

中国邮递员问题和旅行商问题

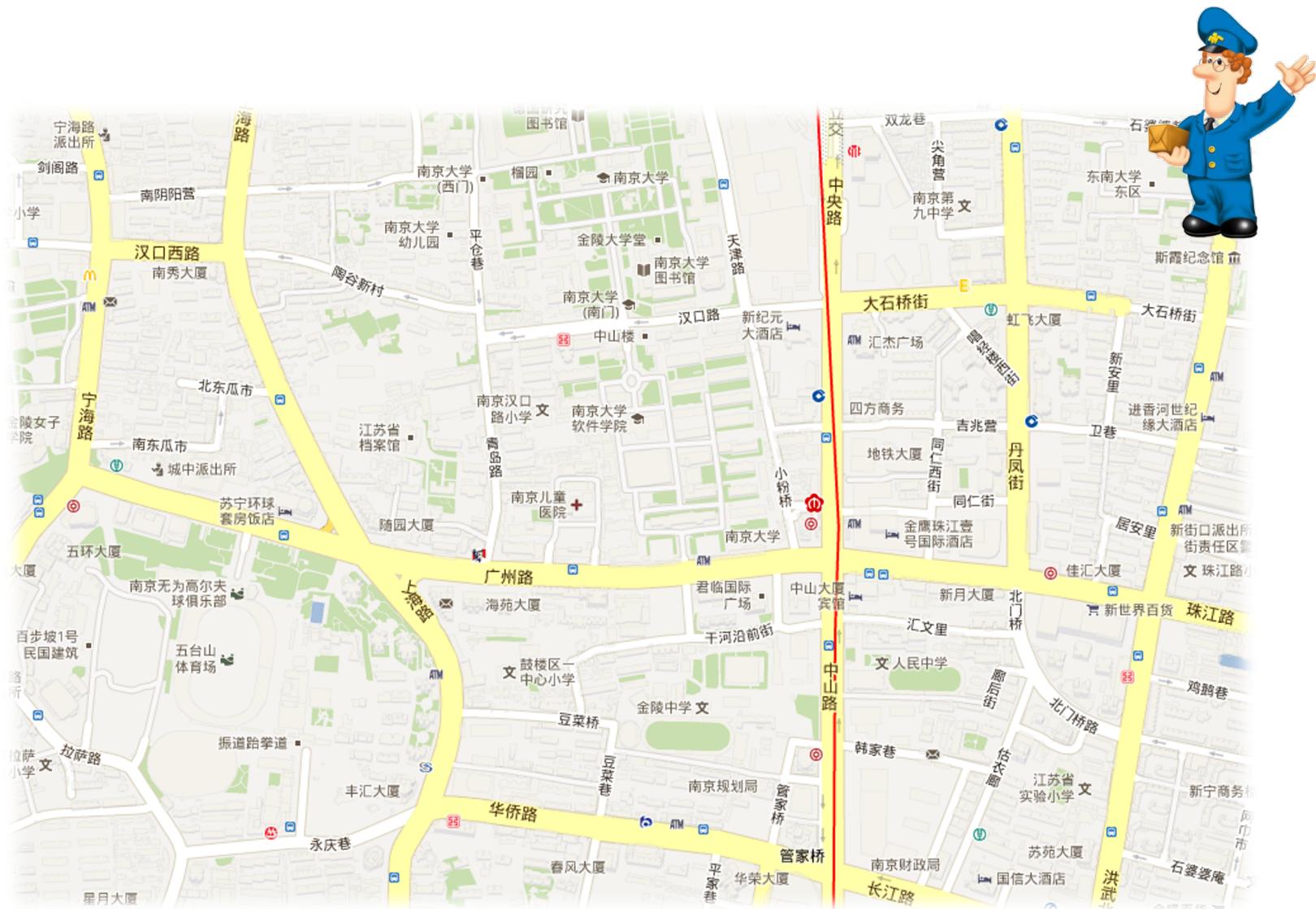
程龚 (gcheng@nju.edu.cn)

本节课的主要内容

4.2 中国邮递员问题

4.4 旅行商问题

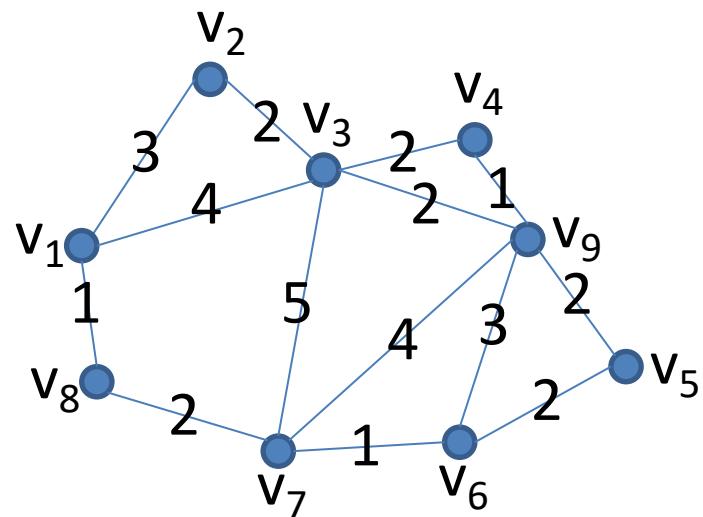
每条路上都有一个邮筒，邮递员从邮局出发，处理每个邮筒后返回邮局，走过的总路程最短。



你能用图来为这个问题建立数学模型吗？

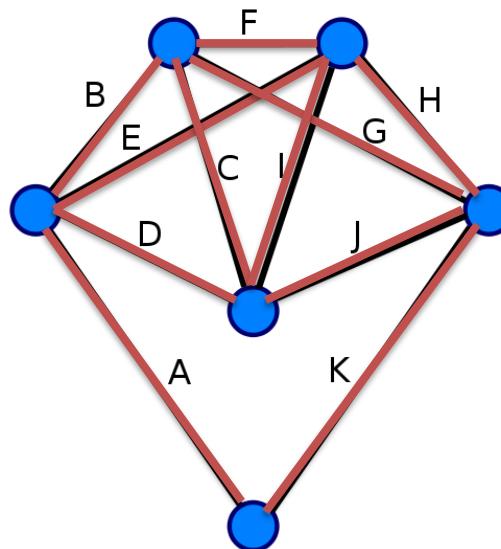
中国邮递员问题

- 求赋权连通图中含所有边且权和最小的闭途径（称作最优邮路）。



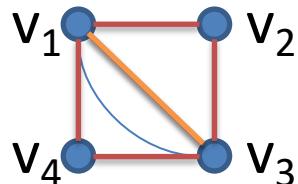
Euler图 (复习)

