偏序集

离散数学

马晓星

南京大学·计算机科学与技术系

提要

- 偏序与偏序集
  - 偏序关系, 哈斯图
  - 极大(小)元, 最大(小)元, 上(下)界
  - 偏序, 全序, 良序
- 偏序集的划分
  - 链与反链, 高与宽
  - 划分为反链
  - 划分为链

关系的性质回顾

- 集合A上的关系 R 是:
  - **自反的 reflexive**：对所有的 $a\in A$, $(a, a)\in R$
  - **反自反的 irreflexive**：对所有的$a\in A$, $(a,a)\notin R$
  - **对称的 symmetric**：若有 $(a,b)\in R$, 则 $(b,a)\in R$
  - **反对称的 anti-~**：若有 $(a,b)\in R$ 且 $(b,a)\in R$， 则 $a=b$
  - **传递的 transitive**：若有 $(a,b)\in R$, $(b,c)\in R$, 则 $(a,c)\in R$

注：

Asymmetric(非对称的)关系：反对称的非自反关系.

偏序关系(Partial Order)

- **偏序**：非空集合A上的自反、反对称和传递的关系称为A上的偏序关系, 常记为：$\preccurlyeq$
  - $(a,b)\in\preccurlyeq$ 常写作 $a\preccurlyeq b$ 读作“a小于等于b”
  - 例如:
    - 集合A上的恒等关系I_A是A上的偏序关系.
    - 整数集合上的小于等于关系、整除关系；集合的包含关系也是偏序关系.

- 注1：我们常常用$a\prec b$（$b\succ a$）表示$a\preccurlyeq b\wedge a\neq b$.
- 注2：这里的偏序也称**自反偏序**或**非严格偏序**. 如果我们把其中“自反的”条件换成“反自反的”，就得到所谓**严格偏序**或**反自反偏序**.

偏序集(Partially Ordered Set, Poset)

- 集合A及其上的偏序关系$\preccurlyeq$一道称为偏序集,记作$(A, \preccurlyeq)$
  - 例如:
    - 整数集合$\mathbb{Z}$及其上的小于等于关系构成偏序集$(\mathbb{Z}, \leq)$.
    - 集合A的幂集$\rho(A)$与集合包含关系构成偏序集$(\rho(A), \subseteq)$.

“字典顺序”

- 设$\preccurlyeq$是非空集合A上的偏序关系，定义$A\times A$上的关系R如下：
  $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ *iff.*
  $x_1 \neq x_2$且$x_1 \preccurlyeq x_2$; 或者 $x_1 = x_2$且$y_1 \preccurlyeq y_2$.

  易证R是$A\times A$上的偏序关系.

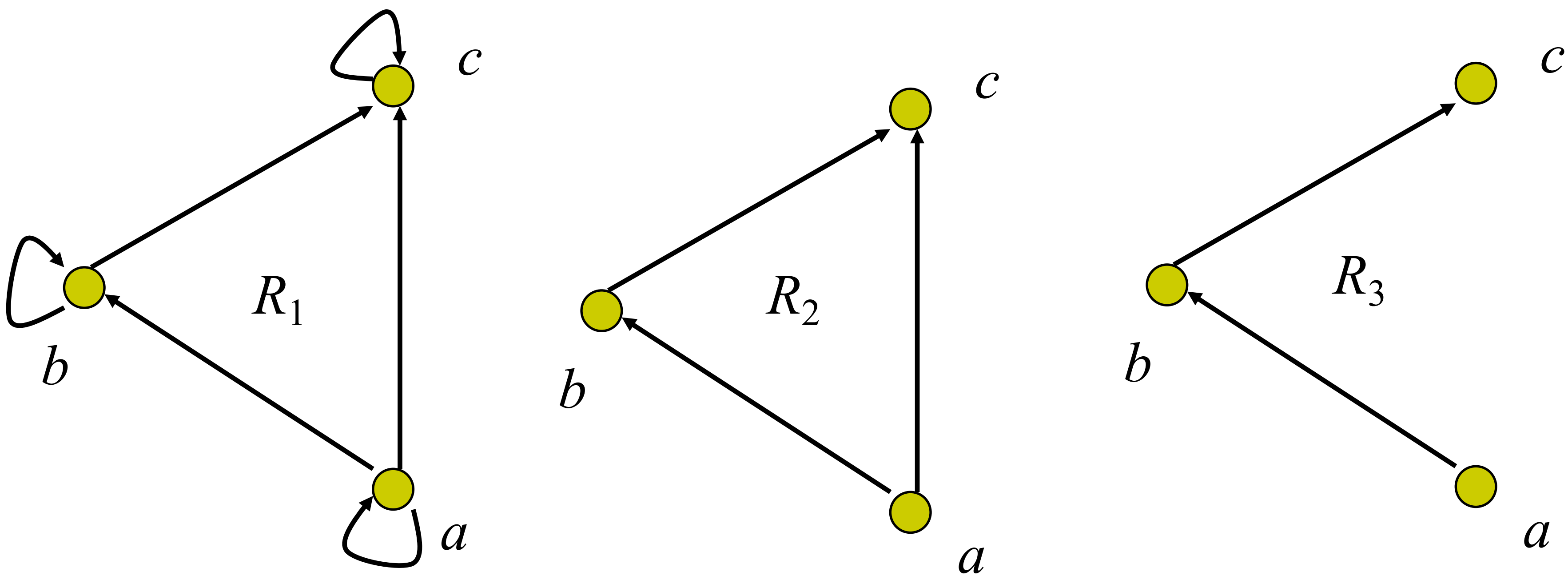
- 给定有限字符集合Σ，若在Σ上有一个偏序关系，类似上述办法，可以对任意正整数k,定义Σ^k(由Σ中字符构成的长度为k的串的集合)上的偏序关系。加以适当的技术处理，则容易定义Σ^+(由Σ中字符构成的长度为任意正整数的串的集合)上的偏序关系：字典关系
  - 注意：在通常的字典关系中，任何两个元素均可比.

