Problem 1

第一次更新，加入 a，$L(a)=0$，对任意 $v_i \neq a$ 有 $L(v_i)=\infty$，$L(a)$为 a 到 a 最短路的权值

假设第 k 次更新，当前的 L 对于要加入的 u 满足 $L(u)$等于 a 到 u 最短路的权值

第 k+1 次更新，加入 v，新边为<u, v>，对任意从 a 到 v 的其他路径

设该路径最后一次加入 S 的顶点为 x，经过 V-S 的第一个顶点为 y，则

根据算法分析可得 $L(v) \leq L(y)$，令从 y 到 v 最短路径长为 $d(y, v)$，$y \neq v$ 则 $d(y, v)>0$

则有 $L(v)<L(y)+d(y, v)$，$L(v)$为从 a 到 v 最短路的权值，由数学归纳法，证毕

Problem 2

a) 11: if $d(v_j, v_i) * d(v_i, v_k) < d(v_j, v_k)$ then

b) 11: if $d(v_j, v_i) + d(v_i, v_k) < \infty$ and $\min\{d(v_j, v_i), d(v_i, v_k)\} < d(v_j, v_k)$ then

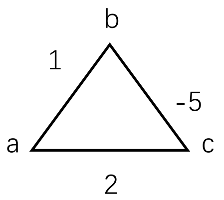
   12: $d(v_j, v_k) := \min\{d(v_j, v_i), d(v_i, v_k)\}$

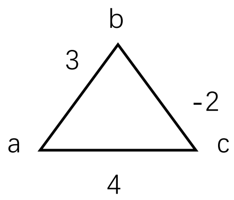
Problem 3

不能，如图 a) 中有权值为负的回路，则可以重复走使长度无限小，最短路不存在

图中没有负权回路而有负权边，也可能通过 Dijkstra 算法获得错误的路径

如图 b) 中从 a 到 b 的最短路为 a→c→b，长度为 2, Dijkstra 得到 a→b 长度为 3





Problem 4

a) a-b-c-d-a / a-d-c-b-a: 18   a-b-d-c-a / a-c-d-b-a: 19

   a-c-b-d-a / a-d-b-c-a: 17   总权值最小的回路是 a-c-b-d-a，为 17

b) 以顶点 b 为始点，每次选择可选的最邻近点，得 b-a-d-c-b，总权值为 18

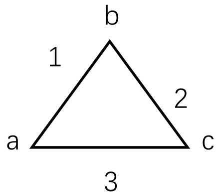
   改进：在已有回路中 $W(a, c) + W(b, d) < W(a, b) + W(c, d)$

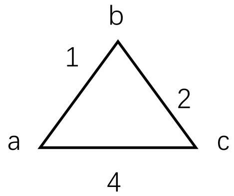
   用边 ac 和 bd 替代 ab 和 cd, b-d-a-c-b 是近似最短的哈密尔顿回路

Problem 5

如图，两个图中 ab 之间最短路长度都为 1, bc 间最短路长度都为 2

ac 间最短路长度都为 3，但两个图显然不同，即根据最短路构建的图不唯一





对于权值为正的简单连通图 G，已知图上任意两点间最短路长度不能构建出 G

Problem 6

a) 用已知求两点间最短通路算法分别求出 v_i 到 v_k 和 v_k 到 v_j 的最短通路长度

   两个长度相加即得到从顶点 v_i 出发到达 v_j 且经过顶点 v_k 的最短通路长度

b) 从原图中删除顶点 v_k(及以 v_k 为顶点的所有边)

对得到的新图使用已知的求 vi, vj 两点间最短通路长度的算法

c) 从原图中删除顶点 vj(及以 vj 为顶点的所有边)

对得到的新图使用已知的 vi, vk 两点间最短通路长度的算法

对原图使用已知的求 vk, vj 两点间最短通路长度的算法

两个长度相加即得到从顶点 vi 出发先经过 vk 再到达 vj 的最短通路长度