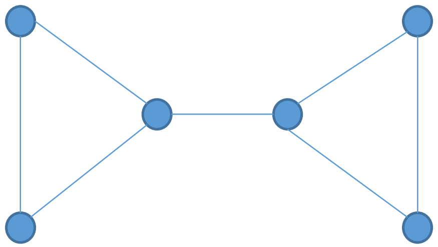
第十三周习题课随堂测验

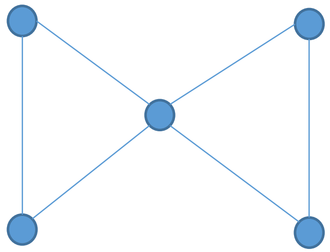
已知图G为连通的简单无向图，下列论述正确的是：

- A：若G中每个顶点都在某一简单回路上（不同顶点可以在不同回路上），则G的点连通度至少为2
- B：若G中每个顶点都在某一简单回路上（不同顶点可以在不同回路上），则G的边连通度至少为2
- C：若G中每条边都在某一简单回路上（不同边可以在不同回路上），则G的点连通度至少为2
- D：若G中每条边都在某一简单回路上（不同边可以在不同回路上），则G的边连通度至少为2

A、B错误，反例：



C错误，反例：



D正确：每条边都在某一简单回路上，去掉任意边，都可以用回路上的另一条通路代替这条边。

第十三周习题课随堂测验

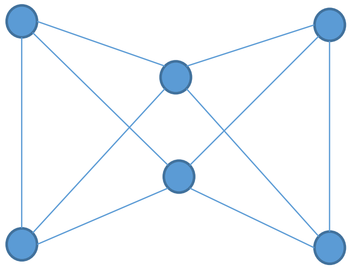
下列论述正确的有：

- [ ] A：若无向简单图G有6个顶点，且最小顶点度为4，则其点连通度可能为3。
- [x] B：若无向简单图G有6个顶点，且最小顶点度为3，则其点连通度可能为2。
- [x] C：对于任意正整数k，都存在无向简单图G，使其点连通度为1且最小顶点度为k。
- [x] D：对于任意正整数k，都存在无向简单图G，使其点连通度为1且边连通度为k。

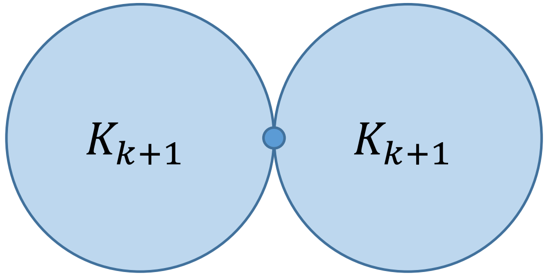
A错误：**达到连通度上限的图**

- 设G是简单图，$|G|=n\geq 3$，且$\delta_G\geq n-2$，则$\kappa(G)=\delta_G$

B正确：



C、D正确：考虑两个k+1个顶点的完全图，通过共用一个顶点连接，则该顶点为该图的割点，且该图边连通度=最小度=k。



第十三周习题课随堂测验

下列论述正确的有：

- [x] A：若无向简单图G不连通，则G的补图一定是连通图。
- [ ] B：若无向简单图G连通，则G的补图一定不连通。
- [x] C：对于无向简单图G中任意一个度为奇数的顶点，都能找到另一个度为奇数的顶点与其连通。
- [x] D：对于无向简单图G中任意一个度为偶数的顶点，都能找到偶数多个（0个、2个、4个...）度为奇数的顶点与其连通。

A 正确，假设G有多个连通分支，设G1是其中一个连通分支，G2是G的剩余部分，则在G的补图中，G1中每个点都和G2中每个点相连。对于G1中任意两点A,B，都可以通过A-G2中任意点-B连通；同理，对于G2中任意两点C,D，都可以通过C-G1中任意点-D连通。
B错误，反例：四个顶点构成的通路，其补图仍是四个顶点构成的通路；

C正确，考虑度为奇数的点所在的连通分支，如果不存在其他度为奇数的顶点，则该连通分量度数和为奇数，违反握手定理。
D正确，考虑度为偶数的点所在的连通分支，如果该连通分支有奇数个度为奇数的顶点，则该连通分量度数和为奇数，违反握手定理。