可比与全序(Total Order)

- **可比(Comparable)**: 设$\preccurlyeq$为非空集合A上的偏序关系,对于A中的元素x和y,若有$x \preccurlyeq y$或者$y \preccurlyeq x$, 则称x与y可比.
  - 从“序”的角度看, A中的元素x和y有四种情况: $x \prec y,\ x = y,\ x \succ y$, 以及二者不可比.
- **全序**: 设R是A上的偏序关系，如果A中的任意两个元素都是可比的，则称R是A上的全序关系(或线性序关系).
  - 例如:实数集上的“不大于”关系≤、基于拉丁字母表的字典顺序
- **覆盖(cover)** : y覆盖x 当且仅当$x \prec y$, 且不存在$z \in A$ 使得$x \prec z \prec y$.

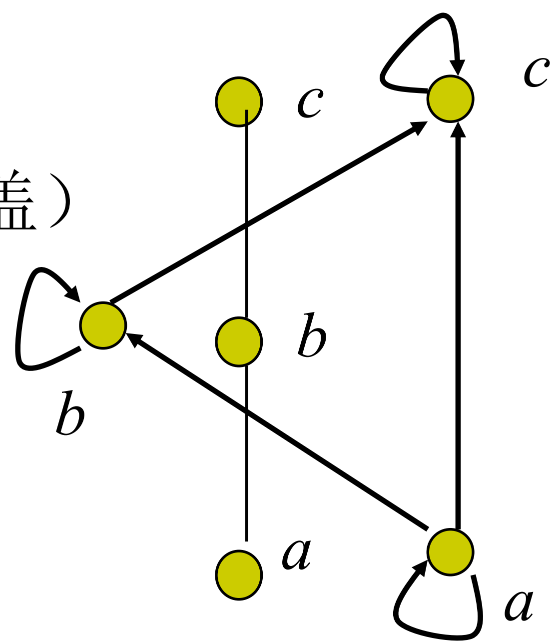
偏序关系的有向图表示

- $A=\{a,b,c\}$上的三个关系如下．其间有何联系?

