第八周习题课

第七周常见错误及答案讲解

简单回顾

- 有序对 $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$
- 二元关系与笛卡尔积 有序对的集合
- 关系与函数 $(\forall x \in Dom(F) \rightarrow (\exists!\, y)(xFy))$
- 关系的运算 逆与复合

简单回顾

- 关系的性质　　(反)自反性、((强)反)对称性、传递性、∅
- 关系的矩阵
- 等价关系　　自反、对称、传递
- 关系闭包　　包含、性质P、最小　　构造

H14Pro3c：设 R_1 和 R_2 是集合A上的关系，其矩阵表示为 $\mathrm{M}_{\mathrm{R}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，求 $R_2 \circ R_1$.

要点：

1.关系矩阵中同一行表示有序对的第一元素相同，同一列表示第二元素相同。

2.关系的复合 $R \circ S = \left\{(x,y) \middle| (\exists t \in B)\big((x,t) \in S \wedge (t,y) \in R\big)\right\}$。

3.逻辑运算而不是算术运算。

$$R_2 \circ R_1 = \mathrm{M}_{\mathrm{R}_1} \times M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

H14Pro7：n 元集合上有多少个关系是：a)对称的？b)反对称的？ c)非对称的？ d)反自反的？ e)自反的和对称的？ f)既不是自反的也不是反自反的？

要点：

关系是有序对的集合，限制条件怎样包含有序对？怎样选取不同的有序对？

a) 若$(x,y)\in R$，则$(y,x)\in R$。不同元素组成的有序对(x,y)、(y,x)必然成对出现，相同元素组成的有序对(x,x)可以出现。前者有C(n,2)种组合，后者有n种组合，共$\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2}$种组合，每个组合取或不取构成一个集合(关系)。共$2^{\frac{n(n+1)}{2}}$个关系符合条件。

b)不同元素组成的有序对(x,y)、(y,x)不能成对出现，所以每种组合可以只取(x,y)，只取(y,x)，或者都不取，共三种取法。相同元素组成的有序对(x,x)可以出现。分两步取，共$2^{n}\cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$种。

c)非对称的?

按强反对称性理解(教材方式),

不同元素组成的有序对(x,y)、(y,x)不能成对出现，所以每种组合可以只取(x,y)，只取(y,x)，或者都不取，共三种取法。相同元素组成的有序对都不能出现，所以共计$3^{\frac{n(n-1)}{2}}$种。

按不是对称的理解(课件方式),

n^2个有序对可以组成2^{n^2}种不同关系，除去对称的关系，共计$2^{n^2}-2^{\frac{n(n+1)}{2}}$种。

d)反自反的：相同元素组成的有序对(x,x)不能出现，其余无限制。不同元素组成的有序对共有P(n,2)种，每种有序对取或不取构成一种关系。共计$2^{\mathrm{n(n-1)}}$种。

e)自反的和对称的，不同元素组成的有序对必须成对出现，且一旦不同元素组成的有序对选定了，由于自反性的要求，由相同元素组成的有序对也就选定了，因此只考虑C(n,2)个不同元素组成有序对的选法，共计$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$种。

f)既不是自反的也不是反自反的：相同元素组成的有序对至少出现一次但不全出现，共计 2^n-2 种。其余无限制，不同元素组成的有序对共有P(n,2)种，每种有序对取或不取构成一种关系。共计$2^{\mathrm{n(n-1)}}$种。分步计数，共计$(2^n-2)\cdot 2^{n(n-1)}=2^{n^2}-2^{n^2-n+1}$种。

H14Pro8b：证明一个关系的对称闭包的传递闭包一定包含这个关系的传递闭包的对称闭包.

要点：

证明集合的**包含**关系

假设(a,b)属于R的传递闭包的对称闭包.那么我们要证明(a,b)属于R的 对称闭包的传递闭包. 因为我们知道(a,b)和(b,a)至少有一个属于R的传递闭包, 因此在R中存在一条a与b之间的路径. 因此我们可以在R的对称闭包中构造一条从a到b的路径, 这就证明了我们的结论.

错误：

1.不从元素属于集合角度证明，直接说各个集合的属于关系.

2.通过构造闭包进行比较时，需要证明构造公式是成立的，所以还是从定义证明更好。

H14Pro10：判断并说明理由：当我们构造一个关系的传递闭包的自反闭包的对称闭包时，一定能得到一个等价关系吗?

要点：

1.由于元素不会发生变化，所以无论何时构造自反闭包，最终的关系都一定具有自反性。

2.最后构造的闭包所具有的性质一定满足。

因此只需验证传递性。不难找到反例: