序　　言

概率论是研究什么的？

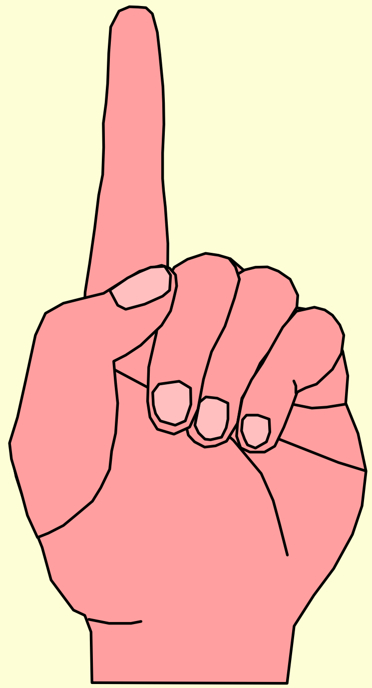
确定性现象与不确定性现象

随机现象：不确定性与统计规律性

概率论——研究和揭示随机现象的统计规律性的科学

第一章 概率论的基础知识

- 随机试验
- 样本空间、随机事件
- 古典概型与概率
- 频率与概率
- 条件概率、独立性
- 全概率公式与贝叶斯公式



§1 随机试验

定义

对随机现象的观察，称为随机试验。简称试验。

随机试验的特点

1.可在相同条件下重复进行；

2.试验结果可能不止一个，但能明确所有的可能结果；

3.试验前无法确定是哪个结果会出现。

随机试验可表为**E**

随机试验的例

E_1: 抛一枚硬币，分别用 “H” 和 “T” 表示出正面和反面,
观察正反面出现的情况;

E_2: 将一枚硬币连抛三次，观察正反面出现的情况;

E_3:将一枚硬币连抛三次，观察正面出现的次数;

E_4:掷一颗骰子，观察可能出现的点数;

E_5: 记录某网站一分钟内受到的点击次数;

E_6:在一批灯泡中任取一只，测其寿命;

E_7:任选一人，记录他的身高和体重 。

§2 样本空间、随机事件

定义

1、样本空间：试验的所有可能结果所组成的集合称为样本空间，记为$\Omega=\{\omega\}$；

2、样本点：试验的每一个结果或样本空间的每个元素称为一个样本点,记为ω.

EX 给出E1-E7的样本空间

定义

试验中可能出现也可能不出现的情况叫“随机事件”，简称“事件”。记作**A**、**B**、**C**等。

注

任何事件均对应着样本空间的某个子集.

例1 **E4: 掷一颗骰子，考察可能出现的点数。**

$S_4=\{1,2,3,4,5,6\}$;

A=“掷出偶数点” =\{2，4，6\}

B=“掷出大于4的点” =\{5，6\}

C=“掷出奇数点” =\{1，3，5\}

定义

样本空间的子集称为随机事件。

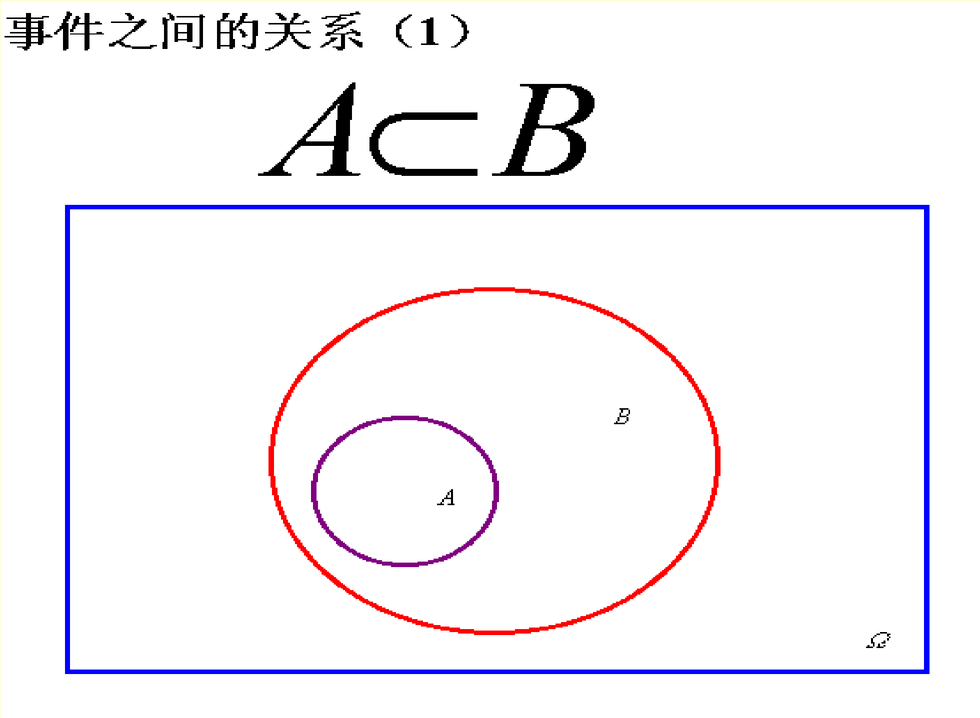
几个特殊事件: 必然事件Ω 、不可能事件φ、

基本事件{ω}

事件间的关系

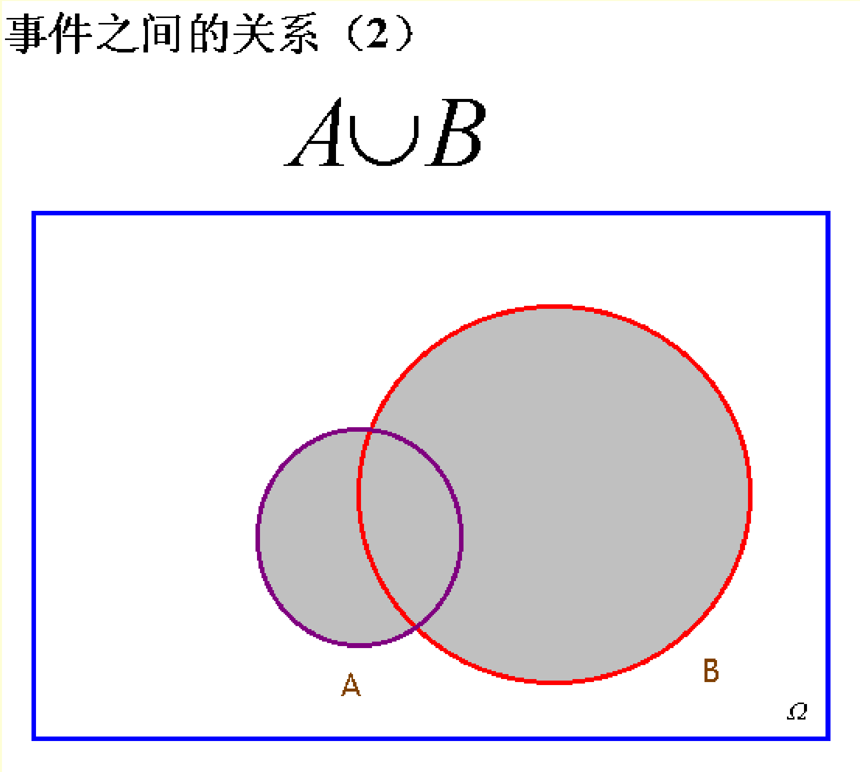
1.包含关系　$A \subset B \Leftrightarrow$ "A发生必导致B发生"。

$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ 且 $B \subset A$.



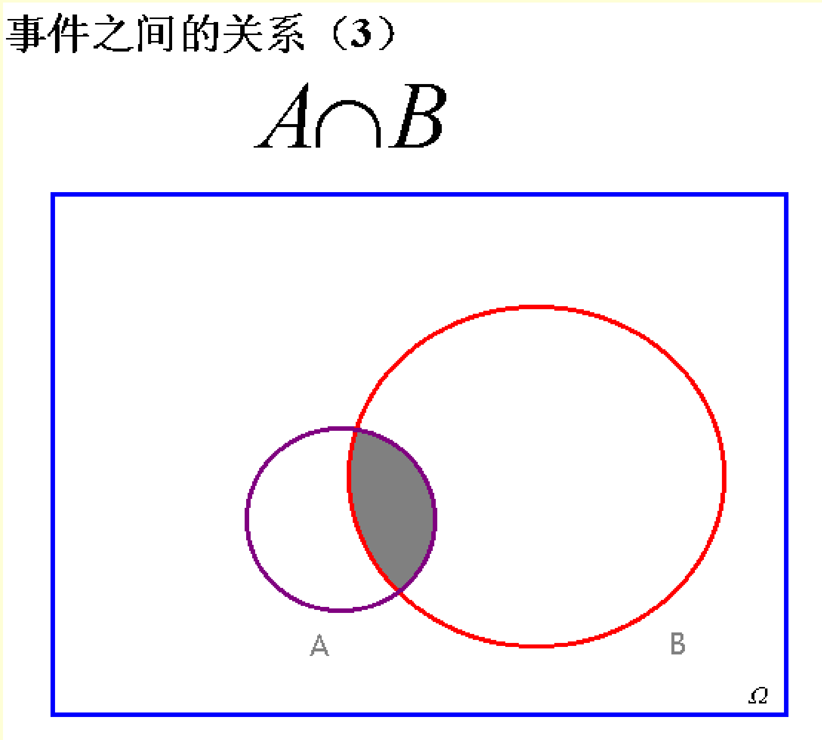
2.和事件：“事件A与B至少有一个发生”

