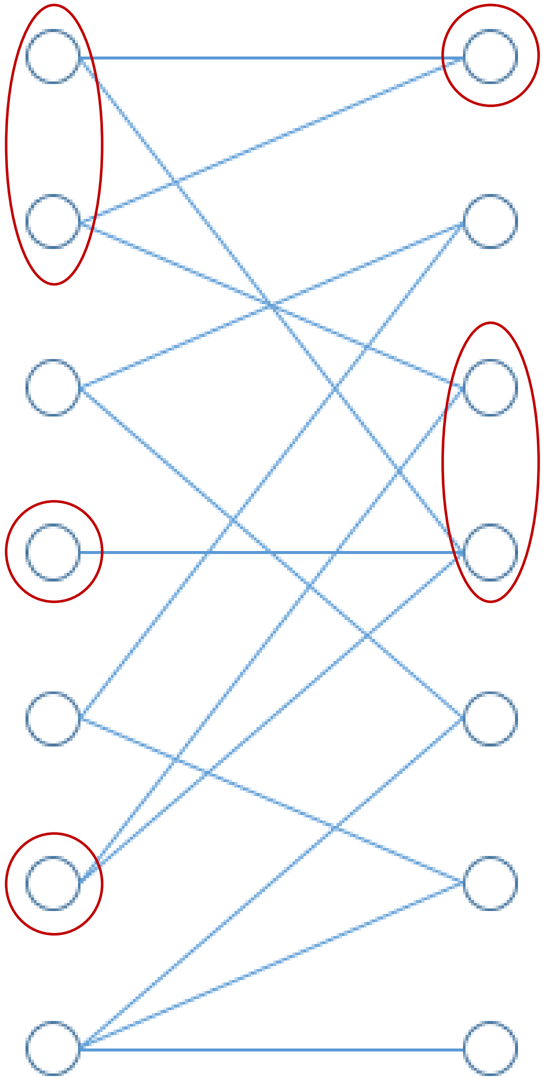
第十五周习题课随堂测验

下图是否存在完美匹配？



解答：不存在！

左侧红圈中4个点只和右侧红圈中3个顶点相连。

不满足Hall婚姻定理，从而不存在完备匹配（饱和左侧顶点的匹配），因此不存在完美匹配。

二部图完备匹配的充分必要条件

- **定理 (Hall's marriage theorem, 1935)**：二部图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$，$|V_1| \le |V_2|$，存在完备匹配当且仅当$V_1$中任意$k$个顶点至少与$V_2$中的$k$个顶点相邻，其中$k = 1,2,\cdots,|V_1|$

第十五周习题课随堂测验

对于任意简单连通无向图G，下列说法正确的有：

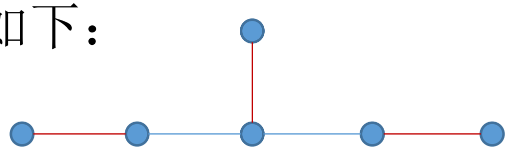
- [x] A：若G有完美匹配，则G的顶点数一定是偶数。
- [x] B：若G有两个不同的完美匹配，则G中一定存在回路。
- [x] C：若G是树，且G有完美匹配，则G的最大匹配是唯一的。
- [ ] D：若G是树，且G有完美匹配，则G存在哈密顿通路（即G是一条链）。

