课程考试试卷答案(学生考试用)

课程名称：__________ 学分：3 教学大纲编号：__________

试卷编号：A卷 考试方式：笔试、闭卷 满分分值：80 考试时间：120 分钟

组卷日期：___ 组卷教师(签字)：________ 审定人(签字)：__________

1.（10分）某人忘记了银行卡密码的最后一位数字，因而他随机按号，

（1）求他按号不超过三次而选正确的概率.

（2）若已知最后一个数是偶数，则此概率是多少？

解法一：设 A_i，$i=1,2,3$ 分别表示第 i 次按号按对，A 表示按号不超过三次而选正确，则 $A=A_1\cup\bar{A}_1A_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$，且三者两两互不相容，故有

（1）$P(A)=P(A_1)+P(\bar{A}_1A_2)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$

$=P(A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2\mid\bar{A}_1)+P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)P(A_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2)$, …………2分

$=\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{3}{10}.$ ……………………3分

（2）设 B 表示已知最后一个数是偶数，按号不超过三次而选正确，则

$P(B)=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{5}.$ …………… …………5分

解法二：（1）$P(A)=1\text{-}P(\bar{A})=1\text{-}P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=1\text{-}P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)P(\bar{A}_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2)$ ………2分

$=1\text{-}\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{3}{10}.$ ……………… …………3分

（2）$P(B)=1\text{-}\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{3}{5}.$ ………………… …………5分

注：基本题，考察古典概型和乘法公式。

2.（10分）设某城市成年男子的身高 $X\sim N(170,6^2)$（单位厘米）.

（1）问应如何设计公共汽车车门的高度，使成年男子与车门顶碰头的机会小于0.01?

（2）若车门设计高度为182厘米，求10个成年男子中与车门顶碰头的人数不多于1人的概率.

解：（1）设车门高度为 h 厘米，按设计要求应有 $P\{X>h\}<0.01$.

由题设知 $X\sim N(170,6^2)$，则

$P\{X>h\}=1-P\{X\le h\}=1-P\left\{\frac{X-170}{6}\le\frac{h-170}{6}\right\}=1-\Phi\left(\frac{h-170}{6}\right)<0.01,$

即 $\Phi\left(\frac{h-170}{6}\right)>0.99,$ …… …………3分

查表得 $\frac{h-170}{6}>2.33$，故 $h>183.98$. …… …………2分

车门高度应高于183.98厘米，才能使成年男子与车门顶碰头的机会小于0.01.

(2)设 Y 表示10个成年男子中身高超过182厘米的人数，则 $Y\sim B(10,p)$，其中 p 为任一成年男子身高超过182厘米的概率，

$p=P\{X>182\}=1-P\{X\le182\}=1-P\left\{\frac{X-170}{6}\le\frac{182-170}{6}\right\}=1-\Phi(2)=0.0228.$

…… …………2分

则 $P\{Y=k\}=C_{10}^k(0.0228)^k(1-0.0228)^{10-k},k=0,1,K\ 10.$

而10个成年男子中与车门顶碰头的人数不多于1人的概率为

$P\{Y\le1\}=P\{Y=0\}+P\{Y=1\}$

$=0.9772^{10}+C_{10}^1\times0.0228\times0.9772^9$ …… …………3分

$\approx0.9793.$

注：基本题，考察正态分布和二项分布的计算。

3.（15分）设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}kx(x-y), & 0<x<2,\quad -x\le y\le x\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

求：（1）常数 k；（2）X,Y 的边缘概率密度；（3）$P\{0<X<1,0<Y<1\}$.