- Euler迹：经过每条边恰好一次的迹。
- Euler闭迹：经过每条边恰好一次的闭迹。
- Euler图：有Euler闭迹的图。
- Euler图的最优邮路是什么？
 - Euler闭迹



中国邮递员问题的转换

- 非Euler图的最优邮路，有什么特征？
 - 必然要重复经过一些边。
 - 将重复走过的边作为重边添加到图中 \Rightarrow 新图一定是Euler图吗？
 - 原图中的最优邮路，与新图中的Euler闭迹，有什么联系？
- 基于此，你能将中国邮递员问题转换为一个新的问题吗？
 1. 添加重边成为Euler图（如果本来不是的话）。
 2. 使添加的边权和最小。
 3. 找Euler闭迹。



1. 添加重边成为Euler图

- Euler图的充要条件：一个非空连通图是Euler图当且仅当它没有奇度顶点。

⇒ 添加重边的目标是什么？

- 消除奇度顶点。

1. 添加加重边成为Euler图 (续)

- Euler图的充要条件：一个非空连通图是Euler图当且仅当它没有奇度顶点。

证明： \Rightarrow 你能自己证明吗？

Euler图 G 有Euler闭迹 $C \Rightarrow \forall v \in V(G)$

- C 经过 v 关联的每条边恰一次。
- C 每次经过 v ，都要使用2条边。

$\Rightarrow d(v)$ 是偶数

1. 添加加重边成为Euler图 (续)

- Euler图的充要条件：一个非空连通图是Euler图当且仅当它没有奇度顶点。

证明： \Leftarrow (多次运用极值证明法)

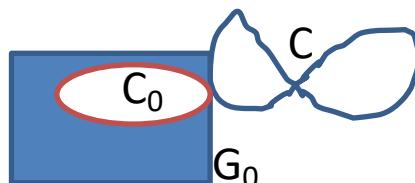
反证法：

取最长路，用反证法

- 令 $S=\{\text{非空、无奇度顶点的、连通的非Euler图}\}$ ，则 $S\neq\emptyset$ 。
- 取 S 中边数最少的一个图，称作 $G \Rightarrow \delta(G)\geq 2 \Rightarrow G$ 有圈 $\Rightarrow G$ 有闭迹
- G 中最长的闭迹称作 $C \Rightarrow C$ 不是Euler闭迹 $\Rightarrow C$ 不经过 G 的至少一条边 $\Rightarrow G-E(C)$ 有一个非空连通分支 G_0 且 $\varepsilon(G_0)<\varepsilon(G)$
- G_0 无奇度顶点，为什么？
 - C 是闭迹 $\Rightarrow G-E(C)$ 后顶点度的奇偶性不变
- 有没有可能 $G_0 \in S$?
如果 $G_0 \in S \Rightarrow \varepsilon(G) \leq \varepsilon(G_0) \Rightarrow$ 与 $\varepsilon(G_0) < \varepsilon(G)$ 矛盾 $\Rightarrow G_0 \notin S$
 $\Rightarrow G_0$ 是Euler图 $\Rightarrow G_0$ 有Euler闭迹 C_0
- $\Rightarrow C$ 与 C_0 可构成 G 中的闭迹且其边数 $> \varepsilon(C) \Rightarrow C$ 不是 G 中最长的闭迹 \Rightarrow 矛盾

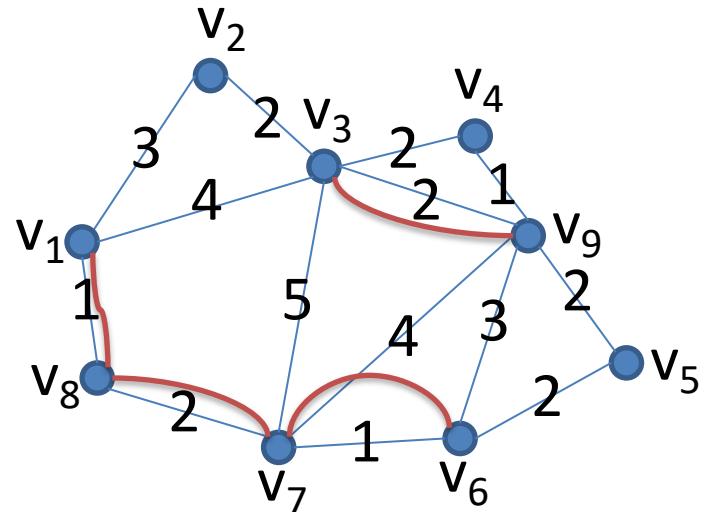
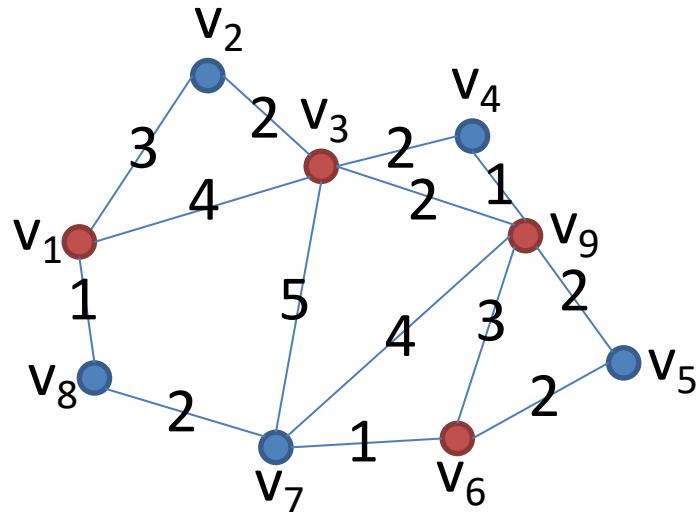


你会描述这条闭迹吗？



1. 添加加重边成为Euler图 (续)

