

数学归纳法

Mathematical Induction

RainPPR

2024-06-01

Table of contents

1. 皮亚诺公理
2. 戴德金-皮亚诺结构
3. 例子
4. 应用
5. 反向数学归纳法

数学归纳法是证明某个命题对于所有满足 $n \geq n_0$ 的整数 n 都成立的一般方法。首先我们在 n 取最小值 n_0 时证明该命题，这一步骤成为**基础**。然后对 $n > n_0$ ，假设该命题对 $n_0 \sim n - 1$ 之间的所有值已经被证明，再证明该命题对 n 成立，这一步骤成为**归纳**。

这样一种证明方法仅用有限步就得到无限多个结果。

皮亚诺公理

皮亚诺公理

一个最简单的例子，皮亚诺公理的自然数定义：

1. 0 是自然数；
2. 每一个确定的自然数 a ，都有一个确定的后继 a' ， a' 也是自然数；
3. 对于每个自然数 b, c ， $b = c$ 当且仅当 $b' = c'$ ；
4. 0 不是任何自然数的后继；
5. 任意关于自然数的命题，如果证明：
 - 它对 0 成立，且假定它对自然数 a' 为真时，
 - 可以证明它对 a' 也成立。
 - 那么该命题对所有自然数都成立。

公理 5 保证了数学归纳法的正确性，从而被称为归纳法原理。

PS: 在集合论和计算机科学领域中, 认为 0 属于自然数。

但在数论领域中, 认为 0 不属于自然数, 因而按数论描述, 自然数会同义于正整数。

因此, 如果定义 0 不属于自然数, 把上面的 0 改成 1 即可。

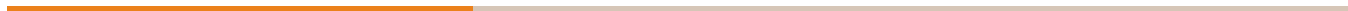
戴德金-皮亚诺结构

戴德金-皮亚诺结构可以描述为满足所有以下条件的三元组 (S, f, e) :

1. $(e \in S)$
2. $(\forall a \in S)(f(a) \in S)$
3. $(\forall b \in S)(\forall c \in S)((f(b) = f(c)) \Rightarrow (b = c))$
4. $(\forall a \in S)(f(a) \neq e)$
5. $(\forall A \subseteq S)((e \in A) \wedge (\forall a \in A)(f(a) \in A)) \Rightarrow (A = S)$

一个形象化的例子就是最上面的，即三元组 $(\mathbb{N}, (f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*; x \mapsto (x + 1)), 0)$ 。

例子



例子

证明,

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

例子

由于,

$$1 = \frac{1 \times 2}{2}$$

假设我们已经证明,

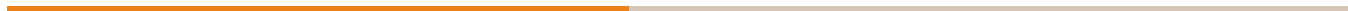
$$S_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$$

那么,

$$S_n = S_{n-1} + n = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

则, 其对于任意自然数成立。

应用



解递归式,

$$Q_0 = \alpha, Q_1 = \beta$$
$$Q_n = \frac{1 + Q_{n-1}}{Q_{n-2}}, n > 1$$

容易发现,

$$Q_0 = \alpha \qquad Q_5 = \alpha$$

$$Q_1 = \beta \qquad Q_6 = \beta$$

$$Q_2 = \frac{1 + \beta}{\alpha} \qquad \dots$$

$$Q_3 = \frac{1 + \alpha + \beta}{\alpha\beta}$$

$$Q_4 = \frac{1 + \alpha}{\beta}$$

是一个周期函数，结论：

$$Q_n = \begin{cases} \alpha & \text{if } n \equiv 0 \pmod{5} \\ \beta & \text{if } n \equiv 1 \pmod{5} \\ \frac{1 + \beta}{\alpha} & \text{if } n \equiv 2 \pmod{5} \\ \frac{1 + \alpha + \beta}{\alpha\beta} & \text{if } n \equiv 3 \pmod{5} \\ \frac{1 + \alpha}{\beta} & \text{if } n \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$$

证明:

对于 $n \in [0, 5)$, 易证。

假设对于 $n = 5k + q, k \leq t, k \in \mathbb{Z}, q \in [0, 5)$ 成立。

证明对于 $n = 5(k + 1) + q$ 也成立, 以 $n = 5(k + 1)$ 为例,

$$Q_{5(k+1)} = \frac{1 + Q_{5(k+1)-1}}{Q_{5(k+1)-2}} = \frac{1 + Q_{5k+4}}{Q_{5k+3}} = \alpha$$

对于 $q = 2, 3, 4$, 同理, 略。

反向数学归纳法

反向数学归纳法

反向数学归纳法，是从 n 到 $n - 1$ 来证明命题，而不是相反。

例如，证明：

$$\prod_{i=1}^n x_i \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^n$$

对于 $x_1, x_2 \dots x_n \geq 0$ 。

反向数学归纳法

证明：

记命题，

$$P(n) : x_1 \dots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^n$$

则，

$$P(1) : x_1 \leq x_1$$

显然成立。

$$P(2) : x_1 x_2 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2$$

即,

$$\begin{aligned} 4x_1x_2 &\leq x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \\ x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

显然成立。

即, $P(1), P(2)$ 成立。

性质一

若 $P(n)$ 成立, 则 $P(n-1)$ 也成立。

记,

$$x_n = \frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}$$

则 $P(n)$ 为,

$$x_1 \dots x_{n-1} \cdot \frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \leq \left(\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \right)^n$$

即 $P(n-1)$,

$$x_1 \dots x_{n-1} \leq \left(\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \right)^{n-1}$$

Q.E.D.

性质二

若 $P(n)$ 成立, 则 $P(2n)$ 成立。

我们记第一个 $P(n)$ 为,

$$x_1 \dots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^n$$

同样的, 记第二个 $P(n)$ 为,

$$x_{n+1} \dots x_{2n} \leq \left(\frac{x_{n+1} + \dots + x_{2n}}{n} \right)^n$$

性质二

我们知道 $P(2)$ 是成立的, 记

$$\begin{aligned}y_1 &= x_1 \cdots x_n \\ y_2 &= x_{n+1} \cdots x_{2n}\end{aligned}$$

对 y_1, y_2 应用 $P(2)$,

性质二

$$y_1 y_2 \leq \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right)^2$$

$$\begin{aligned} x_1 \dots x_{2n} &\leq \left(\frac{x_1 \dots x_n + x_{n+1} \dots x_{2n}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{(x_1 \dots x_n)^2 + (x_{n+1} \dots x_{2n})^2 + 2x_1 \dots x_{2n}}{4} \\ &= \frac{(x_1 \dots x_n)^2 + (x_{n+1} \dots x_{2n})^2}{2} \\ &\leq \frac{(x_1 + \dots + x_n)^{2n} + (x_{n+1} + \dots + x_{2n})^{2n}}{(2n)^{2n}} \\ &\leq \left(\frac{x_1 + \dots + x_{2n}}{2n} \right)^{2n} \end{aligned}$$

性质二

即, $P(2n)$ 。

Q.E.D.

根据,

$$P(1), P(2)$$

$$P(n) \Rightarrow P(2n)$$

$$P(n) \Rightarrow P(n-1)$$

我们可以知道, 对于 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ 成立。

END.