解：（1）由归一性，$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$ ………………1分

所以 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^2\int_{-x}^{x}kx(x-y)dxdy=8k$，则 $k=\frac{1}{8}$. ………………2分

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{+x}\frac{1}{8}x(x-y)dy & 0<x<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ ………………2分

$=\begin{cases}\frac{1}{4}x^3 & 0<x<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ ………………2分

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^2 \frac{1}{8}x(x-y)dx & 0<y<2\\ \int_{-y}^2 \frac{1}{8}x(x-y)dx & -2<y<0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$ ………………2 分

$$=\begin{cases}\frac{1}{3}-\frac{y}{4}+\frac{1}{48}y^3 & 0<y<2\\ \frac{1}{3}-\frac{y}{4}+\frac{5}{48}y^3 & -2<y<0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$ ………………2 分

（3） $P\{0<X<1,0<Y<1\}=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy$ ………………2 分

$$=\int_0^1\int_0^x \frac{1}{8}x(x-y)dydx=\frac{1}{64}$$ ………………2 分

注：综合题，考察二维随机变量的归一性、边缘概率密度、概率计算。

4.（15 分）假设二维随机变量 (X,Y) 在矩形 $G=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2,0\le y\le 1\}$ 上服从均匀分布，记 $U=\begin{cases}0, & 若X\le Y\\ 1, & 若X>Y\end{cases}$，$V=\begin{cases}0, & 若X\le 2Y\\ 1, & 若X>2Y\end{cases}$.

（1）求 U 和 V 的联合分布，（2）U 和 V 是否独立，（3）求 U 和 V 的相关系数.

解：因 (X,Y) 服从均匀分布，可得 $P\{X\le Y\}=\frac{1}{4}$, $P\{X\ge 2Y\}=\frac{1}{2}$, $P\{Y\le X\le 2Y\}=\frac{1}{4}$,

U 和 V 有四个可能取值 $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$, …………………1 分

$P\{U=0,V=0\}=P\{X\le Y,X\le 2Y\}=P\{X\le Y\}=\frac{1}{4}$,

$P\{U=0,V=1\}=P\{X\le Y,X>2Y\}=0$,

$P\{U=1,V=0\}=P\{X>Y,X\le 2Y\}=P\{Y<X\le 2Y\}=\frac{1}{4}$,

$P\{U=1,V=1\}=P\{X>Y,X>2Y\}=P\{X>2Y\}=\frac{1}{2}$, …………………4 分

故 U 和 V 的联合分布率为

U \ V	0	1
0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

（2）U 和 V 的分布率为

U	0	1
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

…………2 分

V	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

…………2 分

因 $p_{ij}\ne p_{i\cdot}gp_{\cdot j}$，所以 U 和 V 不相互独立。 …………1 分

（3） $E(U)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$, $D(U)=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{16}$,

$E(V)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $D(U)=0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,

$E(UV)=0\times0\times\frac{1}{4}+0\times1\times0+1\times0\times\frac{1}{4}+1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

$Cov(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$, …………3 分

因此 $\rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}=\frac{\frac{1}{8}}{\sqrt{\frac{3}{16}}\times\sqrt{\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. …………………2 分

注：综合题，考察随机变量的数字特征和独立性。

5. (10 分) 某车间有 200 台独立工作的车床，开工率为 0.6，开工时耗电各为 1KW.
(1)求某时刻正在工作的车床在 110 台到 130 台之间的概率；
(2)问供电所至少要供给这个车间多少电力才能以 99.9%的概率保证这个车间正常生产.

解：记某时刻正在工作的车床数为 X，则 $X\sim B(200,0.6)$

（1） 所求概率

$$P\{110\le X\le 130\}\approx\Phi\left(\frac{130-200\times0.6}{\sqrt{200\times0.6\times0.4}}\right)-\Phi\left(\frac{110-200\times0.6}{\sqrt{200\times0.6\times0.4}}\right)$$ ……………3 分

$=\Phi(1.44)-\Phi(-1.44)=2\Phi(1.44)-1$

$=2\times0.9251-1=0.8502.$ ……………………2 分

（2） 设至少要供给这个车间 rKW 电才能以 99.9%的概率保证这个车间正常生产，由题意有 $P\{X\le r\}\ge 0.999$，

而 $P\{X\le r\}\approx\Phi\left(\frac{r-200\times0.6}{\sqrt{200\times0.6\times0.4}}\right)$