A选项：匹配中每条边饱和两个顶点，如果有饱和所有顶点的匹配，则顶点数必然是偶数。

B选项：假设G有两个完美匹配，考虑这两个边集的对称差对应的边导出子图，该子图中每个顶点的度都是2，从而存在回路。 （注：此题和作业第一题的证明基本一样）

C选项：树没有回路，因此最多只有一个完美匹配，因此其最大匹配就是完美匹配且是唯一的。

D选项：反例如下：



第十五周习题课随堂测验

已知无向图G是树，则下列说法正确的有：

☑ A：若G的顶点数大于等于2，则G至少有两个度为1的顶点。

☑ B：若G有n个顶点，则至多有2个度数大于等于n/2的顶点。

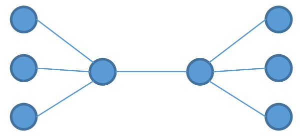
☐ C：若G有n个顶点，则至多有n/2个度数大于等于2的顶点。

☑ D：若G的顶点数大于等于2，则可以把G的所有顶点分为两个集合，使这两个集合中顶点的度数之和相同。

A选项：树中每个顶点的度至少是1，总度数是2(n-1)，如果只有一个度为1的顶点(其他顶点度至少为2)，则度数和加起来大于2(n-1)，矛盾 。

B选项：反证法，若有3个度大于等于n/2的顶点，考虑其他顶点的度至少为1，则图中所有顶点总度数达到(3n/2+n-3)，当$n \geq 3$时显然大于2(n-1)，与G是树矛盾。

（若G中有两个度至少为n/2的顶点，则这两个顶点一定相连，且其他顶点度都是1。）



C选项：显然错误，比如6个顶点构成一条链，有4个度为2的顶点。

D选项：树没有奇圈，因此是二部图，两部顶点度数和相同。（也可以用数学归纳法证明）

第十五周习题课随堂测验

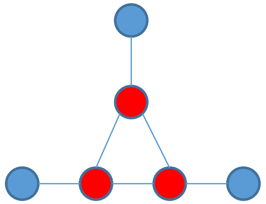
对于任意简单连通无向图G，下列说法正确的有：

- [x] A：若G的所有边都是割边，则G一定为树。
- [ ] B：若G中度大于1的顶点均为割点，则G一定为树。
- [x] C：若G存在割边e，且删除e之后每个连通分支都是树，则G一定为树。
- [ ] D：若G存在割点v，且删除v之后每个连通分支都是树，则G一定为树。

A选项：由于G连通且每条边都是割边，因此G中不存在任何回路，所以G是树。

C选项：删除割边后最多得到两个连通分支，由于两个连通分支都是树，则每个连通分支的边数=顶点数-1。假设其中一个连通分支有m个顶点m-1条边，另一个连通分支有n-m个顶点n-m-1条边，可知原图有(m-1)+(n-m-1)+1=n-1条边。考虑到原图连通，因此图G是树。

B，D选项均错误，反例如下：（红色顶点为割点）



图论第七次作业-二部图匹配6

假设某校计算机系学生选导师时出现了这样的情况：对于每一位学生，至少对 k 名导师感兴趣；对于每一位导师，至多有 k 名学生对他感兴趣。假设每位导师只能指导 1 名学生，且每位学生也只能选择 1 名导师。试证明：存在这样的匹配，使得每位学生都能选到自己感兴趣的导师。

答案： 记所有学生的集合为 A，所有导师的集合为 B，对于任意学生的子集 S，每个学生至少关联 k 条边，所以至少关联 $k*|S|$ 条边；而 $|N(S)|$ 中每个老师最多关联 k 条边，所以至多关联 $k*|N(S)|$ 条边。因为 $k*|S| \leq k*|N(S)|$，所以 $|S| \leq |N(S)|$，根据霍尔婚姻定理，知该图有学生顶点集到导师顶点集的完备匹配。

图论第七次作业-树的基本概念6

令 G 为一无向带权连通图，假设图中存在一个回路. 试证明：在此回路上若存在一条边 e 其权值严格大于此回路上的其它各边，则 e 不在 G 的任何最小生成树中。

常见错误：考虑管梅谷的破圈算法，该边e会被删除，因此e不在最小生成树中。

错误原因：图的最小生成树不是唯一的！可能某算法给出的最小生成树不包含这条边，但其他算法给出的最小生成树会包含这条边。本题需要证明任意最小生成树都不包含这样的边！

答案： 不妨假设该回路 C 是顶点不重复的简单回路，设 $e = uv$。以下使用反证法来证明 e 不在任何最小生成树中，假设 T 是包含 e 的最小生成树。$T - \{e\}$ 必含两个连通分支，设为 $T1, T2$。$C - \{e\}$ 是图 G 中的 uv-通路，其中必有一边满足其两个端点 x,y 分别在 $T1, T2$ 中，设其为 e'。$T' = T - \{e\} + \{e'\}$，显然 T' 是生成树。因 e 的权重大于 e' 的权重，T' 的权重比 T 更小，矛盾。所以，e 不在任何最小生成树中。