

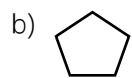
### Problem 1

假设简单图  $G$  有  $n > 2$  个顶点, 各顶点的度数均不相同. 有  $n$  个顶点的无向图中顶点的最大度数为  $n-1$ , 则这  $n$  个顶点的度数依次为  $0, 1, 2, \dots, n-1$

其中度数为  $n-1$  的顶点与其余  $n-1$  个顶点均邻接, 故度数为  $0$  的顶点不存在矛盾, 故若无向图  $G$  至少有两个顶点且各顶点度数均不相同, 则  $G$  不是简单图

### Problem 2

a) 由 Problem 1 结论可得, 序列不能作为简单图的度序列



c) 不能, 图中共 6 个点, 顶点度数最大为 5, 该顶点与其余 5 个顶点均邻接有 3 个顶点度数为 1, 则它们只与度数为 5 的顶点邻接  
其余两顶点若邻接度数均为 2, 若不邻接均为 1, 不可能有度数为 4 的顶点



### Problem 3

无向图  $G$  有  $E$  条边, 则  $V$  个顶点度数之和为  $2E$ , 对最小度  $\delta(G)$  有  $\delta(G) \cdot V \leq 2E$   
对最大度  $\Delta(G)$  有  $\Delta(G) \cdot V \geq 2E$ , 则有  $\delta(G) \leq 2E/V \leq \Delta(G)$

### Problem 4

a) 设无向图  $G$  有  $E$  条边,  $V$  个顶点,  $2E = Va$ , 删去一个顶点  $x$  后的边数

$$2E' = (V-1)a' \geq (V-1)a. \text{ 则去掉的边数 } \Delta E = E - E' = Va/2 - (V-1)a'/2 \leq a/2$$

则删去顶点  $x$  的度  $\deg(x) = \Delta E \leq a/2$

b) 设  $G$  的所有子图最小度都小于等于  $a/2$ , 因为  $G$  是  $G$  的子图, 所以

$G$  的最小度小于等于  $a/2$ , 由 1) 得  $G$  删去度最小的顶点  $x$  后平均度至少为  $a$

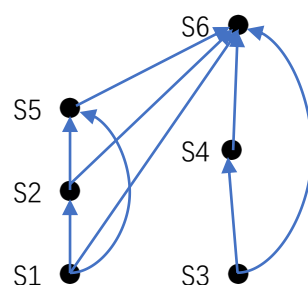
所得这个无向图  $G'$  是  $G$  的子图, 若  $G'$  的所有子图最小度仍小于等于  $a/2$

则重复上述步骤, 易见  $G$  中不可能所有顶点的度都小于等于  $a/2$

否则  $G$  的顶点平均度小于等于  $a/2$ , 与  $G$  的顶点平均度为  $a$  矛盾

重复至某一步时一定可以得到  $G$  的非空子图, 有一个最小度大于  $a/2$  的子图

### Problem 5



### Problem 6

不包含三角形  $K_3$  子图的  $n$  阶图, 能够对图中的每个顶点赋予两种不同的颜色

则这样的  $n$  阶图都是二分图, 假设两个顶点集分别有  $k$  和  $n-k$  个顶点

则其边数  $f(k) = k(n-k)$ , 当且仅当  $k = n/2$  时  $f(k)$  取得最小值为  $n^2/4$ , 即  $m \leq n^2/4$