从而得到 $M=\max(X,Y)$ 的密度函数为

$$p_M(z)=F_M'(z)=\begin{cases}2z/a^2 & 0<z<a\\ 0 & \text{其他}\end{cases}。$$

以上讨论随机变量 X,Y 函数的分布时，X,Y 同为离散型或同为连续型。若出现 X,Y 一个是连续型，另一个是离散型的情形，可以用分布函数法，把离散型随机变量的所有取值看成样本空间的划分，由全概率公式求解。

例 3.23　设随机变量 X,Y 独立，其中，$P(X=k)=1/3, k=1,2,3$，Y 服从指数分布 $E(1)$，求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度函数。

解　Y 的密度函数 $p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，设 $Z=X+Y$ 的分布函数为 $F_Z(z)$，则

$$\begin{aligned}F_z(z)&=P(Z\leqslant z)=P(X+Y\leqslant z)\\&=\sum_{k=1}^{3}P(X=k)P(X+Y\leqslant z|X=k)\\&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}P(Y\leqslant z-k)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}F_Y(z-k),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_Z(z)=F_Z'(z)&=\frac{1}{3}[p_Y(z-1)+p_Y(z-2)+p_Y(z-3)]\\&=\begin{cases}0 & z\leqslant 1\\ e^{1-z}/3 & 1\leqslant z<2\\ (e^{1-z}+e^{2-z})/3 & 2\leqslant z<3\\ (e^{1-z}+e^{2-z}+e^{3-z})/3 & z\geqslant 3\end{cases}。\end{aligned}$$

习　题　三

1. 盒中装有 3 只黑球，2 只红球，2 只白球，从中任取 4 球，以 X 表示黑球数，Y 表示红球数，(1) 求 (X,Y) 的联合分布律，(2) 求概率 $P(X>Y)$，$P(Y=2X)$，$P(X+Y<3)$。

2. 设随机变量 X 在数字 $1,2,3$ 中任取一个，随机变量 Y 在 $1\sim X$ 中任取一个，求 (X,Y) 的联合分布律及 X,Y 的边缘分布律。

3. 已知随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	1	2	3
1	1/16	1/9	1/18
2	1/3	a	b

(1) 求 a,b 满足的关系式；(2) 若 X,Y 独立，求 a,b 的值。

4. 设随机变量 X,Y 服从的共同概率分布为

$$X,\ Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix},$$

已知 $P(XY=0)=1$，(1) 求 X,Y 的联合分布律，(2) 求 $P(X=Y)$，(3) 讨论 X,Y 的独立性。

5. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} xe^{-y} & 0<x<y \\ 0 & \text{其他} \end{cases},$$

求 (X,Y) 的联合分布函数。

6. 已知随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases} 1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y} & x>0,y>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases},$$

问 X,Y 是否相互独立。

7. 已知随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=Ce^{-(x^2+y^2)/2}(1+\sin x\sin y)\ \ (-\infty<x,y<+\infty),$$

求 C 及 X,Y 的边缘密度，并判断 X,Y 是否相互独立?

8. 已知随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} \dfrac{24}{5}(2-x)y & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases},$$

问 X,Y 是否相互独立。

9. 已知随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} Ax^2y^2 & (x,y)\in G \\ 0 & \text{其他} \end{cases},$$

按照 (1) $G=\{(x,y)|0<x<3,\ 0<y<3\}$，(2) $G=\{(x,y)|0<x<y<3\}$，分别求常数 A 并讨论 X,Y 的独立性。

10. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} Ae^{-2(x+y)} & x>0,y>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases},$$

求: (1) 常数 A; (2) 联合分布函数 $F(x,y)$; (3) X 的边缘密度; (4) $P(X<2,0<Y<1), P(X+Y<2)$。

11. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & 0<x<y \\ 0 & \text{其他} \end{cases},$$

求：(1) X,Y 的边缘密度；(2) 概率 $P(X+Y<1)$。

12. 设 X,Y 独立，且均为非负连续型随机变量，证明

$$P(X<Y)=\int_0^{\infty}F_X(x)p_Y(x)\mathrm{d}x,$$

其中，$F_X(x)$ 是 X 的分布函数，$p_Y(y)$ 是 Y 的密度函数。

13. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	2
0	0.1	0.2	0
1	0.3	0.05	0.1
2	0.15	0	0.1

