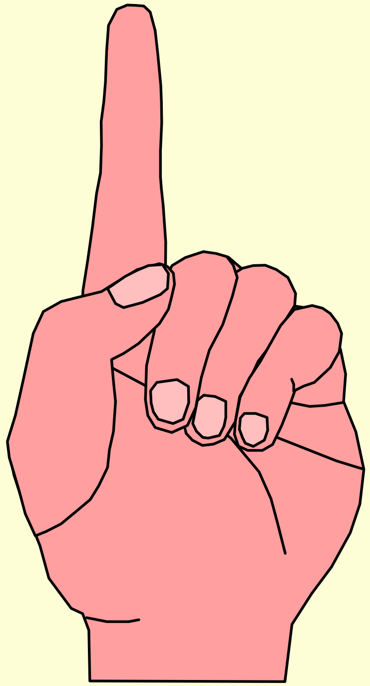
第三章 多维随机变量及其分布

- 二维随机变量的分布
- 边缘分布
- 随机变量的独立性
- 两个随机变量函数的分布



§1 二维随机变量的分布

定义

n个随机变量$X_1, X_2, \cdot\cdot\cdot, X_n$构成的n维随机向量$(X_1, X_2, \cdot\cdot\cdot, X_n)$，称为n维随机变量。

一维随机变量**X**——**R^1**上的随机点坐标。

二维随机变量**(X,Y)**——**R^2**上的随机点坐标。

n维随机变量$(X_1, X_2, \cdot\cdot\cdot, X_n)$——**$R^n$**上的随机点坐标。

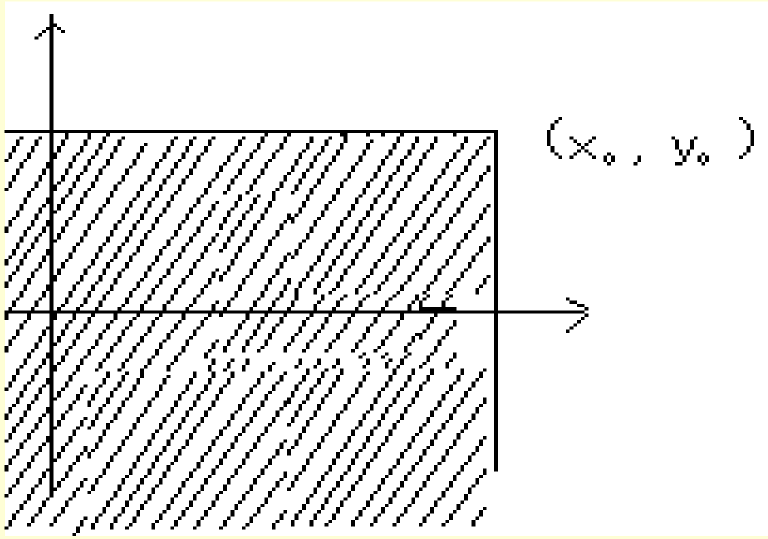
定义

设(X, Y)是二维随机变量，$(x, y)\in R^2$, 则称

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$$

为(X, Y)的分布函数，或称为X, Y的联合分布函数。

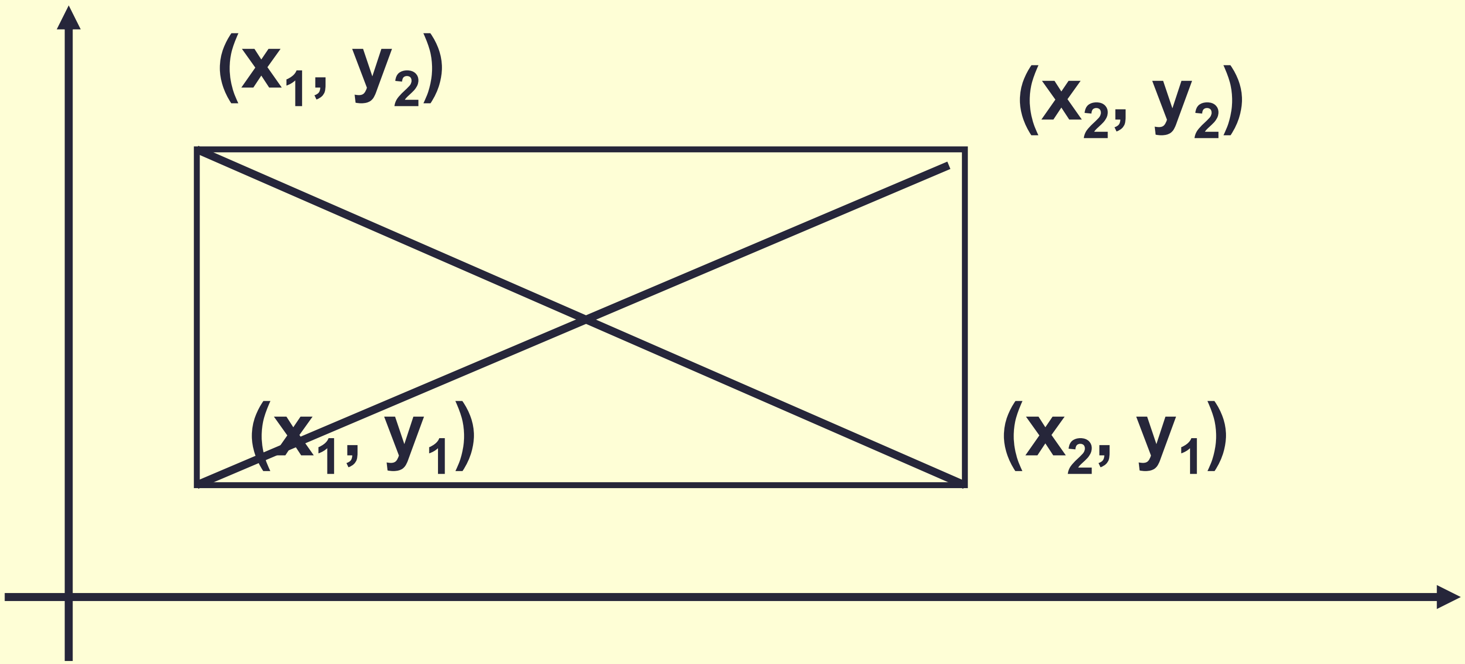
几何意义：分布函数$F(x_0,y_0)$表示随机点(X,Y)落在区域$\{(x,y)|-\infty<x<x_0, -\infty<y<y_0\}$中的概率。如图阴影部分：



