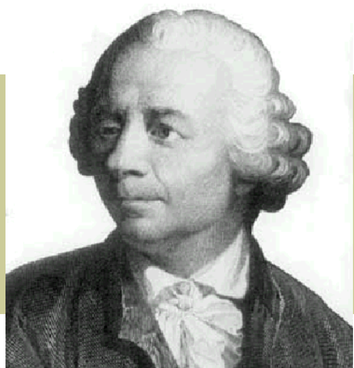
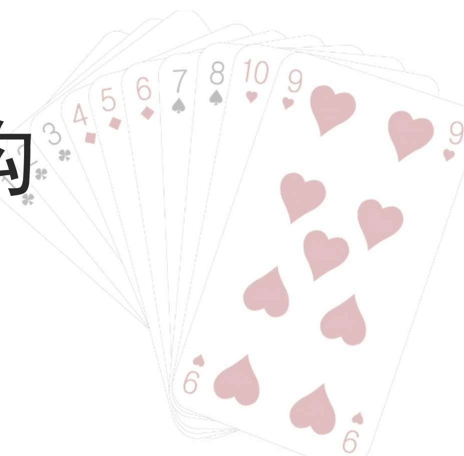
南京大學
NANJING UNIVERSITY



离散数学
Discrete Mathematics

第十七讲：循环群与群同构



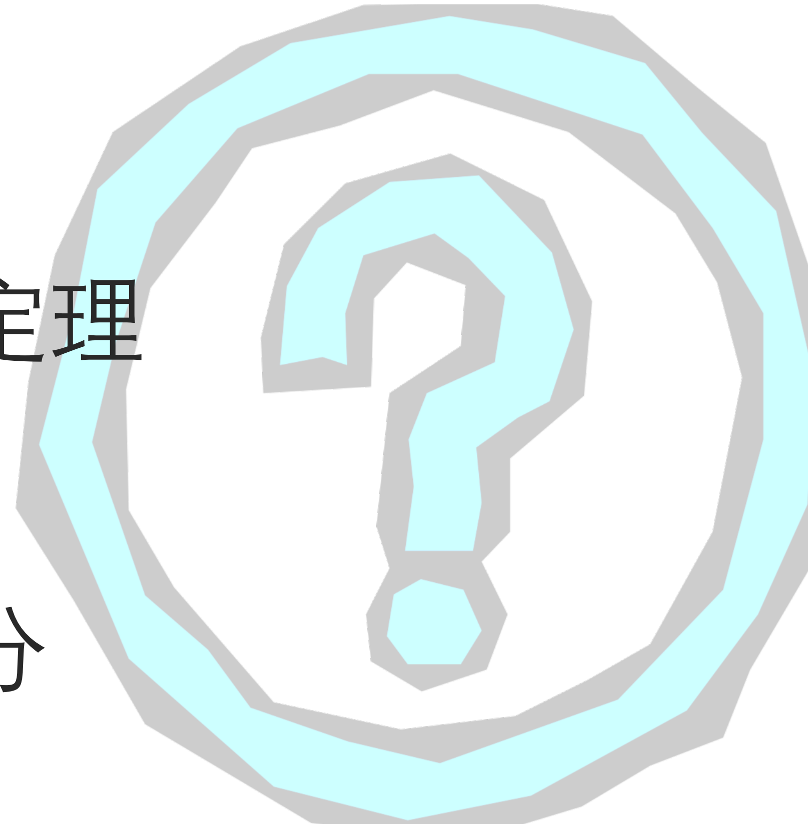
吴 楠

南京大学计算机科学与技术系

2020 年 4 月 20 日

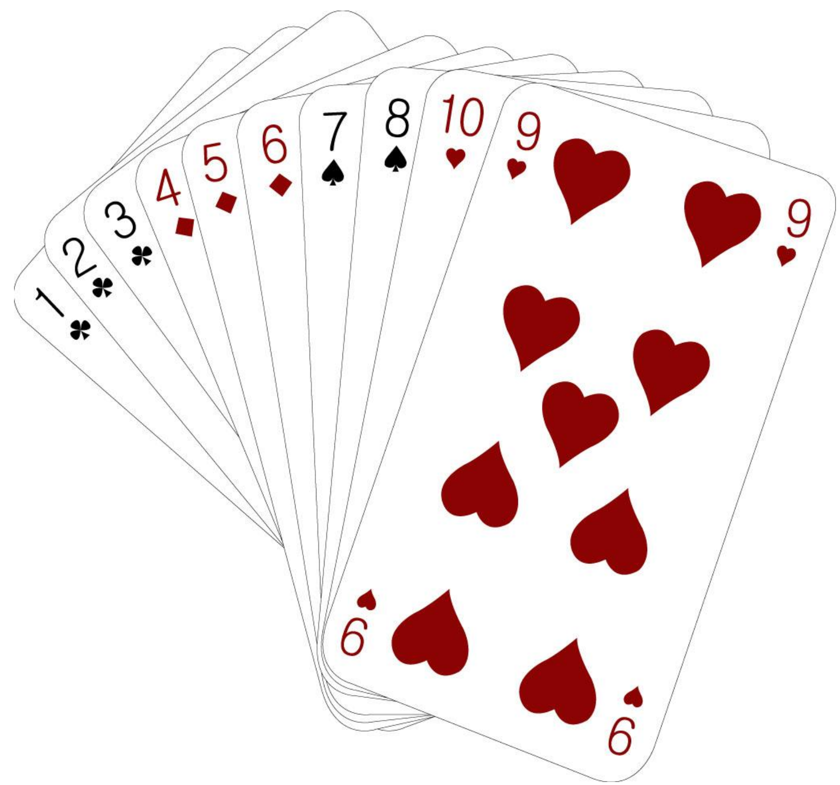
前 情 提 要

- 子群的定义
- 子群的判定定理
- 有限子群的判定定理
- 群中元素的阶
- 陪集与集合的划分
