第五周第一次作业

给出下述集合的递归定义：

c) 整系数多项式集合S。

基础步骤：$\boldsymbol{Z}\subseteq\boldsymbol{S}$ (或$\{\mathbf{1},-\mathbf{1}\}\subseteq\boldsymbol{S}$)，所有变元$\{x_1,\ldots,x_n\}\subseteq\boldsymbol{S}$；

递归步骤：若$a, b, c\in S$，则$ab+c\in S$ 。

常见错误：遗漏常数，遗漏负数，遗漏0，多出x^{-n}

第五周第一次作业

证明算术基本定理. 即: 每个大于 1 的自然数, 要么本身就是质数, 要么可以写为 2 个或以上的质数的积. 并且这些质因子按大小排列之后, 写法仅有一种方式.

常见错误：遗漏唯一性证明！

令P(n)表示自然数n要么是质数，要么能表示为2个或以上的质数的积，且表示方法唯一。

P(2)成立，显然；假设P(2),...,P(k)成立，对于n=k+1，要么k+1是质数，否则存在素数p_1，p_1整除(k+1)，考虑到(k+1)/p_1是小于k+1的整数，因此...

下面证明唯一性：假设k+1=$p_1^{a1} * p_2^{a2} * \cdots * p_m^{am}$=$q_1^{b1} * q_2^{b2} * \cdots * q_n^{bn}$，由于这两个表示不同，至少存在一个$p_i = q_j, a_i \neq b_j$(不放设$a_i < b_j$)，从而$p_1^{a1} * \cdots * p_i^0 * \cdots * p_m^{am}$ 和 $q_1^{b1} * \cdots * q_j^{bj-ai} * \cdots * q_n^{bn}$ 是(k+1)/ p_i^{ai} 的两种表示，矛盾！

第五周第二次作业

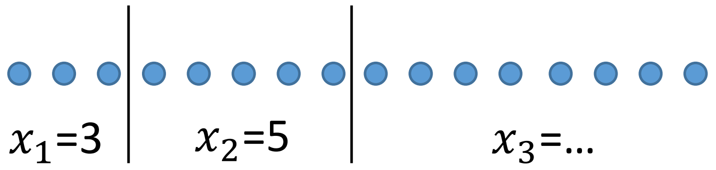
设 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 和 x_6 是正整数，方程 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6<32$ 有多少个解?

必须掌握的基础题型！（隔板法）

考虑$x_1+x_2+\cdots+x_7=32$有多少组正整数解，转换为以下问题：

32个豆子排成一排，中间有31条缝隙，插6块板将其分为7堆。每条缝隙只能插一块板，从左到右第i堆的豆子数等于x_i的值。

本题答案为：$C(31,6)=736281$



第五周习题课随堂测验

若x,y,z均为非负整数，则x+y+z=9的解有___种，x+y+z<9的解有___种。

必须掌握的基础题型！（隔板法）

注意和上一题不同， x,y,z均为非负整数，要进行转换：

(x+1)+(y+1)+(z+1) = 9+3的解有多少种？即对正整数a,b,c，a+b+c=12的解数量。11个缝隙插入2块隔板，第一空答案为：$C(11,2)=55$

(x+1)+(y+1)+(z+1) < 9+3的解有多少种？即正整数a,b,c,d，a+b+c+d=12的解数量。11个缝隙插入3块隔板，第二空答案为：$C(11,3)=165$

第五周第二次随堂测验

满足xyz=24的整数三元组（x,y,z）有几种？

还是隔板法的变种！

考虑$\boldsymbol{24=2^3*3^1}$，令$\boldsymbol{x=2^{x_2}*3^{x_3},y=2^{y_2}*3^{y_3},z=2^{z_2}*3^{z_3}}$

$\boldsymbol{x_2+y_2+z_2=3,x_3+y_3+z_3=1,x_2,x_3,\ldots,z_3}$都是自然数。

$\boldsymbol{x_2,y_2,z_2}$的解有$\boldsymbol{C(5,2)=10}$种，$\boldsymbol{x_3,y_3,z_3}$的解有$\boldsymbol{C(3,2)=3}$种

所以x,y,z的正整数解共10*3=30种。考虑到x,y,z中可以有两个同时为负数，所以解的总数为30*(1+C(3,2))=120种。

第五周习题课随堂测验

在所有5位正整数中（10000-99999），有____个整数是5或7的倍数，有____个整数包含恰好4个不同的数字。

5的倍数$\left\lfloor\frac{99999}{5}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{9999}{5}\right\rfloor$=18000个；7的倍数$\left\lfloor\frac{99999}{7}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{9999}{7}\right\rfloor$=12857个

35的倍数$\left\lfloor\frac{99999}{35}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{9999}{35}\right\rfloor$=2572个；一共18000+12857-2572=28285个

第二问，5位数第一位有9个数字可选，后面每一位有10个数字可选

若后面某一位和第一位相同：9*1*9*8*7个*4，若除第一位以外后面某两位相同9*9*1*8*7个*6，一共9*1*9*8*7*10=45360个

第五周习题课随堂测验

下列选项中正确的有：

- [ ] A：当$n>k>0$时，有$C(n,k) \geq C(n-1,k-1) + C(n,k-1)$
- [x] B：当$n>k>1$时，有$C(n+1,k) = C(n-1,k-1) + C(n,k-1) + C(n-1,k)$
- [x] C：当$n>m>k>0$时，有$C(n,k) < C(n,m) * C(m,k)$
- [x] D：当$n>k>0$时，有$P(n,k) = C(n,n-k) * P(k,k)$

A：举反例即可，例如 $C(5,4) < C(4,3)+C(5,3)$

B：杨辉三角，$C(n+1,k)=C(n,k-1)+C(n,k)=C(n,k-1)+C(n-1,k)+C(n-1,k-1)$

C：左边，n选k的方案数；右边，先n选m，再从m中选k个的方案数。对于任意某k个物体，左边只会有一种方案，右边会被计算多次，因此…

D：$C(n,k)=C(n,n-k)$，$C(n,k)=P(n,k)/P(k,k)$