$\Leftrightarrow A \cup B$发生



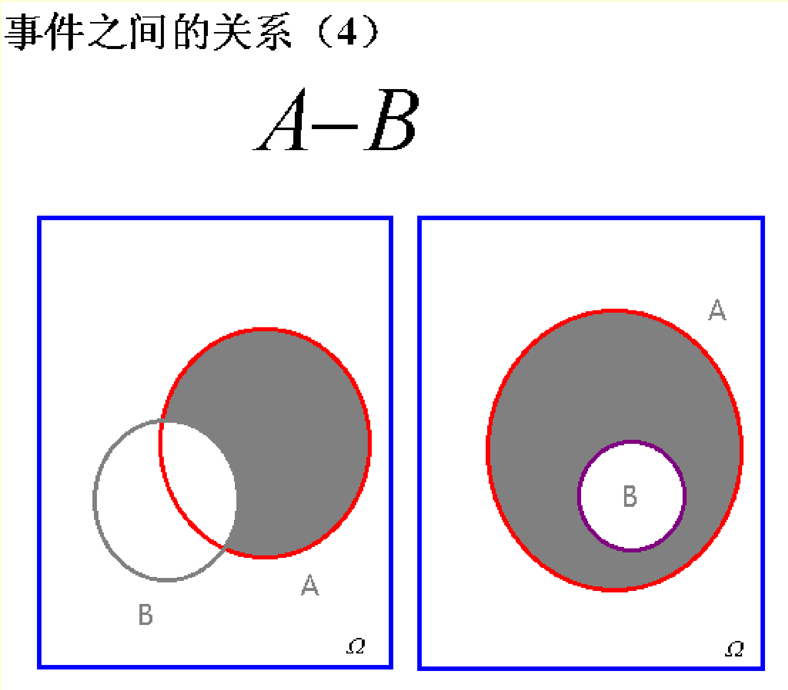
2’n个事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$至少有一个发生$\Leftrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i$发生

3. 积事件： A与B同时发生⇔ A∩B＝AB发生



3’n个事件$A_1, A_2,\ldots, A_n$同时发生⇔ $A_1A_2\ldots A_n$发生

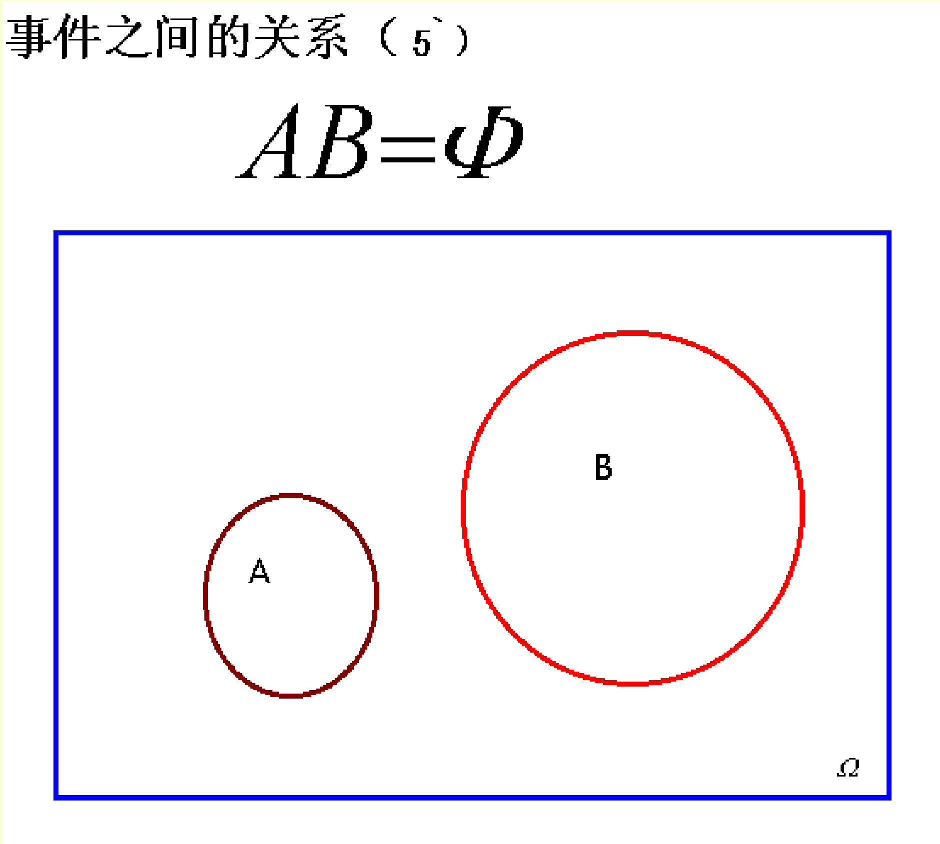
4.差事件：A－B称为A与B的差事件。A－B发生
⇔事件A发生而B不发生



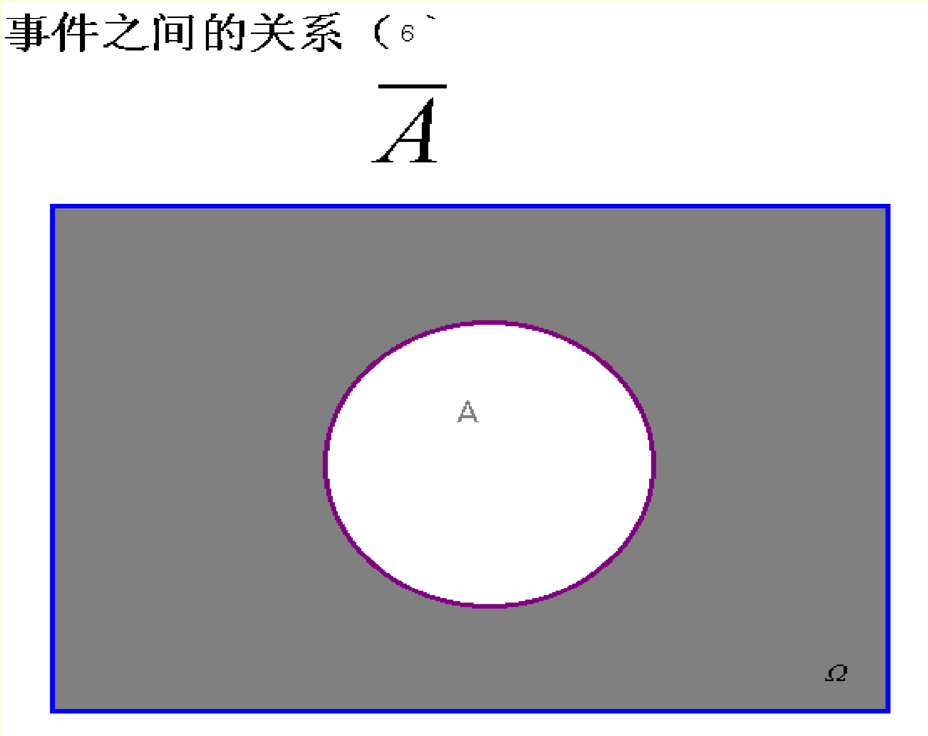
何时A-B=ϕ？ 何时A-B=A？

答:(1)A⊂B, (2)AB=ϕ.

5. 互斥的事件：**AB＝ φ，表示事件A与B不可能同时发生。**



6. 互逆的事件 若$A\cup B=\Omega$, 且$AB=\phi$，称A与B互为逆事件．表示A,B不可能同时发生，但必有一个发生。



A的对立事件记作$\overline{A}$，易见 $A-B=A\overline{B}$

事件的运算

1、交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$

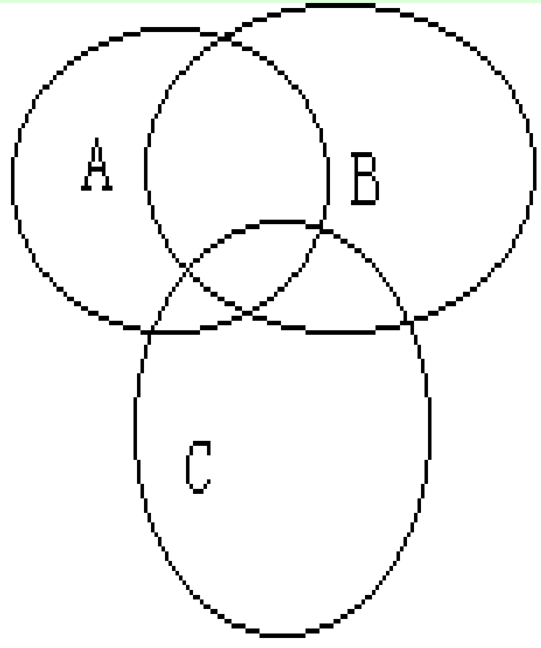
2、结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(AB)C=A(BC)$

3、分配律：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$，

$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$

4、对偶(De Morgan)律：



$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

可推广 $\overline{\bigcup_k A_k}=\bigcap_k \overline{A_k}$， $\overline{\bigcap_k A_k}=\bigcup_k \overline{A_k}$.