- 如何添加加重边，才能消除奇度顶点？
 - 奇度顶点 → 偶度顶点
 - 偶度顶点 → 偶度顶点



2. 使添加的边权和最小

- 定理4.2.2 设 G 是赋权连通图， G 中有 $2k$ 个奇度顶点。 G^* 是 G 的最优邮路对应的Euler图，令 $E' = E(G^*) \setminus E(G)$ 。则 $H = G[E']$ 是以 G 的奇度顶点为起点和终点的 k 条无公共边的最短路之并。

⇒ 重边的添法？

- 连接 k 对奇度顶点的 k 条无公共边的最短路。
- 且边权和最小。

2. 使添加的边权和最小 (续)

- 定理4.2.2 设 G 是赋权连通图， G 中有 $2k$ 个奇度顶点。 G^* 是 G 的最优邮路对应的Euler图，令 $E' = E(G^*) \setminus E(G)$ 。则 $H = G[E']$ 是以 G 的奇度顶点为起点和终点的 k 条无公共边的最短路之并。

证明：

1. H 有 $2k$ 个奇度顶点，为什么？

G^* 是Euler图 $\Rightarrow G^*$ 无奇度顶点 $\Rightarrow E'$ 中关联到 G 的每个奇/偶度顶点的边有奇/偶数条 \Rightarrow G 中的奇度顶点在 H 中仍是奇度顶点， G 中的偶度顶点在 H 中仍是偶度顶点或不出现 \Rightarrow 得证

2. H 中没有圈，为什么？

假设 H 中有圈 $C \Rightarrow C$ 在 G^* 中 $\Rightarrow G^*$ 中删去 C 后无奇度顶点 \Rightarrow 是Euler图且边权和比 G^* 小 \Rightarrow G^* 不是最优邮路对应的Euler图 \Rightarrow 矛盾 \Rightarrow 得证

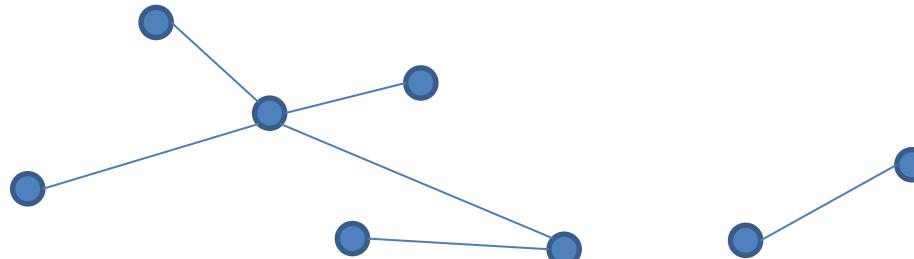
3. 从 H 的任一个奇度顶点出发沿未走过的边前行直到无法继续，形成迹 $P_1 \Rightarrow$

- P_1 的终点是奇度顶点，为什么？
- P_1 是路，为什么？
- P_1 是最短路，为什么？

否则 \Rightarrow 在 G^* 中用更短的路替换 $P_1 \Rightarrow$ 得到边权和更小的Euler图 $\Rightarrow G^*$ 不是最优邮路对应的Euler图 \Rightarrow 矛盾

4. 从 H 去掉 P_1 ，剩余 $2k-2$ 个奇度顶点，同理可找到 P_2, P_3, \dots, P_k 。

5. 剩余图中无圈无奇度顶点 \Rightarrow 无边 $\Rightarrow H$ 是以 G 的奇度顶点为起点和终点的 k 条无公共边的最短路之并



2. 使添加的边权和最小 (续)

- 定理4.2.2 设 G 是赋权连通图， G 中有 $2k$ 个奇度顶点。 G^* 是 G 的最优邮路对应的Euler图，令 $E' = E(G^*) \setminus E(G)$ 。则 $H = G[E']$ 是以 G 的奇度顶点为起点和终点的 k 条无公共边的最短路之并。

⇒ 重边的添法？

- 连接 k 对奇度顶点的 k 条无公共边的最短路。
- 且边权和最小。

这里的关键是要确定一件什么事情？这让你联想到我们学过的哪个概念？

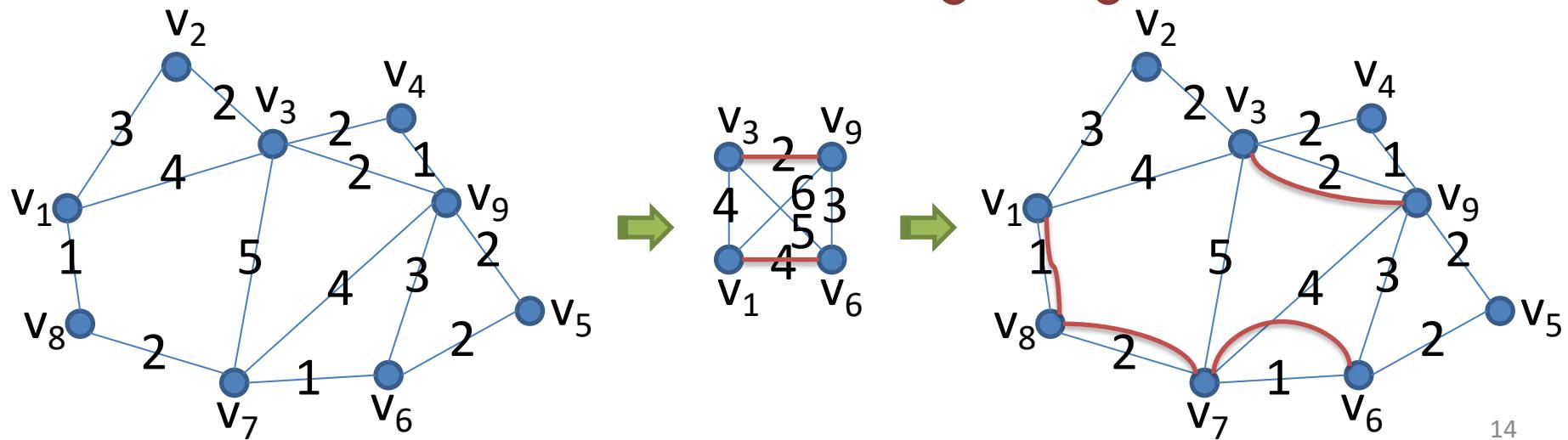
顶点如何配对 → 匹配

2. 使添加的边权和最小 (续)

