第十二周习题课

第十、十一周常见错误及答案讲解

简单回顾

循环群生成元、子群 (有限、无限：个数、特点)

循环群的同构、同态 ($<\mathbb{Z},+>$、$<\mathbb{Z}_n,\oplus_n>$ 可交换)

偏序(三个性质) 偏序集$(A,\preccurlyeq)$

可比、全序、覆盖 哈斯图(省圈、箭头、简化) 上下关系

极(最)大元、上(确)界 良序

链、反链 (子集、可比) Mirsky Dilworth

偏序格(交并) 代数格(结合、交换、吸收)

格同态、格同构 对偶原理(偏序方向、上下确界)

分配格 不含同构于钻石格、五角格的子格

有界格 有界分配格补元若存在则唯一

有补格 钻石格、五角格都是有补格

简单回顾

分配有补格	3+1+(1)+1
布尔代数	结合、交换、分配、同一、补
$(B,\wedge,\vee,\bar{\ },0,1)$	(吸收率可由分配、同一推出)
有限布尔代数表示定理	非零元素唯一地表示为其下原子的并
与n元集的幂集同构	基数

H18Pro2 阿贝尔群是否一定是循环群？

反例：Klein四元群(四阶群皆是可交换群，Klein不与$< \mathbb{Z}_4, \oplus_4 >$同构)

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

H18Pro3 设G_1为循环群，f是群G_1到G_2的同态映射，证明$f(G_1)$也是循环群。

先证$f(G_1)$也是群：显然具有运算封闭性和可结合性(同态映射保证)

$f\left(e_{G_1}\right) = e_{f(G_1)}$，$f(a^{-1}) = \left(f(a)\right)^{-1}$证明见课件

设$G_1 =< a >$，$f: G_1 \to G_2$，$\forall y \in f(G_1)$，$\exists a^i \in G_1$，使得$f\left(a^i\right) = y$。

$$y = f\left(a^i\right) = f(\underbrace{aa \cdots a}_{i\text{个}}) = \underbrace{f(a)f(a) \cdots f(a)}_{i\text{个}} = f(a)^i$$

即$f(a)$是生成元，$f(G_1) =< f(a) >$。

H18Pro5 三阶群必为循环群

思路：由拉格朗日定理必有三阶元，它的生成子群(强调集合包含关系)与原来的群等势(强调数量关系，因而相等)。

H18Pro6 除单位元以外都是二阶元的群是阿贝尔群

思路：二阶元的逆就是它本身，互异元素之积$a*b$也是二阶元(否则与前半矛盾)与其逆相等。

H19Pro2 在下面偏序集中，找出两个不可比元素：$(2^{\{0,1,2\}}, \subset)$

注意：这里的$2^{\{0,1,2\}}$是$\{0,1,2\}$幂集的一种记法，不是函数的集合。
(⊂表明元素可以有包含关系)
不可比：两个元素间没有关系。
答案不唯一：{0}、{1}

H19Pro4 证明：一个有穷偏序集可以从它的覆盖关系重新构造出来。[提示：证明偏序集是它的覆盖关系的自反传递闭包]

题目定位：集合相等(元素属于集合的角度证明两个集合相互包含)
常见错误：
1.证明覆盖关系的自反传递闭包是个偏序关系(三条性质)
2.证明覆盖关系的自反传递闭包包含于偏序集(缺一半)
证明过程：
$\forall (a,b) \in (S,\preccurlyeq)$,
要么$a=b$，则(a,a) ∈它的覆盖关系自反传递闭包;
要么$a \prec b$且不存在z，$a \prec z \prec b$，则$(a,b) \in$ 它的覆盖关系;
要么$a = a_0 \prec a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_n = b$，且$(a_i, a_{i+1}) \in$ 它的覆盖关系，则$(a,b) \in$ 它的覆盖关系自反传递闭包。
所以，有穷偏序集$\subset$ 它的覆盖关系自反传递闭包。

（接上页）

$\forall(a,b) \in$覆盖关系的自反传递闭包，
要么$a=b$，则$(a,a) \in (S,\preccurlyeq)$；
要么b恰好覆盖a，$(a,b) \in (S,\preccurlyeq)$；
要么$a=a_0 \prec a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_n = b$，必然有$a=a_0 \preccurlyeq a_1 \preccurlyeq a_2 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq a_n = b$且$\preccurlyeq$具有传递性，则$(a,b) \in (S,\preccurlyeq)$。
所以，它的覆盖关系自反传递闭包$\subset$有穷偏序集。

