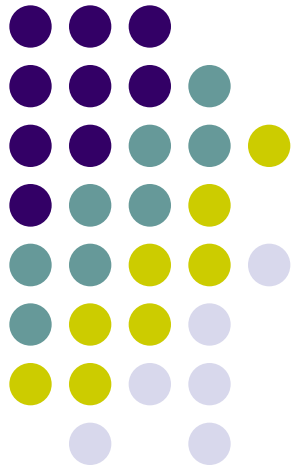
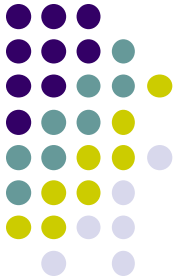
归纳与递归

离散数学

马晓星

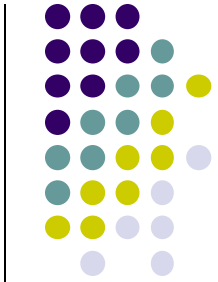
南京大学·计算机科学与技术系





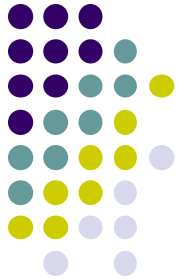
提要

- 数学归纳法与良序原理
- 递归定义与结构归纳法
- 证明程序正确性与复杂度



数学归纳法与良序原理

数学归纳法



- 回顾：皮亚诺公理
  1. 零是个自然数.
  2. 每个自然数都有一个自然数后继.
  3. 零不是任何自然数的后继.
  4. 不同的自然数有不同的后继.
  5. 设由自然数组成的某个集合含有零，且每当该集合含有某个自然数时便也同时含有这个数的后继，那么该集合定含有全部自然数.【归纳公理】

$\{x \in \mathrm{N} | P(x)\}$含有全部自然数 等同于 $P(n)$对所有自然数n成立.

数学归纳证明要点

- 证明目标

  $P(n)$对所有的自然数n成立. //需明确定义$P(n)$.

- 证明框架

  说明将通过归纳来证明. // 例如：我们对n做归纳.

  - 基础步骤：

    写出$P(0)$ 并证明之. // 通常比较简单.

  - 归纳步骤：

    写出归纳假设$P(k)$, 和待证明的 $P(k+1)$，而后证明之。

  - 说明归纳证明完毕.

    // 必要时重复原命题：因此，$P(n)$对所有的自然数n成立.
    // 或者简单说证毕. 以及 ■

例：证明自然数加法满足交换律

加法交换律：对于任意自然数a, b, c, 有 $(a+b)+c=a+(b+c)$

证明： 我们证明$P(c)$对任意自然数c成立, 其中 $P(c)$为

对于任意自然数a和b, 有 $(a+b)+c=a+(b+c)$

现对c做归纳。

基础步骤： $(a+b)+0=a+b=a+(b+0)$.

归纳步骤： 假设$P(k)$成立，即$(a+b)+k=a+(b+k)$, 现证明

$$(a+b)+(k+1)=a+(b+(k+1)).$$

$$\begin{aligned}(a+b)+(k+1)&=(a+b)+S(k)=S\big((a+b)+k\big)\\&=S\big(a+(b+k)\big)=a+S(b+k)\\&=a+\big(b+S(k)\big)=a+\big(b+(k+1)\big)\end{aligned}$$

于是归纳步骤完成。

归纳证明完毕。 ■

加法定义：对于任意的自然数 m, n

$m+0=m$; 【A1】

$m+S(n)=S(m+n)$. 【A2】

例: 奇数个人的馅饼之战

- 平地上有奇数个人, 人之间的距离各不相同. 随着一声令下, 每个人都朝距其最近的那个人扔馅饼.
- 试证明, 至少有一个人没挨着馅饼.

如何定义$P(n)$, 并用数学归纳法证明之?

运用数学归纳法时犯的错误

- 平面上任何$n \geq 2$条互不平行的直线必交于一点。

  证明: 我们对n做归纳.

  - 基础步骤：两条不平行的直线必交于一点.
  - 归纳步骤：假设任何k条互不平行的直线交于一点.

    对于任意$k+1$条互不平行的直线，其中：

    前k条必交于一点，记为p_1;

    后k条必交于一点，记为p_2;

    考虑到同时属于前k条与后k条的直线, 必有

    $$p_1 = p_2$$

    于是这$k+1$条互不平行的直线交于一点。

  原命题归纳证明完毕. ■

强数学归纳法

- 证明目标
  - $P(n)$对所有的自然数n成立.
- 证明框架

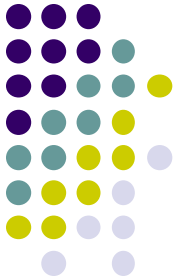
  说明将通过归纳来证明.
  - 基础步骤：

    写出$P(0)$ 并证明之.
  - 归纳步骤：

    假设$P(0), P(1), \ldots, P(k)$ 均成立，证明 $P(k+1)$成立。
  - 说明归纳证明完毕.

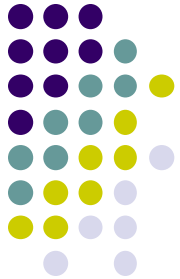
    //因此，$P(n)$对所有的自然数n成立. ■

强数学归纳法（一般形式）



- 设$P(n)$是与整数n有关的陈述， a和b是两个给定的整数，且$a \le b$.
- 如果能够证明下列陈述
  - $P(a), P(a+1), \ldots, P(b)$.
  - 对任意$k \ge b$, $P(a) \wedge \ldots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)$
- 则下列陈述成立
  - 对任意$n \ge a$, $P(n)$.

强数学归纳法（举例）



- 任意整数$n(n \geq 2)$可分解为（若干个）素数的乘积
  - $n = 2$.
  - 考察 n+1.

- 用4分和5分就可以组成12分及以上的每种邮资.
  - $P(12), P(13), P(14), P(15)$.
  - 对任意$k \geq 15$, $P(12) \wedge \ldots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)$

良序原理

- 良序原理: 自然数**N**的任何非空子集S均有最小元素.

  所谓 "S有最小元素" 即$\exists a \in S(\forall b \in S(a \neq b \rightarrow a < b))$

- 良序原理与数学归纳法 (归纳公理)的关系【严格说有差异】

  ⇒【概要】【注：需在皮亚诺公理1-4基础上额外假设每个非0自然数都有一个直接前驱】

  假设$\forall n \in \mathbf{N}\ P(n)$不成立，则 $\exists n\ (\neg P(n))$成立. 令S={ $n \in \mathbf{N} \mid \neg P(n)$}，S非空.
  根据良序原理，S有最小元素，记为m, 由奠基步骤，$m \neq 0$
  由m的最小性，$(m\text{-}1) \notin$S, 即$P(m\text{-}1)$成立.

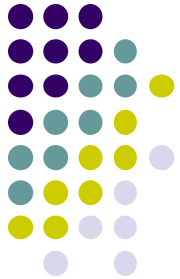
  根据归纳步骤，$P(m)$成立，即$m \notin$S，矛盾.

  因此，$\forall n \in \mathbf{N}\ P(n)$成立.

  ⇐【概要】令A为**N**的无最小元的非空子集, B = **N**-A.
  基础步骤: $0 \in B$. 这是因为$0 \notin A$, 否则0即其最小元.
  归纳步骤: 若$0,\ldots,n \in B$, 则$(n+1) \in B$. 否则$n+1$是A的最小元.

  根据归纳原理 B=**N**. 这与A非空矛盾.

良序原理在证明中的应用（举例）



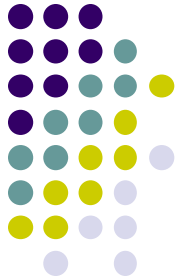
- 其实我们经常不经意地用到良序原理, 例如
  - 我们在证明$\sqrt{2}$不是有理数时, 说:
    假设$\sqrt{2}$ 是有理数，那么总可以找到互素的正整数p, q
    使得$\sqrt{2} = p/q$，……　　(为什么?)
    其实这里我们是在说:

    令p为满足$\sqrt{2} = p/q$的最小正整数,则p, q 一定互素,
    否则假设$\gcd(p, q) = c > 1$, 则$\sqrt{2} = (p/c)/(q/c)$,
    但是$p/c < p$, 矛盾!

