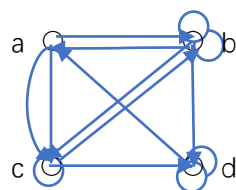


### Problem 1

$[1\ 0\ 2\ 1]$   
 $[0\ 1\ 1\ 2]$   
 $[2\ 1\ 1\ 0]$   
 $[1\ 2\ 0\ 0]$



### Problem 2

1) a)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$        $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$        $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$        $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$        $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2) D 为对角矩阵, 其中对角线上第  $i$  行  $i$  列的元素  $D(i, i)$  为顶点  $i$  的度数

$C = BB^T$  对角线元素  $C(i, i)$  为顶点  $i$  度数, 其他元素  $C(i, j)$  为  $i, j$  邻接关系

$D = C - A$  将所有  $C(i, j)$  ( $i \neq j$ ) 转化为 0, 剩余对角线元素  $C(i, i)$  为顶点  $i$  度数

### Problem 3

存在双射  $f: V_1 \rightarrow V_2, g: E_1 \rightarrow E_2$

$a   b d e$	$A   C F G$	$f(a) = F$	$g(ab) = AF$	$g(ae) = FH$
$b   a c f$	$B   D E H$	$f(b) = A$	$g(bc) = AG$	$g(bf) = AC$
$c   b d g$	$C   A E H$	$f(c) = G$	$g(cd) = DG$	$g(cg) = EG$
$d   a c h$	$D   B F G$	$f(d) = D$	$g(ad) = DF$	$g(dh) = BD$
$e   a f h$	$E   B C G$	$f(e) = H$	$g(ef) = CH$	
$f   b e g$	$F   A D H$	$f(f) = C$	$g(fg) = CE$	
$g   c f h$	$G   A D E$	$f(g) = E$	$g(gh) = BE$	
$h   d e g$	$H   B C F$	$f(h) = B$	$g(eh) = BH$	

$\forall e \in E_1, \varphi(e) = \{u, v\}$  当且仅当  $g(e) \in E_2, \varphi(g(e)) = \{f(u), f(v)\}$ , [左图]和[右图的补图]同构

### Problem 4

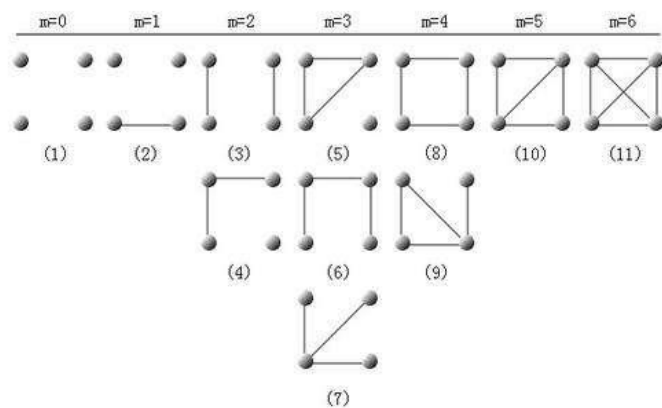
具有 4 个顶点的非同构简单图共有 11 个, 如图

1) 包含  $C_3$  的有 (5), (8), (9), (10), (11), 共 5 个

2) 无孤立点的有 (3), (6), (7), (8), (9), (10), (11), 共 7 个

3) 无向图是二部图的充要条件是至少有两个顶点, 且所有回路的长度均为偶数

则 (1), (2), (3), (4), (6), (7), (8) 都是二部图, 共 7 个

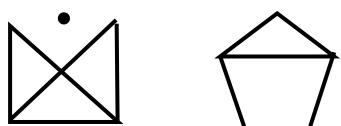


### Problem 5

设  $G$  的顶点数为  $n$ , 简单图  $G$  和  $G^c$  的和是  $n$  阶完全图, 又  $G$  和  $G^c$  同构, 则  $n$  阶完全图的边数  $n(n-1)/2$  是  $G$  的边数的两倍,  $n(n-1)$  是 4 的倍数  
又  $G$  是正则图,  $G$  的边数是  $n$  的倍数, 设边数为  $kn(k \in \mathbb{N})$ ,  
有  $2kn = n(n-1)/2$ ,  $n-1=4k$ ,  $(n-1) \equiv 0 \pmod{4}$ , 即  $n \equiv 1 \pmod{4}$

### Problem 6

1)



2)

