过 100 万元的概率；(2) 若保险公司希望每年盈利超过 120 万元的概率达到 90%，问保险公司应要求每车每年交保费多少元？

解　设每年有 X 辆车被盗，则 $X \sim B(5000, 0.004)$，$EX = 5000 \times 0.004 = 20$，$DX = 5000 \times 0.004 \times 0.996 = 19.92$，由中心极限定理，

$$X \overset{\text{近似}}{\sim} N(20,\ 19.92),\quad \frac{X-20}{\sqrt{19.92}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,\ 1)。$$

(1) 盈利超过 100 万元等价于 $X < 25$，

$$P(X < 25) = P\left(\frac{X-20}{\sqrt{19.92}} < \frac{25-20}{\sqrt{19.92}}\right) = \varPhi(1.12) = 0.8686。$$

(2) 设每车应年交保费 y 万元，则盈利等于 $5000y - 2X$，

$$\begin{aligned} &P(5000y - 2X > 120) = P(X < 2500y - 60) \\ =&P\left(\frac{X-20}{\sqrt{19.92}} < \frac{2500y-60-20}{\sqrt{19.92}}\right) = \varPhi\left(\frac{2500y-80}{\sqrt{19.92}}\right) = 0.9。\end{aligned}$$

查表 $\varPhi(1.28) = 0.9$，于是 $\dfrac{2500y-80}{\sqrt{19.92}} = 1.28$，解出 $y = 0.034285$(万元) 所以，每车应每年交保费 343 元。

习　题　五

1. 设 $\{X_k\}$ 为相互独立的随机变量序列，其分布律为

X_k	$\sqrt{\ln k}$	$-\sqrt{\ln k}$
p_k	$1/2$	$1/2$

$k = 1, 2, \cdots, n$，试利用切比雪夫不等式证明 $\{X_k\}$ 服从大数定律。

2. 设 $\{X_k\}$ 为独立同分布的随机变量序列，其公共分布为 (0,1) 上均匀分布，令 $Y_n = \left(\prod\limits_{i=1}^{n} X_i\right)^{1/n}$，证明存在常数 C，使得。

3. 抛一枚均匀硬币，试用 (1) 切比雪夫不等式；(2) 中心极限定理分别确定，至少抛多少次才能使出现正面向上的频率介于 0.4~0.6 之间的概率不小于 0.9。

4. 设随机变量 X 服从泊松分布，$P(X = k) = \dfrac{1}{k!}e^{-1}$，$k = 0, 1, 2, \cdots$，作 100 次独立试验，获得 $X_1, X_2,\ \cdots X_{100}$，求概率 $P(X_1 + X_2 + \cdots + X_{100} < 120)$。

5. 计算器在进行加法运算时，将每个加数舍入成最靠近它的整数，设所有舍入误差相互独立且在 $(-0.5, 0.5)$ 上服从均匀分布，

(1) 将 1500 个数相加，求误差总和的绝对值大于 15 的概率；

(2) 为使误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.96，最多允许多少个数相加？

6. 商店出售某种大件商品，根据经验，该商品每周销量服从参数为 $\lambda = 2$ 的泊松分布，设各周销量相互独立，用中心极限定理计算该商店 50 周的时间售出该商品件数在 90 件到 110 件之间的概率。

7. 某种元件次品率为 0.05，现任取 1000 件，求其中次品数不超过 60 的概率。

8. 某系统由 100 个独立工作的部件组成，运行时每个部件损坏的概率为 0.1，整个系统维持运行的必要条件是至少有 85 个部件正常工作，

(1) 求整个系统正常运行的概率；

(2) 要使整个系统正常运行的概率达到 0.98，问每个部件正常工作的概率应达到多少？

9. 某产品合格率 0.9，问每盒中至少要装多少只产品，才能以 95%的概率保证一盒内至少有 100 只合格品。

10. 现从良种率为 1/6 的种子中任取 6000 粒，试以 0.99 的概率推断，在这 6000 粒种子中良种所占的比例与 1/6 的差的绝对值不超过多少？相应的良种粒数在哪个范围内？