良序原理在证明中的应用（举例）

- 设a是整数, d是正整数, 则存在唯一的整数q和r满足 $a = dq + r$ 其中 $0 \le r < d$.
- 证明概要
  - 令S=$\{a-dq \mid 0 \le a-dq$ ， $q \in Z\}$， S非空.
  - 非负整数集合具有良序性
  - S有最小元，记为$r_0 = a-dq_0$.
  - 可证 $0 \le r_0 < d$
  - 唯一性证明， $0 \le r_1 - r_0 = d(q_0-q_1) < d$，因此，$q_1=q_0$

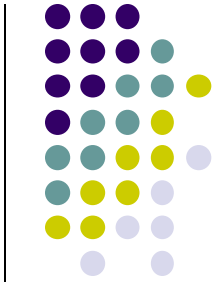
良序原理在证明中的应用（举例）



- 在循环赛胜果图中，若存在长度为m（$m\geq 3$）的回路，则必定存在长度为3的回路。

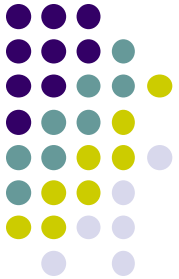
  备注：$a_i \to a_j$ 表示a_i赢了a_j

- 证明概要
  - 设**最短回路的长度**为k //良序原理的保证
  - 假设 $k>3$
  - $a_1 \to a_2 \to a_3 \to \ldots \to a_k \to a_1$
  - 若$a_3 \to a_1$, 存在长度为3的回路，矛盾。
  - 若$a_1 \to a_3$, 存在长度为$(k-1)$的回路，矛盾。



递归定义与结构归纳法

递归定义函数



- 递归地定义自然数集合**N**上的函数。
  - 基础步骤：指定这个函数在0处的值；
  - 递归步骤：给出从较小处的值来求出当前值的规则。

- 例如: 阶乘函数$F(n) = n!$的递归定义
  - $F(0) = 1$
  - $F(n) = n \cdot F(n-1)$ for $n > 0$

显然, 用数学归纳法可以证明这样的函数是well-defined.

Fibonacci 序列

- Fibonacci 序列 $\{f_n\}$ 定义如下
  - $f_0 = 0,$
  - $f_1 = 1,$
  - $f_n = f_{n-1} + f_{n-2},$ 对任意$n \geq 2.$
- 其前几个数
  - 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, …
- 证明：对对任意$n \geq 0$，　$f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$　(*)

其中，　$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}.$

归纳证明: Fibonacci 序列

证明: 对n做归纳.

基础步骤: 当$n = 0,1$时，易验证$(*)$式成立。

归纳步骤: 假设$(*)$式对于$n \le k$时成立 $(1 \le k)$,

现证明其对于$n = k + 1$时成立:

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$$

$$= \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\left(\alpha^k + \alpha^{k-1}\right) - \left(\beta^k + \beta^{k-1}\right)}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha - \beta}.$$

注意：$\alpha^2 = \alpha + 1$，
且对任意$n \ge 1$
$\alpha^{n+1} = \alpha^n + \alpha^{n-1}$.

于是我们证明了$(*)$式对于所有自然数n成立. ■

递归定义集合

- 字母表Σ上的**字符串**集合Σ^*.
  - 基础步骤： $\lambda \in \Sigma^*$ （λ表示空串）；
  - 递归步骤：若$\omega \in \Sigma^*$ 且$x \in \Sigma$，则 $\omega x \in \Sigma^*$.

隐含规则: Σ^* 中所有元素均系通过有限次应用这两条规则得到.

或曰, Σ^*是满足这两个条件的所有集合的交集.

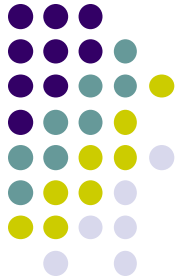
- 字符串的**长度**（ Σ^*上的函数l）.
  - 基础步骤：$l(\lambda)=0$;
  - 递归步骤：$l(\omega x) = l(\omega) + 1$, 若$\omega \in \Sigma^*$ 且$x \in \Sigma$.

- Σ^*上的字符串**连接运算**。(Concatenation)
  - 基础步骤：若$\omega \in \Sigma^*$，则 $\omega \cdot \lambda = \omega$;
  - 递归步骤：若$\omega_1 \in \Sigma^*$ 且$\omega_2 \in \Sigma^*$ 以及$x \in \Sigma$，
    则 $\omega_1 \cdot (\omega_2 x) = (\omega_1 \cdot \omega_2) x$ 。 // $\omega_1 \cdot \omega_2$ 也常写成$\omega_1 \omega_2$

递归定义集合

- 复合命题的合式公式
  - 基础步骤：**T**, **F**, s 都是合式公式, 其中 s 是命题变元;
  - 递归步骤：若 E 和 F 是合式公式, 则 $(\neg E)$、$(E \wedge F)$、$(E \vee F)$、 $(E \rightarrow F)$ 和 $(E \leftrightarrow F)$ 都是合式公式.
  - 排斥规则：合适公式仅限于此.

