Problem 1

a) $f(1) = \pm1$，函数在其定义域中的元素取值不唯一, $f(n)$不是函数.

b) $\forall n(n\in Z\rightarrow n^2+1\geqslant 0)$，对任意 $n\in Z$ 存在唯一$\sqrt{(n^2+1)}\in R$, $f(n)$是从 Z 到 R 的函数.

c) 当 $n=2$ 或 $n=-2$ 时, $n^2-4 = 0$, $f(n) = 1/(n^2-4)$无意义, $f(n)$不是从 Z 到 R 的函数.

Problem 2

a) $f(x)$的定义域和值域均为 R 且在 R 上单调递减，有反函数 $f^{-1}(x) = (4-x)/3$,
则 $f(x)$是从 R 到 R 的双射函数.

b) $f(1) = f(-1) = 4$，且 $f(x)$值域为$(-\infty, 7] \neq R$，则函数 $f(x)$在 R 上既不是单射也不是满射,
$f(x)$不是从 R 到 R 的双射函数.

c) 当 $x=-2$ 时 $x+2=0$, $f(x)$在 $x=-2$ 处无定义, $f(x)$有反函数 $f^{-1}(x) = (1-2x)/(x-1)$,
反函数在 $x=1$ 处无定义，则 $f(x)$是双射函数但不是从 R 到 R 的.

d) $f(x)$的定义域和值域均为 R 且在 R 上单调递增，有反函数 $f^{-1}(x) = (x-1)^{1/5}$,
则 $f(x)$是从 R 到 R 的双射函数.

Problem 3

a) $\{x \mid x^2=1\} = \{-1, 1\}$

b) $\{x \mid 0<x^2<1\} = \{x \mid -1<x<0 \vee 0<x<1\}$

c) $\{x \mid x^2>4\} = \{x \mid x<-2 \vee x>2\}$

Problem 4

$a\neq0$，若 $x1\neq x2$, $f(x1)-f(x2) = a(x1-x2)\neq0$, $f(x1)\neq f(x2)$.
若 $f(x1)\neq f(x2)$即 $ax1+b\neq ax2+b$, $f(x1)-f(x2) = a(x1-x2)\neq0$, $x1\neq x2$.
则 $f(x)$既是单射又是满射, $f(x)$是双射, $f(x)$可逆，反函数 $f^{-1}(x) = (x-b)/a$.

Problem 5

a) $f(0, -n) = n$，对$-n\in Z$ 有 $n\in Z$，值域为 Z, $f: Z\times Z\rightarrow Z$ 是满射的.

b) 取 $m^2-n^2 = 2$ 即$(m+n)(m-n) = 2$, $m\in Z$ 且 $n\in Z$ 则$(m+n)\in Z$, $(m-n)\in Z$.
2 为偶数，则$(m+n)$与$(m-n)$至少有一个为偶数，假设$(m+n)$为偶数, $(m-n) = (m+n)-2n$.
$n\in Z$, $2n$ 为偶数，则$(m-n)$为偶数, $(m+n)(m-n)$必为 4 的倍数, 2 不是 4 的倍数，矛盾.
因此不存在 $m\in Z$, $n\in Z$ 使 $f(m, n) = 2$, $f: Z\times Z\rightarrow Z$ 不是满射的.

c) $f(m, n) = m^2-4$ 的值域为$[-4, +\infty)\neq R$, $f: Z\times Z\rightarrow Z$ 不是满射的.

d) $f(0, n) = -|n|$，对 $n\in Z$ 有$-|n|\in(-\infty, 0]$,
$f(m, 0) = |m|$，对 $m\in Z$ 有$|m|\in[0, +\infty)$, $f(m, n)$的值域为 Z, $f: Z\times Z\rightarrow Z$ 是满射的.

e) $f(-1, n) = n$，对 $n\in Z$ 值域为 Z, $f: Z\times Z\rightarrow Z$ 是满射的.

Problem 6

$f∘g = I_Y$ 则对任意 $y∈Y$, $g(y) = x$, $f(g(y)) = f(x) = y$, $g^{-1} = f$.

$g∘f = I_X$ 则对任意 $x∈X$, $f(x) = y$, $g(f(x)) = g(y) = x$, $f^{-1} = g$.

$f^{-1} = g$ 则对任意 $x∈X$, $f(x) = y$, $f^{-1}(y) = g(y) = g(f(x)) = x$, $f∘g = I_Y$.

$g^{-1} = f$ 则对任意 $y∈Y$, $g(y) = x$, $g^{-1}(x) = f(x) = f(g(y)) = y$, $g∘f = I_X$.

综上所述, $f∘g = I_Y$, $g∘f = I_X$ 与 $f^{-1} = g$, $g^{-1} = f$ 等价.

Problem 7
若 f 是单射，可得$|f(A)|=|A|$，又$|A|=|B|$, $|f(A)|=|B|$，则 f 是满射.
若 f 是满射，假设 f 不是单射，可得$|f(A)|<|A|$， $|f(A)|<|B|$, f 不是满射，矛盾.
则 f 是单射↔f 是满射, f 是单射当且仅当它是满射.

Problem 8
a) 1° 取任意的 y，若 $y∈f(S∪T)$，存在 $x∈S∪T$ 使得 $f(x)=y$.
若 $x∈S$，则 $y∈f(S)$，若 $x∈T$，则 $y∈f(T)$，综上可知 $y∈f(S)∪f(T)$, $f(S∪T) ⊆f(S)∪f(T)$
2° 取任意的 y， 若 $y∈f(S)∪f(T)$
情况 1：$y∈f (S)$，存在 $x∈S ⊆S∪T$ 使得 $f(x)=y$, $y∈f(S∪T)$
情况 2：$y∉f(S)$且 $y∈f(S)∪f(T)$，则 $y∈f(T)$，存在 $x∈T⊆S∪T$ 使得 $f(x)=y$, $y∈f(S∪T)$
综上可知 $y∈f(S∪T)$, $f(S)∪f(T) ⊆f(S∪T)$，综上 $f(S∪T) = f(S)∪f(T)$.

b) 取任意的 y，若 $y∈f(S∩T)$，存在 $x∈S∩T$ 使得 $f(x)=y$, $x∈S$ 且 $x∈T$,
则 $y∈f(S)$且 $y∈f(T)$, $b∈f(S)∩f(T)$, $f(S∩T) ⊆f(S)∩f(T)$.