数列 入门

Sequence Junior

RainPPR

2024-06-01

Table of contents

下文中重要公式，均用 $\boxed{}$ 框出来。

数列基础

数列基础

数列是由数字组成的有序序列，数列中的每一个数都叫做这个数列的**项**。

项数有限的数列成为**有限数列**，项数无穷多的成为**无穷数列**。

排在第一位的数称为这个数列的**首项**，有限数列的最后一个数成为这个数列的**末项**。

注意：无穷数列只有首项，没有末项。

对于数列，更严谨的定义，考虑最一般的复数，下文再说。

无穷数列

一个 $(a : \mathbb{N} \to \mathbb{C})$ 的函数被称为**无穷数列**。

可记为 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 或 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 或 $\langle a_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$。

一个数列 a 的第 i 项，通常记为 $a(i)$，简记为 a_i。

若 $I_n = \{1, 2, ..., n\}$，则一个 $(a : I_n \to \mathbb{C})$ 的函数被称为**有限数列**。

可记为 $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ 或 $(a_i)_{i=1}^{n}$ 或 $\langle a_i \rangle_{i=1}^{n}$。

同时，也可以将 0 作为数列的首项，类似的。

对于 $\forall n \in \mathbb{Z}^*$，

- 若 $a_{n+1} \geq a_n$，那么称 a 为**单调递增**数列。
- 若 $a_{n+1} > a_n$，那么称 a 为**严格单调递增**数列。
- 若 $a_{n+1} \leq a_n$，那么称 a 为**单调递减**数列。
- 若 $a_{n+1} < a_n$，那么称 a 为**严格单调递减**数列。

一般的表示方法

列举法
例如,

$$a = \langle 1, 2, 4, 8, 16 \rangle$$

对于无穷数列很不好用。

图像法
数列是离散的，因此数列的图像是一个散点图。

一般这个不好用。

通项公式

定义，表示 n 和 a_n 的关系的公式，叫做 a 的**通项公式**。

把数列看成函数的形式，

$$a_n = f(n)$$

数列对应函数的解析式，被称为数列的通项公式。

例如，

$$a_n = 2^n$$

递推公式

定义，表示 a_n 和 a_n 的前一或前几项的关系的公式，叫做 a 的**递推公式**。

例如，

$$a_{n+1} = a_n + 2$$

特殊的，如果要根据递推公式确定一个数列，还需要知道数列的任意一项。

一般会表示数列的首项，例如，

$$a_1 = 1$$

如果一个数列只跟其前面的 k 项有关，其中 k 是满足这个条件的最小正整数，

那么称这个数列的阶数为 k，即这个数列是一个 k 阶数列。

级数

数列中各个项的和称为**级数**，具体的，

一个数列 $a_i\,(i \in \mathbb{N})$ 的级数是另外一个数列 $s_i\,(i \in \mathbb{N})$，具有以下特性：

- $s_0 = a_0$,
- $s_n = s_{n-1} + a_n\,\left(\forall n \in \mathbb{Z}^*\right)$

一般会将 $\{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 写为，

$$\sum_{i=0}^{n} a_i$$

甚至，更直观的 $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ 来凸显级数源于求和的直观概念。

对于从 1 开始的数列，同理，一般直接使用求和符号简记为，

$$s_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

数列和函数

容易发现，数列，

$$a_n = f(n)$$

其级数，即为 f 函数的积分，

$$s_n = g(n)$$

其差分，即为 f 函数的微分，

$$d_n = k(n)$$

只不过，函数一般是连续的，而数列一般是离散的。

等差数列

等差数列

在等差数列中，任何相邻两项的差相等，该差值称为**公差** d。

具体的，可以表示为，

$$a_n = d + qn$$

的，都是等差数列。

上式中，公差为 d，首项 $a_1 = d + q$。

- 若 $d > 0$，等差数列为一个严格单调递增数列。
- 若 $d < 0$，等差数列为一个严格单调递减数列。
- 特殊的，若 $d = 0$，等差数列退化为一个常数列。