(1) 求 $Y=0$ 时，X 的条件分布；(2) 判断 X，Y 的独立性。

14. 某人射击命中率为 p，现对目标进行连续射击，直到命中目标两次为止，设 X 为首次命中目标时的射击次数，Y 为总共进行的射击次数，试求 (X,Y) 的联合分布律与条件分布律。

15. 已知 (X,Y) 的联合分布律为

$$P(X=n,Y=m)=\frac{e^{-14}7.14^m 6.86^{n-m}}{m!(n-m)!},\quad n=0,1,2,\cdots;\ m=1,2,\cdots,n,$$

(1) 求 X,Y 的边缘分布律；(2) 求 X,Y 的条件分布律。

16. 设随机变量 X 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，求 $X>1/2$ 条件下 X 的条件分布函数。

17. 设随机变量 X,Y 相互独立，$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim U(-a,a)$，求 (X,Y) 的联合密度函数和条件密度函数。

18. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} xe^{-y} & 0<x<y \\ 0 & \text{其他} \end{cases},$$

(1) 求 $p_{X|Y=y}(x)$，$p_{Y|X=x}(y)$；(2) 求 $P(X<1|Y<2)$，$P(X<1|Y=2)$。

19. 设随机变量 X 在 $(0,1)$ 上随机取值，当观察到 $X=x$ 时，Y 在区间 $(x,1)$ 上随机取值，(1) 求 Y 的密度函数 $p_Y(y)$；(2) 求概率 $P(Y>1/2)$，$P(X+Y>1)$。

20. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	-1	1	2
-1	5/20	2/20	6/20
2	3/20	3/20	1/20

试求以下分布律：(1) $Z=X+Y$；(2) $Z=XY$；(3) $Z=X/Y$；(4) $Z=\max(X,Y)$。

21. 设随机变量 X,Y 相互独立，其分布律为

$$P(X=k)=P(Y=k)=1/2^k,\quad k=1,2,\cdots,$$

试求 $Z=X+Y$ 的分布律。

22. 若 $X\sim B(k_1,p)$，$Y\sim B(k_2,p)$ 且 X,Y 独立，证明 $Z=X+Y\sim B(k_1+k_2,p)$。

23. 设随机变量 X,Y 相互独立，且都等可能地取 $1,2,3$ 为值，令随机变量 $U=\max(X,Y)$，$V=\min(X,Y)$ 求 (U,V) 的联合分布律。

24. 设随机变量 X,Y 相互独立且有相同分布，其密度函数均为

$$p(x)=\begin{cases} e^{1-x} & x>1 \\ 0 & 其他 \end{cases},$$

用分布函数法求 $Z=X+Y$ 的密度函数。

25. 设随机变量 X,Y 都服从均匀分布，$X\sim U[0,2],Y\sim U[0,1]$，且 X,Y 独立，求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

26. 设 $Z=X-Y$，用分布函数法证明 Z 的密度函数 $p_z(z)$ 可表示为

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(z+y,y)\mathrm{d}y。$$

27. 设随机变量 (X,Y) 的密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} 3x, & 0<y<x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases},$$

求 $Z=X-Y$ 的密度函数。

28. 设二维随机变量 (X,Y) 在矩形区域 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上服从均匀分布，试求边长为 X,Y 的矩形面积 Z 的概率密度函数。

29. 设随机变量 X,Y 相互独立，均服从参数为 p 的几何分布，求 $Z=\max(X,Y)$ 的概率分布。

30. 设随机变量 X,Y 相互独立，均服从参数相同的泊松分布，已知 $P(X=1)=2P(X=2)$，求 $P(\max(X,Y)>0)$。

31. 设随机变量 X,Y 相互独立，均服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，令 $U=\max(X,Y)$，$V=\min(X,Y)$。求 U,V 的密度函数。

32. 设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1,L_2 连接而成，L_1,L_2 的寿命 X,Y 分别服从参数为 α,β 的指数分布，按以下连接方式求系统 L 寿命 Z 的概率密度函数：(1) 串联，(2) 并联，(3) 备用 (L_1 损坏，L_2 启动)。

33. 设随机变量 X,Y 独立，其中 X 的分布律为 $P(X=k)=k/3,(k=1,2)$，Y 的密度函数为 $p(y)$，求随机变量 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数 $g(z)$。