Problem 1

a) 自反(√) 反对称(√) 传递(√) 是　　　　b) 反对称(×) 不是

c) 自反(√) 反对称(√) 传递(√) 是　　　　d) 自反(×) 不是

Problem 2

a) {0}和{1}　　　　b) 4 和 6

Problem 3

(∅, {a})　(∅, {b})　(∅, {c})

({a}, {a, b})　{a}, {a, c})　{b}, {a, b})　({b}, {b, c})　{c}, {a, c})　{c}, {b, c})

({a, b}, {a, b, c})　({b, c}, {a, b, c})　({a, c}, {a, b, c})

Problem 4

设有穷偏序集(S, ≦)，任取(a, b)属于它的覆盖关系的自反传递闭包

则或有 $a=b \vee a<b$ 即 $a \leqq b$，或存在序列 a1, a2, ···, an 满足 $a<a1<a2<\cdots<an<b$

由传递性也有 $a \leqq b$. 则覆盖关系的自反传递闭包包含于这个偏序集

又任取 $a<b$，如果不存在 $z \in S$ 使得 $a<z<b$，则(a, b)属于覆盖关系

否则存在序列 $a<a1, a2, \cdots, an$ 满足 $a1<a2<\cdots<an<b$，其中(a, a1), (a1, a2), ···, (an, b)

都属于覆盖关系, (a, b)属于它的自反传递闭包，偏序集包含于覆盖关系的这个闭包

综上所述，偏序集是它的覆盖关系的自反传递闭包，可以从它的覆盖关系构造出来

Problem 5

a) {1, 2}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4}　　　　b) {1}, {2}, {4}

c) 不存在　　　　d) 不存在

e) {2, 4}, {2, 3, 4}　　　　f) {2, 4}

g) {3}, {4}, {3, 4}　　　　h) {3, 4}

Problem 6

设有穷非空偏序集 S，选择 S 的一个元素 a0，如果 a0 不是极大元素，那么存在元素 a1

满足 $a0<a1$，如果 a1 不是极大元素，那么存在元素 a2 满足 $a1<a2$，继续这一过程

使得如果 an 不是极大元素，那么存在 an+1 满足 $an<an+1$

因为在这个偏序集只有有穷个元素，所以这个过程一定会结束并且具有极大元素 an

Problem 7

集合 S={1, 2, 3, ···, 100}，任取 x∈S 则 x/x=1=2^0，关系 R 在 S 上自反

任取 x, y∈S，若存在 k1≧0 满足 y/x=2^k1，且存在 k2≧0 使得 x/y=2^k2

则有 2^(k1+k2)=1, k1=k2=0，即 y/x=x/y=1, y=x，关系 R 在 S 上反对称

任取 x, y, z∈S，若 xRy, yRz 即存在 k1, k2≧0 使得 y/x=2^k1, z/y=2^k2

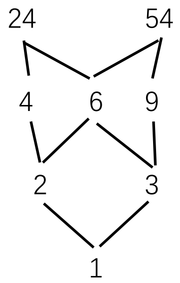
则有 z/x=2^(k1+k2)，存在 k3=k1+k2≧0 满足 z/x=2^k3, xRz，关系 R 在 S 上传递

综上所述, R 是 S 上的偏序关系，即{S, R}是一个偏序集

Problem 8

$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 12, 27, 54\}$, |为 A 上的整除关系，则有偏序集(A, |)

1)



2) A 中最长链长度为 4，为{1, 2, 4, 24}, {1, 2, 6, 24}, {1, 2, 6, 54}, {1, 3, 6, 24}, {1, 3, 6, 54}, {1, 3, 9, 54}

3) A 中元素至少可以划分成 4 条互不相交的反链

它们分别为: {1}, {2, 3}, {4, 6, 9}和{24, 54}

Problem 9

取 $f: A\to 2^A$, f(a)为 A 中所有满足 $x\leqslant a$ 的元素组成的集合

对任意 $a, b\in A$，若 $a\leqslant b$, f(a)中任取 x 满足 $x\leqslant a$，由传递性有 $x\leqslant b$, $x\in f(b)$, $f(a)\subset f(b)$

对任意 $a, b\in A$，若 $f(a)\subset f(b)$,任取 $x\in f(a)$有 $x\in f(b)$，所有 $x\leqslant a$ 的 x 满足 $x\leqslant b$, $a\leqslant b$

综上所述，存在函数 f 使得 $f(a) \subset f(b) \Leftrightarrow a \leqslant b$.

Problem 10

给定 1, 2, ⋯, mn+1(=k)的一种排列 v1v2⋯vk，定义集合：A={ (i,vi) | i=1, 2, ⋯, mn+1 }

建立两个偏序关系 R1 和 R2 : (i, vi)R1(j, vj) iff (i<j 并且 vi<vj）或者(i, vi)=(j, vj)

(i, vi)R2(j, vj) iff (i<j 并且 vi>vj）或者(i, vi)=(j, vj)

R1∩R2 = IA, R1∪R2 = A×A //R1 的链是 R2 反链

则一定存在 A 的一个至少含 m+1 或 n+1 个元素的子集，它是 R1 的链或者 R2 的链

若 R1 链的长度均≤n 且≤m，即 R2 反链的大小均≤n 且≤m

则存在 k≤n 且 k≤m 的 R2 覆盖，有长度超过 n 或 m 的 R2 链，否则元素个数≤mn，矛盾