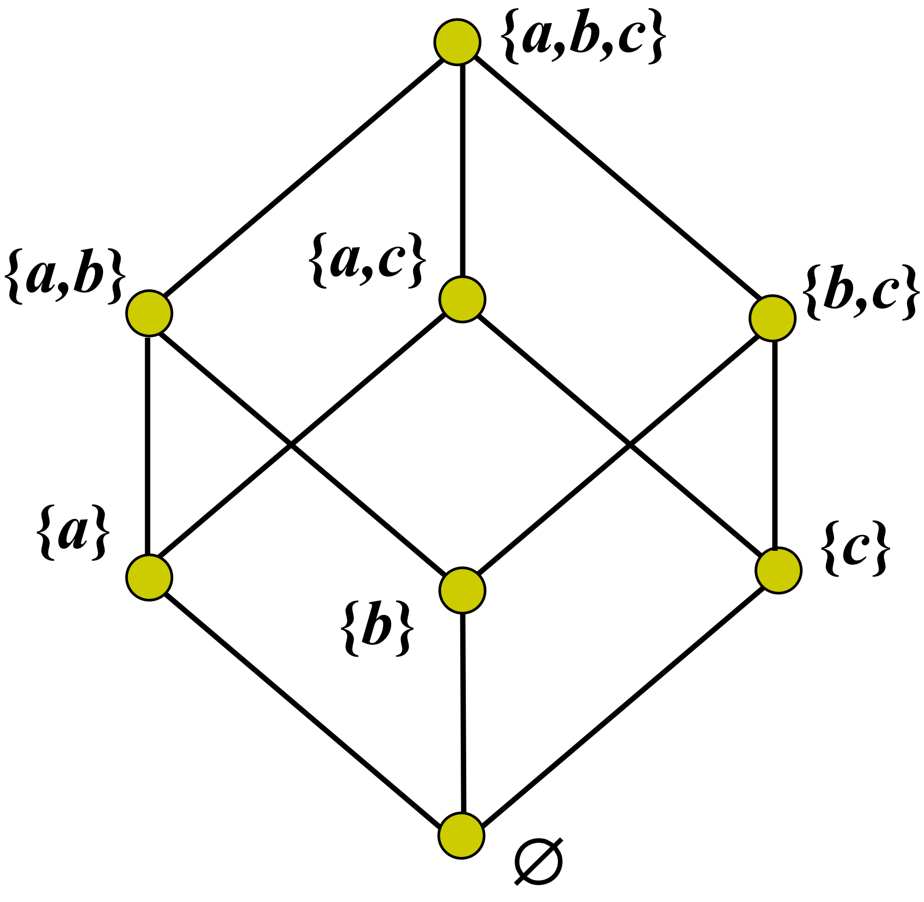


哈斯图

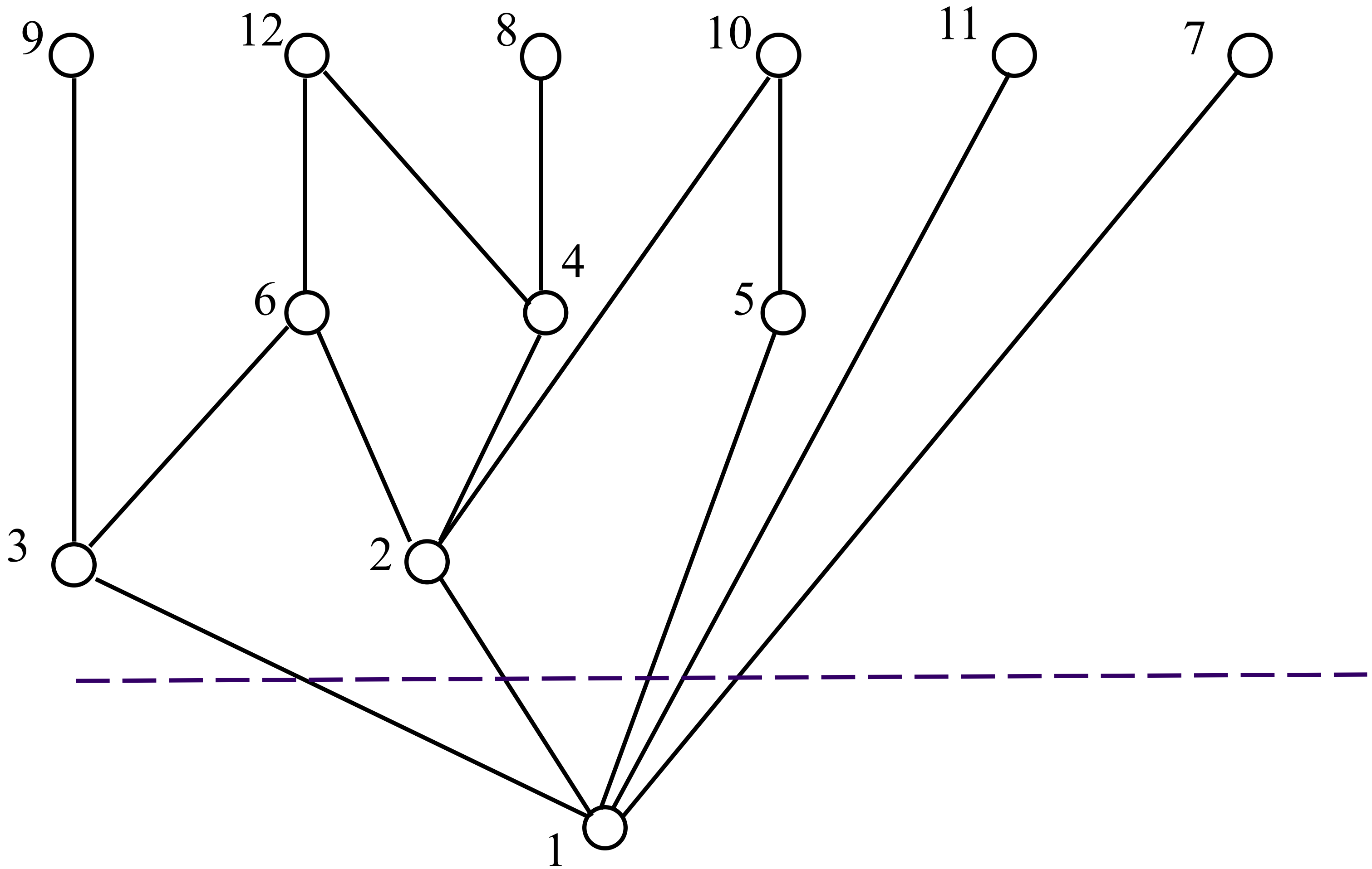
- 一般的关系图可以表示偏序关系
- 哈斯图(Hasse)：利用特定性质简化图示方法
  - 利用自反性省略圈
  - 利用反对称性省略箭头
  - 利用传递性省略部分连线（覆盖）



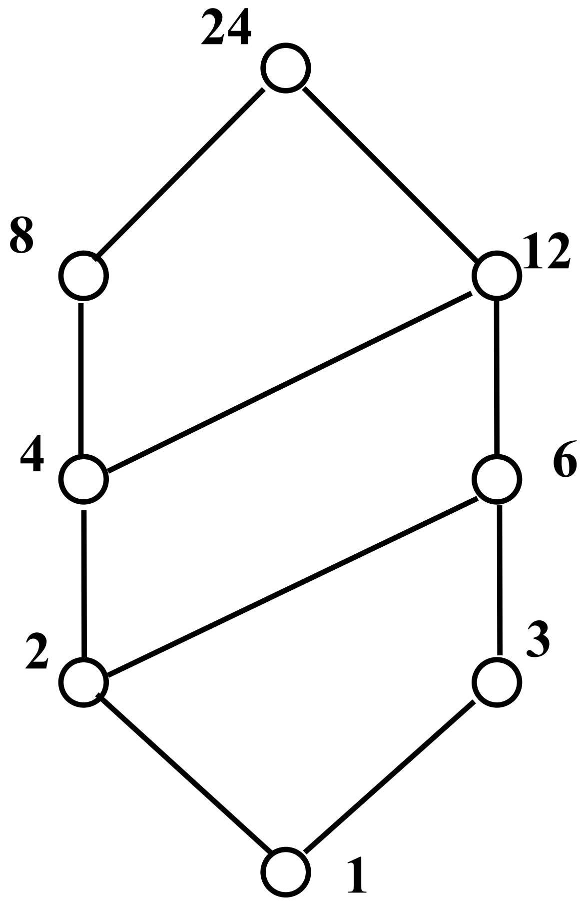
ρ({a, b, c})上的包含关系



{1,2,...,12}上的整除关系



{1,2,3,4,6,8,12,24}上的整除关系



偏序集中的特殊元素：极大(Maximal), 极小(Minimal)

- x是偏序集$(A, \preccurlyeq)$中的极大元 iff.
  - 对任意$y \in A$,若$x \preccurlyeq y$, 则$x = y$
- x是偏序集(A,$\preccurlyeq$)中的极小元 iff.
  - 对任意$y \in A$,若$y \preccurlyeq x$, 则$x = y$

没有比它更大（小）的了！

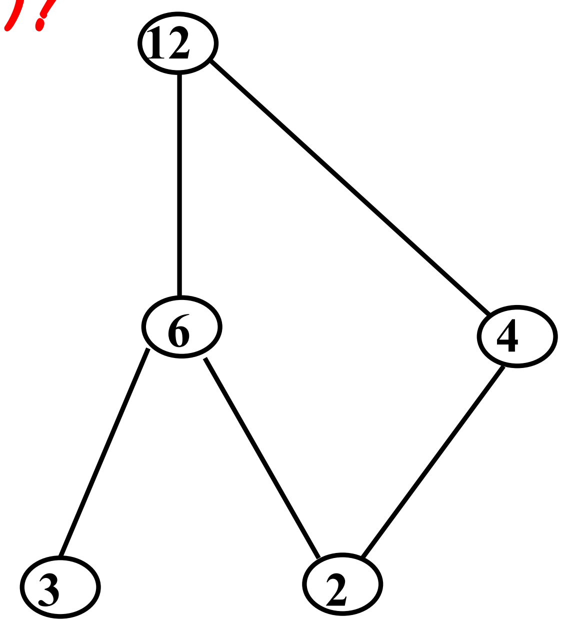
- 有关极大元与极小元的讨论
  - 不一定存在，但是，有穷集合一定有极大(小)元
  - 不一定唯一
  - 一个元素可能兼为极大(小)元

偏序集中的特殊元素：最大(Greatest), 最小(Least)

- x是偏序集$(A,\preccurlyeq)$中的最大元 iff.
  - 对任意$y \in A, y \preccurlyeq x$

它比谁都要大(小)!