- Lagrange定理



本讲主要内容

- 循环群与生成元
- 循环群的子群
- 群的同构与同态
- 无限循环群的同构群
- 有限循环群的同构群

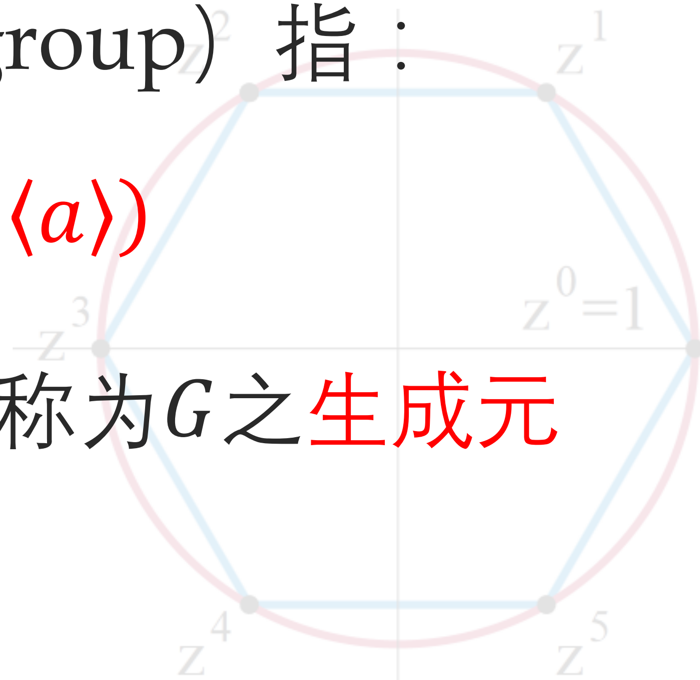


循环群与生成元

- 定义（**循环群**）：

设$\langle G,*\rangle$为循环群（cyclic group）指：

$$(\exists a \in G)(G = \langle a\rangle)$$



这里，$\langle a\rangle = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$，$a$称为$G$之生成元（generator）