对于$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R^2$, $(x_1 < x_2,\ y_1 < y_2)$,则

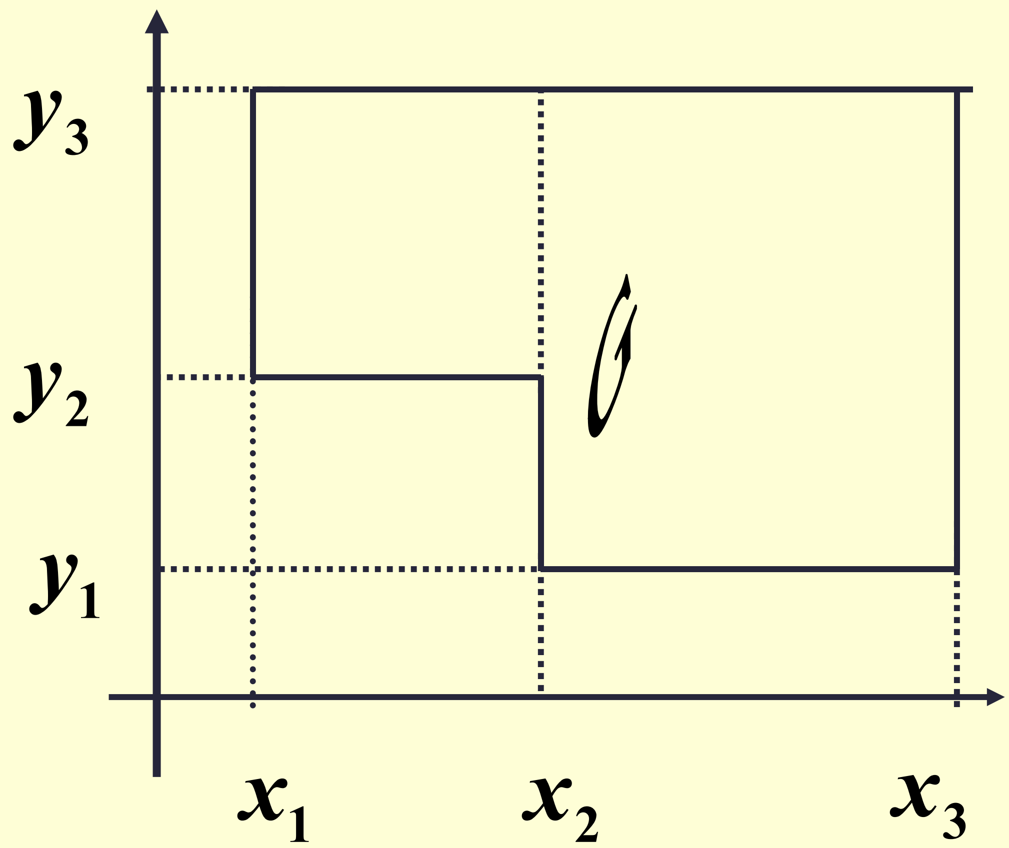
$$P\{x_1 < X \leq x_2,\ y_1 < Y \leq y_2\}$$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1).$$



EX

已知随机变量(X,Y)的分布函数F (x,y),求(X,Y)落在如图区域G内的概率.



答:

$$P\{(X,Y)\in G\}=[F(x_2,y_1)+F(x_3,y_3)-F(x_2,y_3)-F(x_3,y_1)]$$
$$+[F(x_1,y_2)+F(x_2,y_3)-F(x_1,y_3)-F(x_2,y_2)]=\cdots$$

分布函数F(x, y)具有如下性质:

(1) 归一性　对任意$(x, y) \in R^2$,　$0 \le F(x, y) \le 1$,

且

$$F(+\infty, +\infty) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = 1$$

$$F(-\infty, -\infty) = \lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x, y) = 0$$

$$F(-\infty, y) = \lim_{x \to -\infty} F(x, y) = 0$$

$$F(x, -\infty) = \lim_{y \to -\infty} F(x, y) = 0$$

(2) 单调不减性

对任意$y \in R$，当$x_1<x_2$时，

$$F(x_1, y) \le F(x_2, y);$$

对任意$x \in R$，当$y_1<y_2$时，

$$F(x, y_1) \le F(x, y_2).$$

(3) 右连续性　　对任意$x \in R$，　$y \in R$，

$$F(x, y_0+0)=\lim_{y \to y_0^+} F(x, y)=F(x, y_0).$$

$$F(x_0+0, y)=\lim_{x \to x_0^+} F(x, y)=F(x_0, y);$$

(4) 矩形不等式

对于任意$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R^2$, $(x_1 < x_2,\ y_1 < y_2)$,

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0.$$

反之，任一满足上述四个性质的二元函数F(x, y)都可以作为某个二维随机变量(X, Y)的分布函数。

例1 已知二维随机变量(X, Y)的分布函数为

$$F(x,y)=A[B+arctg(\frac{x}{2})][C+arctg(\frac{y}{3})]$$

1) 求常数A，B，C。 2) 求P{0<X≤2,0<Y≤3}

解：
$$F(+\infty,+\infty)=A[B+\frac{\pi}{2}][C+\frac{\pi}{2}]=1$$

$$F(-\infty,y)=A[B-\frac{\pi}{2}][C+arctg(\frac{y}{3})]=0$$

$$F(x,-\infty)=A[B+arctg(\frac{x}{2})][C-\frac{\pi}{2}]=0$$

$$\Rightarrow B=C=\frac{\pi}{2}\quad A=\frac{1}{\pi^2}$$

$$P\{0<X\le 2,0<Y\le 3\}=F(0,0)+F(2,3)-F(0,3)-F(2,0)=\frac{1}{16}$$

二维离散型随机变量

定义

若二维随机变量(X,Y)只能取至多可列对值 (x_i,y_j), $(i,j=1, 2, \ldots)$，则称(X,Y)为**二维离散型随机变量**。

(P54)若二维离散型随机变量(X,Y)取 (x_i,y_j) 的概率为 p_{ij}，则称 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},(i,j=1,2,\cdots)$，为二维离散型随机变量(X,Y)的分布律，或称为X,Y的联合分布律.可记为:

$$(X, Y)\sim P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij},\ (i, j=1, 2, \ldots)$$

