离散数学-第 20 次作业

Problem 1

图 1 给出了 6 个偏序集的哈斯图。判断其中哪些是格。如果不是格，请说明理由。

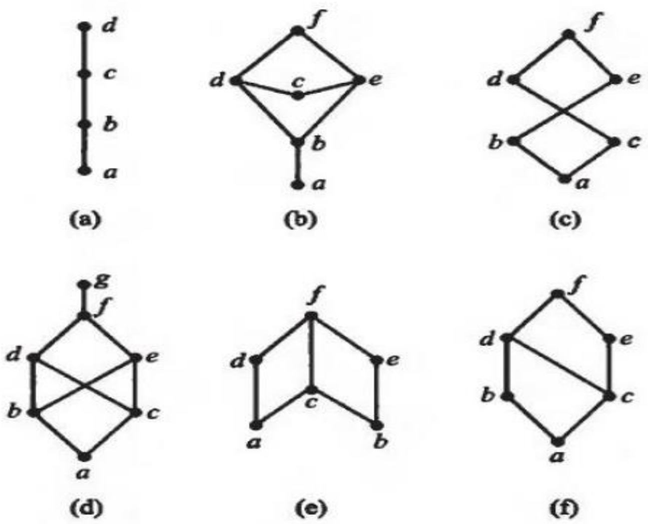


图 1: 图 1

Problem 2

设 L 是格，求以下公式的对偶式：

(1) $a \wedge (a \vee b) \preceq a$;

(2) $a \vee (b \wedge c) \preceq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;

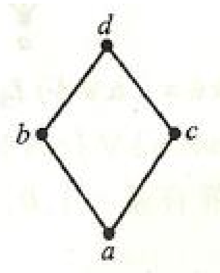
(3) $b \vee (c \wedge a) \preceq (b \vee c) \wedge a$.

Problem 3

设 L 是格，$a, b, c \in L$, 且 $a \preceq b \preceq c$, 证明 $a \vee b = b \wedge c$.

Problem 4

针对下图中的格 L, 求出 L 的所有子格。



Problem 5

设 $< L, \preceq >$ 是格，任取 $a \in L$，令 $S = \{x | x \in L \wedge x \preceq a\}$, 证明 $< S, \preceq >$ 是 L 的子格。

Problem 6

针对 **Problem 1** 中的每个格，如果格中的元素存在补元，则求出这些补元。

Problem 7

说明 **Problem 1** 中的每个格是否为分配格、有补格和布尔格，并说明理由。

Problem 8

设 $< L, \wedge, \vee, 0, 1 >$ 是有界格，证明 $\forall a \in L$，有

$$a \wedge 0 = 0, a \vee 0 = a, a \wedge 1 = a, a \vee 1 = 1$$

Problem 9

如果 S 是群 G 的子集，则 S 所生成的子群 $\langle S \rangle$ 是包含所有 S 的元素的 G 的最小子群。这意味着它是包含 S 元素的所有子群的交集。等价的说 $\langle S \rangle$ 是可以用 S 的元素和它们的逆元中的有限多个元素的乘积表达的 G 的所有元素的子群。设 G 是一个群,$L(G)$ 是 G 的所有子群的集合。在 $L(G)$ 上定义偏序关系

$\leq$ 为集合包含关系 $\subseteq$。对于任意的 $A, B \in L(G)$, 定义 $A \wedge B \overset{\text{def}}{=} \langle A \cap B \rangle$，$A \vee B \overset{\text{def}}{=} \langle A \cup B \rangle$，试证明：$\langle L(G), \vee, \wedge \rangle$ 是一个代数格，$\langle L(G), \leq \rangle$ 是一个偏序格，且二者同一。