

**Problem 1.** 求下列序列的生成函数.

(1)  $0, 3, 9, 27, \dots, 3^n, \dots,$

(2)  $1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, \dots,$

(3)  $C_3^3, C_4^3, \dots, C_{n+3}^3, \dots,$

**Problem 2.** 对于下列生成函数,  $x^n$  的系数分别为:

(1)  $\frac{1+x}{(1-x)^2};$

(2)  $\frac{x^2+x}{(1-x)^3};$

(3)  $\frac{1+x}{1-x^2};$

(4)  $\frac{x}{1-x-x^2}.$

**Problem 3.** 给定系数  $a_k$  对应的生成函数为  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ , 证明系数  $b_k = \sum_{i=0}^k a_i$  对应的生成函数为  $\frac{1}{1-x}f(x)$ .

**Problem 4.** 结合第二题和第三题的结论, 证明

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**Problem 5.** 用 1 角, 2 角, 3 角的邮票可以贴出多少种不同数值的邮资?

**Problem 6.** 用 3 个 1, 2 个 2, 5 个 3 这十个数字能构成多少个能被 2 整除的四位数?

**Problem 7.** 求解递推关系:

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 4.$$

**Problem 8.** 集合  $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ , 证明: 如果从集合  $A$  中随机选择 7 个数, 那么总能找到其中的 2 个数相加为 15.

**Problem 9.** 如果有 8 种不同的课程可供选择, 每个学生必须选择 5 门课程来完成他/她的学习计划. 那么最少有多少名学生, 使得不管他们如何选择, 至少有 10 名学生的学习计划相同?

**Problem 10.** 使用鸽笼原理证明任何的有理数可以表示为一个整数加上一个有限或循环小数.