例2 甲、乙、丙三人各向目标射击一发子弹，以A、B、C分别表示甲、乙、丙命中目标，试用A、B、C的运算关系表示下列事件：

A_1:“至少有一人命中目标”： $A\cup B\cup C$

A_2:“恰有一人命中目标”： $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$

A_3:“恰有两人命中目标”： $AB\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C$

A_4:“最多有一人命中目标”： $\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}$

A_5:“三人均命中目标”： ABC

A_6:“三人均未命中目标”： $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

§3 频率与概率

某人向目标射击，
以A表示事件“命中目标”，
P（A）=?

定义

在相同条件下，进行n次试验，在这n次试验中事件A发生的次数n_A，称为事件A发生的频数，比值n_A/n称为事件A发生的频率，记为$f_n(A)$. 即

$$f_n(A) = n_A/n.$$

频率的性质

(1) $0 \le f_n(A) \le 1$;

(2) $f_n(S) = 1$; $f_n(\phi) = 0$

(3) 可加性：若$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_k$两两不相容，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + \cdots + f_n(A_k).$$

(4) 随机波动性。

(5) 当n充分大时，具有稳定性。

历史上曾有人做过试验,试图证明抛掷匀质硬币时，正反面的机会均等。

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
De Morgan	2048	1061	0.5181
Buffon	4040	2048	0.5069
K. Pearson	12000	6019	0.5016
K. Pearson	24000	12012	0.5005

实践证明：当试验次数n增大时，$f_n(A)$ 逐渐趋向一个稳定值。可将此稳定值记作P(A)，作为事件A的概率. 此为概率的统计定义.

两者的关系

※概率是频率的稳定值;

※频率是概率的反映, 用频率去解释概率.

例如：P(A)=0.8, 则应理解为在观察A而做的2000次试验中, 事件A的出现次数应在1600次左右.

概率的公理化定义

1933年，前苏联科学家柯尔摩哥洛夫，给出了概率的公理化定义

定义

若对随机试验E所对应的样本空间S中的每一事件A，均赋予一实数P(A)，集合函数P(A)满足条件：

(1) $P(A) \geq 0$；

(2) $P(S)=1$；

(3) 可列可加性：设A_1，A_2，…, 是一列两两互不相容的事件，即$A_iA_j=\phi$，$(i\neq j)$, $i, j=1, 2, \ldots$, 有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

则称P(A)为事件A的概率。

概率的性质

(1) $P(\Phi) = 0$

(2) 有限可加性：设A_1，A_2，…，A_n，是n个两两互不相容的事件，即$A_iA_j = \phi$，$(i \neq j)$, i , j＝1, 2, …, n , 则有

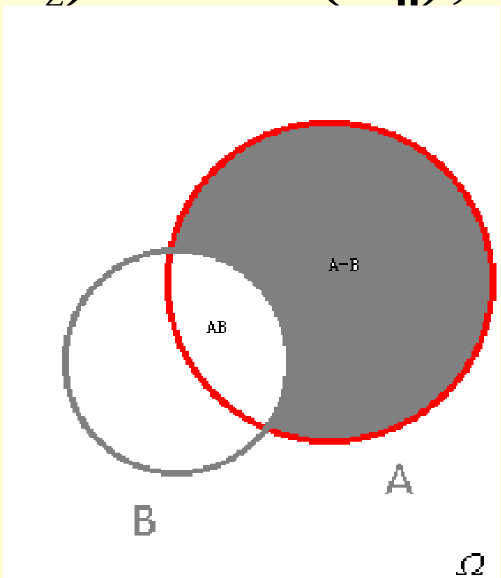
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n);$$

(3) 单调不减性：若事件$A \supset B$，则

$$P(A) \geqslant P(B) \Rightarrow \forall A \subset S, P(A) \leq 1$$

(4) 事件差：A、B是两个事件，则

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)$$



(5) 加法公式：对任意两事件A、B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

该公式可推广到任意n个事件A_1，A_2，…，A_n的情形.

(6) 互补性 $P(\overline{A})=1-P(A)$;

例1 已知 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，$P(A\cup B)=0.6$，求 $P(A\overline{B})$

解：

$$P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

$$=P(A)-[P(A)+P(B)-P(A\cup B)]$$

$$=0.4-(0.4+0.3-0.6)=0.3$$

例2 某市有甲,乙,丙三种报纸，订每种报纸的人数分别占全体市民人数的**30%**，其中有**10%**的人同时定甲、乙两种报纸. 没有人同时订甲丙或乙丙报纸. 求从该市任选一人， 他至少订有一种报纸的概率.

解：设**A,B,C**分别表示选到的人订了甲,乙,丙报

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

$$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=30\%\times 3-10\%-0-0+0=80\%$$

例3 在1~10这10个自然数中任取一数，求

（1）取到的数能被2或3整除的概率，

（2）取到的数既不能被2也不能被3整除的概率，

（3）取到的数能被2整除而不能被3整除的概率。

解:设**A**—取到的数能被2整除；

B--取到的数能被3整除

$$P(A)=\frac{1}{2} \qquad P(B)=\frac{3}{10}$$

$$P(AB)=\frac{1}{10}$$

故

$$(1)P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{7}{10}$$

$$(2)P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(A\cup B)=\frac{3}{10}$$

$$(3)P(A-B)=P(A)-P(AB)=\frac{2}{5}$$

§4 古典概型

事件A发生的可能性的大小称为事件A的概率。记为 P(A).

P（A）如何计算？

掷一颗骰子，出现6点的概率为多少？

向目标射击，命中目标的概率有多大？

定义

若某试验E满足

（1）有限性：样本空间$S=\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$;

（2）等可能性：（公认）$P(e_1)=P(e_2)=\ldots=P(e_n)$.

则称E为古典概型, 也称为等可能概型。

例1 盒中有3只白球, 2只红球, 从中任意摸一球, 观察其颜色, S={白、红}，此试验是否为古典概型？

定义

设事件A中所含样本点个数为N(A)，以N(S)记样本空间S中样本点总数，则有

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(S)}$$

P(A)具有如下性质:

(1) 0≤ P(A) ≤1;

(2) P(S)＝1; P(ϕ)=0

(3) AB＝ϕ，则 P(A∪ B)＝ P(A) ＋P(B)

=> $P(\overline{A})=1-P(A)$

例1:有三个子女的家庭,设每个孩子是男是女的概率相等,则至少有一个男孩的概率是多少?

解:设A表至少有一个男孩,以H表示某个孩子是男孩以T表某个孩子是女孩。

S={HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT, TTT}

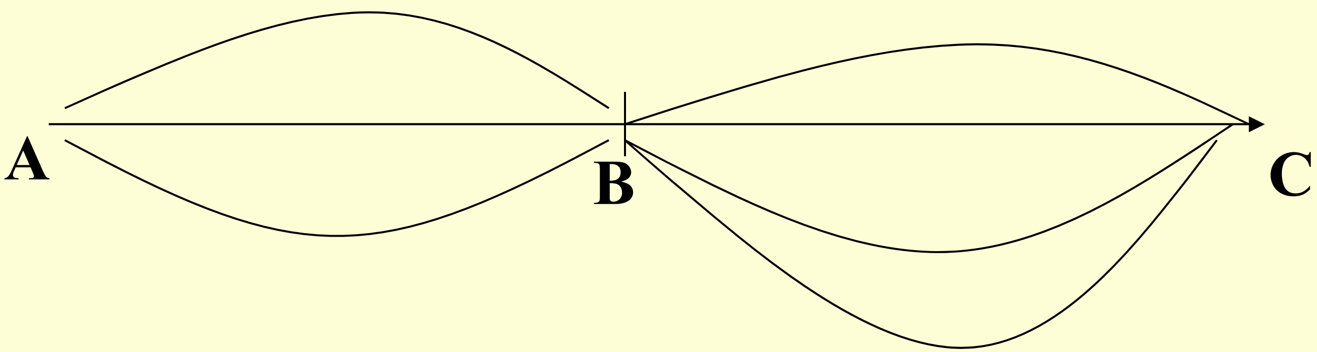
A={HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT}