- Edmonds-Johnson 算法

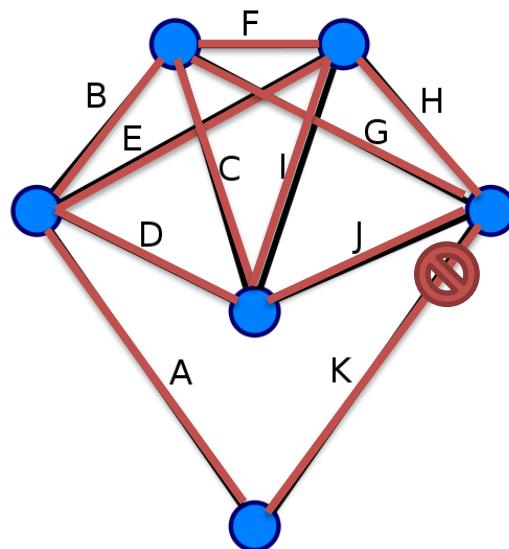
1. 找到所有 $2k$ 个奇度顶点间的最短路。
2. 构造一个完全图 K_{2k} : 顶点为 $2k$ 个奇度顶点, 边权为最短路的边权和。
3. 找 K_{2k} 的最小权完美匹配 M 。
4. 沿 M 对应的最短路添加重边。

为什么这 k 条路一定恰没有公共边?
删去公共边后, 可得到权更小的完美匹配 \Rightarrow 矛盾



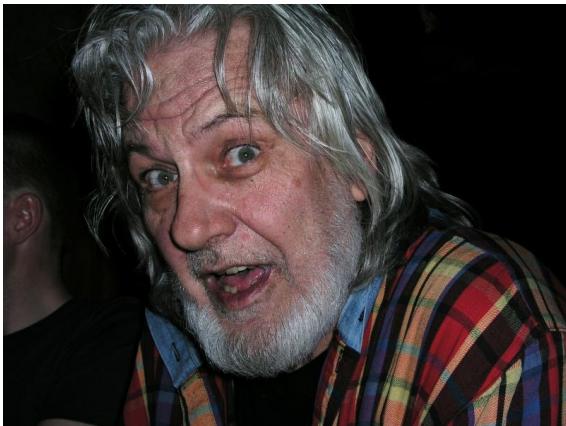
3. 找Euler闭迹

- Fleury算法
 - 基本思路：尽可能沿剩余图的非割边前行。



Edmonds-Johnson算法的时间复杂度

1. 找两两最短路
 - Floyd-Warshall算法: $O(v^3)$
2. 构造完全图: $O(v^2)$
3. 找最小权完美匹配
 - Edmonds算法: $O(v^3)$
 - 另有 $O(\sqrt{v}\varepsilon)$ 算法
4. 添加重边: $O(\varepsilon)$
5. 找Euler闭迹
 - Fleury算法: $O(\varepsilon^2)$
 - 另有 $O(\varepsilon)$ 算法



