Problem 1

1) $(a^l \times a^m) \times a^n = a^l \times (a^m \times a^n)$，构成半群

任意 $m \in Z$ 有 $a^0 \times a^m = a^m \times a^0 = a^m$，构成独异点

任意 $m \in Z$ 有 $n=-m$ 使 $a^m \times a^n = 1$，构成群.

2) $a, b, c \in Q+$, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$，构成半群

任意 $a \in Q+$ 有 $a \times 1 = 1 \times a = a$，构成独异点

任意 $a \in Q+$ 有 $b=1/a$ 使 $a \times b = 1$，构成群

3) $a, b, c \in Q+$, $(a+b)+c = a+(b+c)$，构成半群

任意 $a \in Q+$ 有 $a+0 = 0+a = a$，但 $0 \notin Q+$，不构成独异点，不构成群

4) 满足结合律，构成半群；有幺元 0，构成独异点；多项式取负即为逆元，构成群

5) 满足结合律，构成半群；有幺元 1，构成独异点

非常数多项式取倒数不是多项式，多项式不一定存在逆元，不构成群

6) $x, y, z \in C$ 且 $x^l=1, y^m=1, z^n=1$, $(xy)z = x(yz) = xyz$

$(xyz)^{(lmn)} = 1^{(mn)} \times 1^{(ln)} \times 1^{(lm)} = 1 \times 1 \times 1 = 1$，构成半群

任意 $x \in Un$ 有 $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$，构成独异点

对 $x=a+bi$ 有 $y=(a-bi)/(a^2+b^2)$ 使 $x \cdot y = 1$，构成群

Problem 2

$\forall x,y \in S$, $x*y=x \in S$, $*$在 S 上封闭, $(S, *)$为代数系统

$(x*y)*z = x*z = x$, $x*(y*z) = x*y = x$，满足结合性, S 关于$*$运算构成半群

Problem 3

$V=<\{a, b\}, *>$是半群，则$*$在$\{a, b\}$上封闭且满足结合性

1) 若 $a*b \neq b*a$，不妨设 $a*b=a$, $b*a=b$, $(a*b)*a = a*a = b$, $a*(b*a) = a*b = a$

$(a*b)*a \neq a*(b*a)$，与结合性矛盾，则必有 $a*b=b*a$

2) 若 $b*b=a$ 即$(a*a)*(a*a) = a*(a*a)*a$ $a*b*a= a$

由(1)有 $a*b=b*a=a$, $a*b*a = a*a = b$，或 $a*b=b*a=b$, $a*b*a = b*a = b$

与 $b*b = a*b*a = a$ 矛盾，则必有 $b*b=b$

Problem 4

对于 $a \in G$，若 $a=a^{-1}$, $a^2 = a \times a^{-1} = e$, $|a| \leqq 2$, a 为 1 阶或 2 阶元

对于$|a|>2$ 有 $a \neq a^{-1}$，即 G 中阶大于 2 的元素 a 与 $b=a^{-1}$ 总数成对出现

即 G 的阶数为偶数, G 中阶大于 2 的元素个数为偶数,

则阶为 1 或 2 的元素个数为偶数, 1 阶元只有 e 一个, 2 阶元有奇数个(至少一个)

Problem 5

设$|abc|=m$, $|bca| = n$, $(abc)^m = (bca)^n = e$

$(abc)^n = (abc)(abc)\cdots\cdots(abc) = (abc)\cdots\cdots(abc)aa^{-1} = a(bca)\cdots\cdots(bca)a^{-1}$

$= a(bca)^m a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e$，则有 $m \mid n$

$(bca)^m = (bca)(bca)\cdots\cdots(bca) = a^{-1}a(bca)\cdots\cdots(bca) = a^{-1}(abc)\cdots(abc)a$

$= a^{-1}(abc)^m a = a^{-1}ea = a^{-1}a = e$，则有 $n \mid m$

则 $m=n$ 即$|abc| = |bca|$，同理$|bca| = |cab|$，则$|abc| = |bca| = |cab|$

Problem 6

任取$|c| = |b^{-1}\cdot c\cdot b| = n$，则有 $c^n = (b^{-1}\cdot c\cdot b)^n = b^{-1}\cdot a^n\cdot b = b^{-1}\cdot b = e$
若对任意 b 都有 $b^{-1} = b$，任取 $a^{-1} = a, b^{-1} = b, ab = x = x^{-1}, ba = y = y^{-1}$
$x = ab = a^{-1}\cdot b^{-1} = (ba)^{-1} = y^{-1} = y$，则 $x=y, ab=ba$，与 G 为非 Abel 群矛盾
故存在 b 使得 $b^{-1}\neq b$，令 $a=b^{-1}$, a, b 非单元且 $ab = b^{-1} b = b b^{-1} = ba$

Problem 7

	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

$S\neq\varnothing$，观察表格可知乘法在 S 上封闭，且同时满足结合性与交换性
对任意 $x\in S$ 有 $1\cdot x=x\cdot 1=x$, 1 为幺元, $1^{-1}=1, (-1)^{-1} = -1, i^{-1} = -i, (-i)^{-1} = i$
则 S 中所有元素都有对应的逆元, $S=\{1, -1, i, -i\}$是复数上的乘法群.

Problem 8
$a, b\in G, (ab)(ab)^{-1} = a(b(ab)^{-1})) = e, b(ab)^{-1}=a^{-1}$
$b^{-1} (b(ab)^{-1}) = b^{-1} a^{-1} = (b^{-1} b)(ab)^{-1} = e(ab)^{-1} = (ab)^{-1}$

Problem 9
假设半群 S 有左单位元 e，对任意 $a\in S$ 有 $e\cdot a=a$，存在 $b\in S$ 使 $b\cdot a=e$,
半群满足结合性，则对任意 $a\in S$ 有 $a\cdot e = a\cdot(b\cdot a) = (a\cdot b)\cdot a = e\cdot a = a$
即 e 也是 S 的右单位元, $(a\cdot b)\cdot(a\cdot b) = a\cdot(b\cdot a)\cdot b = a\cdot e\cdot b = a\cdot b$
令 $c=a\cdot b\neq e, c\cdot c=c$，存在 $d\in S$ 使 $d\cdot c=e, (d\cdot c)\cdot c = e\cdot c = c = d\cdot(c\cdot c) = d\cdot c = e$
即 $c=a\cdot b=e$，矛盾，故 $a\cdot b=e$, a 有右逆元且等于左逆元, <S, ·>是一个群.

假设半群 S 有右单位元 e，对任意 $a\in S$ 有 $a\cdot e=a$，存在 $b\in S$ 使 $a\cdot b=e$，同理.

Problem 10
$x^3=e$，则 x 的阶数 $n \mid 3$, x 为 1 阶元素或 3 阶元素
若 x 为 1 阶元素, $x = e$，有且只有一个这样的 x
若 x 为 3 阶元素, $x(x^2) = e, (x^{-1})^3 = (x^2)^3 = (x^3)^2 = e^2 = e$
若 $x=x^{-1}, x^2=x, x^3=x^2=x=e$, x 为 1 阶元素，矛盾，故 $x\neq x^{-1}$
符合条件的 x 与 x^{-1} 成对出现, x 为 3 阶元素有偶数种情形.
则 G 中使得 $x^3 = e$ 的元素 x 的个数是奇数