

离散数学第八次作业

一些提醒

1. 请仔细阅读教材上的定义 1、2、3 (P145) 以及相关定理, 并检查你的答案能否从中找到依据;
2. 如无特殊说明, 本次作业中“可数”总包括“有限”和“可数无限”两种情况;
3. 本次作业中, 若找到了集合 A 到已知可数集 (如 \mathbb{N}_0) 的单射, 可以直接说 A 是可数集;
4. 本次作业中, 若找到了已知不可数集 (如 \mathbb{R}_1) 到集合 B 的单射, 可以直接说 B 是不可数集。

Problem 1

计算下列集合的基数.

- | | |
|---|----------------------------|
| a) $A = \{x, \{\}, \{x\}\}$ | d) $B \cap C$ |
| b) $B = \{x \mid x = n^2 \wedge n \in \mathbb{N}\}$ | e) 所有整系数一元二次方程的根的集合 |
| c) $C = \{x \mid x = n^{109} \wedge n \in \mathbb{N}\}$ | f) 平面上所有的圆心在 x 轴上的单位圆的集合 |

Problem 2

如果 A 和 B 是集合, 证明:

- a) 如果 $A \subseteq B$, 则 $|A| \leq |B|$ 。
- b) 如果 A 可数且存在一个从 A 到 B 的满射函数 f , 则 B 也是可数的。

Problem 3

设 $A = \{a, b, c\}$, $B = 2^A$, 由定义证明 $\mathcal{P}(A) \approx B$.

Problem 4

令 $\{1, 2, 3\}^\omega$ 为所有仅由数字 1, 2 或 3 构成的无限长的序列的集合。证明该集合不可数。

Problem 5

请证明: $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \approx R$, (注: A^B 表示 $\{f \mid f: B \rightarrow A\}$)。

Problem 6

证明:

- a) 设 A, B 为可数集, $A \times B$ 是可数集;
- b) 可数多个可数集的并也是可数集。

Problem 7

设 A, B, C 为集合, 其满足 $A \cap B = A \cap C = \emptyset$ 且 $|B| = |C|$, 试证明:

- a) $|A \cup B| = |A \cup C|$;
- b) 若 $A \cup B$ 是不可数集, B 是可数集, 证明或反驳 A 一定是不可数集。