循环群与生成元（续）

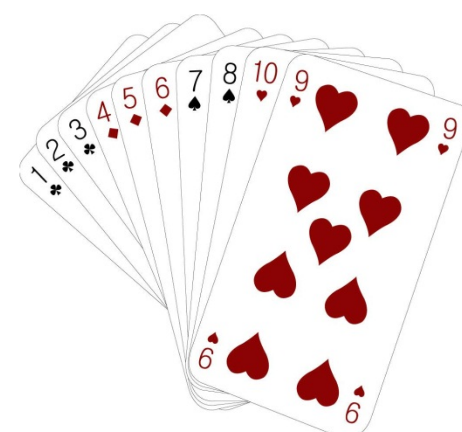
- 定义（**有限循环群**）：若循环群G的生成元a的阶为n，则称G为有限循环群，即n阶循环群：$G=\{a^0,a^1,a^2,\cdots,a^{n-1}\}$，其中$a^0$为幺
- 定义（**无限循环群**）：若循环群G的生成元a为无限阶元，则称G为无限循环群：$G=\{a^0,a^{\pm 1},a^{\pm 2},\cdots\}$，其中$a^0$为幺
- 易见：循环群的生成元的阶等于群的阶

循环群与生成元（续）

- 例1：有限循环群$\langle \mathbb{Z}_6, \oplus_6 \rangle$

模6剩余加群$\langle \mathbb{Z}_6, \oplus_6 \rangle$是循环群，恰有2个生成元：1和5

$$5^0 = 0，5^1 = 5，5^2 = 4，$$
$$5^3 = 3，5^4 = 2，5^5 = 1.$$



循环群与生成元（续）

- 例2：无限循环群$\langle\mathbb{Z},+\rangle$

$\langle\mathbb{Z},+\rangle$是循环群，恰有2个生成元：1和$-1$

$\because n$为$\mathbb{Z}$之生成元$\Leftrightarrow \mathbb{Z}=\langle n\rangle \Leftrightarrow (\exists k\in\mathbb{Z})n^k=1 \Leftrightarrow (\exists k\in\mathbb{Z})(k\cdot n=1) \Leftrightarrow n\in\{1,-1\}$

$\therefore$ 1和 $-$ 1均是其生成元

循环群与生成元（续）

- 例3：非循环群

Klein四元群$\langle V, * \rangle$不是循环群，因为对任何

$x \in V$，$\langle x \rangle = \{e, x\}$：

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

无限循环群的生成元

- **命题**：若a是无限循环群的生成元，则a^{-1}也是该无限循环群的生成元

- **证明：** 设群$G=\langle a\rangle=\{a^k|a\in G,k\in\mathbb{Z}\}$，

$a^k=(a^{-1})^{-k}$，令$p=-k$，则$G=\{(a^{-1})^p|p\in\mathbb{Z}\}$，故$G=\langle a^{-1}\rangle$

无限循环群的生成元（续）

- 命题：无限循环群有且只有2个生成元
- 证明：设群$G=\langle a\rangle=\{a^k|a\in G,k\in\mathbb{Z}\}$，若$b$亦为$G$的生成元，则：$(\exists m,t\in\mathbb{Z})(a^m=b\wedge b^t=a)$，故$a=b^t=(a^m)^t=a^{mt}$，由消去律，$a^{mt-1}=e$
$\because a$是无限阶元$\therefore mt-1=0\Rightarrow(m=t=1)\vee(m=t=-1)$，故有$b=a$或者$b=a^{-1}$