递推公式

形如,

$$\boxed{a_{n+1} = a_n + d, \left(n \in \mathbb{Z}^*\right)}$$

或者记为,

$$a_{n+1} - a_n = d$$

即公差的定义式。

通项公式

形如,

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

即，角标减一，等于公差个数。

或者对于从 0 开始的数列,

$$a_n = a_0 + nd$$

前面的一项即为首项，其与公差需为给定的确定的数。

性质

除了上述几条，

给定任意两项 a_n, a_m，则公差，

$$\boxed{d = \frac{a_n - a_m}{n - m}}$$

在等差数列中，前项与后项和为该项两倍，具体的，

$$\begin{aligned} a_{n-1} + a_{n+1} &= a_n - d + a_n + d \\ &= 2a_n \end{aligned}$$

从另一个角度看，等差数列中的任意一项，是其前项和后项的算术平均：

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

性质

对于正整数 m, n, p, q，若 $m+n=p+q$，则,

$$\boxed{a_m + a_n = a_p + a_q}$$

或者简化一下,

$$\boxed{a_m + a_n = a_{m-k} + a_{n+k}}$$

据此，有,

$$\boxed{a_{n-k} + a_{n+k} = 2a_n}$$

对于 a_{n-k}, a_n, a_{n+k} 有意义。

据此，同理，

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

若 $\langle a_n \rangle$ 为一个等差数列，则，

- $\langle b + a_n \rangle$：为一个等差数列；
- $\langle b \times a_n \rangle$：为一个等差数列；
- $\langle b^{a_n} \rangle$：为一个等比数列（见下）；

项数公式

给定等差数列首项 a_1 及公差 d，有项 a_k，则，

$$a_k = a_1 + (k-1)d$$

$$k - 1 = \frac{a_k - a_1}{d}$$

$$\boxed{k = \frac{a_k - a_1}{d} + 1}$$

或对于 a_0，

$$a_k = a_0 + kd$$

$$k = \frac{a_k - a_0}{d}$$

另外的，函数思想，有，

$$
\begin{aligned}
a_n &= f(n) \\
n &= g(a_n)
\end{aligned}
$$

即 f, g 互为反函数，这个可以用于求多种数列。

求和公式

一般考虑,

$$S_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

有常用公式,

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

考虑求解出，求和公式的封闭形式,

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + [a_1 + (n-1)d] \\ &= na_1 + d[1 + 2 + 3 + ...(n-1)] \\ &= na_1 + dT_{n-1} \end{aligned}$$

求和公式

而对于,

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

我们首位配对,

$$T_n = n + (n-1) + \ldots + 1$$

两者相加,

$$2T_n = n(n+1)$$
$$T_n = n(n+1)/2$$

求和公式

于是，

$$\begin{aligned}S_n &= na_1 + dT_{n-1} \\ &= \boxed{na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d} \\ &= \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \\ &= \boxed{\frac{n(a_1+a_n)}{2}}\end{aligned}$$

或者，对于原始公式直接首位配对，用上面的结论，也可以得出。

总结一下，一般写为，

$$\boxed{S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)]d}{2} \cdot n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}}$$

求和公式

常用二次函数的思想：

$$\boxed{S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n}$$

据此，可以等差数列和的极点存在于，

$$n = \frac{d/2 - a_1}{d} = \frac{1}{2} - \frac{a_1}{d}$$

我们发现，该函数图像过原点，因此我们定义，

$$S_0 = 0$$

同时，对于上面的式子，如果我们假设存在 a_0，那么求和，

得出很重要的一个结论，任何一个二次函数，都可以表示为一个等差数列的级数。

等差数列和在中文教科书中常表达为:

