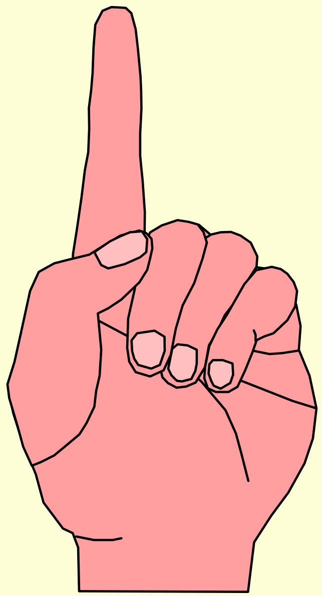
第四章 随机变量的数字特征

- 数学期望
- 方差
- 协方差与相关系数
- 矩与协方差矩阵
- n维正态分布



§1 随机变量的数学期望

数学期望——描述随机变量取值的平均特征

例　设某班40名学生的概率统计成绩及得分人数如下表所示：

分数	40	60	70	80	90	100
人数	1	6	9	15	7	2

则学生的平均成绩是总分÷总人数(分)。即

$$\frac{1\times40+6\times60+9\times70+15\times80+7\times90+2\times100}{1+6+9+15+7+2}=76.5(\text{分})$$

定义 1. 若X~P{X=x_k}=p_k, k=1,2,…n, 则称

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k p_k$$

为随机变量X的数学期望，简称期望或均值。

定义 2. 若X~P{X=x_k}=p_k, k=1,2,…,且

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k < \infty ,$$ 则称

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

为随机变量X的数学期望

例1 掷一颗均匀的骰子一次，以X表示掷得的点数，求X的数学期望。

$$E(X)=\sum_{k=1}^{6}k\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$$

定义

若X~f(x), -∞<x<∞, $\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx<\infty$

则称

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx.$$

为X的数学期望。

例2 若随机变量X服从拉普拉斯分布，其密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{2\lambda}\exp\left\{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}\right\}\qquad \lambda>0$$

试求E(X).

解：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{2\lambda}\exp\left\{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}\right\}dx$$

$$\overset{令t=\frac{x-\mu}{\lambda}}{=}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda t+\mu}{2\lambda}\exp\{-|t|\}\lambda dt=\int_{0}^{\infty}\mu\exp\{-t\}dt=\mu$$

几个重要r. v. 的期望

1. 0-1分布的数学期望

$$\begin{array}{ccc} X & 1 & 0 \\ P & p & 1-p \end{array} \Rightarrow \quad EX=p$$

2. 二项分布*b(n, p)*

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \qquad k=0,1,\ldots,n$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k}(1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)}$$

$$\underline{\underline{令 l=k-1}}\ np\sum_{l=0}^{n-1}C_{n-1}^{l}p^{l}(1-p)^{n-1-l}$$

$$=np$$

3. 泊松分布

$$X \sim P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\ldots$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda;$$

4. 均匀分布U(a, b)

$$X \sim f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$E(X)=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx=\frac{a+b}{2};$$

5. 指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$$E(X)=\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = -\int_0^{\infty} x de^{-\lambda x}$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$$

6. 正态分布N(μ, σ²)

$$X \sim f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\underset{\text{令 } t = \frac{x-\mu}{\sigma}}{=\!=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma t + \mu}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt;$$

$$= \mu$$

随机变量函数的期望

EX1：设随机变量X的分布律为

X	-1	0	1
P_k	$1/3$	$1/3$	$1/3$

求：随机变量$Y=X^2$的数学期望.

解：

Y	1	0
P_k	$2/3$	$1/3$

$$\therefore \quad E(Y)=1\cdot\frac{2}{3}+0\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

定理1：若 $X \sim P\{X=x_k\}=p_k$, $k=1,2,\ldots$, 则 $Y=g(X)$ 的期望 $E(Y)$ 为

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k .$$

推论: 若 $(X,Y) \sim P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}$, $i,j=1,2,\ldots$, 则 $Z=g(X, Y)$ 的期望为

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij} .$$

例3 某商场某月开展有奖促销活动，按规定10000人中，一等奖1个，奖金500元，二等奖10个，各奖100元，三等奖100个，各奖10元，四等奖1000个，各奖2元，购物一次可抽一次奖。今商场决定加大促销力度，各等奖奖金提高为原来的5倍，其它不变，则加大促销力度后，某人购物一次，他期望得奖多少元？

解：设r. v. X为此人一次购物所得奖金，则X的分布律为：

X	500	100	10	2	0
P_k	$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{8889}{10000}$

$$E(5X)=5\times500\times\frac{1}{10000}+5\times100\times\frac{1}{1000}+5\times10\times\frac{1}{100}$$

$$+5\times2\times\frac{1}{10}+5\times0\times\frac{8889}{10000}=2.25$$

例4 设随机变量(X, Y)的分布律如下，求E(XY)