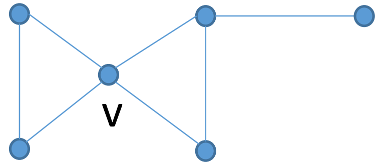
第十三周习题课随堂测验

对于简单无向连通图G，下列论述正确的有：

- [x] A：若G至少有3个顶点，且e为G的割边，则e的两个顶点至少有一个为G的割点
- [ ] B：若G边连通度为1，且v为G的一个割点，则存在至少一条与v相连的边为G的割边
- [x] C：若G的顶点数等于边数，则G有且仅有一条简单回路
- [x] D：若G的最小顶点度大于等于2，则G包含至少一条简单回路

A正确，考虑删除e之后的两个连通分支中较大的一个，该分支至少有2个顶点，删除与e相关联的顶点后，图G分割为两个连通分支。

B错误，反例：



C正确，数学归纳法：三个顶点三条边，结论成立；假设n个顶点n条边的连通图有且仅有一条简单回路，对于任意n+1个顶点n+1条边的连通图，(1)所有顶点度为2，只有C_{n+1}，结论成立；(2)存在度为1的顶点，则删去该顶点得到n个顶点n条边的连通图，由归纳假设，结论成立。

D正确，从任意顶点出发构造通路，由于每个顶点的度都大于等于2，因此进入某个顶点后可以从另一条边离开该顶点。由于G连通且顶点数有限，不断延长该通路，总会出现已经在该通路中出现过的顶点，从而得到回路。

图论第三次作业-连通性 第3题

证明：G 是 2-边连通图当且仅当 G 中任意两个顶点之间至少有两条不含公共边的通路。

（提示：证明过程中可使用 Whitney 定理，但需注意和本题的差异）

- **Whitney定理：**

  图G(|G|≥3)是2-连通图 *当且仅当* G中任意两点被至少2条除端点外顶点不相交的路径所连接。

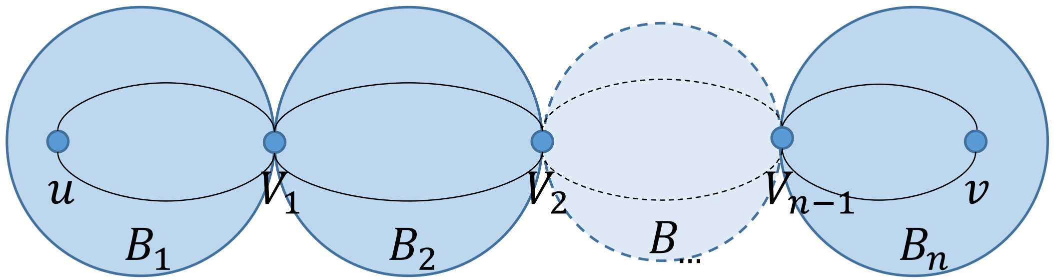
常见错误：忽视了 2-边连通图 和 2-连通图 的差异，直接使用了Whitney定理。

参考解答：

- 若 G 中任意两顶点都至少有两条边不重道路连接，显然对任意 $e \in E(G)$，$G-e$ 是连通的，故 G 为 2-边连通的。

图论第三次作业-连通性 第3题

- 若 G 是 2-边连通的，则 G 无割边。把 G 分解成块，块与块之间以 G 中的割点互相连接。设 u, v 是 G 中任意两顶点。分两种情况：
  - 若 u, v 同属于 G 的某一块，则由 Whitney 定理知，结论成立。
  - 若 u, v 属于 G 的不同块，设 $B_1, B_2, ..., B_n$ 是 G 的块，其中块 B_i 与块 B_{i+1} 以割点 V_i 相互连接且 $|v(B_i)| \geq 3$。不妨设 $u \in B_1$，$v \in B_n$。由之前的证明可知，在 B_1 中存在两条由 u 到 v_1 的不相交的路 P_{11}，P_{12}；同理在 B_i 中存在两条由 v_{i-1} 到 v_i 的不相交的路 P_{i1}，P_{i2}；在 B_n 中存在两条由 v_{n-1} 由 v 的不相交的路 P_{n1}，P_{n2}。于是我们找到两条 u 到 v 的边不相交的路：$P_{11} \cup P_{21} \cup ... \cup P_{n1}$ 和 $P_{12} \cup P_{22} \cup ... \cup P_{n2}$。



