数学归纳法

Mathematical Induction

RainPPR

2024-06-01

Table of contents

数学归纳法是证明某个命题对于所有满足 $n \geq n_0$ 的整数 n 都成立的一般方法。首先我们在 n 取 最小值 n_0 时证明该命题，这一步骤成为**基础**。然后对 $n > n_0$，假设该命题对 $n_0 \sim n-1$ 之间的所有值已经被证明，再证明该命题对 n 成立，这一步骤成为**归纳**。

这样一种证明方法仅用有限步就得到无限多个结果。

皮亚诺公理

一个最简单的例子，皮亚诺公理的自然数定义：

1. 0 是自然数；
2. 每一个确定的自然数 a，都有一个确定的后继 a'，a' 也是自然数；
3. 对于每个自然数 b, c，$b = c$ 当且仅当 $b' = c'$；
4. 0 不是任何自然数的后继；
5. 任意关于自然数的命题，如果证明：
    - 它对 0 成立，且假定它对自然数 a' 为真时，
    - 可以证明它对 a' 也成立。
    - 那么该命题对所有自然数都成立。

公理 5 保证了数学归纳法的正确性，从而被称为归纳法原理。

PS：在集合论和计算机科学领域中，认为 0 属于自然数。

但在数论领域中，认为 0 不属于自然数，因而按数论描述，自然数会同义于正整数。

因此，如果定义 0 不属于自然数，把上面的 0 改成 1 即可。

戴德金-皮亚诺结构

戴德金-皮亚诺结构

戴德金-皮亚诺结构可以描述为满足所有以下条件的三元组 (S, f, e):

1. $(e \in S)$
2. $(\forall a \in S)(f(a) \in S)$
3. $(\forall b \in S)(\forall c \in S)((f(b) = f(c)) \Rightarrow (b = c))$
4. $(\forall a \in S)(f(a) \neq e)$
5. $(\forall A \subseteq S)(((e \in A) \land (\forall a \in A)(f(a) \in A)) \Rightarrow (A = S))$

一个形象化的例子就是最上面的，即三元组 $(\mathbb{N}, (f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{*}; x \mapsto (x + 1)), 0)$。

例子

例子

证明,

$$S_n = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

例子

由于,

$$1 = \frac{1 \times 2}{2}$$

假设我们已经证明,

$$S_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$$

那么,

$$S_n = S_{n-1} + n = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

则,其对于任意自然数成立。

应用

应用

解递归式,

$$Q_0 = \alpha, Q_1 = \beta$$

$$Q_n = \frac{1 + Q_{n-1}}{Q_{n-2}}, n > 1$$

应用

容易发现,

$$
\begin{aligned}
Q_0 &= \alpha & \qquad Q_5 &= \alpha \\
Q_1 &= \beta & \qquad Q_6 &= \beta \\
Q_2 &= \frac{1+\beta}{\alpha} & \qquad &\cdots \\
Q_3 &= \frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta} \\
Q_4 &= \frac{1+\alpha}{\beta}
\end{aligned}
$$

应用

是一个周期函数，结论：

$$Q_n = \begin{cases} \alpha & \text{if } n \equiv 0 \pmod 5 \\ \beta & \text{if } n \equiv 1 \pmod 5 \\ \dfrac{1+\beta}{\alpha} & \text{if } n \equiv 2 \pmod 5 \\ \dfrac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta} & \text{if } n \equiv 3 \pmod 5 \\ \dfrac{1+\alpha}{\beta} & \text{if } n \equiv 4 \pmod 5 \end{cases}$$

证明:

对于 $n \in [0,5)$，易证。

假设对于 $n = 5k + q, k \leq t, k \in \mathbb{Z}, q \in [0,5)$ 成立。

证明对于 $n = 5(k+1) + q$ 也成立，以 $n = 5(k+1)$ 为例，

$$Q_{5(k+1)} = \frac{1 + Q_{5(k+1)-1}}{Q_{5(k+1)-2}} = \frac{1 + Q_{5k+4}}{Q_{5k+3}} = \alpha$$

对于 $q = 2,3,4$，同理，略。

反向数学归纳法

反向数学归纳法

反向数学归纳法，是从 n 到 $n-1$ 来证明命题，而不是相反。

例如，证明:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^n$$

对于 $x_1, x_2 ... x_n \geq 0$。

反向数学归纳法

证明:

记命题,

$$P(n): x_1 ... x_n \leq \left(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}\right)^n$$

则,

$$P(1): x_1 \leq x_1$$

显然成立。

$$P(2): x_1 x_2 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2$$

即,

$$4x_1x_2 \leq x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$
$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \geq 0$$

显然成立。

即，$P(1), P(2)$ 成立。

性质一

若 $P(n)$ 成立，则 $P(n-1)$ 也成立。

记,

$$x_n = \frac{x_1 + ... + x_{n-1}}{n-1}$$

则 $P(n)$ 为,

$$x_1 ... x_{n-1} \cdot \frac{x_1 + ... + x_{n-1}}{n-1} \leq \left(\frac{x_1 + ... + x_{n-1}}{n-1}\right)^n$$

即 $P(n-1)$,

$$x_1 ... x_{n-1} \leq \left(\frac{x_1 + ... + x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}$$

Q.E.D.

性质二

若 $P(n)$ 成立，则 $P(2n)$ 成立。

我们记第一个 $P(n)$ 为，

$$x_1 \dots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^n$$

同样的，记第二个 $P(n)$ 为，

$$x_{n+1} \dots x_{2n} \leq \left(\frac{x_{n+1} + \dots + x_{2n}}{n}\right)^n$$

我们知道 $P(2)$ 是成立的，记

$$y_1 = x_1 ... x_n$$
$$y_2 = x_{n+1} ... x_{2n}$$

对 y_1, y_2 应用 $P(2)$，

性质二

$$
\begin{aligned}
y_1 y_2 &\leq \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 \\
x_1 \ldots x_{2n} &\leq \left(\frac{x_1 \ldots x_n + x_{n+1} \ldots x_{2n}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{(x_1 \ldots x_n)^2 + (x_{n+1} + x_{2n})^2 + 2x_1 \ldots x_{2n}}{4} \\
&= \frac{(x_1 \ldots x_n)^2 + (x_{n+1} + x_{2n})^2}{2} \\
&\leq \frac{(x_1 + \ldots + x_n)^{2n} + (x_{n+1} + \ldots + x_{2n})^{2n}}{(2n)^{2n}} \\
&\leq \left(\frac{x_1 + \ldots + x_{2n}}{2n}\right)^{2n}
\end{aligned}
$$

性质二

即，$P(2n)$。

Q.E.D.

整理

根据,

$$P(1), P(2)$$
$$P(n) \Rightarrow P(2n)$$
$$P(n) \Rightarrow P(n-1)$$

我们可以知道，对于 $\forall n \in \mathbb{N}^*$，$P(n)$ 成立。

END.