一个等差数列的和，等于其首项与末项的和，乘以项数除以二。

等差中项

对于 a, b，有 c 满足,

$$c - a = b - c$$

即,

$$c = \frac{a+b}{2}$$

即算术平均数。

或者，若 $\{a, b, c\}$ 为一个等差数列，那么

$$b - a = c - b$$

一般写为,

$$a + c = 2b$$

等差中项

可以用这个来判断一个三项数列是否为等差数列。

例题，对于等差数列 $\{a, b, c\}$，证明，

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right\}$$

也是一个等差数列。

等差中项

暴力展开,

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} &= \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \\
\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} &= \frac{2\sqrt{b}+\sqrt{a}+\sqrt{c}}{b+\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{c})+\sqrt{ac}} \\
2b+2\sqrt{ac}+2\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{c}) &= 2\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{c})+a+c+\sqrt{ac} \\
a+c &= 2b
\end{aligned}
$$

对于等差数列 $\{a, b, c\}$ 成立。Q.E.D.

等差中项

或者，观察到原式中，分母都是根号的形式，考虑分母有理化，

$$\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$
$$\frac{2(\sqrt{c}-\sqrt{a})}{2d}=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{d}+\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{d}$$

显然成立。

累加法

最简单的，形如，

$$a_n = a_{n-1} + f(n)$$

都可以使用累加法，具体的，

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + f(n) \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + f(n-1) \\ &\dots \\ a_3 &= a_2 + f(3) \\ a_2 &= a_1 + f(2) \end{aligned}$$

上述所有式子相加，得

$$a_n = a_1 + f(2) + f(2) + \dots + f(n)$$

容易发现，我们对于公差求前缀和，可以得到一个普通等差数列。

那么，我们对于普通等差数列再求和，就可以得到二阶等差数列。

具体的，定义常数为零阶等差数列，普通等差数列为一阶等差数列。

容易发现，若 $\{a_i\}$ 为一阶等差数列，$\{b_i\}$ 同样，那么 $\{a_ib_i\}$ 为一个二阶等差数列。

根据定义，对于一个二阶等差数列，其相邻两项的差为一个一阶等差数列，相邻两项差的相邻两项差为一个常数。

等比数列

等比数列

在等比数列中，任何相邻两项的比例相等，该比值称为公比 q。

具体的，可以表示为，

$$a = pq^n$$

的，都是等比数列。

上式中，公比为 q，首项 $a_1 = pq$。

递推公式

形如,

$$\boxed{a_{n+1} = qa_n, \left(n \in \mathbb{Z}^*, q \neq 0\right)}$$

或者记为,

$$\boxed{\boldsymbol{q = \frac{a_{n+1}}{a_n}}}$$

即公比的定义式。

易知此式中，$a_n \neq 0$，为了方便，我们一般规定 $q \neq 0$。

形如,

$$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$$

换句话说，任意一个等比数列 $\{a_n\}$ 都可以写为,

$$\{a, aq, aq^2, ...aq^{n-1}\}$$

即，角标减一，等于公比幂次。

性质

除了上述几条,

在等比数列中，前项与后项积为该项平方，具体的,

$$\begin{aligned} a_{n-1} \times a_{n+1} &= aq^{n-2}aq^{n} \\ &= a^2q^{2n-2} \\ &= \left(aq^{n-1}\right)^2 \\ &= a_n^2 \end{aligned}$$

对于正整数 m, n, p, q，若 $m+n=p+q$，则,

$$\boxed{a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q}$$

或者简化一下,

$$\boxed{a_m \cdot a_n = a_{m-k} \cdot a_{n+k}}$$

性质

据此，有，

$$\boxed{a_{n-k} \cdot a_{n+k} = a_n^2}$$

还有一些和上面等比数列类似的操作的结论，

但是因为正负号的问题，不具体写出，可以根据上述平方的公式推导。

若 $\langle a_n \rangle$ 为一个等比数列，则，

- $\langle b + a_n \rangle$：为一个等比数列；
- $\langle b \times a_n \rangle$：为一个等比数列；
- $\langle \log_b a_n \rangle$：为一个等差数列（见上）；

求和公式

等差数列中给出的公式依然成立，

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

实际上，这个对于任意数列都成立。

考虑求解出，等比数列求和公式的封闭形式，

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} \\ &= a_1 (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) \end{aligned}$$

