Problem 1

长度为 12 且不包含“11”子串的二进制串最多可含有 12/2=6 个 1

分别考虑含有 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 个 1 的情况可得这样的二进制串总数为

$C(7, 6)+C(8, 5)+C(9, 4)+C(10, 3)+C(11, 2)+C(12, 1)+C(13, 0) =$

$7 + 56 + 126 + 120 + 55 + 12 + 1 = 377$.

Problem 2

该问题可转化为求方程 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 = 32$ 的解的个数(x_i 是正整数),

即 $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7 = 25$ 的解的个数(y_i 是非负整数).

则方程解的个数为 $C(7+25-1, 25) = C(31, 25) = C(31, 6) = 736281$.

Problem 3

该问题可转化为求方程 $x_1+x_2+x_3=20$ ($x_1\geqslant 2$, $x_3\leqslant 10$)的解的个数.

即方程 $y_1+y_2+y_3=18$ 解的个数减去 $z_1+z_2\leqslant 9$ (同 $w_1+w_2+w_3=9$)解的个数.

放置的方法有 $C(3+18-1, 18) – C(3+9-1, 9) = C(20, 2) – C(11, 2) = 135$ 种.

Problem 4

正方形共用三种颜色的涂法有 $A(10, 3) = 10\times 9\times 8 = 720$ 种.

正方形共用两种颜色的涂法有 $C(10, 2)\times C(2, 1) = 10\times 9 = 90$ 种.

则不同旗帜的个数为 $720\times 7\times 7\times 7 + 90\times 8\times 8\times 8 = 293040$.

Problem 5

a) $1\times C(9, 5)\times A(6, 6) = 1\times 126\times 720 = 90720$

b) $1\times C(8, 4)\times A(6, 6) = 1\times 70\times 720 = 50400$

c) $2\times C(8, 5)\times A(6, 6) = 2\times 56\times 720 = 80640$

Problem 6

由一个正 n 边形的顶点构成的三角形有 $C(n, 3) = n(n-1)(n-2)/6$ 个.

如果正 n 边形的边不能是构成三角形的边，这样的三角形有 0 个($n=3$),

$C(n, 3) – n – n\times(n-4) = n(n-1)(n-2)/6 – n(n-3) = n(n^2-9n+20)/6$ 个($n\geqslant 4$).

Problem 7

有 $450+622+30-111-14-18+9 = 968$ 名申请人不合格,

则有 $1000-968 = 38$ 名申请人合格.

Problem 8

设 P(n)是命题$|\cup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(i-1)} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} |\cap_{j=1}^{i} A_{ij}|$.

基础步骤：当 $n=2$ 时，易知$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$, P(2)成立.

归纳步骤：当 $n>2$ 时，假设 P(n-1)成立，即

$|\cup_{i=1}^{n-1} A_i| = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{(i-1)} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} |\cap_{j=1}^{i} A_{ij}|$.

$|\cup_{i=1}^{n} A_i| = |(\cup_{i=1}^{n-1} A_i)\cup A_n| = |\cup_{i=1}^{n-1} A_i| + |A_n| - |(\cup_{i=1}^{n-1} A_i)\cap A_n|$

$= |\cup_{i=1}^{n-1} A_i| + |A_n| - |\cup_{i=1}^{n-1} (A_i\cap A_n)|$

$= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{(i-1)} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} |\cap_{j=1}^{i} A_{ij}| + \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{(i-1)}$
$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{k-1}\leqslant n-1} |\cap_{j=1}^{i-1} A_{ij}\cap A_n| + (-1)^{(n-1)}|\cap_{i=1}^{n} A_i|$

$= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{(i-1)} \sum_{1\leqslant i1<i2<\cdots<ik\leqslant n} |\bigcap_{j=1}^{i} Aij| + \sum_{i=1}^{n} |Ai| + (-1)^{(n-1)}|\bigcap_{i=1}^{n} Ai|$

$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(i-1)} \sum_{1\leqslant i1<i2<\cdots<ik\leqslant n} |\bigcap i\ j=1\ Aij|$.

根据数学归纳法可知对所有不小于 2 的正整数 n, P(n)为真.

得出结论: $\forall n\in N$ 且 $n\geqslant 2$, $|\bigcup n\ i=1\ Ai| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(i-1)} \sum_{1\leqslant i1<i2<\cdots<ik\leqslant n} |\bigcap i\ j=1\ Aij|$.

Problem 9

a) 若四个人拿到正确的帽子, 第五个人只能拿到自己的帽子, 概率: 1/5! = 120.

b) 五个人的帽子都拿错的概率: 1/1 – 1/1 + 1/2 – 1/6 + 1/24 – 1/120 = 11/30.

c) 超过一个人拿到正确的帽子的概率: 1 – 11/30 – 3/8 = 61/120.