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(S)}=\frac{7}{8}$$

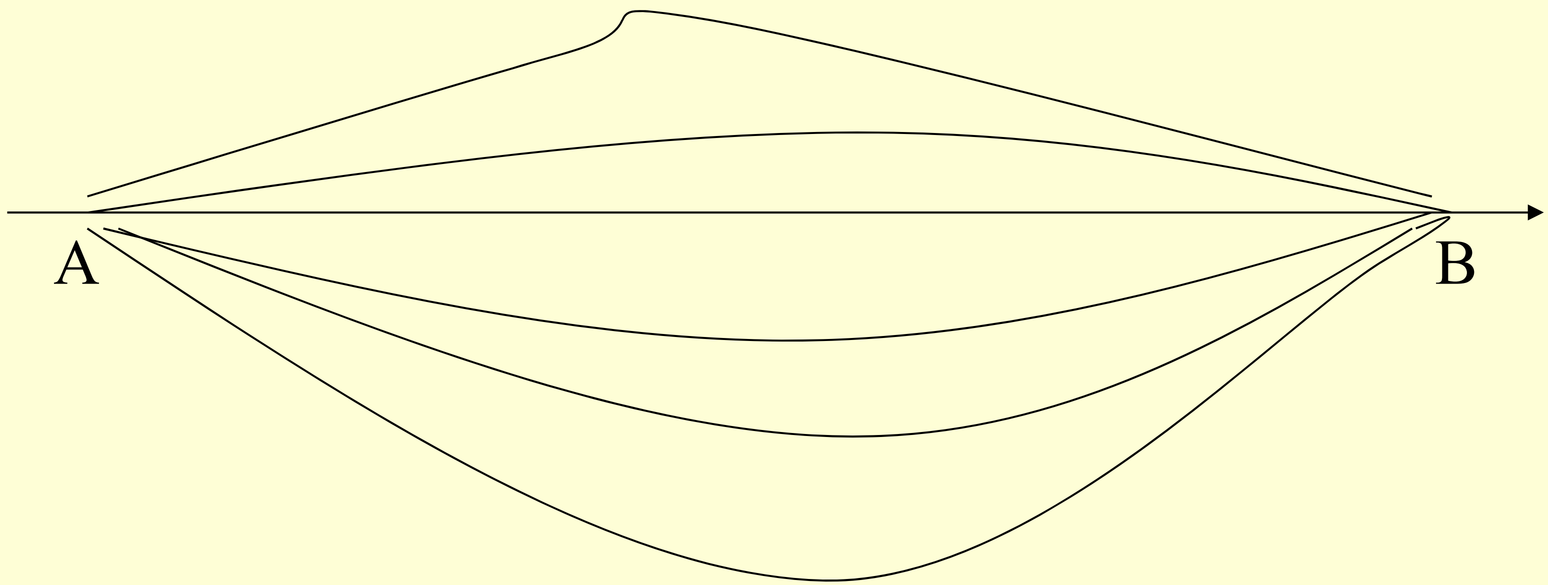
古典概型的几类基本问题

复习：排列与组合的基本概念

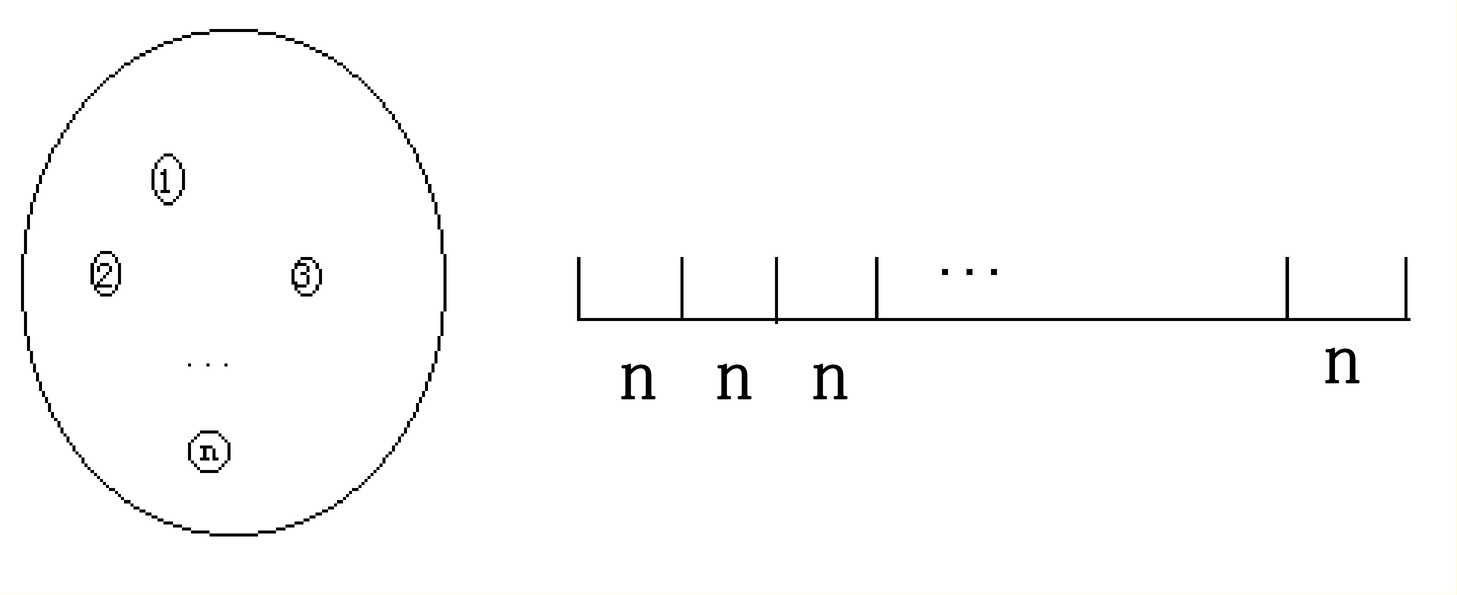
乘法定理：设完成一件事需分两步：第一步有n_1种方法, 第二步有n_2种方法，则完成这件事共有$n_1 n_2$种方法.



加法定理：设完成一件事可有两种途径，第一种途径有n_1种方法，第二种途径有n_2种方法，则完成这件事共有n_1+n_2种方法。

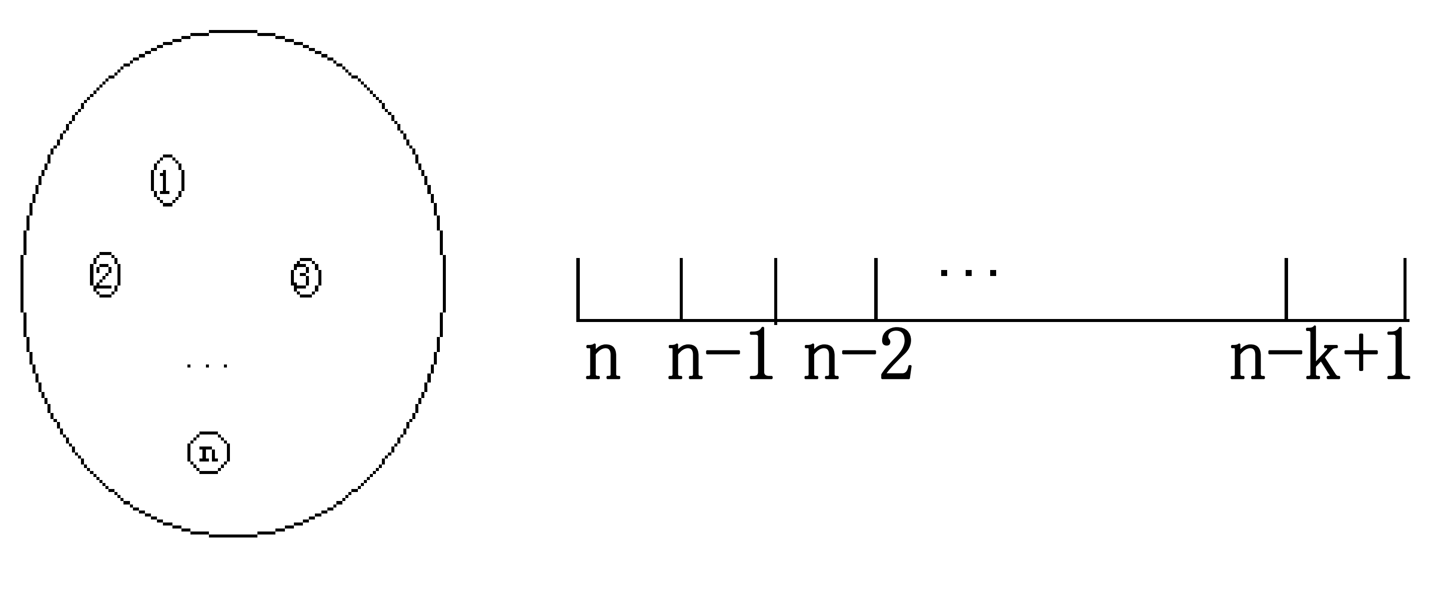


有重复排列：从含有n个元素的集合中随机抽取k次，每次取一个，记录其结果后放回，将记录结果排成一列.



共有n^k种排列方式.

无重复排列：从含有n个元素的集合中随机抽取k次，每次取一个，取后不放回，将所取元素排成一列.



共有$A_n^k=n(n-1)\ldots(n-k+1)$种排列方式.

当 **k=n** 时，$A_n^k=n!$， 称为全排列。

组合：从含有n个元素的集合中随机抽取k个，共有

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

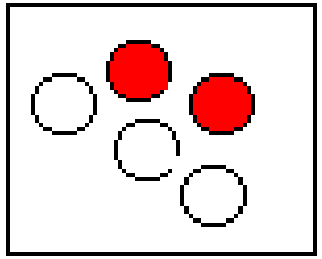
种取法.