二维离散型随机变量的分布律也可列表表示如下:

P54

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	P_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	P_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	P_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

联合分布律的性质 (1) $p_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, 2, \ldots$;

(2) $$\sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} p_{ij} = 1$$

例2 袋中有两只红球，三只白球，现不放回摸球二次，令

$$X=\begin{cases}1 & \text{第一次摸到红球}\\ 0 & \text{第一次摸到白球}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}1 & \text{第二次摸到红球}\\ 0 & \text{第二次摸到白球}\end{cases}$$

，求(X,Y)的分布律。

$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{A_2^2}{A_5^2}$$

$$P\{X=1,Y=0\}=\frac{2\times 3}{A_5^2}$$

$$P\{X=0,Y=1\}=\frac{3\times 2}{A_5^2}$$

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{A_3^2}{A_5^2}$$

X \ Y	1	0
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

二维连续型随机变量(p55)

定义

对于二维随机变量(X, Y)，若存在一个非负可积函数f (x, y)，使对∀(x, y)∈R^2，其分布函数

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv,$$

则称 (X, Y)为二维连续型随机变量，f(x,y)为(X, Y)的密度函数(概率密度)，或X与Y的联合概率密度，可记为

(X, Y)～ f (x, y)， (x, y)∈R^2

联合密度f(x, y)的性质

(1) 非负性： f (x, y)≥0, (x, y)∈R^2;

(2) 归一性： $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$$

反之，具有以上两个性质的二元函数f(x, y)，必是某个二维连续型随机变量的概率密度。

(3) 若**f (x, y)**在**(x, y)∈R²**处连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y);$$

(4) 对于任意平面区域G$\subset$ R^2,

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy.$$

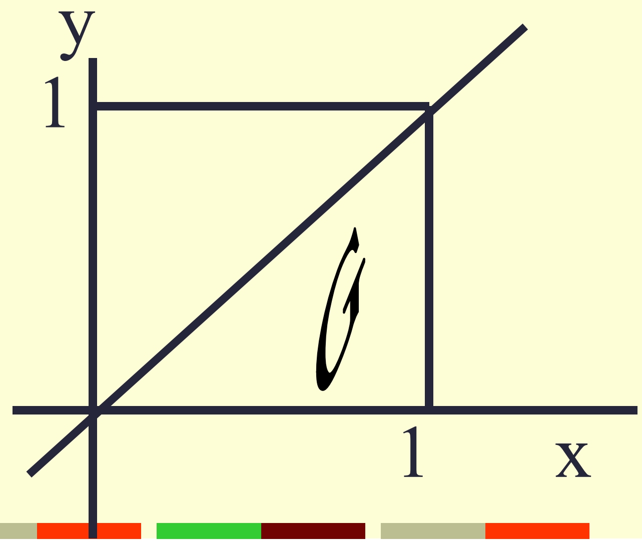
EX 设

$$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}1 & 0<x<1, 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求：P{X>Y}

$$P\{X>Y\}=\iint\limits_{x>y} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x 1\cdot dy=\frac{1}{2}$$



例3 设 $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-(2x+3y)}, x>0, y>0 \\ 0 \qquad ,其它 \end{cases}$

求：(1)常数A；(2) F(1,1)；

(3)(X,Y)落在三角形区域D:x≥0,y≥0,2x+3y≤6的概率.

解：**(1)** 由归一性

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} Ae^{-(2x+3y)}dxdy=1\Rightarrow A=6$$

(2) $$F(1,1)=\int_0^1\int_0^1 6e^{-(2x+3y)}dxdy=(1-e^{-2})(1-e^{-3})$$

(3) (X,Y)落在三角形区域D：x≥0,y≥0,2x+3y≤6

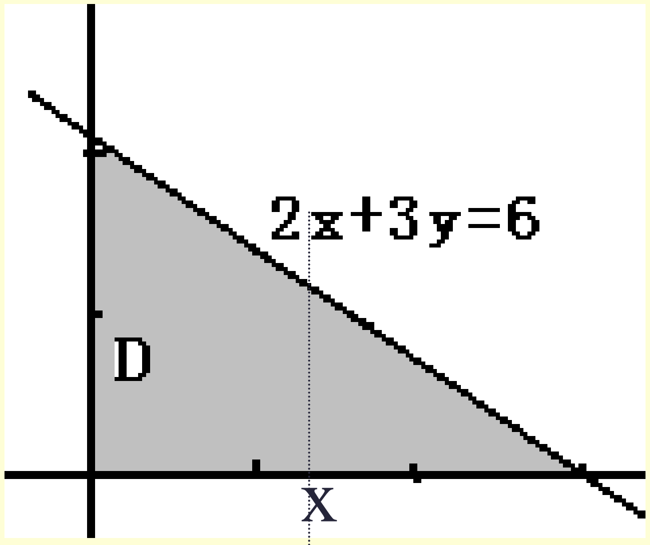
内的概率。

解：

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_{D} 6e^{-(2x+3y)}dxdy$$

$$=\int_0^3 dx\int_0^{\frac{6-2x}{3}} 6e^{-(2x+3y)}dy$$

$$=1-7e^{-6}$$



两个常用的二维连续型分布

定义

若二维随机变量(X, Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D}, & (x,y)\in D\subset R^2\\ 0, & 其它\end{cases}$$

则称(X, Y)在区域D上(内) 服从二维均匀分布。

易见，若（X，Y）在区域D上(内) 服从均匀分布，对D内任意区域G，有

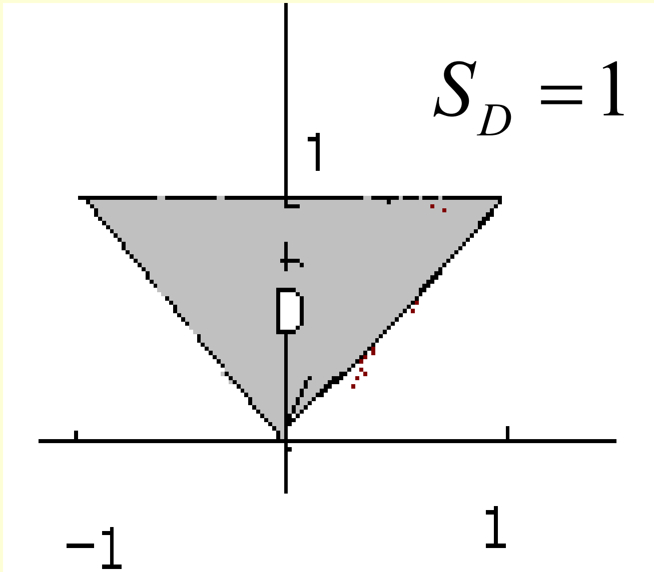
$$P\{(X,Y)\in G\}=\frac{S_G}{S_D}$$

例4. 设(X, Y)服从如图区域D上的均匀分布，

(1)求(X, Y)的概率密度；

(2)求P{Y<2X}；

(3)求F(0.5, 0.5)



