



1. 已知 $f$ 和 $g$ 都是 $R \rightarrow R$ 的函数，若  $f \circ g$  是单射，且  $g \circ f$  是满射，则

☒  $g$  一定是单射。

☒  $g$  一定是满射。

☐  $f$  不一定是单射。

☐  $f$  不一定是满射。

- 若 $f \circ g$ 是满射，能推出 $f$ 和 $g$ 是满射吗？
  - $f$ 一定是满射， $g$ 不一定是满射。
- 若 $f \circ g$ 是单射，能推出 $f$ 和 $g$ 是单射吗？
  - $g$ 一定是单射， $f$ 不一定是单射。

答案：首先，根据课上讲的内容，我们得到 $g$ 是单射且 $g$ 是满射，前两个选项正确。

注意：本题比课上讲的多了 $f$ 和 $g$ 都是 $R \rightarrow R$ 的函数这个条件！

假设 $f$ 不是单射，即有 $x_1, x_2 \in R, x_1 \neq x_2, f(x_1) = f(x_2)$ 。由于 $g$ 是双射，必存在 $y_1, y_2 \in R, y_1 \neq y_2$ 使得 $g(y_1) = x_1, g(y_2) = x_2$ ，从而 $f \circ g(y_1) = f \circ g(y_2)$ ，与 $f \circ g$ 是单射矛盾！因此 $f$ 一定是单射！

同理，假设 $f$ 不是满射，则存在 $a \in R, \forall x \in R f(x) \neq a$ ，从而 $\forall x \in R g \circ f(x) \neq g(a)$ ，与 $g \circ f$ 为满射矛盾！因此 $f$ 一定是满射！



2. 我们用 $\rho(A)$ 代表集合 $A$ 的幂集，下列哪些选项是正确的？

- ☒ 如果 $A$ 是 $B$ 的一个子集，那么 $\rho(A)$ 是 $\rho(B)$ 的一个子集。
- ☒ 如果 $\rho(A)$ 是 $\rho(B)$ 的一个子集，那么 $A$ 是 $B$ 的一个子集。
- ☐ 如果 $\rho(A) \in \rho(B)$ ，那么 $A$ 是 $B$ 的一个子集。
- ☒ 如果 $\rho(A) \in \rho(B)$ ，那么 $A \in B$ 。

答案：选项1， $\forall X \in \rho(A)$ ， $X \subseteq A \subseteq B$ 中，因此 $X \in \rho(B)$ ，因此 $\rho(A) \subseteq \rho(B)$ ；

选项2，反证法，假设 $A$ 不是 $B$ 的子集，则存在 $x \in A \wedge x \notin B$ ，则 $\exists Y \in \rho(A), x \in Y$ ，因此 $Y \notin \rho(B)$ ，与 $\rho(A)$ 是 $\rho(B)$ 的子集矛盾！

选项3，举反例， $A=\{1\}$ ， $B=\{\emptyset, \{1\}\}$ ， $\rho(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$ ， $\rho(B) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}\}$ 。 $A$ 不是 $B$ 的子集；

选项4， $A \in \rho(A) \in \rho(B)$ ，则 $\rho(A) \subseteq B$ ，从而 $A \in B$ 。



3. 若A, B, C为集合，下列说法**错误**的是

- ☐ 若 $A \cup C = B \cup C$ 且 $A \cap C = B \cap C$ ，则 $A = B$
- ☒ 若 $(A \cup C) \cap B = (B \cup C) \cap A$ ，则 $A = B$
- ☒ 若 $(A \cap C) \cup B = (B \cap C) \cup A$ ，则 $A = B$
- ☒ 若 $(A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ ，则 $A = B$

答案：选项1，作业题，作成员表即可；

选项2，令 $A = \{1\}$ ,  $B = \{2\}$ ,  $C = \emptyset$ ，则等式左右均为空集；

选项3，令 $A = \{1\}$ ,  $B = \{2\}$ ,  $C = \{1, 2\}$ ，则等式左右均为 $\{1, 2\}$ ；

选项4，令 $A = \{1\}$ ,  $B = \{2\}$ ,  $C = \{1, 2\}$ ，则等式左右均为 $\{1, 2\}$ ；



4. 已知正整数集合 $Z$ 是自然数集合 $N$ 的真子集， $N$ 是实数集合 $R$ 的真子集。下列选项正确的有

- ☒ 存在一个从 $Z$ 到 $N$ 的双射。
- ☐ 存在一个从 $N$ 到 $R$ 的双射。
- ☒ 存在 $R$ 的一个真子集 $S$ ，存在从 $S$ 到 $R$ 的双射。
- ☐ 对于 $Z$ 的任意一个真子集 $S$ ，不存在从 $S$ 到 $Z$ 的双射。

答案：选项1， $n \geq 0$ 时， $f(n) = 2n$ ， $n < 0$ 时， $f(n) = -2n - 1$ ；

选项2，下周课上会讲（集合的基数）；

选项3，存在，考虑 $f(x) = \ln x$ ；

选项4，反驳，考虑选项1中 $Z$ 到 $N$ 的双射， $N$ 即为 $Z$ 的真子集。