(1) 摸球问题

例1:设盒中有3个白球，2个红球，现从盒中任抽2个球，求取到一红一白的概率。

解: 设 A="取到一红一白"

$$N(S)=C_5^2 \qquad N(A)=C_3^1C_2^1$$



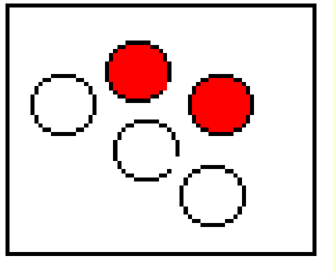
$$\therefore \qquad P(A)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$$

一般地，设盒中有**N**个球，其中有**M**个白球，现从中任抽**n**个球，则这**n**个球中恰有**k**个白球的概率是

$$p=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

已知同上例，求至少有一只白球的概率？

解：令 B =“至少有一只白球”　则：



N(B)= $C_3^1 \cdot C_2^1 + C_3^2$

$$\therefore P(B)=\frac{9}{10}$$

(2) 分球入盒问题

例2：将3个球随机的放入3个盒子中去，每盒装球数目不限，问：

（1）每盒恰有一球的概率是多少？

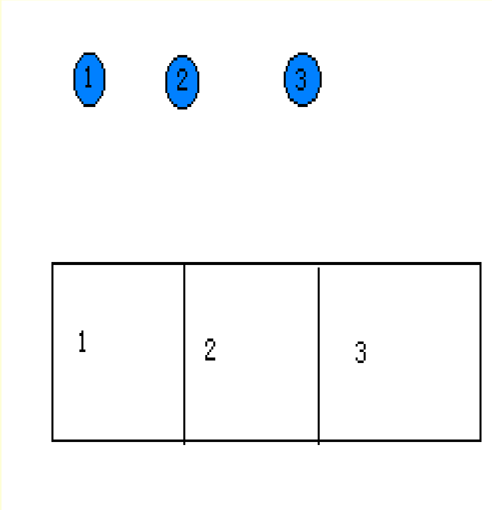
（2）只空一盒的概率是多少？

解:设A=“每盒恰有一球”,B=“放后空一盒”

$$N(S)=3^3 \quad N(A)=3! \quad P(A)=\frac{2}{9}$$

$$N(\mathbf{B})=C_3^2 C_3^1 C_2^1$$

$$P(B)=\frac{C_3^1 C_2^1 C_3^1}{3^3}=\frac{2}{3}$$



一般地，把n个球随机地分配到m个盒子中去(n≤m)，则每盒至多有一球的概率是：

$$p = \frac{A_m^n}{m^n}$$

有八人，问至少有两个人的出生月份相同的概率有多大？

$$P = 1 - \frac{A_{12}^8}{12^8} \approx 0.95$$

(3) 分组问题

例3：30名学生中有3名运动员，将这30名学生平均分成3组，求：

（1）每组有一名运动员的概率；

（2）3名运动员集中在一个组的概率。

解: 设 A="每组有一名运动员"；B=" 3名运动员集中在一组"， 则：

$$N(S)=C_{30}^{10}C_{20}^{10}C_{10}^{10}=\frac{30!}{10!\ \ 10!\ \ 10!}$$

$$P(A)=\frac{3!\dfrac{27!}{9!\ \ 9!\ \ 9!}}{N(S)}=\frac{50}{203}$$

$$P(B)=\frac{3\times C_{27}^{7}C_{20}^{10}C_{10}^{10}}{N(S)}$$

一般地，把n个球随机地分成m组(n>m),

要求第 i 组恰

有n_i个球(i=1,…m)，共有分法：

$$\frac{n\,!}{n_1\,!\ldots n_m\,!}$$

(4) 随机取数问题

例4：从1，2，3，4，5诸数中，任取3个排成自左向右的次序，

求：（1） A_1 “所得三位数是偶数”的概率？

（2） A_2 “所得三位数不小于200”的概率？

解： $N(S) = A_5^3 = 60$

(1) $N(A_1) = C_2^1 \cdot A_4^2 = 24$

$$\therefore P(A_1) = 24/60 = 2/5$$

(2) $N(A_2) = C_4^1 \cdot A_4^2 = 48$

$$\therefore P(A_2) = 48/60 = 4/5$$

(5) 抽签问题

例5：袋中有 a 只白球，b 只红球，依次将球一只只摸出，不放回，求第 k 次摸出白球的概率？

解： 设想 a+b 只球进行编号，将 a+b 只球顺次排列在 a+b 个位置上。

令 A=“第 k 次摸到白球”

则 $N(S) = (a+b)!$

$N(A) = C_a^1 (a+b-1)!$

所以 $P(A) = a(a+b-1)!/(a+b)! = a/(a+b)$

§5 条件概率与独立性

袋中有十只球，其中九只白球，一只红球，
十人依次从袋中各取一球(不放回)，问
第一个人取得红球的概率是多少？
第二 个人取得红球的概率是多少？

若已知第一个人取到的是白球，则第二个人取到红球的概率是多少？

若已知第一个人取到的是红球，则第二个人取到红球的概率又是多少？

在已知事件A发生的条件下，事件B发生的概率称为A发生条件下B发生的条件概率，记作

$$P(B|A)$$

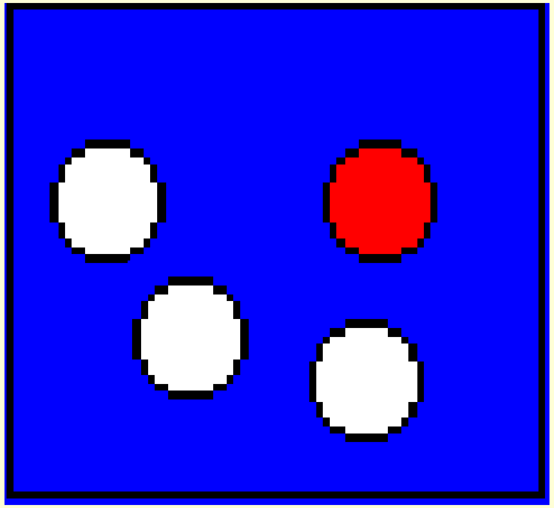
一、条件概率

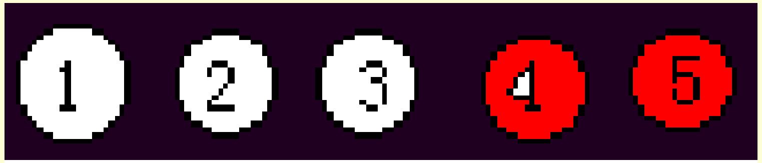
例1　设袋中有3个白球，2个红球，现从袋中任意抽取两次，每次取一个，取后不放回，已知第一次取到红球，求第二次也取到红球的概率。

解：设A——第一次取到红球,

B——第二次取到红球

$$P(B|A)=\frac{1}{4}$$





S=

④①	④②	④③	④⑤
⑤①	⑤②	⑤③	⑤④

A

AB

显然，若事件A、B是古典概型的样本空间S中的两个事件，其中A含有n_A个样本点, AB含有n_{AB}个样本点，则

$$P(B|A)=\frac{n_{AB}}{n_A}=\frac{n_{AB}/n}{n_A/n}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

一般地，设A、B是S中的两个事件，$P(A)\neq 0$，则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

称为事件A发生的条件下事件B发生的条件概率

“条件概率”是“概率”吗?

条件概率的性质:(P(A) $\neq$0)

(1) $P(B|A)\geq 0$

(2) $P(S|A)=1$

(3) 对一列两两互不相容的事件, $A_1, A_2, \cdots$, 有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots | A) = P(A_1|A) + P(A_2|A) + \cdots$$

例2 设A, B, C是样本空间S中的三个事件, 且$P(C)\neq 0$,

试用概率的运算性质证明:

$$P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)-P(AB|C)$$

证:

$$P(A\cup B|C)=\frac{P[(A\cup B)\cap C]}{P(C)}=\frac{P(AC\cup BC)}{P(C)}$$

$$=\frac{P(AC)+P(BC)-P(ABC)}{P(C)}=\frac{P(AC)}{P(C)}+\frac{P(BC)}{P(C)}-\frac{P(ABC)}{P(C)}$$

$$=P(A|C)+P(B|C)-P(AB|C)$$ #

例3 一盒中混有100只新，旧乒乓球，各有红、白两色，分类如下表。从盒中随机取出一球，若取得的是一只红球，试求该红球是新球的概率。

	红	白
新	40	30
旧	20	10

解：设A--从盒中随机取到一红球

B--从盒中随机取到一新球.

$$n_A=60, \qquad n_{AB}=40$$

$$P(B|A)=\frac{n_{AB}}{n_A}=\frac{2}{3}$$

二、乘法公式

设**A**、**B**为两事件，**P(A)>0**,则

$$P(AB)=P(A)P(B|A).$$

这称为事件**A**、**B**的概率乘法公式。

上式还可推广到三个事件的情形：

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB).$$

一般地，有下列公式：

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}).$$

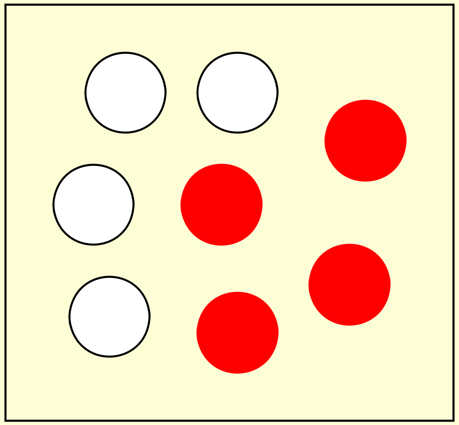
例4 盒中有3个红球，2个白球，每次从盒中任取一只，观察其颜色后放回，并再放入一只与所取之球颜色相同的球，若从盒中连续取球4次，试求第1、2次取得白球、第3、4次取得红球的概率。