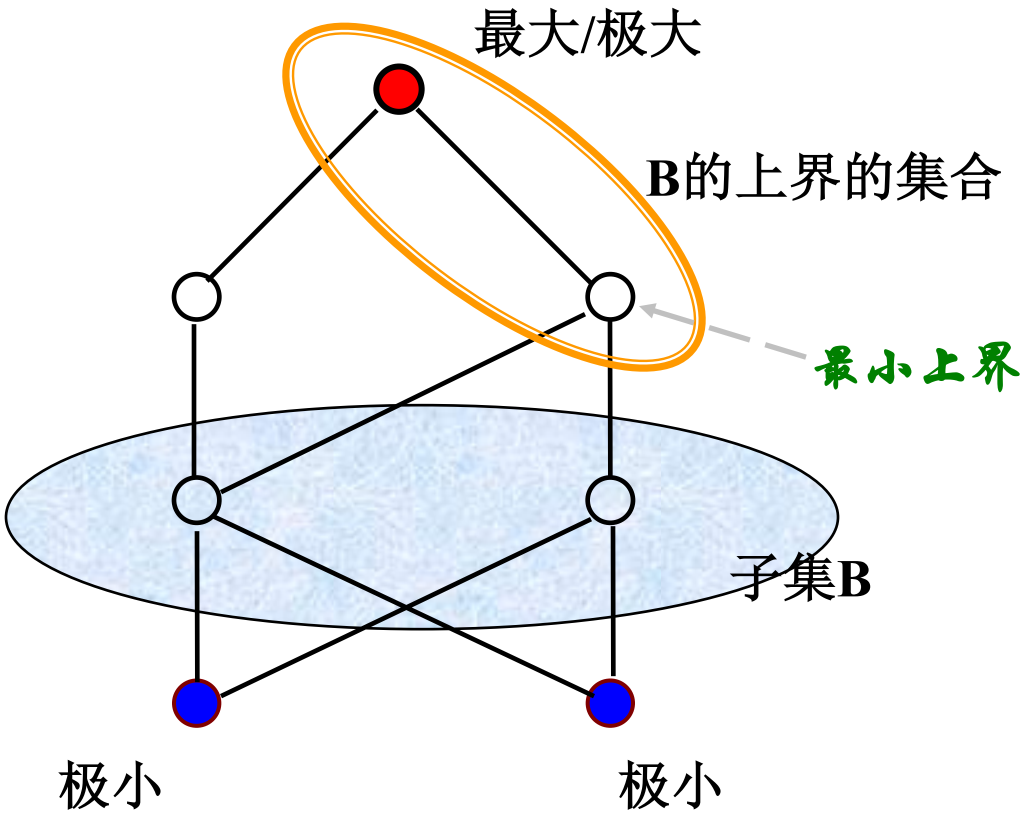
- x是偏序集$(A,\preccurlyeq)$中的最小元 iff.
  - 对任意$y \in A, x \preccurlyeq y$
- 有关最大元与最小元的讨论
  - 可能不存在
  - 若存在，必唯一。



偏序集中的特殊元素：上(下)确界

- 上界：对于偏序集 $(A,\preccurlyeq)$ 和 A 的子集 B ，若存在 $y\in A$，对 B 中任意元素 x，均有 $x \preccurlyeq y$,则 y 是 B 的上界。
- 最小上界：如果 B 的上界构成的偏序集有最小元，则该最小元为 B 的最小上界（lub），上确界。
- 类似地可以定义下界、最大下界（glb），下确界。
- 有关上(下)界的讨论
  - 不一定存在；
  - 最小上界若存在，则必唯一。

从哈斯图看特殊元素



良序

- 定义：给定集合 A 上的偏序 $\preccurlyeq$，若 A 的任一非空子集均存在最小元素，则该偏序为良序。
- 良序必为全序
  - 对任意$a, b \in A$，$\{a, b\}$必有最小元，则a, b一定可比
- 实际上，“反对称性 ＋ 任一非空子集存在最小元”就能够保证全序性质（偏序性质+任何两个元素均可比）。
  - 自反性：对任意$a \in A, \{a\}$也必有最小元，即$a \preccurlyeq a$
  - 传递性：假设 $a \preccurlyeq b, b \preccurlyeq c$，$\{a, b, c\}$ 的最小元素只能是 a ，因此 $a \preccurlyeq c$
  - 任何两个元素可比，上面已证明。

关于次序关系的进一步讨论

- 注意：良序结构上可以实施数学归纳法
- 全序是否一定是良序？
- 当A是无穷集合时，全序不一定是良序
  - 例如：$(R, \leq)$, 任何开区间上没有最小元素
- 良序 $\rightarrow$全序 $\rightarrow$偏序
- 偏序/全序/良序的逆关系是否仍为偏序/全序/良序？
  - 良序的逆关系不一定是良序
    - 例如(N，≤)