解：

$$(1)\, f(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

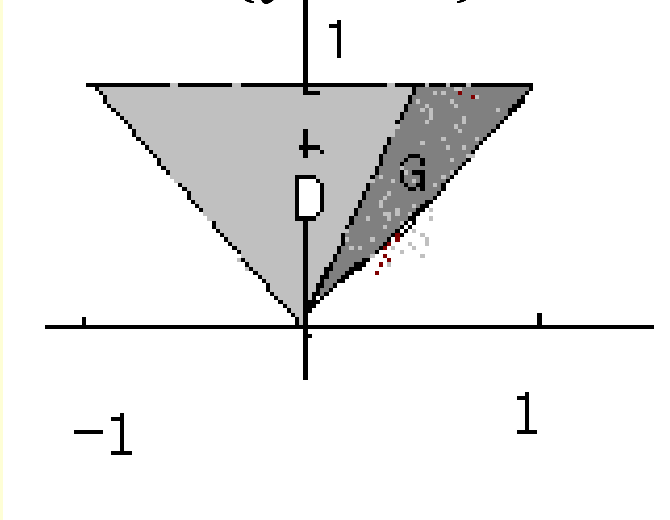
$$S_G = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$(2) P\{Y < 2X\} = {\frac{1}{4}}\Big/{1} = \frac{1}{4}$$

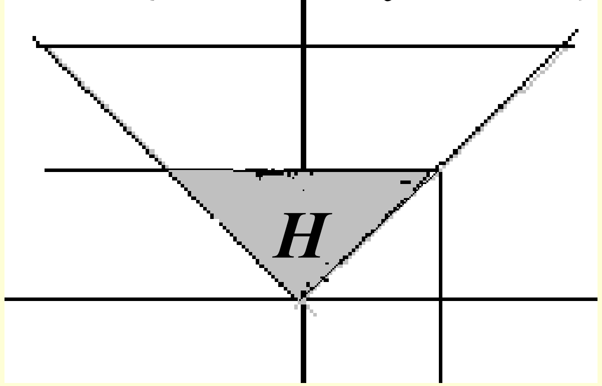
$$S_3 = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$(3) F(0.5, 0.5) = \frac{1}{4}$$

$$G = \{y < 2x\} \cap D$$



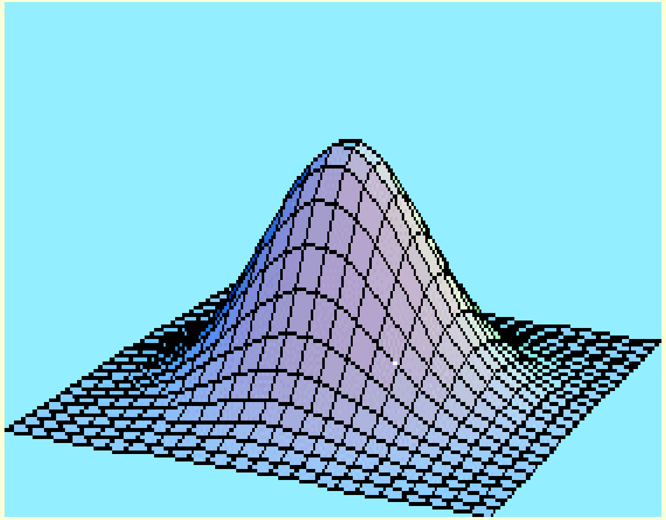
$$H = \{x \le 0.5, y \le 0.5\} \cap D$$



(2)二维正态分布

若二维随机变量(X, Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},$$



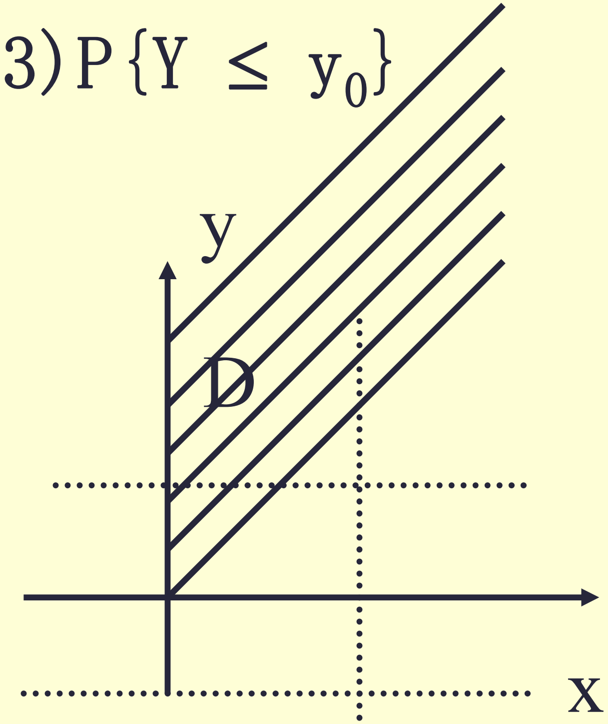
其中，μ_1、μ_2为实数，$\sigma_1>0$、$\sigma_2>0$、$|\rho|<1$，则称(X, Y) 服从参数为$\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$的二维正态分布，可记为

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

EX 随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & 0<x<y \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求：（1）P{X≤0}，(2)P{X≤1}，(3)P{Y ≤ y_0}



解：P{X≤0}=0

$$P\{X\le 1\}=\int_0^1 dx\int_x^{+\infty} e^{-y}dy = 1-e^{-1}$$

$$P\{Y\le y_0\}=\begin{cases} \int_0^{y_0} dx\int_x^{y_0} e^{-y}dy & y_0>0 \\ 0 & y_0\le 0 \end{cases}$$

§2 边缘分布

边缘分布实际上是高维随机变量的某个(某些)低维分量的分布。

一、边缘分布函数

$F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)=P\{X\le x\}$

称为二维随机变量(X, Y)关于X的边缘分布函数；

$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)=P\{Y\le y\}$ 称为二维随机变量(X, Y)关于Y的边缘分布函数.