注意到后面的是经典的分解因式，

$$\boxed{S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, (q \neq 1)}$$

求和公式

或者，错位相减，

$$qS_n - S_n = a_1 q^n - a_1$$
$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, (q \neq 1)$$

同时，若 $q = 1$，数列退化为常数列，

$$\boxed{S_n = na_1, (q = 1)}$$

等比中项

对于 a, b，有 c 满足，

$$\frac{b}{c} = \frac{c}{a}$$

即，

$$c = \pm\sqrt{ab}$$

取其中的正数，即几何平均数。

累乘法

和累加法类似的,

$$a_n = a_{n-1} f(n)$$

累乘法，即

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} f(n) \\ a_{n-1} &= a_{n-2} f(n-1) \\ &\dots \\ a_3 &= a_2 f(3) \\ a_2 &= a_1 f(2) \end{aligned}$$

上述所有式子相乘，得

$$a_n = a_1 f(2) f(3) \dots f(n)$$

裂项

经典例题

有性质,

$$\boxed{\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}$$

可以求解，形如

$$S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

的问题。

同时，易证,

$$\boxed{\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+k}\right)}$$

注意，此时裂项一定要找准剩下的。

我们可以分别写出括号内的正数、负数。

以 $k=2$ 为例，

$$S=\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+...+\frac{1}{n(n+2)}$$

化简，

$$2S=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$$

列出正负,

$$
\begin{aligned}
+ &: \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n} \\
- &: \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}
\end{aligned}
$$

容易发现,

$$
2S = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-2}
$$

或者用求和符号简单的表示，下文再说。

有公式,

$$\boxed{n(n+1)=\frac{1}{3}\Big[n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)\Big]}$$

于是，例题,

$$S=1\times2+2\times3+3\times4+...+n(n+1)$$

化简,

$$3S=1\times2\times3-0\times1\times2+...+n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)$$

得,

$$S=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

整式裂项

利用上述等式，注意到，

$$n^2 = n(n+1) - n$$

于是，

$$\boxed{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = S - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

或者用求和符号简单的表示，下文再说。

共轭根式

形如,

$$\sqrt{a}+\sqrt{b},\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

的，称为共轭根式。

容易证明,

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b(a,b\geq 0)$$

共轭根式

于是，有裂项，

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

以及，

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$$

阶乘

定义,

$$\boxed{n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times n}$$

称为阶乘，有,

$$\boxed{n \cdot n! = (n+1)! - n!}$$

还有组合数的，但是这里还没涉及到。

放缩

数列求和是一种精确的方法，当我们无法精确的计算的时候，就可以放缩来估计。

例如，估计

$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

的级别。

容易发现，

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

于是，我们可以以此估计。

我们把 $1/1^2$ 保持不动，估计

$$1.5 < S < 2$$

而为了提高精度，我们减少放缩的项数。

或者说，把 $1/2^2, 1/3^2$ 等直接计算，而不是放缩。

这就是放缩提高精度的方法：保留更多的项。

引理一：

$$\frac{\sqrt{k}}{k^2} = \frac{1}{k^{3/2}} < 2\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

通用方法

例题，求解通项：

$$a_n = 2a_{n-1} + 1(n \geq 2), a_1 = 1$$

下面将对于这一类的问题，总结三个通用方法。

方法一：数学归纳法

尝试证明,

$$a_n = 2^n - 1$$

容易发现,

$$a_1 = 2^1 - 1 = 1$$

假设对于 $n = k, k \in \mathbb{N}^*$ 成立,

$$a_k = 2^k - 1$$

尝试证明对于 $n = k + 1$ 也成立,

$$a_{k+1} = 2a_k + 1 = 2^{k+1} - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1$$