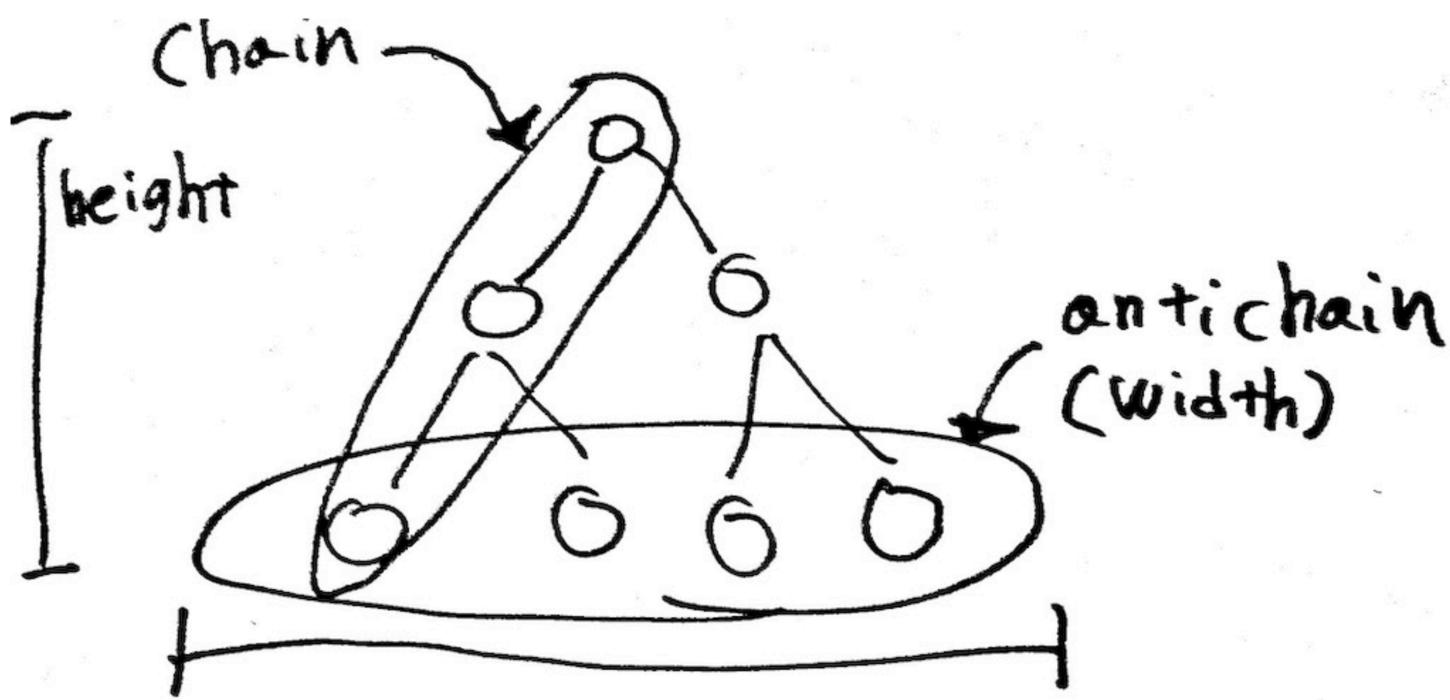
注：X上的一个二元关系R被称为是**良基**的，当且仅当所有X的非空子集都有一个***R*-极小元**-就是说，对X的每一个非空子集S，存在一个S中的元素m使得对于所有S中的s，二元组$(s, m) \notin R$.
一个偏序关系称为是良基的，当且仅当它对应的严格偏序是良基的。如果这个序还是全序，那么此时称这个序为良序。

偏序集的划分

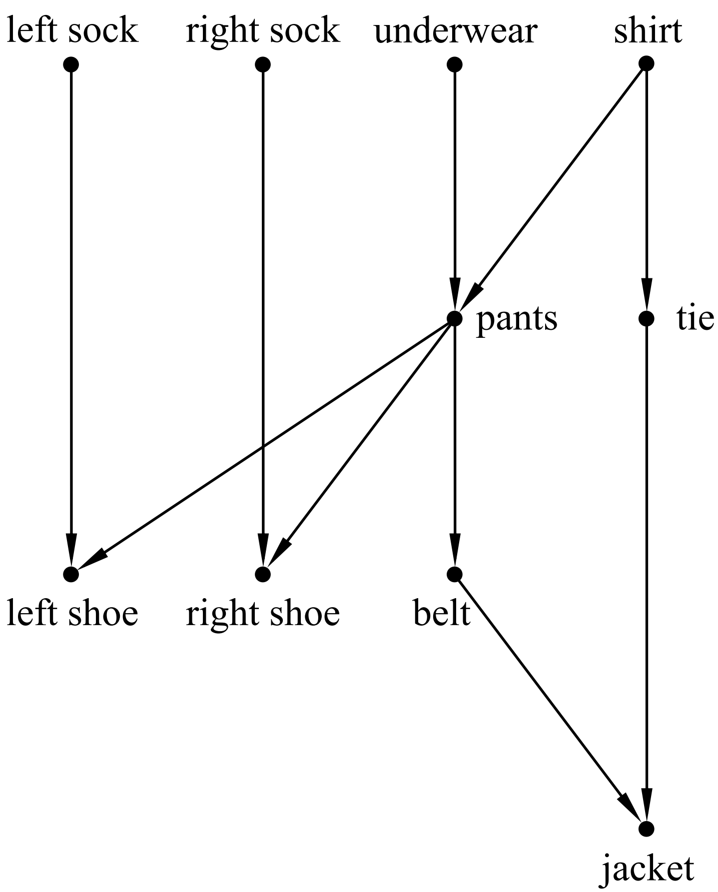
链与反链

- **链(Chain)**: 设C是偏序集$(P,\preccurlyeq)$的一个子集, 如果C中任何两个元素均可比，则C构成一个链;
  - 如果链C不是任何其他链的子链, 则称其为极大化的, 也就是说, C外没有一个元素与C中所有元素都可比.
- **反链(Anti-chain)**: 设A是偏序集$(P,\preccurlyeq)$的一个子集，如果如果A中任何两个元素均不可比，则A构成一个反链.
  - 如果反链A不是任何其他反链的子反链, 则称其为极大化的, 也就是说, A外没有一个元素与A中所有元素都不可比.
- **高度(height)**和**宽度(width)**: 有限偏序集中最长的链的元素个数称为该偏序集的高度， 而其最大的反链的元素个数称为其宽度.