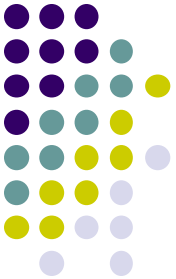
结构归纳法



- 关于递归定义的集合的命题，进行**结构归纳**证明。
  - 基础步骤：证明对于初始元素来说，命题成立；
  - 递归步骤：针对生产新元素的规则，若相关元素满足命题，则新元素也满足命题

- 结构归纳法的有效性源于自然数上的数学归纳法
  - 即，对应用规则(上述递归步骤)的次数做归纳.

结构归纳法（举例）



- $l(xy) = l(x) + l(y)$, x和y属于 Σ^* 。

证明:

设$P(y)$表示：对于任意的x属于 Σ^*, 有$l(xy) = l(x) + l(y)$. 我们对y做归纳.

基础步骤： $P(\lambda)$成立: 对于任意的x属于 Σ^*， 有$l(x\lambda) = l(x) + l(\lambda)$.

递归步骤：假设$P(y)$为真，a属于 Σ, 要证$P(ya)$为真. 即要证：

对于任意的x属于 Σ^*， 有$l(xya) = l(x) + l(ya)$.

$P(y)$为真，$l(xy) = l(x) + l(y)$; 于是

$l(xya) = l(xy)+1 = l(x) + l(y)+1 = l(x) + l(ya)$

于是$P(y)$对于所有的y属于 Σ^* 成立, 即原题成立. ■

广义归纳

- 集合X上的良基关系($\prec$): X的每个非空子集都有极小元.

  (x是极小元是指不存在$y \in X$使得$y \prec x$)

  可理解为“X中不存在无限下降序列$x_0 \succ x_1 \succ x_2 \succ \cdots$”.

  例如: 自然数集合上的<关系是良基的; ≤不是. 实数集合上的<也不是.

  (关于“关系”和“序”的概念将在后续课程讨论.)

- 广义归纳:

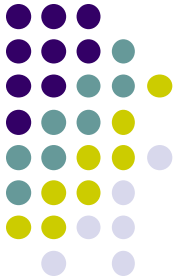
  对于一个性质P, 一个集合X, 及其上的良基关系$\prec$,

  基础步骤: $P(x)$ 对所有X上的极小元x成立.

  归纳步骤: 如果$P(x)$ 对所有$y \prec x'$成立, 那么$P(x')$成立.

  于是$P(x)$ 对所有$x \in X$成立.

广义归纳(举例)



- 考虑如下程序:

```
s(x, y):
    if (x == 0 && y == 0) return 0;
    else if (y == 0) return s(x-1, y) + 1;
    else return s(x, y-1) + y;
```

试说明该程序对所有的自然数x和y, 返回 $y(y+1)/2+x$.

- 解: 对于$(x,y),(x',y') \in \mathbf{N}^2$, 定义 $(x,y) \prec (x',y')$ *iff.* $x+y<x'+y'$.

  易见$\prec$是良基的 (不存在无限下降序列$(x_0,y_0) \succ (x_0,y_0) \succ (x_0,y_0) \succ \cdots$)

  令$P(x,y)$表示“s(x, y)返回$y(y+1)/2+x$”.

  现以广义归纳法证明对于任意的自然数x和y, $P(x,y)$成立.

续上页

基础步骤: $P(0,0)$成立, 这是因为由于`x == 0` 且 `y == 0`,

`s(0, 0)=0·(0+1)/2+0=0`.

归纳步骤: 证明 $\forall x', y' \in \mathbf{N}\big(x' + y' < x + y \Rightarrow P(x', y')\big) \Rightarrow P(x, y)$

情形1: $y = 0$

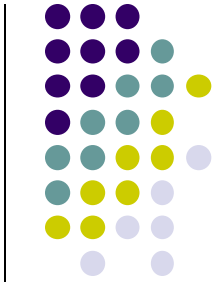
$$\begin{aligned}
\texttt{s(x, y)} &= 1 + \texttt{s(x-1, y)} && \text{(since x != 0 and y == 0)} \\
&= 1 + y(y+1)/2 + x - 1 && \text{(by the inductive hypothesis)} \\
&= y(y+1)/2 + x. && ()
\end{aligned}$$

情形2:

$$\begin{aligned}
\texttt{s(x, y)} &= \texttt{s(x, y-1)} + y && \text{(since x != 0 and y != 0)} \\
&= y(y-1)/2 + x + y && \text{(by the inductive hypothesis)} \\
&= (y^2 - y + 2y)/2 + x && () \\
&= y(y+1)/2 + x. && ()
\end{aligned}$$

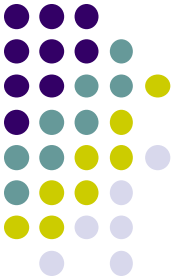
无论哪种情形`s(x, y)`都返回$y(y+1)/2 + x$.

