# 习　题　二

1. 将 3 个小球随机放入 4 个盒子中，设盒子中球的最多个数为 $X$，求 $X$ 的分布律。

2. 将 1~9 共九个数随机放入 3×3 的格子，设各列最小值为 $a_1, a_2, a_3$，求 $T = \max\{a_1, a_2, a_3\}$ 的分布律。

3. 问 $C$ 取何值时以下数列称为概率分布律：

(1) $p_k = C\left(\frac{2}{3}\right)^k, \quad k = 1, 2, 3;$

(2) $p_k = C\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 1, 2, \cdots$。

4. 设离散型随机变量 $X$ 的分布律为

| $X$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $P$ | $1/4$ | $a$ | $b$ |

分布函数为 $F(x) = \begin{cases} c & -\infty < x < -1 \\ d & -1 \leqslant x < 0 \\ 3/4 & 0 \leqslant x < 1 \\ e & 1 \leqslant x < +\infty \end{cases}$，

试求常数 $a, b, c, d, e$。

5. 甲、乙两人射击，各射 3 次。甲、乙命中率分别为 0.6，0.7，求 (1) 两人射中次数相等的概率；(2) 甲比乙射中次数多的概率。

6. 某街道有 $n$ 个路口装有红绿灯，各路口出现红绿灯相互独立，红绿灯显示时间长度为 1:2。现有一辆汽车从头沿街道行驶，以 $X$ 表示该车首次遇红灯前已通过的路口个数，求 $X$ 的分布律。

7. 设有甲、乙两种颜色和味觉都极为相似的名酒各 4 杯，若从中挑 4 杯能将甲酒全部挑出来，算是试验成功一次，

(1) 某人随机地去猜，问他试验成功一次的概率是多少？

(2) 某人声称他通过品尝可区分这两种酒，他独立试验 10 次成功 3 次。利用小概率事件原理推断，他是猜对的，还是确有区分能力的。

8. 已知每天到达某港口的油船数 $X$ 服从参数为 2.5 的泊松分布，而港口的服务能力最多只能服务 3 只船，如果一天中到达港口的油船多于 3 只，则超过 3 只的油船必须转港。(1) 求一天中必须有油船转港的概率；(2) 求一天中最大可能到达港口的油船数及其概率；(3) 问服务能力提高到多少只油船时，才能使到达油船以 90% 的概率得到服务。

9. 在区间 [2,6] 随机投点，设落点坐标 $X$，现对 $X$ 进行三次独立观测，求至少有两次观测值大于 3 的概率。

10. 下列函数是随机变量 $x$ 的密度函数，试确定常数 $a$。

(1) $p(x) = ae^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty;$

(2) $p(x) = \begin{cases} a\sin\frac{x}{2} & 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases};$

(3) $p\left(x\right) = \begin{cases} \cos x & 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 & \text{其他} \end{cases};$

(4) $p(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{1+x^2} & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$。

11. 设随机变量 $x$ 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}A+Be^{-x^2/2} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases},$$

求 $A$，$B$ 及概率 $P(-1<X\leqslant 1)$。

12. 设随机变量 $x$ 的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}Ax^3 & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases},$$

(1) 求常数 $A$；(2) 求 $X$ 的分布函数 $F(x)$；(3) 求常数 $B$，使 $P(X<B)=P(X>B)$。

13. 设随机变量 $X$ 密度

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{18}x^2 & -3\leqslant x\leqslant 3\\ 0 & \text{其他}\end{cases},$$

求关于 $y$ 的方程：$4y^2+4Xy+X+2=0$ 有实根的概率。

14. 设 $X\sim N(5,4)$，求 $a$，使得 (1)$P(X<a)=0.9$；(2)$P(|X-5|>a)=0.01$。

15. 设随机变量 $X\sim N(60,9)$，求分点 $x_1$，$x_2$，使 $X$ 落在 $(-\infty,\ x_1)$，$(x_1,\ x_2)$，$(x_2,\ +\infty)$ 的概率之比为 3:4:5。

16. 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 均服从正态分布，$X\sim N\left(\mu,4^2\right)$，$Y\sim N\left(\mu,5^2\right)$，记 $p_1=P\left(X\leqslant\mu-4\right)$，$p_2=P\left(Y\geqslant\mu+5\right)$，试比较 $p_1$ 和 $p_2$ 的大小。

17. 在电源电压不超过 200V，介于 200~240V，超过 240V 三种情况下，某电子元件损坏的概率分别为 0.1，0.001，0.2。设电源电压 $X(V)$ 服从正态分布 $N$ $(220,\ 25^2)$。求 (1) 该电子元件损坏的概率；(2) 已知该电子元件损坏，问此时电压介于 200~240V 的概率。

18. 某种英语考试的标准分 $X$ 服从均值 500 正态分布，已知考分 612 以上占全体考生的 5.5%，若将及格线设定为 85%的考生都能通过，问及格分应是多少分 (取整)。

19. 设离散型随机变量 $X$ 的分布律为

| $X$ | $-2$ | $-1/2$ | $0$ | $1/2$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $1/8$ | $1/4$ | $1/8$ | $1/6$ | $1/3$ |

求下列随机变量的分布律：(1)$Y=2X$；(2) $Y=X^2$；(3) $Y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}X\right)$。

20. 设随机变量 $X$ 服从 $[-1,\ 1]$ 上的均匀分布，$Y=X^2$，求 $Y$ 的密度函数 $p_Y(y)$。

21. 设随机变量 $X$ 的密度为 $p(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{16}(x^2-4x+4)}$，求 $Y=2X+4$ 的密度。

22. 设随机变量 $X$ 服从 $[0,\ \pi]$ 的均匀分布，求 $Y=\sin X$ 的概率密度。

23. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，求 $Y=2(1-|X|)$ 的概率密度函数。

24. 设随机变量 $X$ 服从柯西分布，即密度函数为

$$p_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\quad -\infty<x<+\infty,$$

求 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的密度函数 $p_Y(y)$。

25. 设随机变量 $X$ 的密度为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & 1\leqslant x\leqslant 8\\ 0 & 其他\end{cases}$，$F(x)$ 是 $X$ 的分布函数，试求 $Y=F(X)$ 所服从的分布。

26. 设随机变量 $X$ 服从参数为 2 的指数分布，证明 $Y=1-e^{-2X}$ 在区间 [0,1] 上服从均匀分布。