链与反链



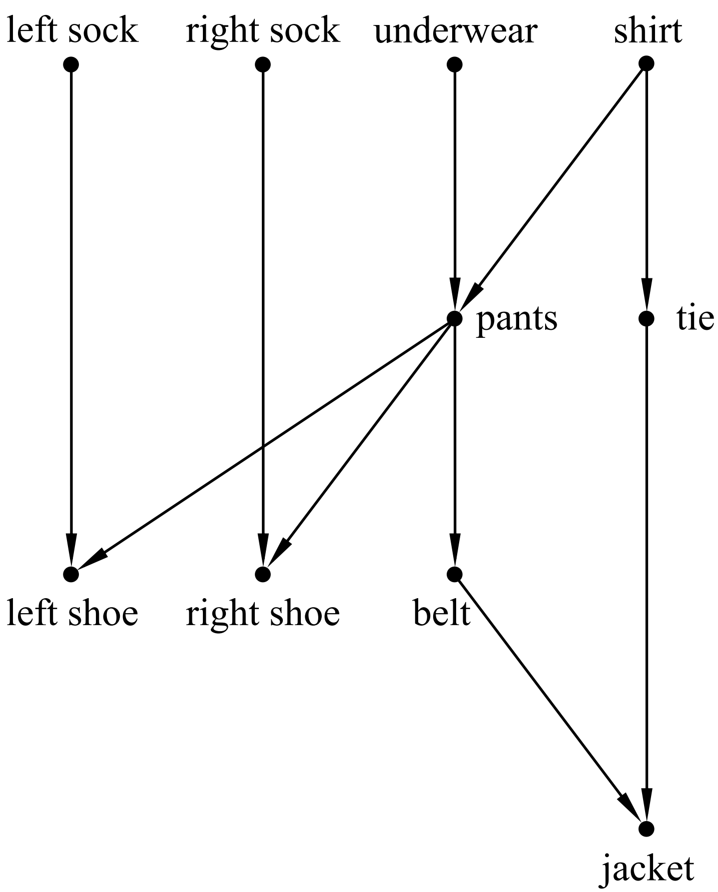
任务调度问题



早上起床穿衣顺序

链内的步骤间有顺序依赖;
反链内的步骤间可并发执行.

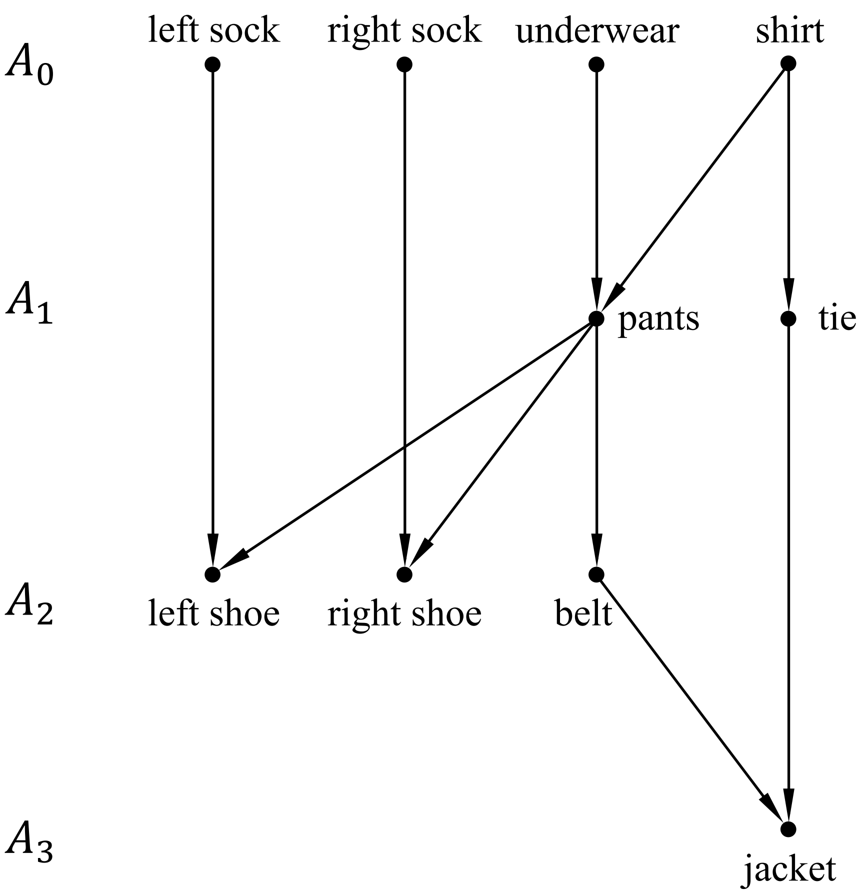
拓扑排序 (Topological sorting)



- 给定一个集合A上的偏序关系R, 构造一个A上的全序$\preccurlyeq$使得 $R \subseteq \preccurlyeq$.

基本算法: 每次都从剩下的元素中选择一个极小元即可.

并发任务调度



并发调度是将A划分为$A_0, A_1, \cdots, A_n$,使得对于$0 \le i < j \le n, \forall x_i \in A_i, x_j \in A_j \left(x_j \nleq x_i\right)$.

结束于a的最长的链称为到达a的关键路径.
该路径中除a之外的元素个数称为a的深度(depth(a)).