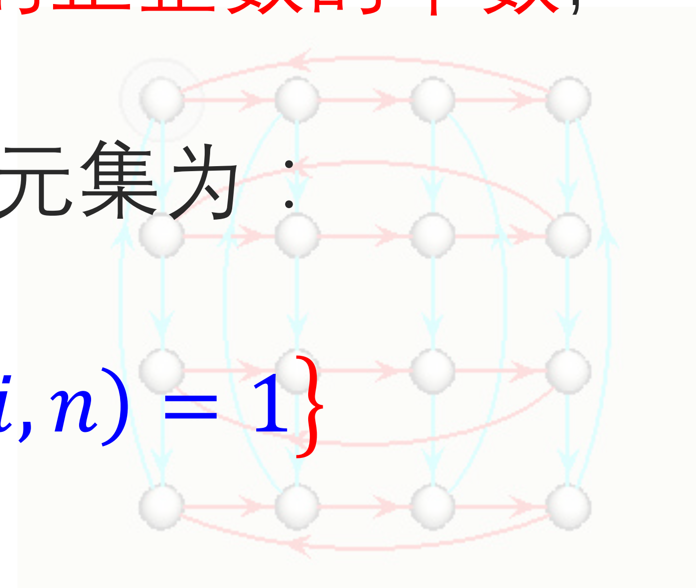
有限循环群的生成元

- **命题**：设有限群$G=\langle a\rangle$，且$|a|=n$，则对任意不大于n的正整数r，$G=\langle a^r\rangle \Leftrightarrow \gcd(n,r)=1$
  - “$\Leftarrow$”：设$\gcd(n,r)=1$，则$(\exists u,v\in\mathbb{Z})(ur+vn=1)$，因此$a=a^{ur+vn}=(a^r)^u(a^n)^v=(a^r)^u$。故而$G$中任意元素$a^k$可表为$(a^r)^{uk}$，故有$G=\langle a^r\rangle$;
  - “$\Rightarrow$”：设a^r是G的生成元，令$\gcd(n,r)=d$且$r=dt$，则$(a^n)^t=(a^n)^{r/d}=(a^r)^{n/d}=e$，故$|a^r|\,|\,(n/d)$，但$|a^r|=n$故$n|\frac{n}{d}\Rightarrow d=1$，故有$\gcd(n,r)=1$即$n$与$r$互质

有限循环群的生成元（续）

- 推论：n阶循环群$G=\langle a\rangle$的生成元的个数恰好等于不大于n且与n互质的正整数的个数，即Euler函数$\varphi(n)$，其生成元集为：

$$\{a^i \mid 0 < i \le n \wedge \gcd(i,n) = 1\}$$



有限循环群的生成元（续）

例（1）设 $G=\{e,a,\ldots,a^{11}\}$是 12 阶循环群，则$\varphi(12)=4$. 小于或等于 12 且与 12 互素的数是 1, 5, 7, 11，由定理 11.19 可知 a，a^5，a^7 和 a^{11} 是 G 的生成元.

（2）设 $G=\langle Z_9,\oplus\rangle$是模 9 的整数加群，则$\varphi(9)=6$. 小于或等于 9 且与 9 互素的数是 1, 2, 4, 5, 7, 8. 根据定理 11.19，G 的生成元是 1, 2, 4, 5, 7 和 8.

（3）设 $G=3Z=\{3z \mid z\in Z\}$,G 上的运算是普通加法. 那么 G 只有两个生成元：3 和−3.

循环群的子群

- **命题**：设$G = \langle a \rangle$为循环群

(1) G的子群为循环群

(2) 若$|a| = \infty$，则G的子群除$\{e\}$外皆为无限循环群

证:

(1) 令$\langle H,* \rangle \leq \langle G,* \rangle$,从而$H \subseteq \langle a \rangle$,若$H = \{e\}$ 自然成立

否则取a^m为H中最小正方幂元下证$H = \langle a^m \rangle$:只需证$H \subseteq \langle a^m \rangle$,任取$h \in H \subseteq \langle a \rangle$,故$h = a^n$。

令$n = qm + r$, $0 \leq r < m$,从而$h = a^n = a^{qm+r} = (a^m)^q a^r$,从而$a^r = h(a^m)^{-q} \in H$，故由$m$的最小性得$r = 0$，从而$h = (a^m)^q \in \langle a^m \rangle$，因此$H$为循环群。

(2) 设$H \leqslant G$，由(1)得$H = \langle a^m \rangle$，若$H \neq \{e\}$则$m \neq 0$,从而若$|H|$有穷则$|a^m|$有穷与$|a|$无穷矛盾。

