

# 离散数学-第六次作业

## Problem 1

判断下面定义的几个  $f(n)$  是否是从  $\mathbf{Z}$  到  $\mathbf{R}$  的函数。

a)  $f(n) = \pm n$

b)  $f(n) = \sqrt{n^2 + 1}$

c)  $f(n) = 1/(n^2 - 4)$

## Problem 2

判断下列各函数是否是从  $\mathbf{R}$  到  $\mathbf{R}$  的双射函数。

a)  $f(x) = -3x + 4$

b)  $f(x) = -3x^2 + 7$

c)  $f(x) = (x + 1)/(x + 2)$

d)  $f(x) = x^5 + 1$

## Problem 3

Let  $f$  be a function from the set  $A$  to the set  $B$ . Let  $S$  be a subset of  $B$ . We define the inverse image of  $S$  to be the subset of  $A$  whose elements are precisely all pre-images of all elements of  $S$ . We denote the inverse image of  $S$  by  $f^{-1}(S)$ , so  $f^{-1}(S) = \{a \in A | f(a) \in S\}$ . 令  $f$  为从  $\mathbf{R}$  到  $\mathbf{R}$  的函数  $f(x) = x^2$ 。求

a)  $f^{-1}(\{1\})$

b)  $f^{-1}(\{x | 0 < x < 1\})$

c)  $f^{-1}(\{x | x > 4\})$

## Problem 4

证明从  $\mathbf{R}$  到  $\mathbf{R}$  的函数  $f(x) = ax + b$  是可逆的, 其中  $a$  和  $b$  为常数且  $a \neq 0$ , 并找出  $f$  的反函数。

## Problem 5

判断下列情况下  $f: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  是否是满射的?

a)  $f(m, n) = 2m - n$

b)  $f(m, n) = m^2 - n^2$

c)  $f(m, n) = m^2 - 4$

d)  $f(m, n) = |m| - |n|$

e)  $f(m, n) = m + n + 1$

## Problem 6

假定  $f$  是从  $X$  到  $Y$  的函数,  $g$  是从  $Y$  到  $X$  的函数。证明  $f \circ g = I_Y$ ,  $g \circ f = I_X$  与  $f^{-1} = g$ ,  $g^{-1} = f$  等价。其中  $I_X$  和  $I_Y$  分别是  $X$  和  $Y$  上的恒等函数。

## Problem 7

设  $f$  是一个从集合  $A$  到集合  $B$  的函数, 其中集合  $A$  和集合  $B$  是有限集, 且  $|A| = |B|$ 。证明  $f$  是单射当且仅当它是满射。[提示:  $|A| \geq |f(A)|$ ]

## Problem 8

令  $f$  是一个从集合  $A$  到集合  $B$  的函数。令  $S$  和  $T$  为  $A$  的子集。证明

a)  $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$

b)  $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$