最省时调度:

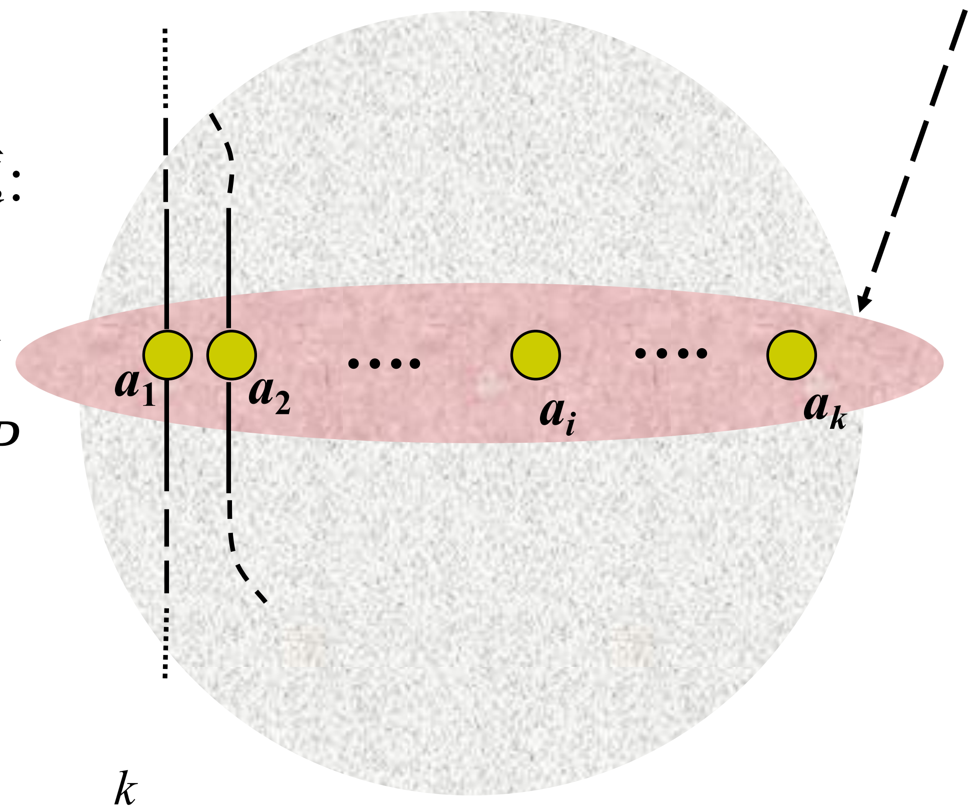
$$A_i \triangleq \{a \in A \mid depth(a) = k\}$$

偏序的划分

- 由以上讨论可知, 若有限偏序集$(A, \preccurlyeq)$的高度为t, 则可将其划分为t个反链 (Mirsky's theorem 1971).
  - 推论: 对于任意$t > 0$, 要么有一条长度大于t的链, 要么有一条长度至少为$\frac{|A|}{t}$的反链.
  - 推论: 有限偏序集$(A, \preccurlyeq)$要么有一条长度大于$\sqrt{|A|}$的链, 要么有一条长度至少是$\sqrt{|A|}$的反链.
- .

链与反链

元素个数最多的反链，含k个元素



考虑Mirsky定理的对偶问题:

链覆盖 是$(P,\preccurlyeq)$中一组互不相交的链, 它们一起包含了P中的所有元素.

至少需要多少条链?

$$\bigcup_{i=1}^{k} C_i = P \text{（} C_i \text{互不相交）}$$

Dilworth定理

- Dilworth 定理 (1950)

宽度为w的偏序集可划分成w个链.

在任意有限偏序集$(P, \preccurlyeq)$中, 覆盖P的最小链数等于P中最长反链的长度（元素个数）.

- 注：覆盖P的链数$\geq P$中任一反链的元素个数.
- 等价结论: 有限偏序集中存在一个链覆盖和一个反链，它们大小相等

Dilworth定理的归纳证明

- ［概要, Perles (1963) ］
  当$|P| = 1$时, 宽度$w = 1$, 命题成立.
  假设命题对于$|P| \le k$时成立, 现证明对于$|P| = k + 1$的偏序集P成立.
  对于某最长的反链A, 令
  $$D(A) = \{x | \exists a \in A(x < a)\}$$
  $$U(A) = \{x | \exists a \in A(x > a)\}$$
  显然有 $P = A \cup D(A) \cup U(A)$; 且三者互不相交.

Dilworth定理的归纳证明

情况1：存在一个最长的反链A使得$D(A)$和$U(A)$都非空.

- 记A中元素为$a_1, a_2, \dots, a_w$. 在$A \cup D(A)$上应用归纳假设(注意$U(A)$非空，$|A \cup D(A)| \le k$)。不失一般性, 我们得到$A \cup D(A)$的一个链覆盖$C_1, C_2, \dots, C_w$, 其中a_i是C_i的最大元素，$i = 1,2, \dots, w$.
- 再在$A \cup U(A)$上应用归纳假设, 得到$A \cup U(A)$的一个链覆盖$C'_1, C'_2, \dots, C'_w$, 其中a_i是C'_i的最小元素，$i = 1,2, \dots, w$.
- 于是$C_i \cup C'_i$是一个链, 这w个链覆盖了P.

Dilworth定理的归纳证明

情况2：对于每一个最长的反链A, $D(A)$和$U(A)$都至少有一个为空.

- 在P中选择一个最大元素y. 再选择一个满足$x \leq y$的极小元素x（二者可能相等）. $C = \{x, y\}$构成一条链.
- $P - C$的宽度是$w - 1$. （为什么?）
  依据归纳假设可划分$P - C$为$w - 1$条链, 再加上C即可.