解：设A_i为第i次取球时取到白球，i=1,2,3,4,则

$$P(A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(\overline{A}_3\mid A_1A_2)P(\overline{A}_4\mid A_1A_2\overline{A}_3)$$

$$P(A_1)=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$$

$$P(A_2\mid A_1)=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{6}}$$



$$P(\overline{A}_3\mid A_1A_2)=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}$$

$$P(\overline{A}_4\mid A_1A_2\overline{A}_3)=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{8}}$$

$$P(A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(\overline{A}_3\mid A_1A_2)P(\overline{A}_4\mid A_1A_2\overline{A}_3)=\frac{3}{70}$$

例5 一批零件共100件，其中有10件次品，依次做不放回的抽取三次，求第三次才抽到合格品的概率？

解：令 A_i =“第 i 次抽到合格品.” i = 1, 2, 3

则所求的事件为：$\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$

$$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})P(A_3\mid\overline{A_1}\,\overline{A_2})$$

$$=\frac{10}{100}\cdot\frac{9}{99}\cdot\frac{90}{98}$$

$$\approx 0.0083$$

三、独立性

袋中有十只球，其中九只白球，一只红球，十人依次从袋中各取一球,

令 A_k = “第k个人摸到红球”，K=1,2

若摸后不放回: $P(A_2 \mid A_1)=0 \neq P(A_2),\ P(A_2 \mid \overline{A}_1)=\dfrac{1}{9} \neq P(A_2)$

若摸后放回: $P(A_2 \mid A_1)=P(A_2)=\dfrac{1}{10},$

$$P(A_2 \mid \overline{A}_1)=P(A_2)=\frac{1}{10}$$

结论：若摸后放回, A_1发生与否对A_2不产生影响。

1、两个事件的独立性

设**A**、**B**是两事件，若

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称事件**A**与**B**相互独立，简称独立。

若**P(A) ≠0**，上式等价于：

$$P(B|A) = P(B)$$

从一副52张的扑克牌中任意抽取一张，以A表示抽出一张A，以B表示抽出一张黑桃，问A与B是否独立？

解：$$P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13},P(B)=\frac{1}{4}$$

$$P(AB)=\frac{1}{52}$$

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

$$\therefore A\text{与}B\text{独立}$$

定理：以下四种情形等价：

(1)事件**A**、**B**相互独立；**(2)**事件$\overline{A}$、**B**相互独立；

(3)事件**A**、$\overline{B}$相互独立；**(4)**事件$\overline{A}$、$\overline{B}$相互独立。

证明:(1)$\Rightarrow$(2) 因为事件**A**、**B**相互独立,故

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)P(B)$$

$$=P(B)[1-P(A)]=P(B)P(\overline{A})$$

故$\overline{A}$与**B**相互独立.

2、多个事件的独立

若三个事件A、B、C满足：

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

$$P(AC)=P(A)P(C),$$

$$P(BC)=P(B)P(C),$$

则称**事件A、B、C两两相互独立**；

若在此基础上还满足

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

则称**事件A、B、C相互独立**。

注:两两独立未必相互独立!

例:从分别标有1,2,3,4四个数字的4张卡片中随机抽取一张,以事件A表示“取到1或2号卡片”;事件B表示“取到1或3号卡片”;事件C表示“取到1或4号卡片”.则事件A,B,C两两独立但不相互独立.

事实上,$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$

$$P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4}$$

$$P(ABC)=\frac{1}{4}$$

一般地，设A_1，A_2，…，A_n是n个事件，如果对任意k　$(1<k\le n)$,

任意的$1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n$，具有等式

$$P(A_{i1}A_{i2}\ldots A_{ik})=P(A_{i1})P(A_{i2})\ldots P(A_{ik})$$

则称n个事件A_1，A_2，…，A_n相互独立。

思考：

设事件A、B、C、D相互独立，则

$A\cup B$与CD独立吗？

事件独立性的应用

1、加法公式的简化：若事件A_1，A_2，…，A_n相互独立，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A}_1)\ldots.P(\overline{A}_n)$$

2、在可靠性理论上的应用

例1：重复掷一对骰子20次，求“20次中至少有一次出现双六”的概率？

解：令 **A=“20次中至少出现一次双六”**

A_i=“第i次出现双六”　i=1, 2, ···, 20

则 $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{20}$

且 $P(A_i) = 1/36 \quad i = 1,2,\cdots,20$

$\because \overline{A} = \overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{20}$，又由题意，$A_1, A_2, \cdots, A_{20}$ 相互独立

$$\therefore P(A) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{20}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{20} \approx 0.43$$

例２：电路由元件A与两个并联的元件B,C串联而成，若A,B,C损坏与否是相互独立的，且它们损坏的概率依次为０.３，０.２，０.１，则电路断路的概率是多少？

解：设A,B,C分别表元件A,B,C损坏。因A,B,C独立，则

$$P\{A\cup(BC)\}=P(A)+P(BC)-P(ABC)$$

$$=P(A)+P(B)\cdot P(C)-P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

$$=0.3+0.2\times0.1-0.3\times0.2\times0.1$$

$$=0.314$$

§5 全概率公式与贝叶斯公式

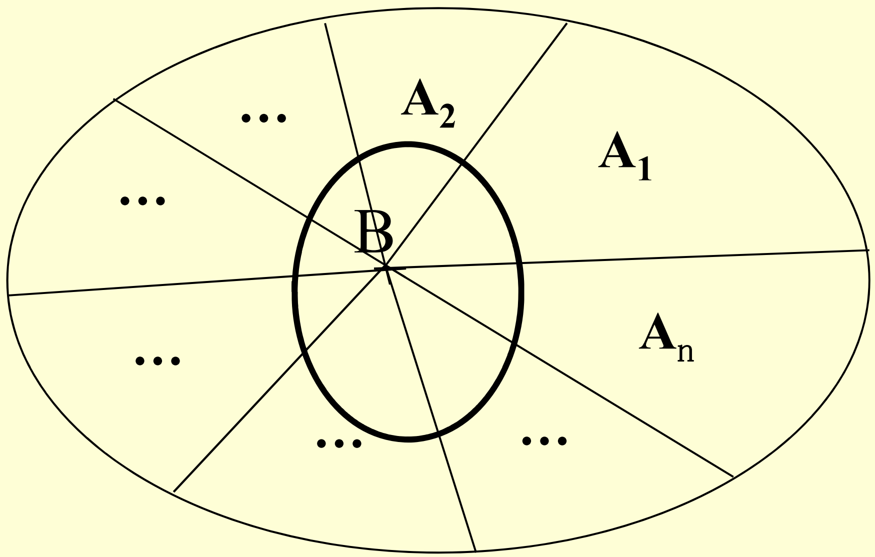
袋中有十只球，其中九只白球，一只红球，十人依次从袋中各取一球(不放回)，问第二个人取得红球的概率是多少？

定义

事件组A_1，A_2，…，A_n (n可为∞)，称为样本空间S的一个划分，若满足：

$$(i)\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i = S;$$

$$(ii)\ A_iA_j = \phi,\ (i \neq j),\ i, j = 1,2,\dots, n.$$



概率论意义：若A_1，A_2，…，A_n是S的一个划分，则，A_1，A_2，…，A_n任意两个不可能同时发生但必有一个发生。

例：$\forall A \subset S$, A与$\overline{A}$组成样本空间一个划分.

例：S={南大全体本科生}

A_i="南大本科i年级学生" i=1,2,3,4

"南大本科生中男学生"

"南大本科生中女学生"

定理1 设A_1，…, A_n是S的一个划分，且$P(A_i)>0$，$(i=1, \ldots, n)$，

则对任何事件B有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

上式称为**全概率公式**。

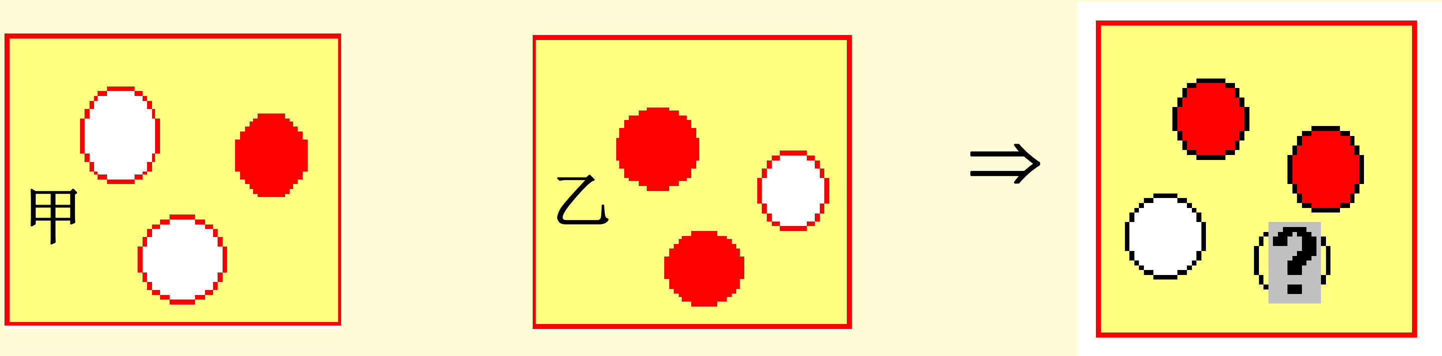
例1 有甲乙两个袋子，甲袋中有两个白球，1个红球，乙袋中有两个红球，一个白球．这六个球手感上不可区别．今从甲袋中任取一球放入乙袋，搅匀后再从乙袋中任取一球，问此球是红球的概率？