例1. 已知(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-xe^{-y} & 0\le x\le y\\ 1-e^{-y}-ye^{-y} & 0\le y\le x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求 $F_X(x)$与$F_Y(y)$。

解：

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-e^{-x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-y}-ye^{-y} & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}$$

二、边缘分布律

若随机变量X与Y的联合分布律为

$(X, Y) \sim P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \quad i, j=1, 2, \ldots$

则称

$$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}=\sum_{j\geq 1} p_{ij}, \quad i=1, 2, \ldots$$

为(X, Y)关于X的边缘分布律；

$$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}=\sum_{i\geq 1} p_{ij}, \quad j=1, 2, \ldots$$

为(X, Y)关于Y的边缘分布律。

边缘分布律自然也满足分布律的性质。

边缘分布律的另一表示方式

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_J	$\cdots$	$p_{i\bullet}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1J}	$\cdots$	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2J}	$\cdots$	$p_{2\bullet}$
				$\vdots$		
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{iJ}	$\cdots$	$p_{i\bullet}$
				$\vdots$		
$p_{\bullet J}$	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\cdots$	$p_{\bullet J}$	$\cdots$	1

例2. 已知(X,Y)的分布律为

X\Y	1	0
1	1/10	3/10
0	3/10	3/10

求 X、Y的边缘分布律。

解：

X\Y	1	0	$p_{i.}$
1	1/10	3/10	2/5
0	3/10	3/10	3/5
$p_{.j}$	2/5	3/5	

故关于X和Y的分布律分别为：

X	1	0
P	2/5	3/5

Y	1	0
P	2/5	3/5

三、边缘密度函数

设(X, Y)～f (x, y), (x, y)∈R^2，则称

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

为(X, Y)关于X的边缘密度函数；

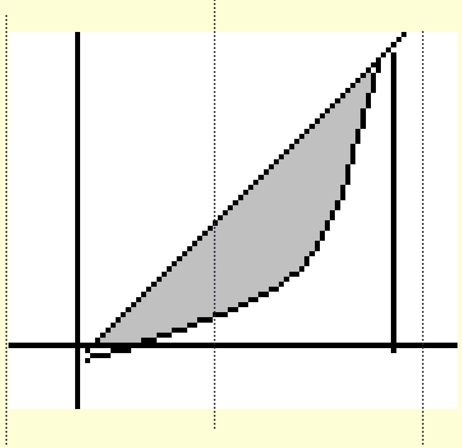
同理，称 $$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

为(X, Y)关于Y的边缘密度函数。

例3 设(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} c & x^2 \le y < x \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(1)求常数c;(2)求关于X的边缘概率密度

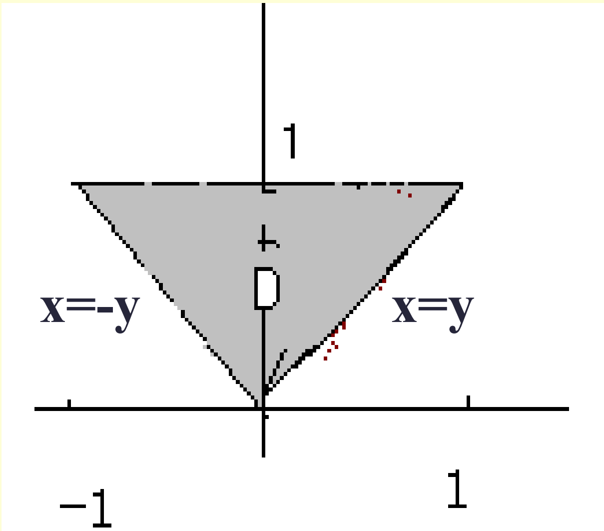


解:(1) 由归一性 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} c\,dy = 1 \Rightarrow c = 6$

(2) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\begin{cases} \int_{x^2}^{x} 6\,dy = 6(x-x^2) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x<0 \text{ 或 } x>1 \end{cases}$$

EX

设(X, Y)服从如图区域D上的均匀分布， 求关于X的和关于Y的边缘概率密度。



$$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-x}^{1}dy & -1<x<0\\ \int_{x}^{1}dy & 0\le x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-y}^{y}dx & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求二维正态随机变量(X, Y)的 $f_X(x)$与$f_Y(y)$

解:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]},$$

$$\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+(\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2-(\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2$$

$$=[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}]^2-\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$$

$$\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}$$

$$=(1-\rho^2)\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}]^2$$

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}]\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2]\cdot dy$$

令

$$t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}),dt=\frac{\mathrm{dy}}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

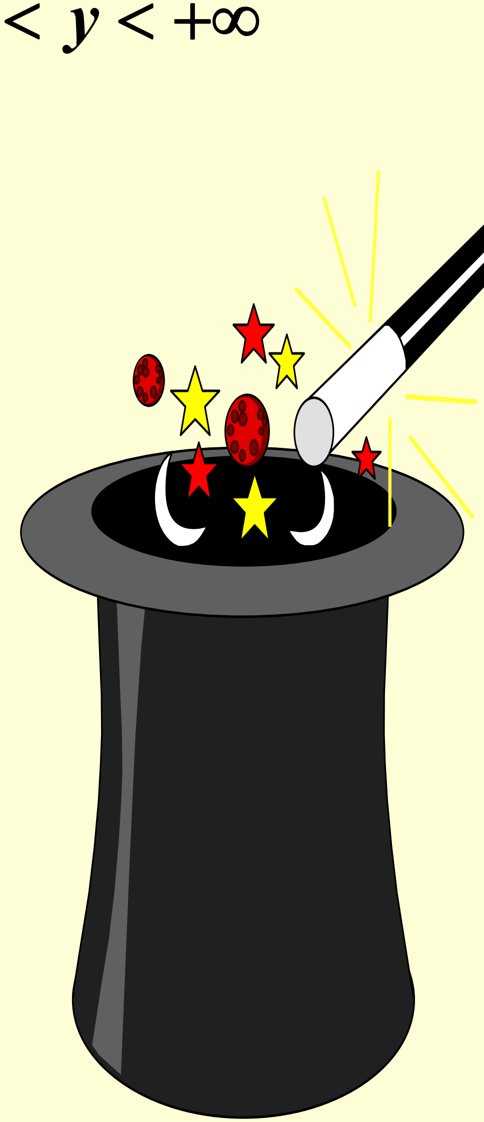
$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}]\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},-\infty<x<+\infty$$