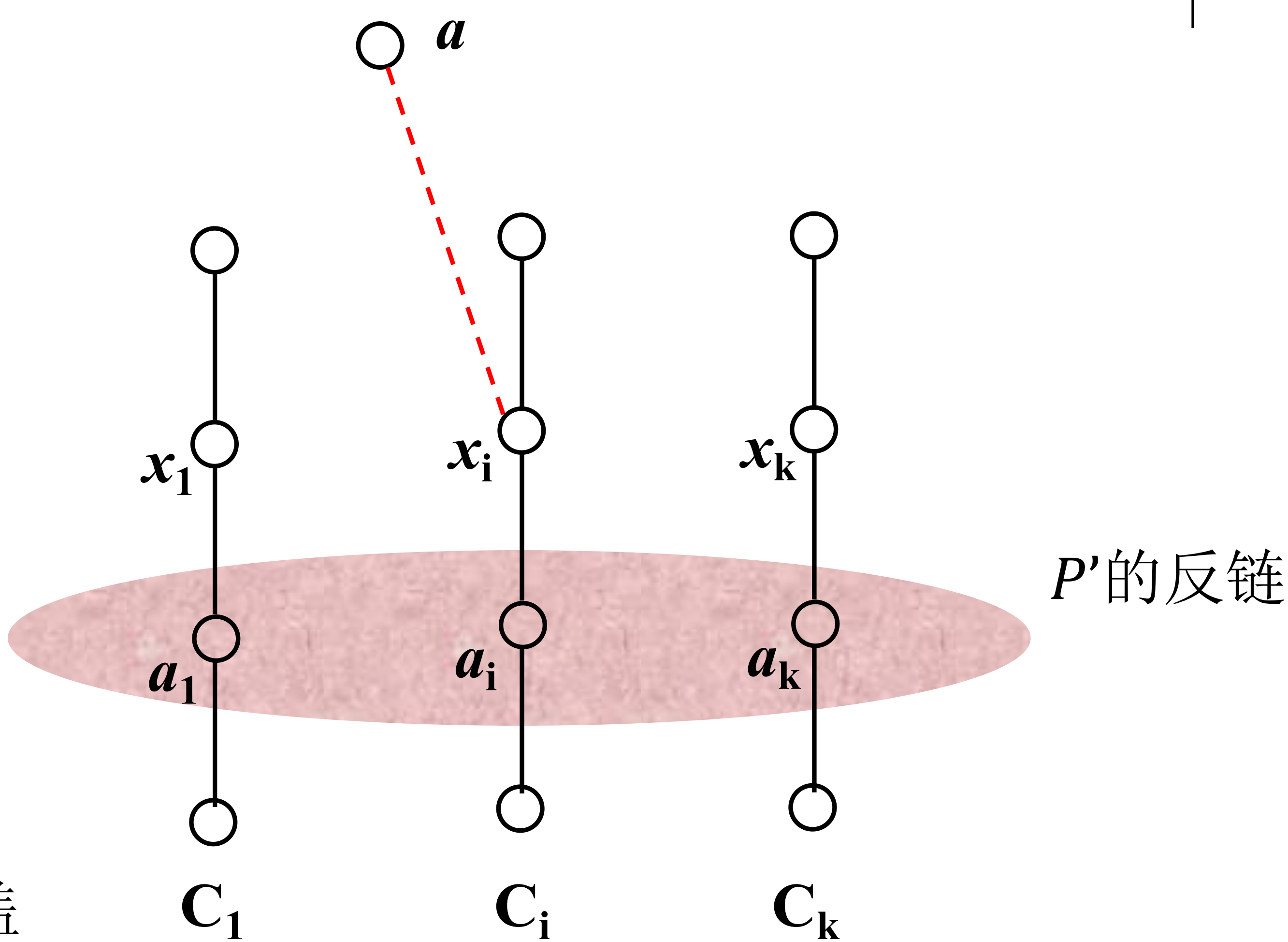
■

Dilworth定理的另一个归纳证明

- 证明. 按照P中元素个数（$|P|=1, 2 \ldots$）进行归纳证明.

  设a为P中的一个极大元素，$P' = P - \{a\}$
- 设$(P', \preccurlyeq)$有一个大小为k的反链$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$，并有一个规模为$k$的链覆盖$\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$.
- 对任意C_i，P'中大小为k的任一反链均有唯一的元素属于C_i，这些元素有一个最大元，记为x_i.
- $A=\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$必是反链。否则，不妨假设A中有两个元素$x_i \preccurlyeq x_j$. 根据$x_j$的定义，$P'$中必有一个大小为k的反链$A_j$, x_j是A_j和C_j的公共元素，假设y是A_j和C_i的公共元素，则$y \preccurlyeq x_i$. 从而$y \preccurlyeq x_j$.与A_j是反链矛盾.

Dilworth定理的归纳证明（图示）



$\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ 为P'的链覆盖

Dilworth定理的归纳证明（续）

- 如果 $\{a, x_1, x_2, \ldots, x_k\}$是$P$中的反链，而$P$的链覆盖$\{\{a\}, C_1, C_2, \ldots, C_k\}$就是规模为$k+1$的覆盖. 得证.
- 如果 $\{a, x_1, x_2, \ldots, x_k\}$不是$P$中的反链，即:存在某个$x_m$使得$x_m \preccurlyeq a$.（$a$是极大元，不会出现 $a \preccurlyeq x_m$.）

令 $K = \{a\} \cup \{ z \in C_m \mid z \preccurlyeq x_m\}$. 显然$K$是$P$中的一条链. $P-K$中最大反链的大小为$k-1$（$P-K$中没有含k个元素的反链, 否则，与x_m的定义（最大性）矛盾）.
由归纳假设，$P-K$有大小为$k-1$的一个链覆盖，该覆盖与K构成P的链覆盖（链数为k），已知$\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ 是P中的反链（含k个元素）. 得证.

“道是无序却有序”

- 自然数1,2,3,…,n^2+1的任何一种排列中，必然含一个长度不小于$n+1$的严格递增链或严格递减链。

建立问题的偏序模型

- 给定1, 2 …n^2+1(=m)的一种排列 $v_1v_2…v_m$，定义集合：
  - A={ (i,v_i) | i=1,2,…,n^2+1}
- 建立两个偏序关系R_1和R_2
  - $(i, v_i)R_1(j, v_j)$ iff. （$i<j$并且$v_i<v_j$）或者 $(i, v_i)=(j, v_j)$
  - $(i, v_i)R_2(j, v_j)$ iff. （$i<j$并且$v_i>v_j$）或者 $(i, v_i)=(j, v_j)$
- $R_1\cap R_2 = I_A$, $R_1\cup R_2 = A\times A$ //R_1的链是R_2反链。
- 问题：一定存在A的一个至少含n+1个元素的子集，它是R_1的链或者R_2的链。
  - 若R_1链的长度均≤n, 即R_2反链的大小均≤n，则存在个数k ≤n的R_2覆盖，有长度超过n的R_2链，否则元素个数≤n^2.矛盾.

小结

- 偏序：自反，传递，反对称
  - 偏序集，哈斯图
  - 最大，最小，极大，极小 元素
  - 上界，下界，上确界，下确界
- 偏序集的划分
  - Mirsky 定理
  - Dilworth定理