谓词逻辑与证明 习题课

丁文韬

一些说明

- 使用PS（Problem Set）指示作业文件，Prob指示其中题目
  - 例：“第四次作业第八题” -> PS4 Prob8
- 本次内容
  - 证明方法
    - Prob7, Prob8的正确解法
  - 谓词逻辑
    - →和⊢等相似符号的含义澄清
    - 形式化的一阶逻辑
    - 从自然语言到一阶逻辑
    - 一阶逻辑中“论域”的概念
    - Prob3(b), Prob4, Prob8

证明方法

PS4 Prob8

- 若a,b为无理数，~~证明或~~反驳$\frac{a^b}{a^b}$为无理数。

答案： 反驳，令 $b=\sqrt{2}$，显然 b 是无理数

1. 若 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 为有理数，则令 $a=\sqrt{2}$, $\frac{ab}{a^b}=\frac{2}{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$ 为有理数，得证；
2. 否则令 $a'=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$，则 $\frac{a'b}{a'^b}=\frac{\sqrt{2}^{\sqrt{2}+1}}{2}$，
   (a) 若 $\frac{\sqrt{2}^{\sqrt{2}+1}}{2}$ 为有理数，得证；
   (b) 否则令 $a''=\sqrt{2}^{\sqrt{2}+1}$，有 $\frac{a''b}{a''^b}=\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}+1}\right)^{\sqrt{2}-1}}=1$，得证。

PS4 Prob7

- 证明$\sqrt[3]{2}$是无理数

- 一个巧妙(?)又恰好有空间写下来的证明
  - $\sqrt[n]{2}$是有理数等价于存在互素整数p,q，满足$\sqrt[n]{2}=\frac{p}{q}$，即$q^n+q^n=p^n$
  - 由费马大定理知n是大于2的整数时方程$q^n+q^n=p^n$无整数解
  - 3是大于2的整数
  - 所以不存在满足要求的p,q，矛盾

谓词逻辑

几个相似表述的再澄清

- $p \to q$：“p蕴含q”整个陈述(statement，书上译为语句)为真(假)
  - 只讨论真值的后果：$p \to (q \to p) \equiv \top$　　$\neg p \to (p \to q) \equiv \top$
- $p \vdash q$：“p推出q”，公式的序贯(sequent)，可以写$p_1, p_2 \vdash q$
  - 考虑公式之间的“后承”，**不关心公式的含义**
- $p \vDash q$：“任意赋值让p真就也能让q真”
  - 用模型去解释公式得到含义
- $p \Rightarrow q$：没有明确定论，可能是上述含义中任意一个
  - 在不需要明确的逻辑含义时较为常用

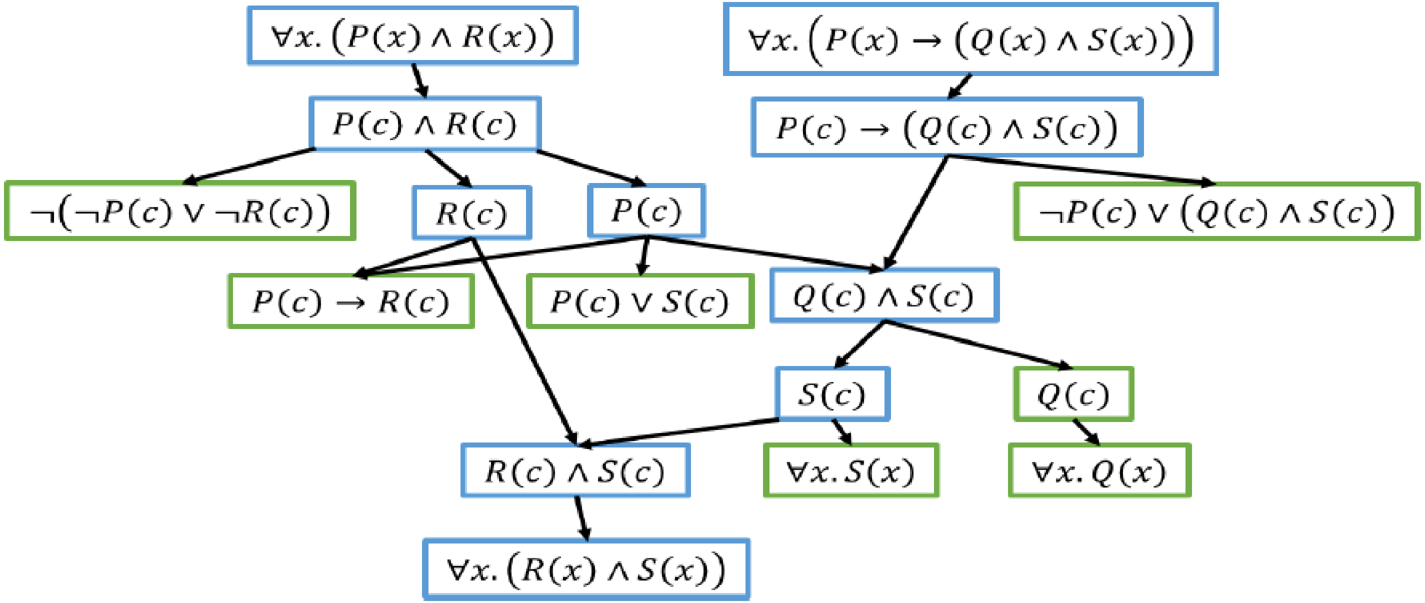

Bertrand Russell


David Hilbert


Kurt Gödel

不依赖直觉地“解决问题”