于是，该通项公式对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立。

方法二：变形法

容易发现，递推公式两边同时加一，

$$a_n + 1 = 2a_{n-1} + 2$$

另，

$$b_n = a_n + 1$$

上式即为，

$$b_n = 2b_{n-1}, b_1 = 2$$

那么这是一个等比数列，易得，

$$b_n = 2^n$$

于是，

$$a_n = b_n - 1 = 2^n - 1$$

方法二：变形法

考虑推广这一类问题，形如，

$$a_n = pa_{n-1} + q$$

我们两边同时加一个数，设为 x，

$$a_n + x = pa_{n-1} + q + x$$

记新数列，

$$b_n = a_n + x, a_n = b_n - x$$

原数列，

$$b_n = p(b_{n-1} - x) + q + x = pb_{n-1} + q - (p-1)x$$

方法二：变形法

另右侧常数项为零，于是,

$$\boxed{x=\frac{q}{p-1}}$$

即，对于原数列，加上这个数，即可转化为普通的等比数列。

方法三：变形累加

容易得出，下面的式子不断乘二，

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2a_{n-1} + 1 \\
2a_{n-1} &= 4a_{n-1} + 2 \\
4a_{n=2} &= 8a_{n-2} + 4 \\
&\cdots \\
2^{n-3}a_3 &= 2^{n-2}a_2 + 2^{n-3} \\
2^{n-2}a_2 &= 2^{n-1}a_1 + 2^{n-2}
\end{aligned}
$$

上述式子相加，

$$a_n = 2^{n-1}a_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + ... + 4 + 2 + 1$$

因为 $a_1 = 1$，

$$a_n = 2^n - 1$$

方法三：变形累加

考虑推广这一类问题，形如，

$$a_n = pa_{n-1} + q$$

我们还可以等式两边同除 p^n，得

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{a_n}{p^n} = \frac{a_{n-1}}{p^{n-1}} + \frac{q}{p^n}}}$$

设新的数列，

$$b_n = \frac{a_n}{p^n}$$

原数列形如，

$$b_n = b_{n-1} + \frac{q}{p^n}$$

方法三：变形累加

对 b 数列进行累加法，可以得出，

$$b_n = \frac{a_1}{p} + \frac{q}{p^2} + \frac{q}{p^3} + \ldots + \frac{q}{p^n}$$

右边为等比数列，即，

$$b_n = \frac{a_1}{p} + \frac{q}{p^n} \cdot \frac{p^n - 1}{p - 1} - \frac{q}{p}$$

两边同时乘 p^n，

$$\boxed{\boldsymbol{a_n = (a_1 - q)p^{n-1} + \frac{q}{p-1}(p^n - 1)}}$$

即通用公式。

同时，若 $q = f(n)$，依然可以用这个方法来做。

基础例题

基础例题

求下列数列的通项公式。

例题一

求：$a_n = 2a_{n-1} + 3\,(n \geq 2), a_1 = 1$。

题解：例题一

因为 $q/(p-1)=3$，等式两边同时加三,

$$a_n + 3 = 2a_{n-1} + 6 = 2^{n+1}$$
$$a_n = 2^{n+1} - 3$$

注意到当 $n=1, a_1=1$ 满足该式，因此,

$$a_n = 2^{n+1} - 3$$

例题二

求：$a_n = a_{n-1} + n \, (n \geq 2), a_1 = 1$。

题解：例题二

注意到,

$$a_n = a_{n-1} + n$$
$$a_{n-1} = an - 2 + n - 1$$
$$\dots$$
$$a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2$$

上式相加，得,

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n - 1 + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

注意到当 $n = 1, a_1 = 1$ 满足该式，因此,

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

求：$a_n = 2a_{n-1} + n \, (n \geq 2), a_1 = 1$。

题解：例题三

等式两边同时除以 2^n，得，

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$$

记 $b_n = a_n/2^n$，

$$\begin{gathered} b_n = b_{n-1} + n/2^n \\ b_{n-1} = b_{n-2} + (n-1)/2^{n-1} \\ \dots \\ b_2 = b_1 + 1/2 \\ b_1 = 1/2 \end{gathered}$$

上式相加，得，

$$b_n = \frac{n}{2^n} + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

注意到分母为二的幂次的形式，等式乘二，

$$2b_n = \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n-1}{2^{n-2}} + ... + 1 + 1$$