同理

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},-\infty<y<+\infty$$

易知N(μ$_1$, μ$_2$, σ$_1^2$, σ$_2^2$, ρ)的边缘密度函数$f_X(x)$是N(μ$_1$, σ$_1^2$)的密度函数，而$f_Y(y)$是N(μ$_2$, σ$_2^2$)的密度函数，故二维正态分布的边缘分布也是正态分布。



§3 随机变量的独立性

定义

定义： 设$F(x,y)$,$F_X(x)$, $F_Y(y)$分别是（X,Y)的联合分布函数，边缘分布函数。若对于任意x, y有

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

则称随机变量X与Y相互独立。

定理　设(X,Y)是二维连续型随机变量，X与Y独立的充分必要条件是$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

定理　设(X,Y)是二维离散型随机变量，其分布律为$P_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\},i,j=1,2,\ldots$，则X与Y独立的充分必要条件是对任意i,j，$P_{ij}=P_{i\cdot}P_{\cdot j}$。

例1 已知随机变量(X,Y)的分布律为

X \ Y	1	2
0	0.15	0.15
1	a	b

且知X与Y独立，求a、b的值。

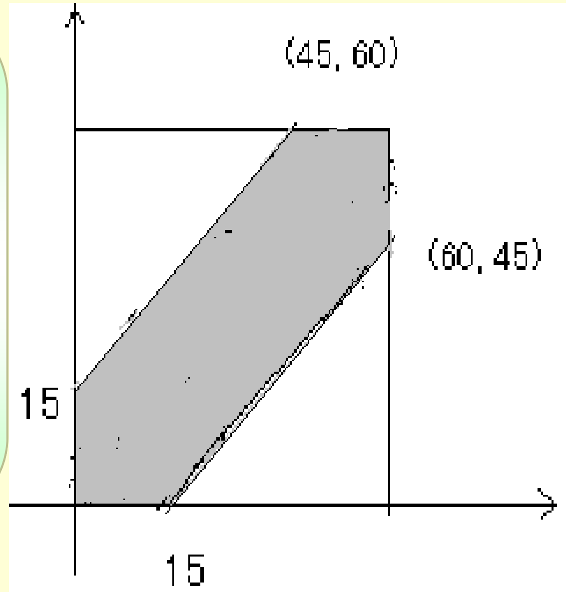
解:由归一性

$$0.15+0.15+a+b=1 \Rightarrow a+b=0.7$$

由独立性 $0.15=(a+0.15)\times 0.3$

$$\Rightarrow a=0.35, \Rightarrow b=0.35$$

例2 甲乙约定8:00~9:00在某地会面。设两人都随机地在这期间的任一时刻到达，先到者最多等待15分钟,过时不候。求两人能见面的概率。



$$P\{|X-Y|<15\}=\iint_G \frac{1}{60^2}dxdy=\frac{S_G}{60^2}$$

$$S_G=60^2-2\times\left[\frac{1}{2}\times 45^2\right]=1575$$

$$\therefore\quad P\{|X-Y|<15\}=\frac{1575}{60^2}=0.4375$$

定理：设(X,Y)~ N(μ_1, μ_2, σ_1^2, σ_2^2, ρ), 则X与Y相互独立⇔常数ρ=0.

证明:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},$$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \qquad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

⇐ 当ρ=0时

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

X与Y独立.

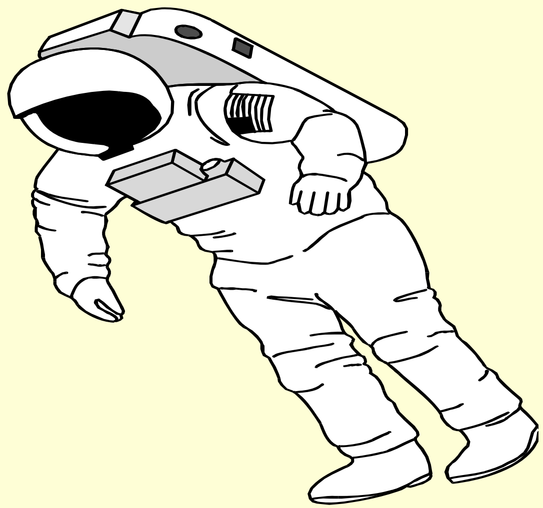
$\Rightarrow$ 当**X**与**Y**独立时, 有

$$\mathbf{f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)}$$

令 $\mathbf{x=\mu_1,\ y=\mu_2}$, 得

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}$$

$\rho=0$



n维随机变量的边缘分布与独立性

对n维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$，$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n)$$

称为n维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的分布函数，或随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$的联合分布函数。

定义 设n维随机变量$(X_1, X_2,\cdots,X_n)$的分布函数为$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$(X_1, X_2,\cdots,X_n)$的 k（$1\le k<n$)维边缘分布函数就随之确定，如关于(X_1,X_2)）的边缘分布函数为

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=F(x_1,x_2, +\infty,+\infty,\cdots,+\infty)$$

若X_k 的边缘分布函数为$F_{X_k}(x_k)$，$k=1,2,\cdots,n$,

$$F(x_1,\ldots x_n)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\ldots F_{X_n}(x_n)$$

则称$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立。

定义. 若$(X_1, X_2, ... X_n)$的全部可能取值为R^n上的有限或可列无穷多个点，称$(X_1, X_2, ..., X_n)$为n维离散型的，称

$P\{X_1=x_1, X_2=x_2, ..., X_n=x_n\}, (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$

为n维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的联合分布律。

定义. n维随机变量$(X_1, X_2, ... X_n)$，如果存在非负的n元函数$f(x_1, x_2, ... x_n)$使

$$F(x_1,\dots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\dots\int_{-\infty}^{x_n} f(u_1,\dots u_n)du_1\dots du_n$$

则称$(X_1, X_2, ... X_n)$为n维连续型随机变量，称$f(x_1, x_2, ... x_n)$为$(X_1, X_2, ... X_n)$的概率密度。

