§5 随机变量函数的分布

一、离散型随机变量函数的分布律

设X为一个随机变量，分布律为

$$X \sim P\{X=x_k\}=p_k, \quad k=1, 2, \ldots$$

若$y=g(x)$是单值实函数，求$Y=g(X)$的分布律.

例1 已知

X	-1	0	1
P_k	$1/3$	$1/3$	$1/3$

求：$Y=X^2$的分布律

Y	1	0
P_k	$2/3$	$1/3$

一般地

X	x_1	$x_2 \cdots$	$x_k \cdots$
P_k	p_1	$p_2 \cdots$	$p_k \cdots$
Y=g(X)	$g(x_1)$	$g(x_2)\cdots$	$g(x_k)\cdots$

或

$Y = g(X) \sim P\{Y = g(x_k)\} = p_k$， $k = 1, 2, \cdots$

（其中**$g(x_k)$**有相同的，其对应概率合并。）

二、连续型随机变量函数的密度函数

1、一般方法

若X~f(x),-∞<x<+∞, Y=g(X)为随机变量X的函数，则可先求Y的分布函数

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\} = \int_{g(x)\le y} f(x)\,dx$$

再求Y的密度函数

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

此法也叫“分布函数法”

例2 设X~U(-1, 1)，求Y=X²的概率密度。

解：

$$\because \quad f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -1<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$\therefore \quad F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$$

当y<0时，$F_Y(y)=0$; 当0≤y<1时，$F_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}dx=\sqrt{y}$

当y≥1时，$F_Y(y)=1$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}} & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

例3 设X的概率密度为$f_X(x)$,$y=g(x)$关于x处处可导且是x的严格单调减函数，求$Y=g(X)$的概率密度。

解：Y的分布函数为：

$$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{g(X)\leq y\}$$

$$=P\{X\geq g^{-1}(y)\}=1-F_X(g^{-1}(y))$$

$\therefore$Y的概率密度为：

$$f_Y(y)=-F_X'(g^{-1}(y))=-f_X(g^{-1}(y))\frac{d}{dy}g^{-1}(y)$$

2、公式法：一般地

若$X\sim f_X(x)$, $y=g(x)$是严格单调可导函数，则

$$Y=g(X)\sim f_Y(y)=f_X[g^{-1}(y)]\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|$$

注：1. 只有当$g(x)$是x的严格单调可导函数时，才可用以上公式推求Y的密度函数。

2. 注意定义域的选择.

例4 已知X~N(μ, σ²)，求 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 的概率密度.

解：$y=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$ 关于x严格单调，反函数为：

$$x=g^{-1}(y)=\sigma y+\mu$$

故

$$f_Y(y)=f_X[g^{-1}(y)]\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|=f_X(\sigma y+\mu)\sigma$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\sigma y+\mu-\mu)^2}{2\sigma^2}}\sigma=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

例5 设X~U(0,1),求Y=aX+b的概率密度.(a≠0)

解: y=ax+b关于x严格单调, 反函数为$g^{-1}(y)=\dfrac{y-b}{a}$

故

$$f_Y(y)=f_X[g^{-1}(y)]\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|=f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{|a|}$$

而

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

故

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{|a|} & 0<\dfrac{y-b}{a}<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

小结

- 随机变量
  - 离散型——分布律
    归一性
    分布函数与分布律的互变
    概率计算
    - 0-1分布
      二项分布B（n,p)
      泊松分布P(λ)
  - 分布函数
    归一性
    概率计算
    单调性
  - 连续型——概率密度
    归一性
    概率计算
    分布函数与概率密度的互变
    - 正态分布的概率计算
    - 均匀分布U(a,b)
      正态分布N(a, σ^2)
      指数分布E（λ)
- 随机变量函数的分布

阶段练习

一、填空

1.设随机变量X服从参数为（2,p）的二项分布，随机变量Y服从参数（3,p）的二项分布，若

$P\{X \geq 1\} = \dfrac{5}{9}$ ，**则P{Y≥1}=________________**

2.设随机变量X服从（0，2）上的均匀分布，则随机变量$Y=X^2$在（0，4）内的密度函数为

$f_Y(y)=$ ____

3.设随机变量**X~N（2，**σ²），且**P（2<X<4）=0.3，则P(X<0)=**

二. 一工人看管三台机床，在一小时内机床不需要工人照管的概率为第一台等于0.9，第二台等于0.8，第三台等于0.7，求在一小时内需要工人照管的机床台数的概率分布

三、某射手对靶射击，单发命中概率都为0.6，现他扔一个均匀的骰子，扔出几点就对靶独立射击几发，求他恰好命中两发的概率。