综上，有穷偏序集是它的覆盖关系的自反传递闭包。

H19Pro9

思路：构造映射$f: a \to \{x \in A | x \preccurlyeq a\}$

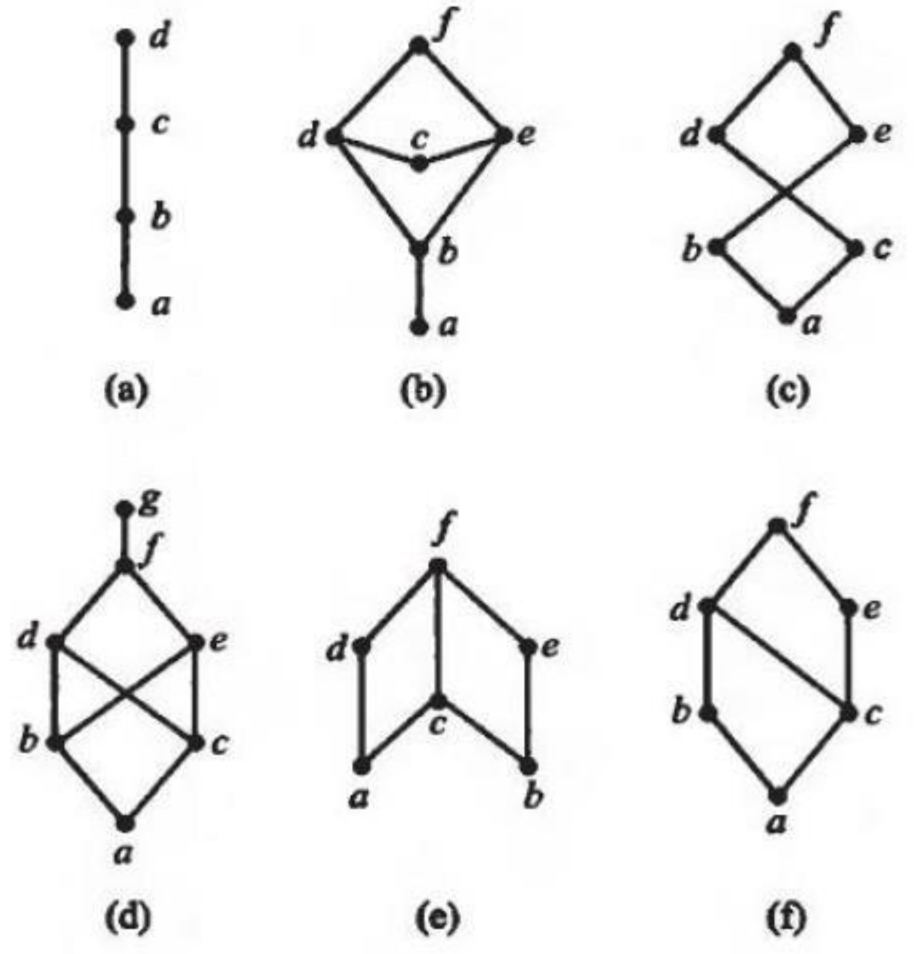
H19Pro10 证明：长度为 $mn + 1$ 的偏序集存在大小为 $m + 1$ 的链或存在大小 为 $n + 1$ 的反链.

思路：
反证法：设偏序集高为$r \le m$，且宽为$s \le n$，再运用Mirsky/Dilworth定理。

H20Pro1 判断所给哈斯图，是否是格?

H20Pro6 1中格的元素若存在补元，求补元。

H20Pro7 1中的格是否是分配格、有补格、布尔格?



Pro1 (b)、(d)、(e)不是，d、e没有最大下界

Pro6 (a) a 与 d 互为补元, 其他元素没有补元;

(c) a 与 f 互为补元, b 的补元是 c、d, c 的补元是 b 、e, d 的补元是 b 和 e, e 的补元是 c 和 d;

(f) a 与 f 互为补元, b 与 e 互为补元, c 与 d 没有补元。

Pro7 (a) 是分配格，因为任何链都是分配格. 不是有补格和 布尔格，因为 b 与 c 没有补元;

(c) 不是分配格，因为含有 5 元子格与五角格同构. 是 有补格，每个元素都有补元。不是布尔格，因为不 是 分配格;

(f) 是分配格，因为不含有与钻石格和五角格同构的子格. 不是有补格和布尔格，因为 c 与 d 没有补元。

H21Pro3　设B是布尔代数，$\forall a, b \in B$，
证明：$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \wedge b' = 0 \Leftrightarrow a' \vee b = 1$

主要工具：1. $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a = a \wedge b$　2.验证补元　(**H21Pro7**同理)

证明过程：采用转轮证法

(1)证$a \preccurlyeq b \Rightarrow a \wedge b' = 0$:

$$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a = a \wedge b \Rightarrow a \wedge b' = (a \wedge b) \wedge b' = a \wedge (b \wedge b') = a \wedge 0 = 0$$

(2)证$a \wedge b' = 0 \Rightarrow a' \vee b = 1$

$$a \wedge b' = 0 \Rightarrow (a \wedge b')' = 1 \Rightarrow a' \vee b = 1$$

(3)证$a' \vee b = 1 \Rightarrow a \preccurlyeq b$

$$a = a \wedge 1 = a \wedge (a' \vee b) = (a \wedge a') \vee (a \wedge b) = 0 \vee (a \wedge b) = a \wedge b \Leftrightarrow a \preccurlyeq b$$

H21Pro6 证明思路：数学归纳法+德摩根定律

H21Pro8 设B_1、B_2、B_3是布尔代数，证明：若$B_1 \cong B_2$，$B_2 \cong B_3$，则$B_1 \cong B_3$。

证明思路：双射+同态

由题设，存在同构映射$f: B_1 \to B_2$，$g: B_2 \to B_3$，因此$f \circ g: B_1 \to B_3$也是双射。

$\forall x, y \in B_1: f \circ g(x \wedge y) = g\big(f(x \wedge y)\big) = g\big(f(x) \wedge f(y)\big) = g\big(f(x)\big) \wedge g\big(f(y)\big)$
$= f \circ g(x) \wedge f \circ g(y)$

即$f \circ g$是B_1到B_3的同态映射，所以$B_1 \cong B_3$。