显然有，$\forall D\subset R^n$

$$P\{(X_1\dots X_n)\in D\}=\int_D\dots\int f(x_1,x_2,\dots x_n)dx_1\dots dx_n$$

对于离散型随机变量的情形，若对任意整数

$i_1, i_2, \ldots, i_n$及实数 $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ 有

$$P\{X_{i_1} = x_{i_1}, \ldots, X_{i_n} = x_{i_n}\}$$

$$= P\{X_{i_1} = x_{i_1}\} \ldots P\{X_{i_n} = x_{i_n}\}$$

则称**离散型随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立。**

设X_1，X_2，$\cdots$，X_n为n 个连续型随机变量，若对任意的$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$，

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n)$$

则称X_1，X_2，$\ldots$，X_n相互独立。

定义　设n维随机变量$(X_1, X_2,\cdots,X_n)$的分布函数为$F_X(x_1,x_2,\ldots x_n)$；m维随机变量$(Y_1, Y_2,\cdots,Y_m)$的分布函数为$F_Y(y_1,y_2,\cdots,y_m)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n, Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$组成的n+m维随机变量（$X_1, X_2,\cdots,X_n, Y_1, Y_2,\cdots,Y_m$)的分布函数为$F(x_1,x_2,\cdots,x_n, y_1, y_2,\cdots,y_m)$.

如果

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n, y_1,y_2,\cdots,y_m)= F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$F_Y(y_1,y_2,\cdots,y_m)$$

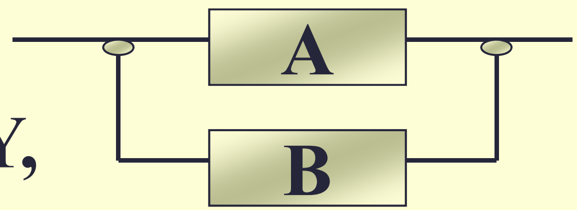
则称n维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$与m维随机变量$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)$独立。

定理 设$(X_1,X_2,\cdots, X_n)$与$(Y_1, Y_2,\cdots,Y_m)$相互独立，则X_i $(i=1, 2, \cdots, n)$与Y_j $(j=1, 2, \cdots, m)$相互独立；又若h, g是连续函数，则

$h(X_1,X_2, \cdots, X_n)$与$g(Y_1, Y_2,\cdots, Y_m)$相互独立.

$\mathcal{EX}$

一系统包括两个元件, 联结方式为“备用”, 即元件**A**失效后,元件**B**立刻投入运行. 设两个元件的寿命相互独立,且均服从参数为**1** 的指数分布, 求系统寿命大于**1**的概率.



解: 设元件**A**寿命为**X**,元件**B**寿命为**Y**,

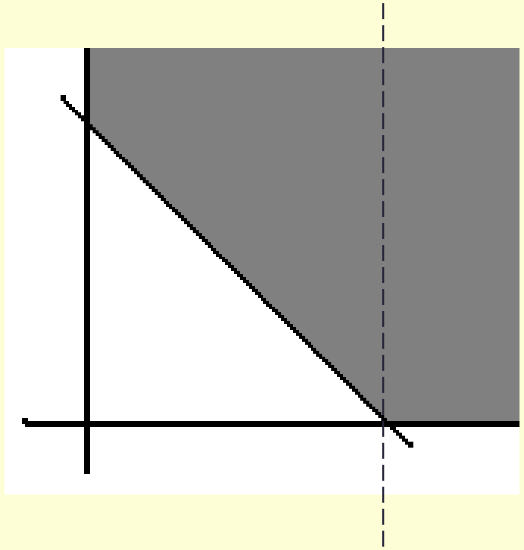
则系统寿命为**X+Y**. 由

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0,y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$P\{X+Y>1\} = \iint_{x+y>1} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\infty} e^{-(x+y)}dy + \int_1^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-(x+y)}dy$$

$$= e^{-1} + e^{-1} \approx 0.736$$



§4 两个随机变量函数的分布

一、二维离散型随机变量函数的分布律

例1 设二维随机变量(X,Y)的分布律为

X \ Y	1	2	3
1	p_{11}	p_{12}	p_{13}
2	p_{21}	p_{22}	p_{23}

求Z=X+Y的分布律.

解: Z=X+Y的全部可能取值为(2,3,4,5),其分布律为

Z	2	3	4	5
p_Z	p_{11}	$(p_{12}+p_{21})$	$(p_{13}+p_{22})$	p_{23}

一般地,设二维离散型随机变量（X，Y），

$$(X, Y) \sim P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}，\quad i, j=1, 2, \ldots$$

则 $Z=g(X, Y) \sim P\{Z=z_k\}=\sum\limits_{i,j:g(x_i,y_j)=z_k} p_{ij} = p_k$，

$k=1, 2, \ldots$

或

(X,Y)	(x_1,y_1)	(x_1,y_2)	$\ldots$	(x_i,y_j)	$\ldots$
p_{ij}	p_{11}	p_{12}		p_{ij}	
$Z=g(X,Y)$	$g(x_1,y_1)$	$g(x_1,y_2)$		$g(x_i,y_j)$	

EX 设随机变量X与Y独立，且均服从0-1分布，其分布律均为

X	0	1
P	q	p

(1) 求$W = X + Y$的分布律；

(2) 求$V = \max(X, Y)$的分布律；

(3) 求$U = \min(X, Y)$的分布律。

(4) 求w与V的联合分布律。

(X,Y)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
p_{ij}	q^2	pq	pq	p^2
$W = X + Y$	0	1	1	2
$V = \max(X, Y)$	0	1	1	1
$U = \min(X, Y)$	0	0	0	1

V \ W	0	1	2
0	q^2	0	0
1	0	$2pq$	p^2

二、多个连续型随机变量函数的密度函数

1、一般的方法：分布函数法

若$(X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, $Y=g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$,

则可先求Y的分布函数:

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X_1,\ldots,X_n) \le y\}$$

$$= \int \cdots \int_{g(x_1,\ldots,x_n) \le y} f(x_1,\ldots,x_n)dx_1 \ldots dx_n;$$

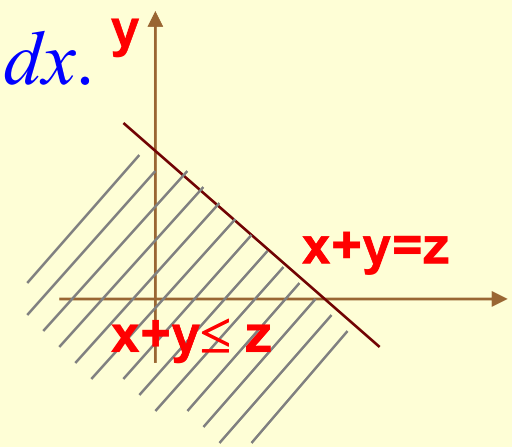
然后再求出Y的密度函数:

