log A)$ 。

CF1148H Holy Diver

后端插入，问 $[L, R]$ 有多少子区间满足 $mex = k$ ，强制在线， $n \leq 2 \times 10^5$ 。

CF1148H Holy Diver

考虑从后往前的一个过程（动态维护 l 形成的 mex ），这是一个单调递减的阶梯函数，发现删掉当前 r 后相当于把一段区间推平推成 a_r ，即删掉若干个区间再插入一个区间，状态数是 $O(n)$ 的，我们正着做，每次相当于把一段为 a_r 的区间拆成若干个区间，在线段树上二分出这些区间，然后对每个 mex 开一棵主席树进行修改。
复杂度 $O(n \log n)$ 。

CF464E The Classic Problem

给定一张 n 个点， m 条边的无向图，每条边的边权为 2^{x_i} ，求 s 到 t 的最短路，结果对 $10^9 + 7$ 取模。

CF464E The Classic Problem

看看最短路需要支持哪些操作：

1. 赋值
2. 比较两个数 — 找到最高的不同位置
3. 给一个数加上 2^x — 找到第一个 $\geq x$ 且为 0 的位置 p , 把 $[x, p-1]$ 赋成 0, 把 p 赋成 1
用主席树实现。