

# 离散数学-图论作业 7 二部图匹配

如无特意说明，以后各题只考虑有限个点的图。

## Problem 1

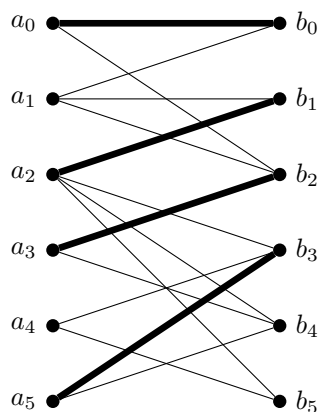
证明：二部图  $G$  是简单图且有  $\mathcal{V}$  个顶点  $\mathcal{E}$  条边，证明  $\mathcal{E} \leq \mathcal{V}^2/4$ 。

## Problem 2

证明：一个无回路的简单连通图最多只有一个完美匹配。（完美匹配指能饱和所有顶点的匹配）

## Problem 3

从下图  $G = (A, B, E)$  中，找出相对于匹配  $M$  (粗边的集合) 的任意三条交错路径 (alternating path) 和至少两条增广路径 (augmenting path)，然后利用增广路径扩大  $M$  来找到最大匹配。



## Problem 4

对于哪些  $n$  值来说，下列图是存在完美匹配的二部图？

a)  $K_n$

b)  $C_n$

c)  $Q_n$

## Problem 5

令  $k$  为一整数。对于任意有限集合，证明对它的任意两个  $k$  划分都存在一个相同的代表集。

- 集合的  $k$  **划分**指划分为大小相同的互不想交的  $k$  个子集，为简便起见，设集合的大小为  $k$  的整数倍从而每个子集均有相同个元素。
- 一个划分的**代表集**指从每个子集中取出一个元素而构成的集合。

举例：集合  $\{1, 2, 3, 4\}$  的一个 2 划分为  $A: \{1, 2\}\{3, 4\}$ 。此划分的代表集有  $\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}$ ，但  $\{1, 2\}$  不是其代表集。集合的另外一个划分为  $B: \{2, 3\}\{1, 4\}$ 。易见， $A$  与  $B$  存在相同的代表集  $\{1, 3\}$ 。

## Problem 6

假设某校计算机系学生选导师时出现了这样的情况：对于每一位学生，至少对  $k$  名导师感兴趣；对于每一位导师，至多有  $k$  名学生对他感兴趣。假设每位导师只能指导 1 名学生，且每位学生也只能选择 1 名导师。试证明：存在这样的匹配，使得每位学生都能选到自己感兴趣的导师。