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}.$$

2、几个常用函数的密度函数
(1)和的分布

已知(X, Y)～f(x, y)，(x, y)∈R^2，求Z＝X＋Y的密度。

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y)dy \overset{或}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)dx.$$



若X与Y相互独立，则Z＝X＋Y的密度函数

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy \overset{或}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx.$$

例2. 设随机变量X与Y独立且均服从标准正态分布，求：Z=X+Y的密度函数。

解:由题意，随机变量**X**与**Y**的概率密度分别为:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\qquad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

随机变量**Z= X+Y**的概率密度为:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+z^2-2xz+x^2)}dx=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}.$$

所以**Z=X+Y**服从**N（0，2）**分布.

一般地，设随机变量X_1, X_2，…, X_n独立且X_i服从正态分布$N(\mu_i ,\sigma_i^2)$, $i=1,\ldots,n$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

例3.卡车装运水泥,设每袋水泥的重量X(kg)服从N(50,2.5²)分布,该卡车的额定载重量为2000kg,问最多装多少袋水泥,可使卡车超载的概率不超过0.05.

解：设卡车装n袋水泥，X_i为第i袋水泥的重量．则

$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(50n,\ 2.5^2 n)$ 由题意，令 $P\{\sum_{i=1}^{n} X_i > 2000\} \le 0.05$

$$\Leftrightarrow P\{\sum_{i=1}^{n} X_i > 2000\} = 1 - \Phi(\frac{2000-50n}{2.5\sqrt{n}}) \le 0.05$$

$$\Phi(\frac{2000-50n}{2.5\sqrt{n}}) \ge 0.95 \quad \text{查表得} \quad \frac{2000-50n}{2.5\sqrt{n}} \ge 1.645 \Rightarrow n \le 39$$

（2）极大(小)值的分布

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立，其分布函数分别为$F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_n(x_n)$，记

$$M = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\},$$

$$N = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

则，M和N的分布函数分别为：

$$F_M(z) = F_1(z) \ldots F_n(z)$$

$$F_N(z) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_i(z)].$$

特别，当$X_1, X_2, \ldots, X_n$独立同分布(分布函数相同)时，则有

$$F_M(z)=[F(z)]^n;$$

$$F_N(z)=1-[1-F(z)]^n.$$

进一步地，若$X_1, X_2, \ldots, X_n$独立且具相同的密度函数$f(x)$，则M和N的密度函数分别由以下二式表出

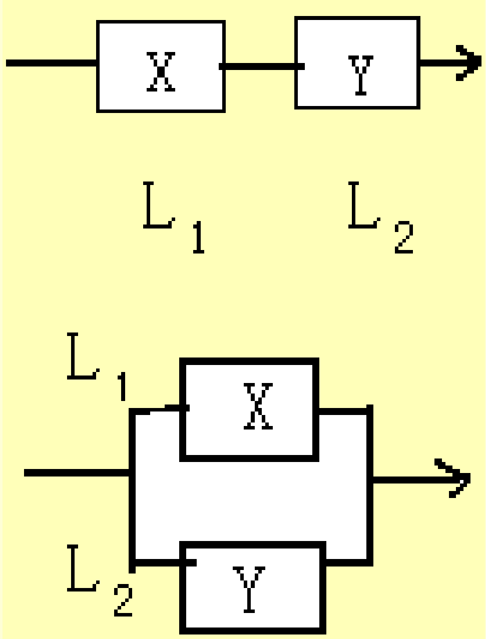
$$f_M(z)=n[F(z)]^{n-1}f(z);$$

$$f_N(z)=n[1-F(z)]^{n-1}f(z).$$

例4 设系统L由两个相互独立的子系统联结而成，联结的方式分别为(i)串联，(ii)并联，如图所示设L_1，L_2的寿命分别为X与Y，已知它们的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$



其中α>0，β>0, 试分别就以上两种联结方式写出L的寿命Z的概率密度.

解：(i) 串联的情况: $Z = \min(X, Y)$

$$F_Z(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$$

而 $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$ $F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta y} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$

$$\therefore F_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha+\beta)z} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

(ii) 并联的情况: $Z = \max(X, Y)$

$$F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z)$$

而 $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$ $F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta y} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$

$$\therefore F_Z(z) = \begin{cases} (1 - e^{-\alpha z})(1 - e^{-\beta z}) & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

小结

- 多维随机变量
  - 离散型——分布律
归一性
概率计算
    - 边缘分布律
  - 分布函数
归一性
概率计算
    - 边缘分布函数
      - 独立性
  - 连续型——概率密度
归一性
概率计算
分布函数与概率密度的互变
    - 边缘概率密度
    - 均匀分布
正态分布
- 二维随机变量函数的分布

习题课

1. (X, Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases} a(1-e^{-2x})(1-e^{-y}) & x>0, y>0 \\ b & 其它 \end{cases}$$

求:

(1) 参数a, b

(2) $P\{X>1, Y<1\}$; $P\{X>1\}$; $P\{Y<1\}$

(3) X与Y的联合概率密度.

2. 随机变量X与Y的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3y & 0<x<y,0<y<1\\ 0 & others\end{cases}$$

(1)求 $P\{X+Y>1\}$; $P\{X>\frac{1}{2}\}$; $P\{Y>\frac{1}{2}\}$

(2)判断X与Y是否独立.

2009(数学三) 袋中有1个红球、2个黑球与3个白球。现有放回地从袋中取两次，每次取一个球。以X,Y,Z分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数。

(1)求 $P\{X=1 \mid Z=0\}$;

(2)求二维随机变量(X,Y)的概率分布

解 (1)

$$P\{X=1 \mid Z=0\}=\frac{P\{X=1, Z=0\}}{P\{Z=0\}}$$

$$=\frac{2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}}=\frac{4}{9}$$

(2) 由题意X与Y的所有可能取值均为0，1，2.

(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{1}{3}$$

$$P\{X=0,Y=2\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

$$P\{X=1,Y=0\}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{1}{6}$$

$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{1}{9}$$

$$P\{X=2,Y=0\}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$