Jack R. Edmonds, 美国, 1934--



Ellis L. Johnson, 美国, 1938--

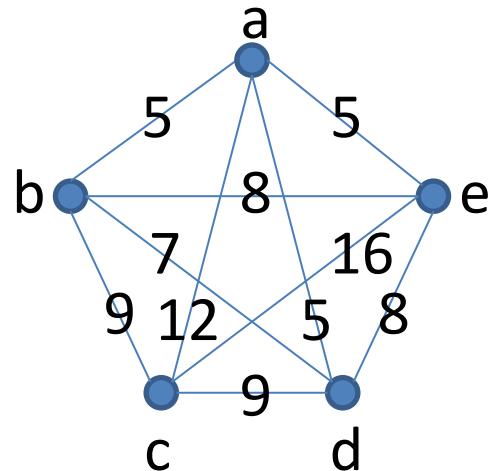
旅行商经过每座城市恰一次后返回起点，经过的总路程最短。



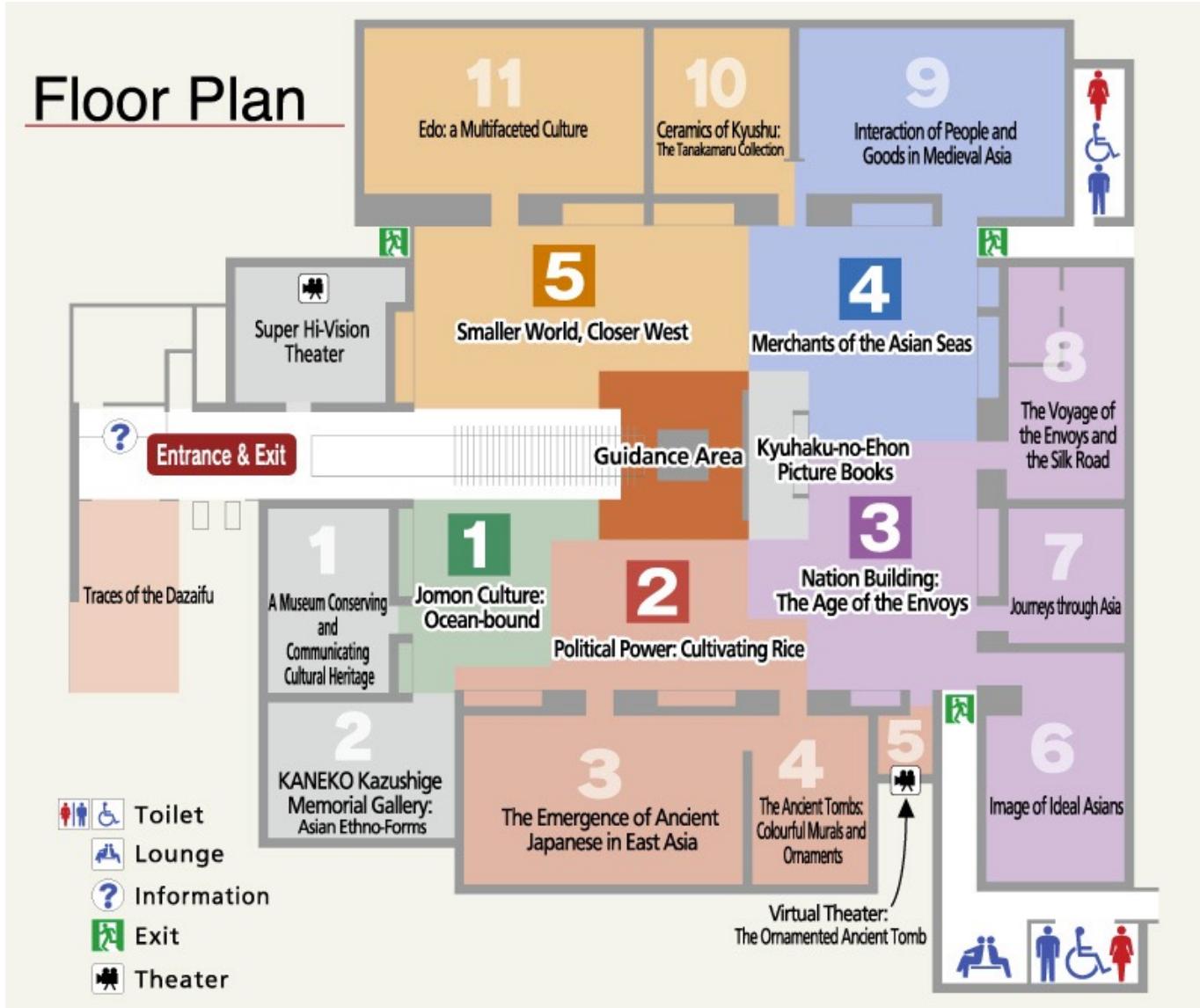
你能用图来为这个问题建立数学模型吗？

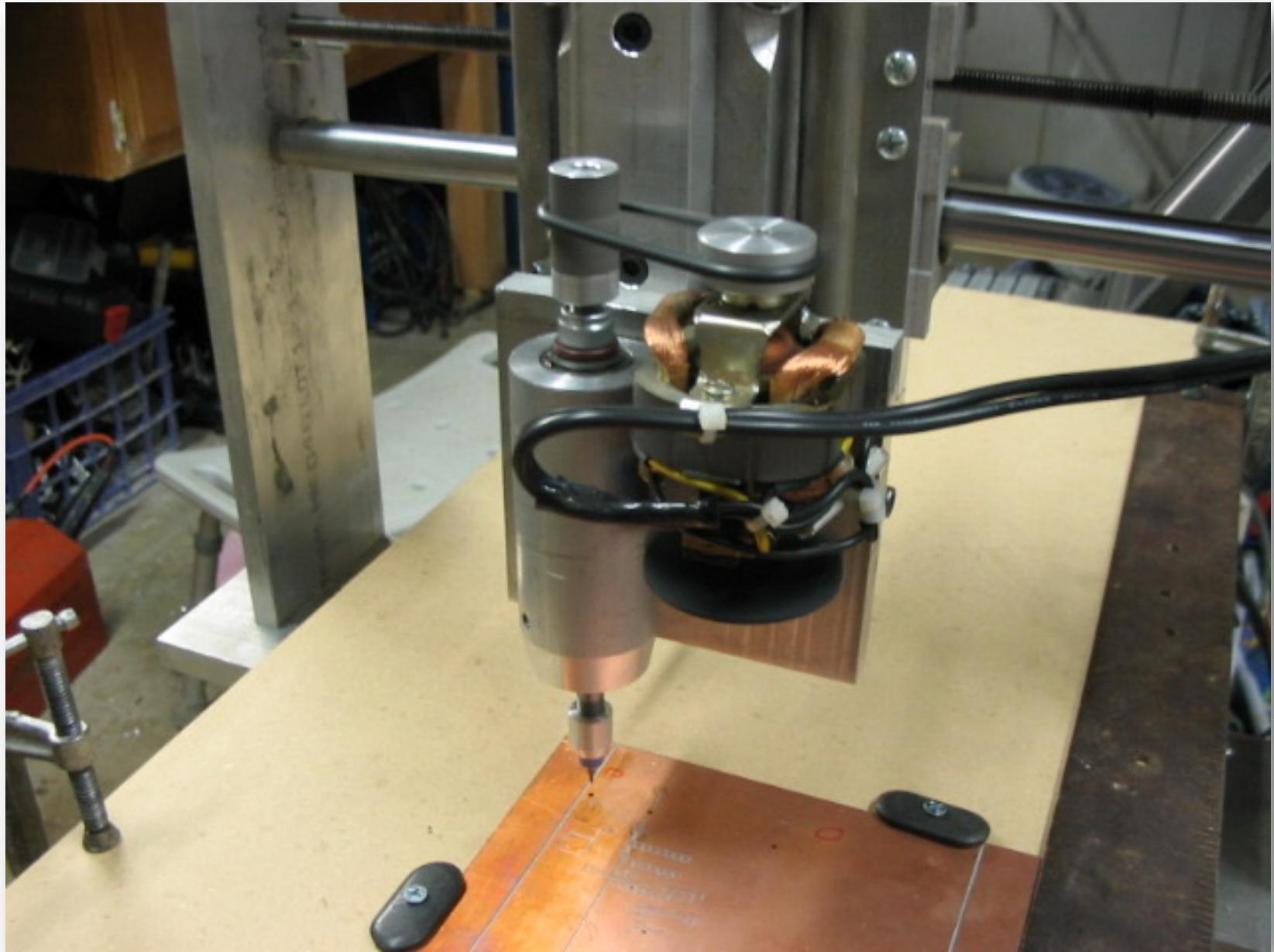
旅行商问题

- 求赋权连通图中经过每个顶点恰一次且权和最小的圈。
 - 通常假设: $\forall v_i, v_j, v_k \in V(G), w(v_i, v_j) + w(v_j, v_k) \geq w(v_i, v_k)$
 - 通常只讨论边权为正数的完全图 K_n (缺失的边可以赋权 ∞)