循环群的子群（续）

- 命题：对n的每个因子d，n阶循环群G中恰有一个d阶子群
- 证明：
  - 设$G=\langle a\rangle$，令$H=\langle a^{n/d}\rangle$，显然H是G的d阶子群
  - 若令$H_1=\langle a^m\rangle$亦为d阶子群，则$(a^m)^d=a^{md}=e$，故有$n|md$，即$\frac{n}{d}|m$，因此$a^m=\left(a^{n/d}\right)^k\in H$，即$H_1\subseteq H$，但$H_1\approx H$，故有$H_1=H$

循环群的子群（续）

$G=Z_{12}$ 是 12 阶循环群. 12 的正因子是 1,2,3,4,6 和 12，因此 G 的子群是:

1 阶子群	$\langle 12\rangle=\langle 0\rangle=\{0\}$
2 阶子群	$\langle 6\rangle=\{0,6\}$
3 阶子群	$\langle 4\rangle=\{0,4,8\}$
4 阶子群	$\langle 3\rangle=\{0,3,6,9\}$
6 阶子群	$\langle 2\rangle=\{0,2,4,6,8,10\}$
12 阶子群	$\langle 1\rangle=Z_{12}$

群同构与同构映射

- 定义（**群同构**）：群$\langle G_1,\circ\rangle$与$\langle G_2,*\rangle$同构($G_1 \cong G_2$)当且仅当存在双射函数$f: G_1 \to G_2$，满足：

$$\forall x, y \in G_1,\ f(x \circ y) = f(x) * f(y)$$

- 例：正实数乘群$\langle \mathbb{R}^+,\cdot\rangle$和实数加群$\langle \mathbb{R},+\rangle$，同构映射$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}: f(x) = \ln x$

群同构关系是等价关系

- 自反性：对任意群$\langle G, \circ \rangle$，$G \cong G$
  - 此时同构映射为恒同映射$f(x) = x$
- 对称性：对任意群G_1, G_2，若$G_1 \cong G_2$则$G_2 \cong G_1$
  - 后者的同构映射为前者同构映射的逆函数
- 传递性：对任意群G_1, G_2, G_3，若$G_1 \cong G_2$且$G_2 \cong G_3$则$G_1 \cong G_3$
  - 设前二者同构映射分别为$f: G_1 \to G_2$，$g: G_2 \to G_3$，则$g \circ f: G_1 \to G_3$

群同构与同构映射（续）

- 回忆第十五讲中提到的四阶群以下的同构性：
  - 任意两个三阶群同构

$1\to a \quad 2\to b \quad 3\to c$

∘	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c ?	a
c	c	a	b

群同构与同构映射（续）

- 回忆第十五讲中提到的四阶群以下的同构性：
    - 不同构的四阶群

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	3

四元循环群

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

Klein四元群

同态与同态映射

- 群同态对映射的要求远低于群同构，只需找到符合条件的函数即可
- 定义（群同态）：群$\langle G_1,\circ\rangle$与$\langle G_2,*\rangle$同态($G_1 \sim G_2$)当且仅当存在函数$f: G_1 \to G_2$，满足：

$$\forall x, y \in G_1,\ f(x \circ y) = f(x) * f(y)$$

- 如果上述映射是满射，则称为满同态；如映射是单射，则称为单同态；若$G_1 = G_2$，则称φ为自同态

同态与同态映射（续）

- **命题**：设f为从群$\langle G,*\rangle$到群$\langle H,\circ\rangle$的同态，则

(1) $f(e_G) = e_H$；

(2) $f(a^{-1}) = \left(f(a)\right)^{-1}$，$\forall a \in G$

证明：(1) $\because f(e_G) = f(e_G e_G) = f(e_G)f(e_G)$

$\therefore f(e_G) = f(e_G)(f(e_G))^{-1} = e_H$

(2) $\because f(a^{-1})f(a) = f(a^{-1}a) = f(e_G) = e_H$

$f(a)f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(e_G) = e_H$

$\therefore f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$

同态与同态映射（续）

- 例：整数加系统$\langle \mathbb{Z},+\rangle$与模3剩余加系统$\langle \mathbb{Z}_3,\oplus_3\rangle$同态，同态映射为

  $$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_3，\ f(3k+r)=r，\ k\in\mathbb{Z}$$