$=\Phi\left(\frac{r-120}{\sqrt{48}}\right)\ge 0.999$， ………………3 分

查表得 $\frac{r-120}{\sqrt{48}}\ge 3.1$，故 $r\ge 141.48$， ……………………2 分

即至少要供给这个车间 $142KW$ 电才能以 99.9%的概率保证这个车间正常生产。

注：基本题，考察中心极限定理。

6.（10 分）已知总体 X 的分布函数为 $F(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}1-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, & x>\alpha\\ 0, & x\le\alpha\end{cases}$，

其中 $\alpha>0,\beta>1$ 为参数，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自 X 的样本.

（1）$\alpha=1$ 时，求 β 的矩估计量. (2) $\beta=2$ 时，求 α 的极大似然估计量.

解：由已知 X 的分布函数可得其概率密度为 $f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\frac{\beta\alpha^{\beta}}{x^{\beta+1}}, & x>\alpha\\ 0 & ,x\le\alpha\end{cases}$，

（1）当 $\alpha=1$ 时，X 的概率密度为 $f(x;\beta)=\begin{cases}\frac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1\\ 0 & ,x\le 1\end{cases}$，

则 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\beta)dx=\int_{1}^{+\infty}x\frac{\beta}{x^{\beta+1}}dx=\frac{\beta}{\beta-1}$， …………………2 分

令 $\frac{\beta}{\beta-1}=\bar{X}$，解得 $\beta=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$，

所以参数 β 的矩估计量为 $\hat{\beta}=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$. ……………………3 分

（2）当 β=2 时，X 的概率密度为 $f(x;\alpha)=\begin{cases}\frac{2\alpha^2}{x^3}, & x>\alpha\\ 0 & ,x\le\alpha\end{cases}$，

对于总体 X 的样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，其似然函数为

$$L(\alpha)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}2^n\alpha^{2n}x_i^{-3}, & x_i>\alpha\\ 0\ , & \text{其他}\end{cases}，$$ ……………………2 分

取对数得，$\ln L(\alpha)=n\ln 2+2n\ln\alpha-3\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$，

列似然方程，令 $\frac{d\ln L(\alpha)}{d\alpha}=\frac{2n}{\alpha}=0$，方程无解！

但因 $L(\alpha)$ 单调递增，当 $x_i>\alpha(i=1,2,\cdots n)$时，$\alpha$ 越大，$L(\alpha)$ 就越大，又因为只有当 $\alpha<x_i$ 时，$L(\alpha)\ne 0$，因此当 $\alpha=\min\{x_i\}$ 时，$L(\alpha)$ 达到最大，故 α 的极大似然估计为 $\hat{\alpha}_{MLE}=\min\{X_i\}$. ……………………3 分

注：基本题，考察矩估计与极大似然估计.

7.（10 分）机器自动包装食盐，设每袋盐的净重 $X\sim N(\mu,2^2)$（单位：克）.机器正常工作时平均重量应为 500 克，某天开工后，为了检查机器工作是否正常，从已包装好的食盐中随机抽取 6 袋，测得其重量（克）为 497, 507 ,510 ,488 ,491 ,496. 已知方差不变，问这天自动包装机工作是否正常？（取显著性水平 α=0.05）

解：给出原假设和备择假设 $H_0:\mu=\mu_0=500$， $H_1:\mu\ne 500$ ……………………2 分

当 H_0 真时，检验统计量为 $U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

检验的拒绝域为 $|U|\ge U_{\frac{\alpha}{2}}$， ……………………2 分

由题意，$\bar{x}=498.1667$

$$|u|=\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{498.1667-500}{2/\sqrt{6}}\right|\approx 2.245>U_{0.025}=1.96$$ ……………4 分

落在拒绝域中，故拒绝 H_0，即认为这天自动包装机工作不正常。……………2 分

注：基本题，考察假设检验的基本内容。