图论第三次作业-连通性 第5题

对于任意连通的简单图 G，设 G 有 $\mathcal{V}$ 个点，$\mathcal{E}$ 条边

a) 证明 $\mathcal{E} \geq \mathcal{V} - 1$；

常见错误：

错1：链状图是边最少的连通图，链状图需要V-1条边，因此连通图的边数至少为V-1。

错2：连通2个顶点要1条边，之后每多连通1个顶点要1条边，因此至少要V-1条边。

错3：数学归纳法，基础步骤：1个顶点的连通图0条边，结论成立；

归纳假设：假设n个顶点的连通图边数大于等于n-1；

归纳步骤：考虑n个顶点的连通图新增一个顶点，要和原来的图连通至少要加一条边，因此n+1个顶点的连通图边数大于等于(n-1)+1=n，结论成立。

（错误原因：归纳步骤应该证明结论对任意n+1个顶点的连通图成立，不是对任意n个顶点的连通图新增一个顶点一条边成立！）

图论第三次作业-连通性 第5题

对于任意连通的简单图 G，设 G 有 $\mathcal{V}$ 个点，$\mathcal{E}$ 条边

a) 证明 $\mathcal{E} \geq \mathcal{V} - 1$；

参考解答：

对 $\mathcal{V}$ 进行归纳

Basis $\mathcal{V} = 1$ 时显然成立；

I.H. $\mathcal{V} = n$ 时 $\mathcal{E} \geq n - 1$；

I.S. $\mathcal{V} = n + 1$ 时，若 $\delta(G) \geq 2$，则图的总度数 $\geq 2 * \mathcal{V}$，一条边有两个度，因此 $\mathcal{E} \geq \mathcal{V}$，结论成立；否则 $\exists v_0 \in G.deg(v_0) = 1$，于是 $G - \{v_0\}$ 是连通图，$\mathcal{E} = |E(G - \{v_0\})| + |1 \geq (n-1) + 1 = n$。

图论第三次作业-连通性 第5题

对于任意连通的简单图 G，设 G 有 $\mathcal{V}$ 个点，$\mathcal{E}$ 条边

b) 证明 $\mathcal{E} \geq \mathcal{V}$ 时，G 中有回路。

常见错误：

由a) 知，G为连通图时，边数大于等于V-1。对任意连通图再加一条边，即可满足边数大于等于V。假设这条边加在a,b之间，a和b本来就连通，有一条通路（长度不为1），现在再加一条ab边，形成回路，证毕。

（错误原因：应该证明结论对任意边数大于等于顶点数的连通图成立，不是对任意连通图新增一条边构成的图成立！）

图论第三次作业-连通性 第5题

对于任意连通的简单图 G，设 G 有 $\mathcal{V}$ 个点，$\mathcal{E}$ 条边

b) 证明 $\mathcal{E} \geq \mathcal{V}$ 时，G 中有回路。

参考解答：

对 $\mathcal{V}$ 进行归纳

Basis $\mathcal{V} = 3$ 时显然成立；

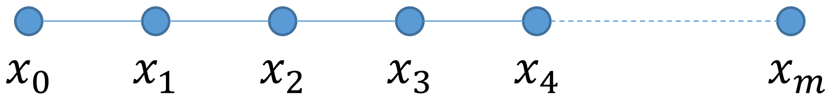
I.H. $\mathcal{V} = n$ 时，若 $\mathcal{E} \geq \mathcal{V}$，则 G 有回路；

I.S. $\mathcal{V} = n+1$，且 $\mathcal{E} \geq \mathcal{V}$ 时，若 $\delta(G) \geq 2$，则结论成立；否则 $\exists v_0 \in G.deg(v_0) = 1$，于是 $G - \{v_0\}$ 是连通图，且顶点数、边数均比 G 少 1，$G - \{v_0\}$ 满足边数大于等于顶点数，由归纳假设，$G - \{v_0\}$ 中存在回路，从而 G 中有回路。