X \ Y	1	2
0	0.15	0.15
1	0.45	0.25

解：$E(XY) = 0\times1\times0.15 + 0\times2\times0.15$

$$+1\times1\times0.45 + 1\times2\times0.25$$

$$=0.95$$

EX2：设随机变量X服从标准正态分布，求随机变量Y=aX+b的数学期望(其中a>0)

解： Y=ax+b关于x严单，反函数为 $h(y)=\dfrac{y-b}{a}$

Y的概率密度为

$$f_Y(y)=f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{|a|}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}\right)^2}{2}}\frac{1}{a}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}\right)^2}{2}}\frac{1}{a}dy=\underline{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ax+b}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx}=b$$

定理2 若X~f(x), -∞<x<∞, 则Y=g(X)的期望

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

推论： 若(X, Y) ~f (x, y), -∞<x<∞, -∞<y<∞,
则Z=g(X, Y)的期望

$$E(Z)=E[g(X,Y)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy\ .$$

EX 设X服从N(0,1)分布，求E(X²),E(X³),E(X⁴).

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}}de^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1$$

$$E(X^3)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0$$

$$E(X^4)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3}{\sqrt{2\pi}}de^{-\frac{x^2}{2}}=3\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=3$$

例5 已知二维r.v.(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求：E(XY).

解：

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\,dxdy$$

$$=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\,dxdy$$

$$=\frac{1}{3}$$

数学期望的性质

1. E(c)=c, c为常数;

2. E(cX)=cE(X), c为常数;

证明：设X~f(x)，则

$$E(cX)=\int_{-\infty}^{\infty} cxf(x)dx$$

$$=c\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=cE(X)$$

3. E(X+Y)=E(X)+E(Y);

证明：设(X,Y)~f(x,y)

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy]dx+\int_{-\infty}^{\infty}y[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx]dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx+\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)dy=E(X)+E(Y)$$

4. 若X与Y独立，则E(XY)=E(X)E(Y).

证明： 设(X,Y)~f(x,y)

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf_X(x)f_Y(y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)dy$$

$$=E(X)E(Y)$$

例6 若X~b(n,p)，求 E(X).

解: 设X为n重贝努里试验中事件A发生的次数，P(A)=p

令

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{第i次试验事件A发生}\\ 0 & \text{第i次试验事件A不发生}\end{cases}$$

则

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i \qquad E(X_i)=p$$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}p=np$$

EX1：设随机变量X ~N(0, 1)，Y~U(0, 1)，Z~B(5, 0. 5)，且X，Y，Z独立，求随机变量U=（2X+3Y)(4Z-1)的数学期望。

答：$$E(U)=E(2X+3Y)E(4Z-1)=\frac{27}{2}$$

EX2 设随机变量 $X_1,\ldots,X_n$ 相互独立，且均服从 $N(\mu,\sigma^2)$ 分布，求随机变量 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的数学期望.

答：$$E(\overline{X})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\mu$$

EX3：独立重复掷一颗色子10次，求所得点数之和的期望？

解：设r.v.X为掷一色子10次，所得点数之和。

X_i (i=1,2,···,10)为第i次掷得的点数。

则：

$$X = \sum_{i=1}^{10} X_i$$

X_i 的分布律为

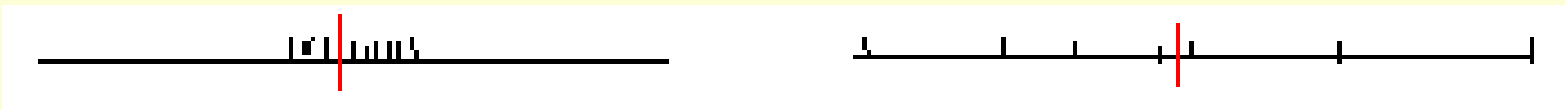
X_i	1	2	3	4	5	6
P_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\therefore\ E(X_i) = 3.5 \quad \therefore\ E(X) = \sum_{i=1}^{10} E(X_i) = 35$$

§2 方差

方差是衡量随机变量取值波动程度的一个数字特征。

如何定义?



定义

若$E[X-E(X)]^2$存在，则称

$$E[X-E(X)]^2$$

为r.v. X的方差，记为$D(X)$或$Var(X)$.

称 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ 为r.v.X的标准差或均方差.

可见

$$D(X)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2P\{X=x_k\}, & \text{离散型情形}\\ \int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)]^2f(x)dx, & \text{连续型情形}\end{cases}$$

推论 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$

证明：$D(X)=E[X-E(X)]^2$

$$=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}$$

$$=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2$$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

例1：设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1+x & -1<x<0\\ 1-x & 0\le x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

1）求D(X)，2）求 $D(X^2)$

解：$$(1)E(X)=\int_{-1}^{0}x(1+x)dx+\int_{0}^{1}x(1-x)dx=0$$

$$E(X^2)=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)dx+\int_{0}^{1}x^2(1-x)dx=\frac{1}{6}$$

$$\therefore \quad D(X)=\frac{1}{6}$$

(2) $$D(X^2)=E(X^4)-[E(X^2)]^2$$

$$E(X^4)=\int_{-1}^{0}x^4(1+x)dx+\int_{0}^{1}x^4(1-x)dx=\frac{1}{15}$$

$$D(X^2)=\frac{1}{15}-\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{7}{180}$$

方差的性质

(1) D(c)=0

反之，若**D（X）=0**，则存在常数**C**，使 P{X=C}=1.

