Problem 1

1) 当 x, y 同为偶数或同为奇数, $x+y$ 为偶数 $f(x+y)=1$, $f(x)\cdot f(y)=1$, $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$

当 x, y 为一个奇数与一个偶数, $x+y$ 为奇数, $f(x+y)=-1$, $f(x)\cdot f(y)=-1$, $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$

说明 f 是群 G1 到 G2 的同态，但 f 既不是单射也不是满射

则既不是单同态，也不是满同态，更不是同构. $f(G1) = \{1, -1\}$

2) $f(x+y) = \cos(x+y) + i\cdot\sin(x+y)$, $f(x)\cdot f(y) = (\cos x+i\cdot\sin x)(\cos y+i\cdot\sin y)$

$= (\cos x\cos y-\sin x\sin y)+i\cdot(\cos x\sin y+\sin x\cos y) = \cos(x+y) + i\cdot\sin(x+y) = f(x+y)$

f 是群 G1 到 G2 的同态，又 $f(x)$在 R 上的周期为 2π, f 在 Z 上是单射, f 是单同态

对 $f(x)\in A$ 有$|f(x)|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$ 恒成立, f 在 Z 上不是满射, f 不是满同态

f 不是同构, $f(G1) = \{\cos x + i\cdot\sin x \mid x\in Z\}$

Problem 2

设 G 是生成元为 a 的循环群，则 $G=\langle a\rangle$，任取 $x, y\in G$ 有 $m, n\in Z$ 使 $x=a^m$, $y=a^n$

$x\cdot y = a^m\cdot a^n = a^{(m+n)} = a^{(n+m)} = a^n\cdot a^m = y\cdot x$, G 满足交换性, G 是阿贝尔群

阿贝尔群不一定是循环群，如克莱因四元群是阿贝尔群却不是循环群

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Problem 3

设 G1 是生成元为 a 的循环群，则 $G1=\langle a\rangle$，任取 $x\in G1$ 有 $m\in Z$ 使 $x=a^m$

令 $y=f(x)=f(a^m)\in f(G1)$, $y=f(a)f(a)\cdots f(a)$ (m 个 $f(a)$)，则 $f(a)$是 $f(G1)$的生成元

即 $f(G1)=\langle f(a)\rangle$，可见 $f(G1)$也是循环群

Problem 4

1) 小于或等于 15 且与 15 互素的数是 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14

则 G 的所有生成元为 $a, a^2, a^4, a^7, a^8, a^{11}, a^{13}, a^{14}$

2) 15 的因子有 1, 3, 5, 15 则 G 的所有子群为

$\langle a\rangle=G$, $\langle a^3\rangle=\{e, a^3, a^6, a^9, a^{12}\}$, $\langle a^5\rangle=\{e, a^5, a^{10}\}$, $\langle a^{15}\rangle=\{e\}$

Problem 5

取任意三阶群 G, $|G|=3$，取 $a\in G$ 且 $a\neq e$，构造以 a 为生成元的循环群$\langle a\rangle$, $\langle a\rangle\in G$

$|\langle a\rangle| \mid |G|=3$，又 $a\neq e$, $|\langle a\rangle|\neq 1$, $|\langle a\rangle|=3=|G|$, $G=\{e, a, a^2\}$是三阶循环群

(实际上，同理可得所有素数阶群都是循环群)

Problem 6

任取 $a, b\in G$ ($a\neq e$, $b\neq e$)，有 $a*a=e$, $b*b=e$, $a*b*a*b = (a*b)*(a*b) = e$

则 $b*a = b*a*(a*b*a*b) = b*(a*a)*b*a*b = (b*b)*a*b = a*b$, $\langle G, *\rangle$是阿贝尔群

Problem 7

G 为阿贝尔群，任取 $a, b\in G$ 有 $ab=ba$, $(ab)^2=(ab)(ab)=a(ba)b=a(ab)b=(aa)(bb)=a^2b^2$