Problem 1

情形(i): $x\geqslant 0, y\geqslant 0, |x|+|y| = x+y = |x+y|$;

情形(ii): $x<0, y<0, |x|+|y| = -x-y = |x+y|$;

情形(iii): $x\geqslant 0, y<0, |x|+|y| = x-y$

若 $x\geqslant -y$ 即 $x+y\geqslant 0, |x+y| = x+y, |x|+|y|-|x+y| = -2y\geqslant 0$

若 $x\geqslant -y$ 即 $x+y<0, |x+y| = -x-y, |x|+|y|-|x+y| = 2x\geqslant 0$;

情形(iv): $x<0, y\geqslant 0$, 遵循情形(iii)的推理过程，将 x 和 y 的角色互换;

$|x|+|y|\geqslant|x+y|$对四种情形均成立，包含了一切可能，得出结论三角不等式成立.

Problem 2

不失一般性，假定 x 为奇数，则 y 为偶数，存在整数 m, n 使 $x=2m+1, y=2n$.

$5x+5y = 5\times(2m+1)+5\times 2n = 10m+10n+5 = 2\times(5m+5n+2)+1$

存在整数 $k=5m+5n+2$ 使 $5x+5y = 2k+1$，则 $5x+5y$ 是一个奇整数.

Problem 3

x, y 为正实数, $(x-y)^2 \geqslant 0$ 即 $x^2-2xy+y^2 \geqslant 0$ 即 $x^2+y^2 \geqslant 2xy$

$2(x^2+y^2) \geqslant x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2 > 0$.

$\frac{1}{2}(x^2+y^2) \geqslant \frac{1}{4}(x+y)^2 > 0$, $\sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \geqslant \frac{1}{2}(x+y)$.

Problem 4

当$|x|\geqslant 3$ 时 $2x^2\geqslant 18>14$，当$|y|\geqslant 2$ 时 $5y^2\geqslant 20>14$,

则 x 的可能取值为$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, y 的可能取值为$\{-1, 0, 1\}$.

符合条件 x^2的最大值为 4, y^2的最大值为 1,

$2x^2+5y^2$最大取值为 $13<14$，当 x 和 y 是整数时 $2x^2+5y^2=14$ 不可能成立.

Problem 5

取任意一个有理数 x 与一个无理数 y，令 $z=\frac{1}{2}(x+y)$则 $\min(x, y)<z<\max(x, y)$.

若 z 为有理数, $y=2z-x$ 为有理数，与设定条件矛盾, z 为无理数.

则任一个有理数和任一个无理数之间都有一个无理数.

Problem 6

当 $n\geqslant 5$ 时 $n^2+n^3\geqslant 150>100$，则正整数 n 的取值集合为$\{1, 2, 3, 4\}$

其中 $n=4$ 时 n^2+n^3取得最大值为 $80<100$，故不存在这样的正整数 n.

Problem 7

假设$\sqrt[3]{2}$ 是有理数，存在整数 x, y 满足$\sqrt[3]{2}=x/y$，其中 $y\neq 0$ 且 x, y 无公因子.

等式两边取立方得 $2=x^3/y^3$, $2y^3=x^3$，由偶数定义知 x^3为偶数，则 x 为偶数,

存在整数 z 满足 $x=2z$, $2y^3=8z^3$，即 $y^3=4x^3$, y^3为偶数, y 为偶数.

则 x, y 有公因子 2，与设定条件矛盾，故$\sqrt[3]{2}$ 是无理数.

Problem 8

a, b 为无理数，若 ab/a^b 为有理数，存在整数 x, y 满足 ya/x=b^1/(b-1)

其中 $x\neq 0$ 且 x, y 无公因子, $b\neq 1$ 则 $b-1\neq 0$.

y/x 为有理数，则 ya/x 为无理数, b^1/(b-1)为无理数.

设存在无理数 $b^2=2$, b=√2, b^1/(b-1)= (√2^√2)×√2.

1° 若√2^√2 为有理数,令 a=b=√2 则 ab/a^b=2/√2^√2 为有理数.

2° 若√2^√2 为无理数:

a. 若(√2^√2)×√2 为有理数, 令 a=√2^√2, b=√2,

则 ab/a^b=(√2^√2)×√2/(√2^√2)^√2=(√2^√2)×√2/2 为有理数.

b. 若(√2^√2)×√2 为无理数, 即 ya/x 为无理数,

取有理数 y/x=1, 无理数 a=(√2^√2)×√2 使 ab/a^b=1 为有理数.

综上所述, 存在无理数 a, b 使 ab/a^b 为有理数, “ab/a^b”为无理数是错误的.