Floor Plan





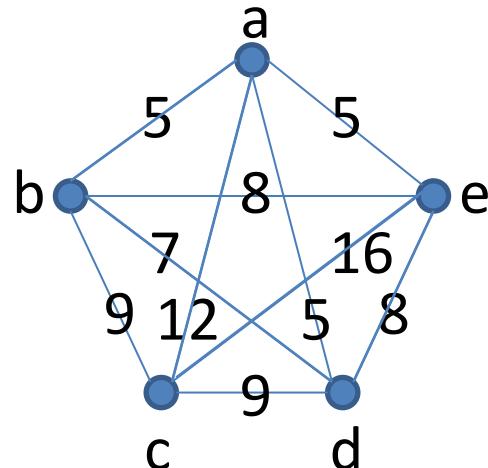


Hamilton图 (复习)

- Hamilton路：经过每个顶点恰一次的路。
- Hamilton圈：经过每个顶点恰一次的圈。
- Hamilton图：有Hamilton圈的图。

旅行商问题的难度

- 找Hamilton圈： NP-complete
- 找权和最小的Hamilton圈： NP-hard
- 因此，通常采用近似算法
 - 高效地找出较优解
 - 你自己能想出一些方法吗？



旅行商问题的近似算法

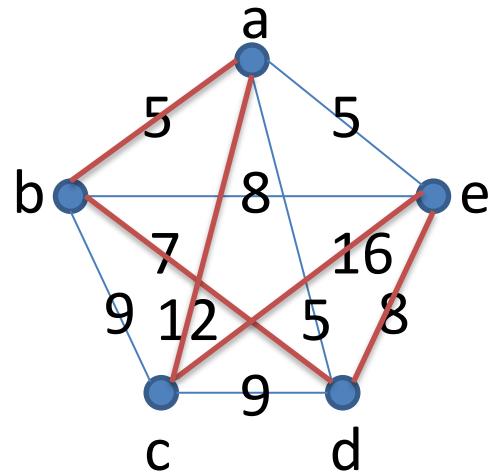
- 邻近点法
- 最小生成树法
- 最小权匹配法
- Kernighan-Lin

邻近点法

- 基本思路
 - 总是贪心地选择最近的未访问邻点前行。

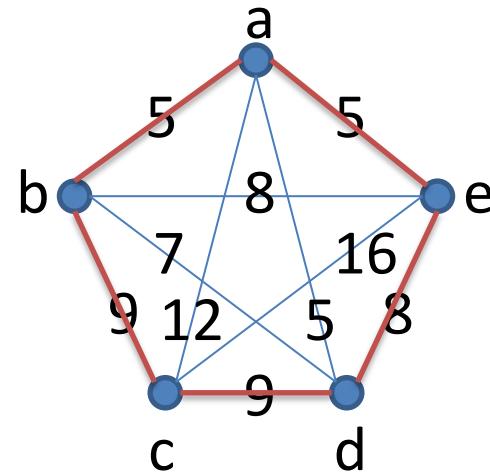
邻近点法 (续)

- 举例 (从a出发)
 - $5+7+8+16+12=48$



邻近点法 (续)

- 举例 (从b出发)
 - $5+5+8+9+9=36$



邻近点法 (续)

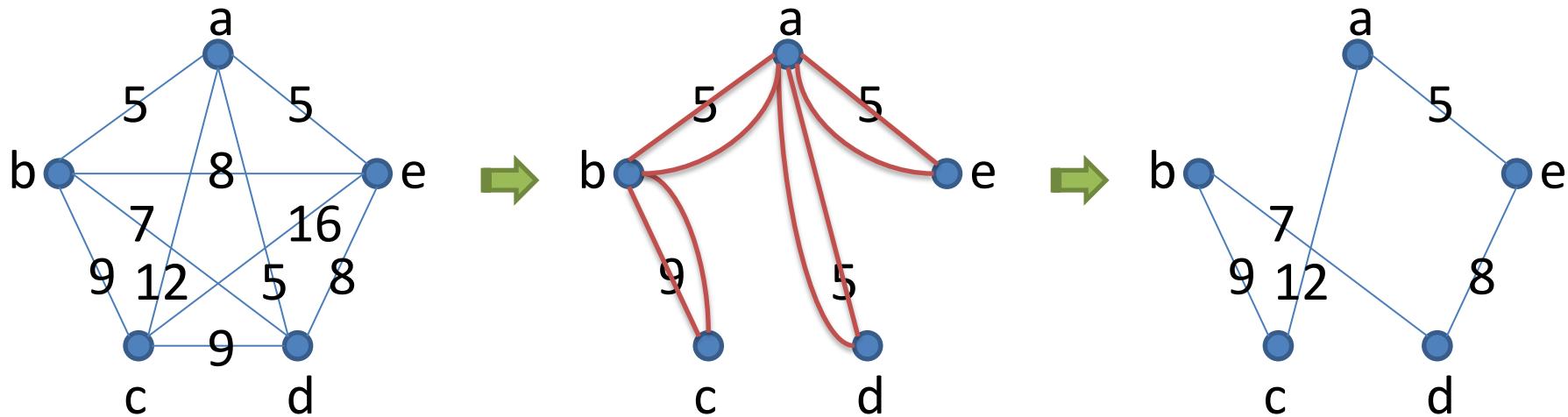
- 近似比 $w(H)/w(H^*) \leq \frac{1}{2}(\lceil \log_2 \nu \rceil)$
- 最终结果与以下因素有关
 - 初始点

邻近点法 (续)

- 时间复杂度: $O(v^2)$

最小生成树法

1. 找 K_n 的一棵最小生成树 T 。
2. 为 T 中的每条边添加重边成为 T^* 。
3. 找 T^* 的一条Euler闭迹 C 。
4. 沿 C 前行，跳过已访问过的顶点，直至访问完所有顶点。



最小生成树法 (续)