于是我们归纳证明了对于任意的自然数x和y, $P(x, y)$成立.



证明程序正确性与复杂度

Hoare三元组与程序正确性



- **Hoare三元组** $\{P\}S\{Q\}$:
  - S是一段程序; P和Q是关于程序中变量的断言(陈述), 分别称为**前置断言**(precondition)和**后置断言**(postcondition).
  - 这个三元组的意思是说, 如果在S执行之前程序变量使得P成立, 则S运行完后Q成立. (假设P成立是S的权利, 确保Q成立是S的义务.)
  - 这称为“**部分正确性**”, 因为S是否能够执行完成需要另行说明. 程序的“**完全正确性**”还需要说明程序在有限步内终止.

  - C. A. R. Hoare (Tony) 在Robert. W. Floyd 的工作基础上给出了一个形式逻辑系统, 用以形式地证明程序的正确性.
  - Hoare当年写作 $P\ \{S\}\ Q$, 我们教材也这样写. 现在$\{P\}S\{Q\}$更常见.
  - 我们这里仅直观地简单介绍一些相关思想.

欧几里得算法的正确性

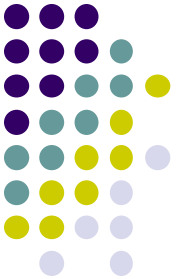
function gcd(a, b) // 不全为0的自然数
$\{P: a_0 \in \mathbf{N}, b_0 \in \mathbf{N}, \neg(a_0 = 0 \wedge b_0 = 0)\}$
while $b \neq 0$ $\{INV\}$
t := b
$b := a$ **mod** b
a := t
$\{Q: a_k = \gcd(a_0, b_0)\}$
return a

程序的终止性:
注意到$b_{k+1} < b_k$ 且$b_n \geq 0$ 即可.

- 如何证明? 我们不知道while循环会执行多少次.
- 我们可对执行次数做“归纳”. 问题是, “归纳假设”是什么?
  $INV: \gcd(a_k, b_k) = \gcd(a_0, b_0)$
- 这样循环开始时, $P \rightarrow INV$, 循环结束时, 由$INV \wedge b_k = 0$, 即Q 成立.
- 问题是如何证明“归纳步骤”.
  即要证明:

$\{\gcd(a_k, b_k) = \gcd(a_0, b_0) \wedge b_k \neq 0\}$
t := b
$b := a$ **mod** b
a := t
$\{INV: \gcd(a_{k+1}, b_{k+1}) = \gcd(a_0, b_0)\}$

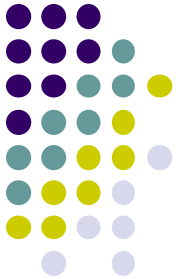
欧几里得算法的复杂度



- 拉梅定理：设a和b是满足$a \geq b$的正整数。则欧几里德算法为求出$\gcd(a, b)$而使用除法的次数小于或等于b的十进制位数的5倍。$5(\lfloor \log_{10} b \rfloor + 1)$

- 令$r_0=a$, $r_1=b$.
- $r_0 = r_1 q_1 + r_2 \quad 0 \leq r_2 < r_1$
- $r_1 = r_2 q_2 + r_3 \quad 0 \leq r_3 < r_2$
- …
- $r_{n-1} = r_n q_n + r_{n+1} \quad 0 = r_{n+1} < r_n$
- $\gcd(a, b) = r_n$使用了n次除法

- Let $r_0=a$, $r_1=b$.
- $q_i \geq 1$ for $1 \leq i < n$
- $q_n \geq 2$ because $q_n = r_{n-1}/r_n > 1$
- $r_n \geq 1 = f_2$, $r_{n-1} \geq 2r_n \geq 2 = f_3$
- $b = r_1 \geq r_2 + r_3 \geq f_n + f_{n-1} = f_{n+1} > \alpha^{n-1}$
- $\log_{10} b > (n-1)\log_{10} \alpha$ for $n \geq 2$
- $\log_{10} \alpha > 1/5$



小结

- 归纳与递归不仅是重要的数学工具,
  也是计算机科学中的基本思维方式
- 各种形式的数学归纳法和良序原理的应用
- 递归定义集合, 归纳证明性质
- 归纳法可用于程序正确性和复杂度的证明