解：设A_1——从甲袋放入乙袋的是白球；

A_2——从甲袋放入乙袋的是红球；

B——从乙袋中任取一球是红球；

$$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$$



例2 在某次世界女排锦标赛中，中、日、美、古巴4个队争夺决赛权，半决赛方式是中国对古巴，日本对美国，并且中国队已经战胜古巴队，现根据以往的战绩，假定中国队战胜日本队和美国队的概率分别为0.9与0.4，而日本队战胜美国队的概率为0.5，试问中国队取得冠军的可能性有多大？

解：设A_1——日本队胜美国队；

A_2——美国队胜日本队；

B——中国队取得冠军；

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$$

$$=0.5\times0.9+0.5\times0.4=0.65$$

若已知中国队获得了冠军，问中国队是与美国队决赛而获胜的概率是多少？

解： $P(A_2 \mid B) = \dfrac{P(A_2 B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_2)P(B \mid A_2)}{0.65} = \dfrac{0.5 \times 0.4}{0.65} \approx 0.308$

定理2 设A_1，…, A_n是S的一个划分，且$P(A_i)>0$，(i=1，…，n)，则对任何事件B, P(B)>0,有

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}, (j = 1, \ldots, n)$$

上式称为**贝叶斯公式**。

例3：某工厂的产品以100件为一批，假定每一批产品中的次品最多不超过4件，并具有如下概率：

一批产品中次品数	0	1	2	3	4
概率	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

现从每批中抽取10件检验，发现其中有次品，则认为该批产品不合格，求一批产品通过检验的概率？

解: 令 B="一批产品通过检验"，

A_i="一批产品次品数为i件"。i=0,1,2,3,4

由题意，A_i i=0,1,2,3,4 为样本空间的一个划分。

已知：$P(A_0)=0.1$, $P(A_1)=0.2$, $P(A_2)=0.4$,

$P(A_3)=0.2$, $P(A_4)=0.1$

又：$P(B|A_0)=1$ $P(B|A_1)=\dfrac{C_{99}^{10}}{C_{100}^{10}}=0.900$

$P(B|A_2)=0.809$ $P(B|A_3)=0.727$

$P(B|A_4)=0.652$

所以，由全概率公式：

$$P(B)=\sum_{i=0}^{4}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.8142$$

续上例，求通过检验的一批产品中，恰有i件次品的概率？

解：由贝叶斯公式：

$$P(A_0|B)=\frac{P(A_0)P(B|A_0)}{P(B)}=\frac{0.1\times 1}{0.8142}=0.123$$

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.2\times 0.9}{0.8142}=0.221$$

$$P(A_2|B)=0.397 \qquad P(A_3|B)=0.179$$

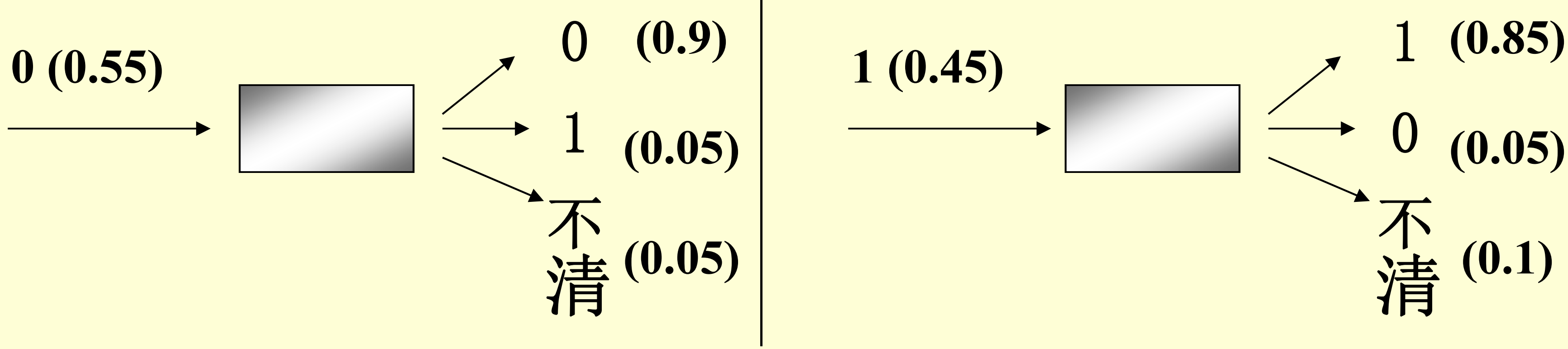
$$P(A_4|B)=0.08$$

例4 数字通讯过程中，信源发射0、1两种状态信号，其中发0的概率为0.55，发1的概率为0.45。由于信道中存在干扰，在发0的时候，接收端分别以概率0.9、0.05和0.05接收为0、1和“不清”。在发1的时候，接收端分别以概率0.85、0.05和0.1接收为1、0和“不清”。现接收端接收到一个“1”的信号。问发送端发的是0的概率是多少?

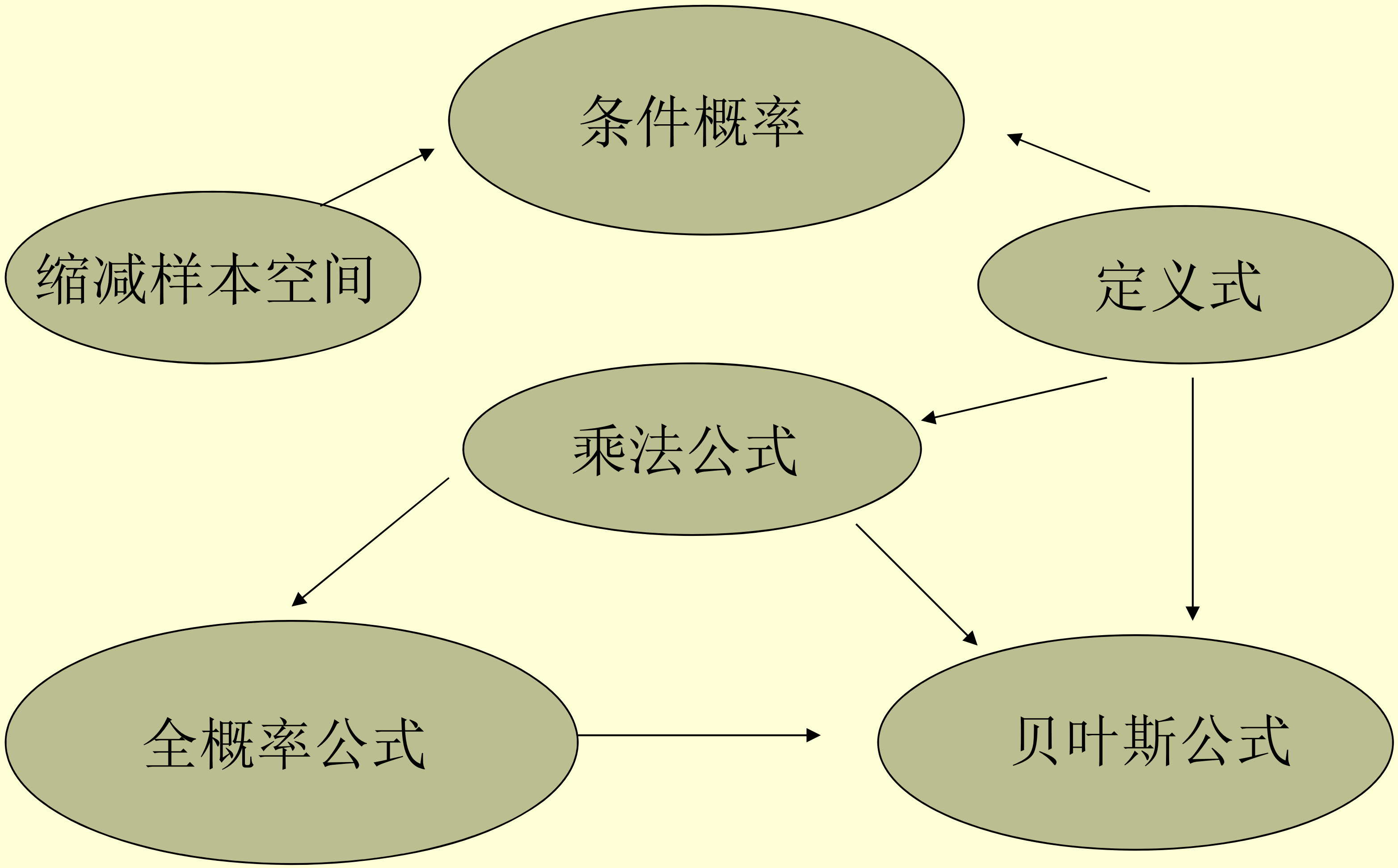
解：设 A---发射端发射0，

B--- 接收端接收到一个“1”的信号.