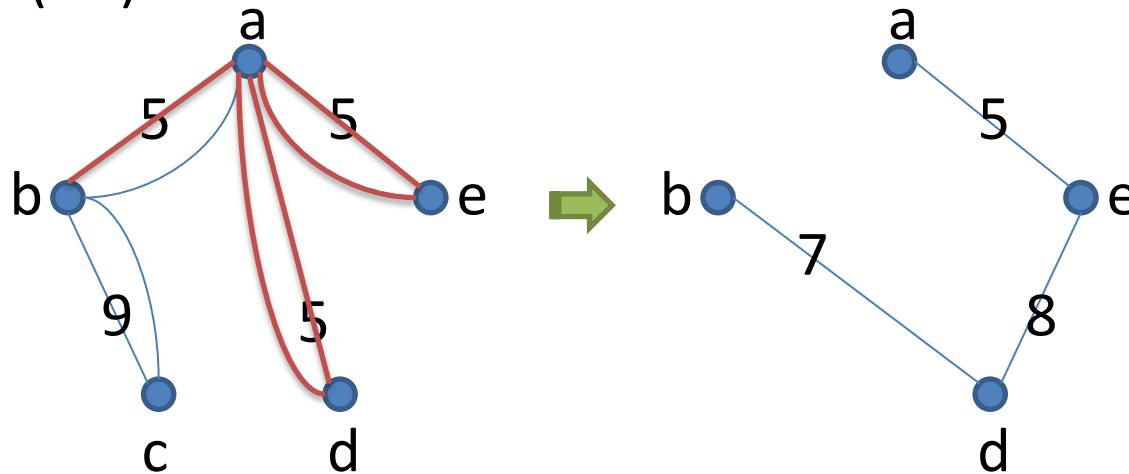
- 近似比 $w(H)/w(H^*) < 2$
- 最终结果与以下因素有关
 - 最小生成树
 - 闭迹
 - 闭迹的初始点

最小生成树法 (续)

- 近似比 $w(H)/w(H^*) < 2$

证明：

1. 三角不等式 $\Rightarrow w(H) \leq w(C) = w(T^*) = 2w(T)$
2. $w(H^*) > w(T)$, 为什么?
 - H^* 比生成树多一条边 (这就是想到用最小生成树的原因)
3. $w(H)/w(H^*) < 2$

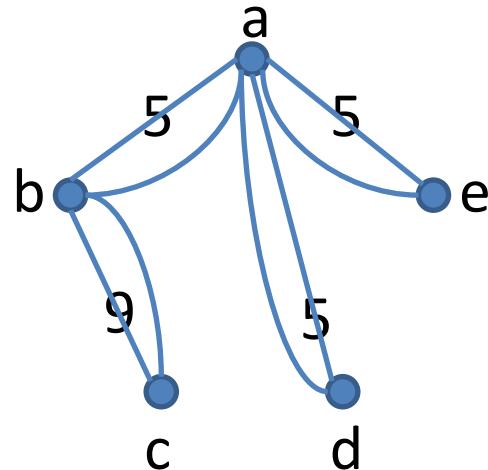


最小生成树法 (续)

- 时间复杂度
 1. 找最小生成树
 - Prim算法: $O(\varepsilon + v \log v)$
 2. 添加重边: $O(v)$ //生成树的边数为 $v-1$
 3. 找Euler闭迹
 - Fleury算法: $O(v^2)$
 - 另有 $O(v)$ 算法
 4. 沿Euler闭迹前行: $O(v)$

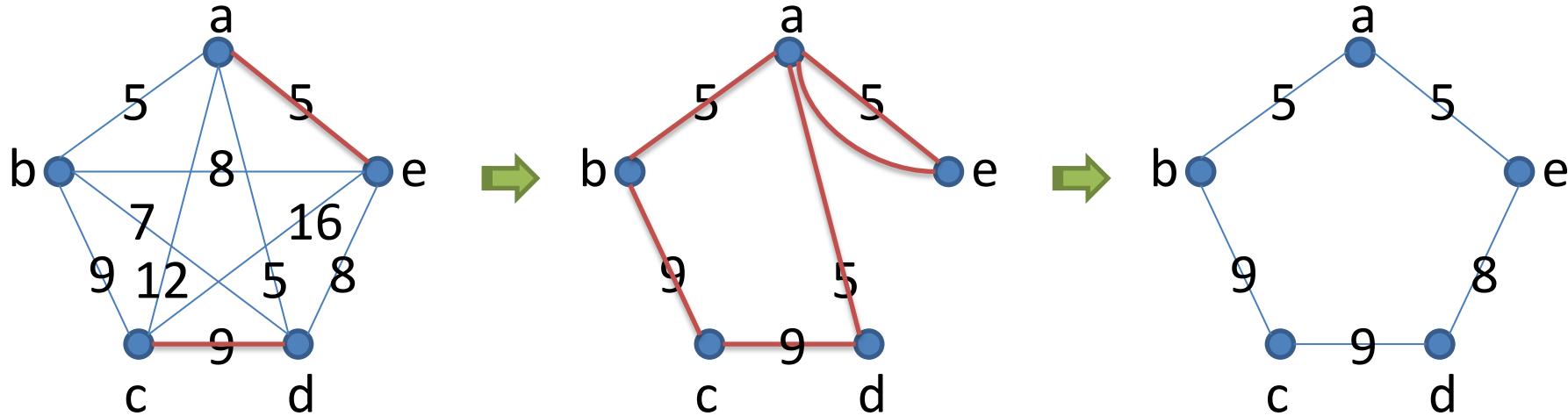
最小生成树法 (续)

- 你能根据刚才的证明，优化这个算法吗？
(提示：从 T 到 T^* 需要添加那么多边吗？)
 - $w(H) \leq w(C) = w(T^*) = 2w(T)$



最小权匹配法

1. 找 K_n 的一棵最小生成树 T 。
2. 找 T 中奇度顶点在 K_n 中导出子图 G' 的最小权完美匹配 M 。
3. 将 M 添加到 T 中成为 T^* 。
4. 找 T^* 的一条Euler闭迹 C 。
5. 沿 C 前行，跳过已访问过的顶点，直至访问完所有顶点。



最小权匹配法 (续)

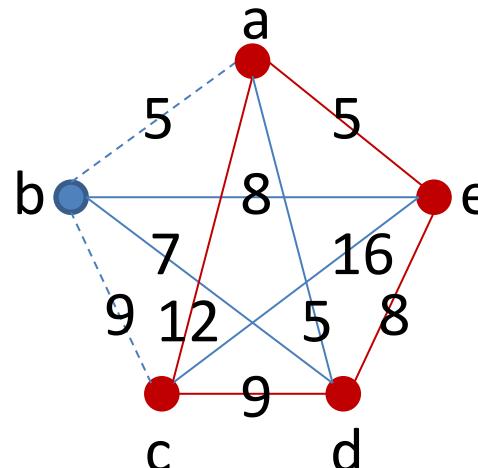
- 近似比 $w(H)/w(H^*) < 3/2$
- 最终结果与以下因素有关
 - 最小生成树
 - 最小权完美匹配
 - 闭迹
 - 闭迹的初始点