- 设计一个程序语言，按该语言写出的程序的“可靠性”不应该再需要设计者逐个去“看”



PS3 Prob8

- 用推理规则证明：如果$\forall x\big(P(x)\lor Q(x)\big)$，$\forall x\big(\neg Q(x)\lor S(x)\big)$，$\forall x\big(R(x)\to\neg S(x)\big)$和$\exists x\neg P(x)$为真，则$\exists x\neg R(x)$为真。
  - $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x P(x)\lor Q(x)}{P(c)\lor Q(c)}\text{全称实例}\quad \dfrac{\exists x\neg P(x)}{\neg P(c)}\text{存在实例}}{Q(c)}\text{析取三段论}\quad \dfrac{\forall x\neg Q(x)\lor S(x)}{\neg Q(c)\lor S(c)}\text{全称实例}}{S(c)}\text{析取三段论}\quad \dfrac{\forall x(R(x)\to\neg S(x))}{R(c)\to\neg S(c)}\text{全称实例}}{\dfrac{\neg R(c)}{\exists x\neg R(x)}\text{存在引入}}\text{取拒式}$$
  - $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x P(x)\lor Q(x)}{P(c)\lor Q(c)}\text{全称实例}\quad \dfrac{\exists x\neg P(x)}{\neg P(c)}\text{存在实例}}{Q(c)}\text{析取三段论}}{\neg\neg Q(c)}\quad \dfrac{\forall x\neg Q(x)\lor S(x)}{\neg Q(c)\lor S(c)}\text{全称实例}}{S(c)}\text{析取三段论}\quad \dfrac{\forall x(R(x)\to\neg S(x))}{R(c)\to\neg S(c)}\text{全称实例}}{\dfrac{\neg R(c)}{\exists x\neg R(x)}\text{存在引入}}\text{取拒式}$$

PS3 Prob4

- 使用谓语、量词、逻辑联结词和数学运算符表达语句“有一个正整数不是三个整数的平方和”。
- 接受
  - $\exists x \forall a \forall b \forall c (x > 0 \wedge x \neq a^2 + b^2 + c^2)$，变量论域均为整数
  - $\exists x \big(P(x) \wedge \exists a \exists b \exists c\, Q(x, a, b, c)\big)$，，变量论域均为整数，……
  - $\exists x \forall a \forall b \forall c \Big(\neg Q\big(x, f(a, b, c)\big)\Big)$，$x \in \mathbb{N}_+, a, b, c \in \mathbb{Z}$，……
- 不接受
  - $\exists x \neg P(x)$，……，$P(x)$表示x是三个整数的平方和
  - $\exists x P(x)$，……，$P(x)$：$x \neq a^2 + b^2 + c^2, a, b, c \in \mathbb{Z}$
  - $\exists x \big(x \neq \forall a \forall b \forall c (a^2 + b^2 + c^2)\big)$

一阶逻辑的形式化

- 标准的形式化一阶逻辑系统包括项、谓词、逻辑符号，公理和推理规则
  - 项（项的最终值是某个元素）
    - 常量，变量：表示某个domain中特定或任意的元素
    - 函数：作用于项，得到**项**
  - 谓词：作用于若干项，得到**公式**
  - 逻辑连接词：连接公式与公式得到新的**公式**
  - 公理：提前约定的结论（例：对两个量相等符号“=”的数学性质的表述）
  - 推理规则，从前提公式(集)推出结论公式(集)的方式
  - 定理：推出的结论
  - 论证/推理证明/推证：从加入系统的前提按推理规则推到结论的过程

“论域”　　（注：本页为超纲内容）

- “标准的”一阶逻辑形式化不关心含义
  - 默认所有的量来自同一集合/属于同一种类
- 实际情况下谓词讨论的对象确实应该有很多种
  - “我养了条毛色鲜亮的狗” -> 谓词：毛色鲜亮()
  - 允许存在多个类的称为Many-sorted FOL或Typed FOL
- 有限多的种类可以在FOL内用谓词替代
  - 对象的种类　$P(c)$
  - 种类的子种类　$\forall x\left(P(x) \rightarrow Q(x)\right)$
  - 种类不重叠　$\neg x\left(P(x) \wedge Q(x)\right)$

PS3 Prob3(b)

- 下列逻辑公式的真值是什么？

(b) $\forall x P(x) \to \exists! \, x P(x)$

  - 当论域恰有一个元素时为true，否则为false

- 注意：论域中包含$a_1, a_2, \ldots, a_n$的说法等同于认为论域是有限的（存在一个自然数n对应论域的大小）

总结

- 有一些相似的数学对象是从不同角度出发分别得到的，不要把它们混在一起
- 自然语言到逻辑语言的翻译要把尽量多的语义用纯形式的方式写出来
- 要留意自己写下的内容是否与相应的数学结构吻合，要做“人工编译”

Thanks for listening

- Q & A