  此同态为满同态

- 趣味问题：由$1,2,\cdots,2020$这些自然数按照任意的组合进行加减，能否得到2019？

同态与同态映射（续）

- 趣味问题：由$1, 2, \cdots, 2020$这些自然数按照任意的组合进行加减，能否得到2019？
- 定义系统（奇偶加群）：$\langle\{e, o\}, *\rangle$，运算表如下：

*	e	o
e	e	o
o	o	e

则 $f: \mathbb{Z} \to \{e, o\}$

$$f(x) = \begin{cases} e & x\text{是偶数} \\ o & x\text{是奇数} \end{cases}$$

是从$\langle \mathbb{Z}, + \rangle$到$\langle\{e, o\}, *\rangle$的满同态映射

无限循环群的同构群

- **定理**：设$\langle G,*\rangle$为无限循环群，则$\langle G,*\rangle \cong \langle \mathbb{Z},+\rangle$
- **证明**：$|a| = \infty$，令$f{:}\,\mathbb{Z} \to G$如下：$f(x) = a^x$，

$\because f(n+m) = a^{n+m} = a^n * a^m = f(n) * f(m) \therefore f$为同态；又$\because f(n) = f(m) \Rightarrow a^n = a^m \Rightarrow a^{|n-m|} = e \Rightarrow |n-m| = 0 \Rightarrow n = m \therefore f$为$1-1$，由循环群的定义onto易见，从而$\langle G,*\rangle \cong \langle \mathbb{Z},+\rangle$

有限循环群的同构群

- 定理：设$\langle G,*\rangle$为有限循环群，则$\langle G,*\rangle \cong \langle \mathbb{Z}_n,\oplus_n\rangle$
- 证明：$|a| = n > 0$从而$G = \{a^0, a^1, \cdots, a^{n-1}\}$，令 $f: \mathbb{Z}_n \to G$如下：$f(x) = a^x(x = 0,1,\cdots,n-1)$，由于 $f(i \oplus_n j) = a^{i\oplus_n j} = a^i * a^j = f(i) * f(j)$，故$f$为同态。又由于$f(i) = f(j) \Rightarrow a^i = a^j \Rightarrow a^{|i-j|} = e \Rightarrow$ $n \mid |i-j| \Rightarrow i \equiv j(\mathrm{mod}\, n) \Rightarrow i = j$，故$f$为单射；$f$的满射性易见，因此$\langle G,*\rangle \cong \langle \mathbb{Z}_n,\oplus_n\rangle$

循环群的同构群

- 定理：设$\langle G,*\rangle$为无限循环群，则$\langle G,*\rangle \cong \langle \mathbb{Z},+\rangle$
- 定理：设$\langle G,*\rangle$为有限循环群，则$\langle G,*\rangle \cong \langle \mathbb{Z}_n,\oplus_n\rangle$

推论：循环群皆为阿贝尔群

本次课后作业

- 教材内容：[屈婉玲] 10.3节
- 课后习题：
  - 见“教学立方”
- 提交时间： 见教学立方

Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

- “拉格朗日是数学科学界高耸的金字塔” —— 拿破伦·波那巴
- “在短得令人难以置信的时间内，他就完全靠自学掌握了他那个时代的现代分析。十六岁时（可能不太准确），拉格朗日成了在都灵的皇家炮兵学院的数学教授。然后开始了数学史上最光辉的经历之一。”
- “他的杰作《分析力学》是他作为一个十九岁的少年在都灵设想出来的。”
- 这位十八世纪最伟大，最谦虚的数学家的最著名的语录是：“我不知道。”
  —— 以上摘自 E.T.贝尔《数学精英》
- **法国伟大的数学传统 –“4L”**
  - **Lagrange(1736-1813); Laplace(1749-1827); Legendre(1752-1833); Lebesgue(1875-1941)**

    (拉格朗日、拉普拉斯、勒让德、勒贝格)

Tip：Lagrange