最小权匹配法 (续)

- 近似比 $w(H)/w(H^*) < 3/2$

证明：

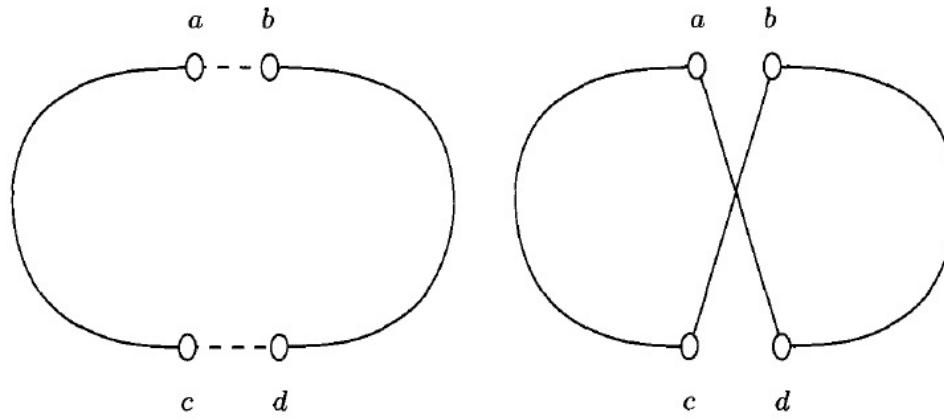
1. 三角不等式 $\Rightarrow w(H) \leq w(C) = w(T^*) = w(T) + w(M)$
2. H^* 比生成树多一条边 $\Rightarrow w(H^*) > w(T)$
3. 三角不等式 $\Rightarrow w(H') \leq w(H^*)$, 为什么? (H' 是 G' 中的某个 Hamilton 圈)
 - H' 可由 H^* 反复“去二添一”得到
4. $w(M) \leq w(H')/2$, 为什么?
 - G' 的某个完美匹配可由 H' 中交替取边得到
5. $w(H)/w(H^*) < 3/2$



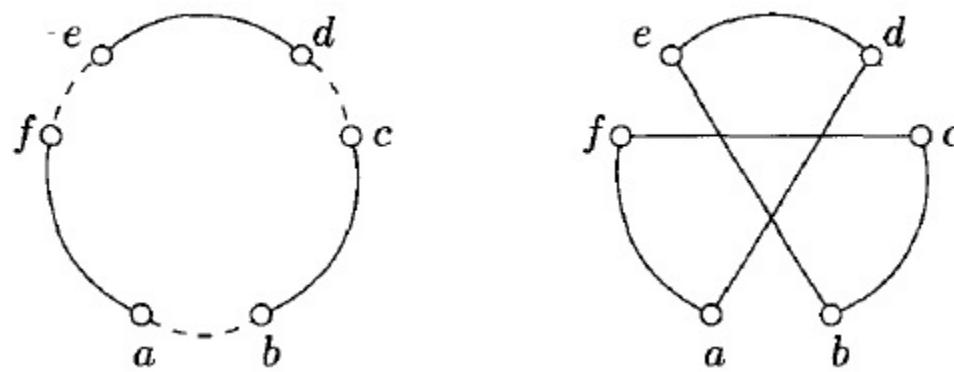
最小权匹配法 (续)

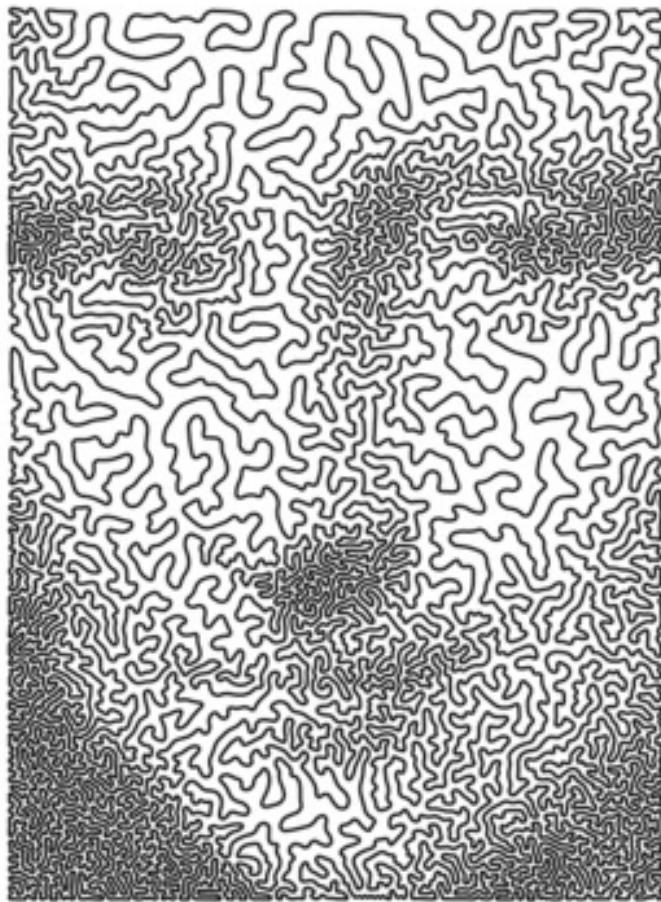
- 时间复杂度
 1. 找最小生成树
 - Prim算法: $O(\varepsilon + v \log v)$
 2. 找最小权完美匹配
 - Edmonds算法: $O(v^3)$
 - 另有 $O(\sqrt{v\varepsilon})$ 算法
 3. 添加边: $O(v) // M$ 的边数最多为 $v/2$
 4. 找Euler闭迹
 - Fleury算法: $O(v^2)$
 - 另有 $O(v)$ 算法
 5. 沿Euler闭迹前行: $O(v)$

Kernighan-Lin



理论近似比：较差
但实际效果：较好





作业

- 4.12 (要写出过程) //Edmonds-Johnson算法