下式减上式，得，

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + ... + \frac{1}{2^1} + 1 \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}(1 + 2 + ... + 2^{n-1}) - \frac{n}{2^n} \\ &= \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{2+n}{2^n} \end{aligned}$$

带入原式，

$$a_n = 2^n b_n = 2^{n+1} - 2 - n$$

题解：例题三

注意到当 $n=1, a_1=1$ 满足该式，因此，

$$a_n = 2^{n+1} - 2 - n$$

例题四

求：$a_n = 2a_{n-1} + n^2\,(n \geq 2), a_1 = 1$。

题解：例题四

等式两边同时除以 2^n，得,

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{a\_n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n^2}{2^n}$$

记,

$$b_n = a_n/2^n, a_n = 2^n b_n$$

则,

$$b_n = b_{n-1} + \frac{n^2}{2^n}, b_1 = \frac{a\_1}{2^1} = \frac{1}{2} = \frac{1^2}{2^1}$$

得,

$$b_n = \frac{1^2}{2^1} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \frac{4^2}{2^4} + ... + \frac{(n-1)^2}{2^{n-1}} + \frac{n^2}{2^n}$$

两边同时乘二，得，

$$2b_n = 1 + \frac{2^2}{2^1} + \frac{3^2}{2^2} + \frac{4^2}{2^3} + ... + \frac{(n-1)^2}{2^{n-2}} + \frac{n^2}{2^{n-1}}$$

下式减上式，得，

$$b_n = 1 - \frac{n^2}{2^n} + \frac{2^2-1^2}{2^1} + \frac{3^2-2^2}{2^2} + \frac{4^2-3^2}{2^3} + ... + \frac{(n-1)^2-(n-2)^2}{2^{n-2}} + \frac{n^2-(n-1)^2}{2^{n-1}}$$

注意到，

$$n^2 - (n-1)^2 = n^2 - n^2 - 1 + 2n = 2n - 1$$

于是，记，

题解：例题四

$$c_n = \frac{2^2-1^2}{2^1} + \frac{3^2-2^2}{2^2} + \frac{4^2-3^2}{2^3} + \ldots + \frac{(n-1)^2-(n-2)^2}{2^{n-2}} + \frac{n^2-(n-1)^2}{2^{n-1}}$$
$$= \frac{2\times 2-1}{2^1} + \frac{2\times 3-1}{2^2} + \frac{2\times 4-1}{2^3} + \ldots + \frac{2(n-1)-1}{2^{n-2}} + \frac{2n-1}{2^{n-1}}$$

即,

$$b_n = 1 - \frac{n^2}{2^n} + c_n$$

下式两边同时乘二，得,

$$2c_n = 3 + \frac{2\times 3-1}{2^1} + \frac{2\times 4-1}{2^2} + \ldots + \frac{2(n-1)-1}{2^{n-3}} + \frac{2n-1}{2^{n-2}}$$

与原式相减，得,

题解：例题四

$$
\begin{aligned}
c_n &= 3 - \frac{2n-1}{2^{n-1}} + \frac{2}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{2}{2^{n-3}} + \frac{2}{2^{n-2}} \\
&= 3 - \frac{2n-1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \dots + \frac{1}{2^{n-4}} + \frac{1}{2^{n-3}} \\
&= 3 - \frac{2n-1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-3}}(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-3}) \\
&= 3 - \frac{2n-1}{2^{n-1}} + \frac{2^{n-2}-1}{2^{n-3}} \\
&= 5 - \frac{2n-1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-3}}
\end{aligned}
$$

于是,

$$
b_n = 1 - \frac{n^2}{2^n} + c_n = 6 - \frac{n^2}{2^n} - \frac{2n-1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-3}}
$$

于是,

$$a_n = 2^n b_n = 3 \times 2^{n+1} - n^2 - 4n - 6$$

注意到当 $n = 1, a_1 = 1$ 满足该式，因此,

$$a_n = 3 \times 2^{n+1} - n^2 - 4n - 6$$