图论第三次作业-连通性 第6题

证明：任意简单连通图 G 包含一条长度至少为 $\min\{2\delta(G), |V(G)|-1\}$ 的顶点不重复的通路。

（提示：证明过程中可以考虑图 G 中最长的 [顶点不重复的] 通路长度）



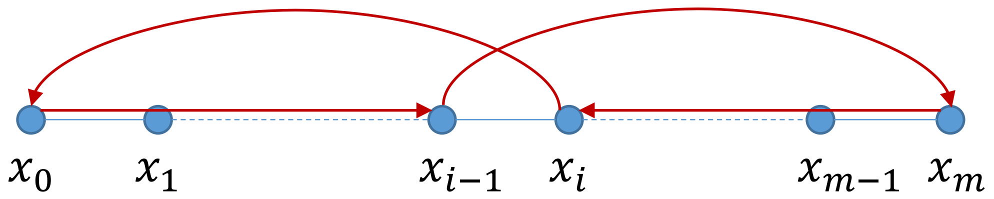
$m = |V(G)| - 1$

答案： 考虑图 G 中最长的 [顶点不重复的] 通路 P:$x_0, x_1, \ldots, x_m$，若该通路包括图上所有点，则其长度 $m = |V(G)| - 1$ 满足要求。下证 G 中存在 [没有出现在通路 P 中的顶点] 的情况（$m < |V(G)| - 1$）。

图论第三次作业-连通性 第6题

证明：任意简单连通图 G 包含一条长度至少为 $\min\{2\delta(G), |V(G)|-1\}$ 的顶点不重复的通路。

（提示：证明过程中可以考虑图 G 中最长的 [顶点不重复的] 通路长度）



$m < |V(G)|-1$

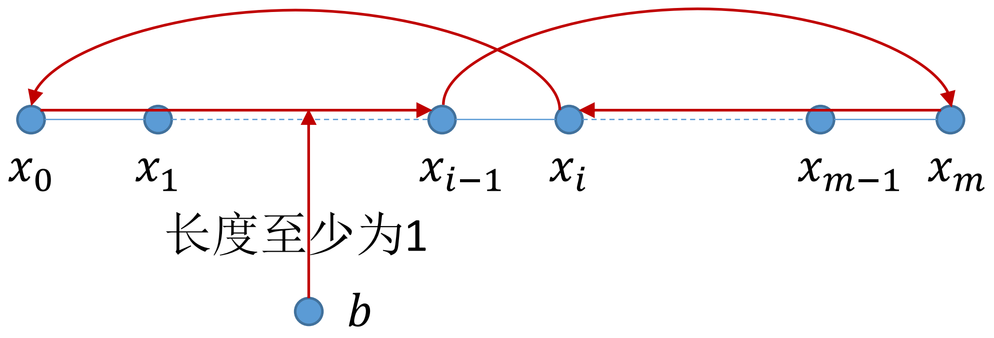
假设 $m < 2\delta(G)$

采用反证法：假设 P 的长度 $m < 2\delta(G)$，则 $m < d(x_0)+d(x_m)$。由于 P 是符合要求的最长通路，所以与其端点 x_0 和 x_m 相邻的所有顶点都在通路 P 上（否则通路可以继续延长）。因此一定存在顶点 x_i，x_i 与 x_0 相连，且 x_{i-1} 与 x_m 相连（否则，设有 w 个顶点 $\{x_{h1}, x_{h2}, \ldots, x_{hw}\}$ 与 x_0 相连，则 $\{x_{h1-1}, x_{h2-1}, \ldots, x_{hw-1}\}$ 均不与 x_m 相连，即至多 $m-w$ 个顶点与 x_m 相连，从而与 $m < d(x_0)+d(x_m)$ 矛盾）。因此 $V(P)$ 上存在顶点不重复的回路 $x_i, x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_m, x_{m-1}, \ldots, x_i$，该回路长度为 $m+1$。

图论第三次作业-连通性 第6题

证明：任意简单连通图 G 包含一条长度至少为 $\min\{2\delta(G), |V(G)|-1\}$ 的顶点不重复的通路。

（提示：证明过程中可以考虑图 G 中最长的 [顶点不重复的] 通路长度）



$m < |V(G)| - 1$

假设 $m < 2\delta(G)$

推出矛盾！

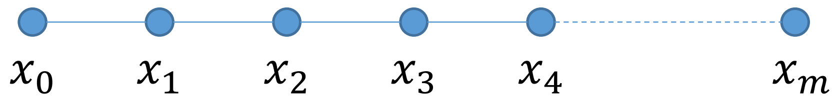
因为至少存在一个点 b，b 不在通路 P 中，由 G 是连通图，b 由最短的路径和通路 P 中的某个顶点相连。因此可以从 b 出发在刚才的回路上构造一条长度至少为 $m+1$ 的 [顶点不重复的] 通路，与 P 是最长 [顶点不重复的] 通路矛盾。