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})}=\frac{0.05\times0.55}{0.05\times0.55+0.85\times0.45}=0.067$$



条件概率 小 结



第一章 小结

本章由六个概念（随机试验、样本空间、随机事件、概率、条件概率、独立性），四个公式（加法公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式）和一个概型（古典概型）组成。

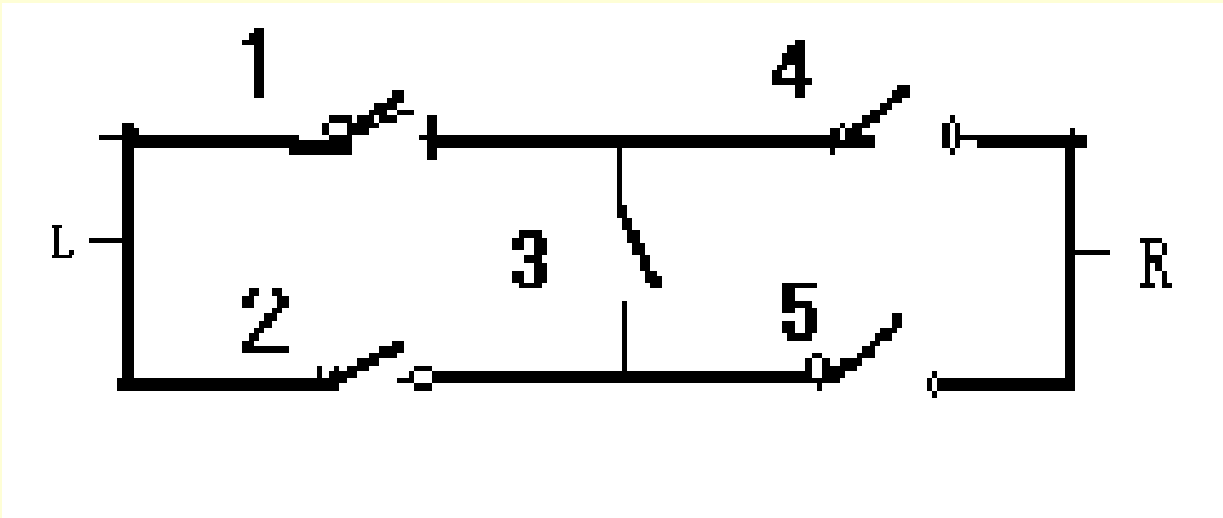
例1 从5双不同的鞋中任取4只，求这4只鞋子中至少有两只能配成一双的概率。

解: 设 A－－至少有两只鞋子配成一双

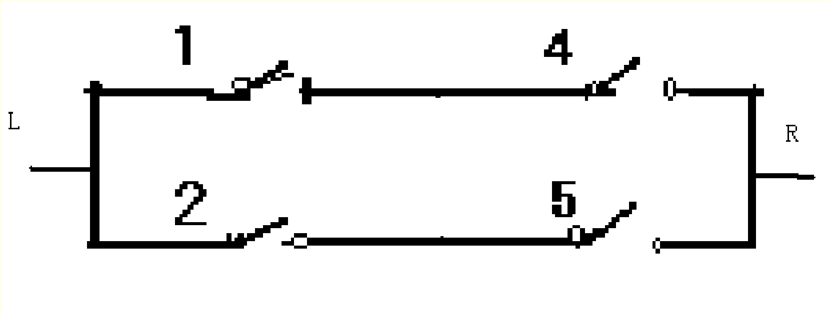
法1:
$$p(A)=1-P\{\overline{A}\}=1-\frac{10\times 8\times 6\times 4}{A_{10}^{4}}=\frac{13}{21}$$

法2:
$$p(A)=1-P\{\overline{\mathrm{A}}\}=1-\frac{C_5^4(C_2^1)^4}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

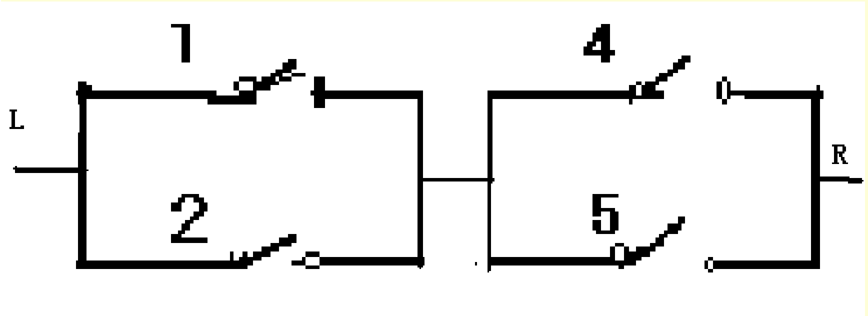
例2．如图，1、2、3、4、5表示继电器触点，假设每个触点闭合的概率为p，且各继电器接点闭合与否相互独立，求L至R是通路的概率。



设A---L至R为通路,A_i---第i个继电器通,i=1,2,…5



$$P(A|\overline{A}_3)=P(A_1A_4\cup A_2A_5)$$
$$=2p^2-p^4$$



$$P(A|A_3)=P\{(A_1\cup A_2)(A_4\cup A_5)\}$$
$$P(A|A_3)=P(A_1\cup A_2)P(A_4\cup A_5)$$
$$=(2p-p^2)^2$$

由全概率公式

$$P(A)=P(A|\overline{A}_3)P(\overline{A}_3)+P(A|A_3)P(A_3)=2p^2+2p^3-5p^4+2p^5$$

例3：商店论箱出售玻璃杯，每箱20只，其中每箱仅可能含0，1，2只次品，其相应的概率分别为0.8,0.1，0.1，某顾客选中一箱，从中任选4只检查，结果都是好的，便买下了这一箱.问这一箱含有一个次品的概率是多少？

解：设A：从一箱中任取4只检查，结果都是好的.

B_0，B_1，B_2分别表示事件每箱含0，1，2只次品

已知：$P(B_0)=0.8$，$P(B_1)=0.1$，$P(B_2)=0.1$　$P(A|B_0)=1$

$$P(A|B_1)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\frac{4}{5}\qquad P(A|B_2)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{12}{19}$$

由Bayes公式：

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)}=\frac{0.1\times 4/5}{0.8\times 1+0.1\times 4/5+0.1\times 12/19}\approx 0.0848$$

课堂练习

一. 判断对错

1. 某种疾病的发病率为1%，则每100人必有一人发病

2. A，B为两事件，则$A \cup B-A=B$

3. “A，B都发生”的对立事件是“A，B都不发生”

4. $P(A)\neq 0, P(B)\neq 0$，若A，B互斥，则A，B不独立.

5. 若$A=\phi$，则A与任何事件即互斥又相互独立.

6. 假如每个人的血清中含有肝炎病毒的概率为p，则由n个人的血清混合后的血清中含有肝炎病毒的概率为np.

二. 填空

1. 已知P(A)＝0.7，P(A-B)＝0.3，则 $P\left(\overline{AB}\right)=$

2. 设两个独立事件A和B都不发生的概率为1/9, A发生而B不发生的概率与B发生而A不发生的概率相等, 则P(A)=__________ .

3. 已知A与B相互独立，且互不相容则 min(P(A), P(B))=

4. 设A, B是两个随机事件, 且 $0 < P(A) < 1, P(B) > 0$，$P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A})$，则必有

$A)\quad P(A \mid B) = P(\overline{A} \mid B)$　　$B)\quad P(A \mid B) \neq P(\overline{A} \mid B)$

$C)\quad P(AB) = P(A)P(B)$　　$D)\quad P(AB) \neq P(A)P(B)$

1-1对于任意二事件**A**和**B,**与

$A \bigcup B = B$不等价的是

(A). $A \subset B$ **(B).** $\overline{B} \subset \overline{A}$

(C) $A\overline{B} = $ **Ø.** **(D)** $\overline{A}B = $ **Ø.**

[D]

1-2 对于任意二事件A和B,

(A)若 $AB \neq$ Ø,则A,B一定独立.

(B)若 $AB \neq$ Ø,则A,B有可能独立.

(C)若 $AB =$ Ø,则A,B一定独立.

(D)若 $AB =$ Ø,则A,B一定不独立.

[B]

1-3 将一枚硬币独立地掷两次,引进事件:A_1={掷第一次出现正面},A_2={掷第二次出现反面},
A_3={正、反面各出现一次},A_4={正面出现两次},则事件

(A) A_1、A_2、A_3 相互独立. **(B)** A_2、A_3、A_4相互独立.

(C) A_1、A_2、A_3 两两独立. **(D)** A_2、A_3、A_4 两两独立.

[C]

$P(A_1)=1/2$, $P(A_3)=(1/2)(1/2)+(1/2)(1/2)=1/2$,
$P(A_1A_3)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=1/4$,
即**$P(A_1A_3)= P(A_1)P(A_3)=1/4$**

1-4 设A、B、C三个事件两两独立,则A、B、C相互独立的充分必要条件是

(A)A与BC独立. **(B)** AB与$A\cup C$独立.

(C)AB与AC独立. **(D)** $A\cup B$与$A\cup C$独立.

[A]

P(AB)=P(A)P(B), P(AC)=P(A)P(C), P(BC)=P(B)P(C)

少P(ABC)=P(A)P(B) P(C)

当[A]成立时

P(A(BC))=P(A)P(BC)= P(A)P(B) P(C)

即

P(ABC)=P(A)P(B) P(C)