第十周习题课

第九周常见错误及答案讲解

简单回顾

代数系统->半群-> 独异点-> 群

子群的两个实用的判定方法:

1.非空集合+$(\forall a, b \in H)(ab^{-1} \in H)$

2.有限集合+$(\forall a, b \in H)(ab \in H)$

元素的阶

陪集与等价关系

拉格朗日定理:

子群的阶整除群的阶

元素的阶整除群的阶

H16Pro5 设G为群，$a,b,c \in G$，证明：$|abc| = |bca| = |cab|$

思路：$|ab| = |ba|$

设$|abc| = r, |bca| = s, |cad| = t$，则$(abc)^{s+1} = a(bca)^s bc = abc$，得$(abc)^s = e$，因此$r|s$。同理可得$s|t$，$t|s$。
综上，$s = t$，$t = r$，$|abc| = |bca| = |cab|$得证。

H16Pro8 设G是一个群，证明：$\forall a, b \in G, (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$
回顾逆元定义：$xy = yx = e$
易错：只证明一半

H16Pro10 设G是一个有限群，证明：G中使得$x^3=e$的元素x的个数是奇数。

常用结论：非一阶、二阶元与它的逆不相等。“成对出现”

令 $S=\{x\in G|x^3=e\}$。由于 G 是有限群，所以 S 是有限集。
又因为 $e^3=e$，所以 $e\in S$，从而 S 不是空集。
如果另有 $x\neq e$，使得 $x^3=e$，则 $(x^{-1})^3=e$。
因为 $x\neq e$，所以 $x^{-1}\neq x$。这说明 S 中的非单位元（如果有的话）总是成对出现。
又因为 $e^3=e$，所以 G 中使得 $x^3=e$ 的元素 x 的个数是奇数

H17Pro4 设H和K分别为群G的r，s阶子群，若r和s互素，证明$H \cap K = \{e\}$

证明:
显然$H \cap K$是H的子群，也是K的子群。
由Lagrange定理可知，子群的阶是群的阶的因子。
因此$|H \cap K| \mid r$，$|H \cap K| \mid s$，所以$|H \cap K| \mid \gcd(r, s)$。
而$\gcd(r, s) = 1$，因此，$H \cap K = 1$，得$H \cap K = \{e\}$

H17Pro5 证明：若G中只有一个2阶元，则这个二阶元一定与G中所有元素可交换。

证明:
设2阶元为a，任取G中元素x，
易证xax^{-1}也是2阶元，因为$(xax^{-1})(xax^{-1}) = xa^2x^{-1} = xex^{-1} = e$。
因此$|xax^{-1}| = 2$或1 。
如果$|xax^{-1}| = 1$，那么$xax^{-1} = e$，从而得到$xa = x$，根据消去律得$a = e$，与a是2阶元矛盾。
由已知，只有一个2阶元，必有$a = xax^{-1}$，从而得到$ax = xa$。

思考题：证明质数阶群均为阿贝尔群。

设有限群$< G,* >$，且为$|G| = p$质数。
对任意$a \in G$，令$< a > = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$，易见$\ll a >,* > \leq < G,* >$ 。
由拉格朗日定理，$| < a > |$为p的因子。
由于p为质数，故$\exists a \in G, a \neq e, | < a > | = p$，
即$\exists a \in G (G = < a >)$，即$< G,* >$为有限循环群。
因为n阶有限循环群皆同构于模n剩余加群，后者为阿贝尔群，故结论成立。