图论第三次作业-连通性 第6题

证明：任意简单连通图 G 包含一条长度至少为 $\min\{2\delta(G), |V(G)|-1\}$ 的顶点不重复的通路。

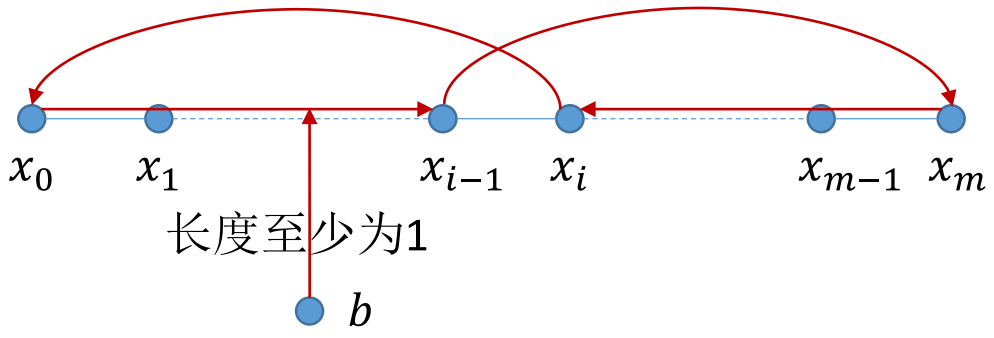
（提示：证明过程中可以考虑图 G 中最长的 [顶点不重复的] 通路长度）

Case 1： $m = |V(G)| - 1$ 时结论成立；



$m = |V(G)| - 1$

Case 2： $m < |V(G)| - 1$ 时，$m \geq 2\delta(G)$，结论成立；



$m < |V(G)| - 1$

$m < 2\delta(G)$ 时推出矛盾！

综上，原命题得证。

图论第三次作业-连通性 第7题

设 n 阶图 G 的边数为 m，试证明：若 $m > C_{n-1}^2$，则 G 为连通图。

常见错误：

n-1个顶点的图至多有 C_{n-1}^2 条边，对于剩下一个顶点，至少有一条边与他相连，因此G为连通图。（错误原因：只证明了原图中没有孤立点）

答案： 证明：假设 G 不连通，有 2 个或以上连通分支。
设其中一个连通分支中顶点数为 $n_1 \geq 1$，其余顶点数为 $n_2 \geq 1$，$n_1 + n_2 = n$，
$m \leq C_{n_1}^2 + C_{n_2}^2$
可以验证：$C_{n_1}^2 + C_{n_2}^2 \leq C_{n-1}^2$，即 $n_1(n_1-1) + n_2(n_2-1) \leq (n-1)(n-2)$
验证中用到关键等式：$0 \leq (n_1-1)(n_2-1)$
因此 $m \leq C_{n-1}^2$，矛盾。所以 G 为连通图。

图论第三次作业-连通性 第7题

设 n 阶图 G 的边数为 m，试证明：若 $m > C_{n-1}^2$，则 G 为连通图。

另外看到一个很棒的答案：

反证法，假设n阶图G不连通，则其补图一定连通。（结论来自小测验）

则其补图边数$\geq n-1$（作业第5题）

考虑到G边数 $m > C_{n-1}^2$ ，其补图边数 = $C_n^2 - m < C_n^2 - C_{n-1}^2 = n-1$，矛盾！

G是连通图得证！

图论第四次作业-欧拉图 第2、3题

对哪些 m 和 n 值来说，完全二部图 $K_{m,n}$ 具有

2) 欧拉通路：

- m 和 n 均为偶数;
- m 与 n 中一个为奇数，另一个为 2;
- m 和 n 均为 1。

请画出所有互不同构的具有 5 个顶点的欧拉图（仅考虑无向简单图）。