(2) D(aX)=a²D(X)，a为常数；

证明：
$$D(aX)=E(a^2X^2)-[E(aX)]^2$$
$$=a^2E(X^2)-[aE(X)]^2$$
$$=a^2\{E(X^2)-[E(X)]^2\}$$
$$=a^2D(X)$$

(3) 若 X，Y 独立，则 D(X+Y)=D(X)+D(Y);

证明：$D(X+Y)=E[(X+Y)^2]-[E(X+Y)]^2$

$= E\{X^2+2XY+Y^2\}$

$-\{[E(X)]^2+2[E(X)][E(Y)]+[E(Y)]^2\}$

$= D(X)+D(Y)$

$+2E(XY)-2E(X)E(Y)$

X与Y独立$\Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$

$\therefore \quad D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

若$X_1,\ldots X_n$独立，则$D(\sum_{i=1}^{n} X_i)=\sum_{i=1}^{n} D(X_i)$

几个重要r. v. 的方差

1. 二项分布$b(n, p)$：

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad k=0,1,\ldots,n$$

$$E(X)=np$$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{kn!}{(k-1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1+1)n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{l=0}^{n-2} n(n-1) C_{n-2}^{l} p^{l+2} (1-p)^{n-2-l}$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} n C_{n-1}^{j} p^{j+1} (1-p)^{n-1-j} = n(n-1)p^2 + np$$

$$\therefore \quad D(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2 p^2$$

$$= np(1-p)$$

解法二:

设

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{第i次试验事件A发生} \\ 0 & \text{第i次试验事件A不发生} \end{cases}$$

则

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad D(X_i) = E(X_i^2) - \left[E(X_i)\right]^2$$

$$= p - p^2 = p(1-p)$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p)$$

2. 泊松分布p(λ)： $E(X)=\lambda$

$$X \sim P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k=0,1,2,\ldots$$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!}$$

由于 $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!}=\lambda$ 或 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}=\lambda e^{\lambda}$

两边对λ求导得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=(1+\lambda)e^{\lambda}$$

或 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!}=\lambda(1+\lambda)$

$$\therefore \quad D(X)=\lambda$$

3. 均匀分布U(a, b)

$$X \sim f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & 其他,\end{cases} \qquad E(X)=\frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2)=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$D(X)=E(X^2)\text{-}[E(X)]^2=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$

$$=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

4. 指数分布：

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad E(X)=\frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2)=\int_0^{\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_0^{\infty}x^2de^{-\lambda x}$$

$$=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+2\int_0^{\infty}xe^{-\lambda x}dx$$

$$=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda}\times\frac{1}{\lambda}=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$D(X)=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

5. 正态分布N(μ, σ²)

$$E(X)=\mu$$

$$X \sim f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$D(X)=E[X-\mathrm{E(X)}]^2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$t=\frac{x-\mu}{\sigma}, \text{则} x-\mu=\sigma t, dx=\sigma dt$$

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt \quad =\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-t)d(e^{-\frac{t^2}{2}})$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}[-te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt]$$

$$=\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{dt}=\sigma^2$$

期望、方差的性质对比

<table>
<tr><th>期望</th><th>方差</th></tr>
<tr><td>$E(c)=C$</td><td>$D(c)=0$</td></tr>
<tr><td>$E(aX)=aE(X)$,</td><td>$D(aX)=a^2D(X)$,</td></tr>
<tr><td>$E(X+Y)$
$=E(X)+E(Y)$</td><td rowspan="2">当X与Y独立时
$D(X+Y)$
$=D(X)+D(Y)$</td></tr>
<tr><td>当X与Y独立时
$E(XY)=E(X)E(Y)$</td></tr>
</table>

思考

1. 请给出一个离散型随机变量X和一个连续型随机变量Y，使它们的期望都是2，方差都是1。

2. 已知随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立，且每个X_i的期望都是0，方差都是1，令$Y=X_1+X_2+\ldots+X_n$，求$E(Y^2)$

切比雪夫不等式

若**r.v.X**的期望和方差存在，则对任意ε>0，有

$$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2};$$

这就是著名的切比雪夫(**Chebyshev**)不等式。

它有以下等价的形式：

$$\mathbf{P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}}.$$

已知某种股票每股价格X的平均值为1元，标准差为0.1元，求a, 使股价超过1+a元或低于1-a元的概率小于10%。

解：由切比雪夫不等式

$$P\{|X-1|\geq a\}\leq\frac{0.01}{a^2};$$

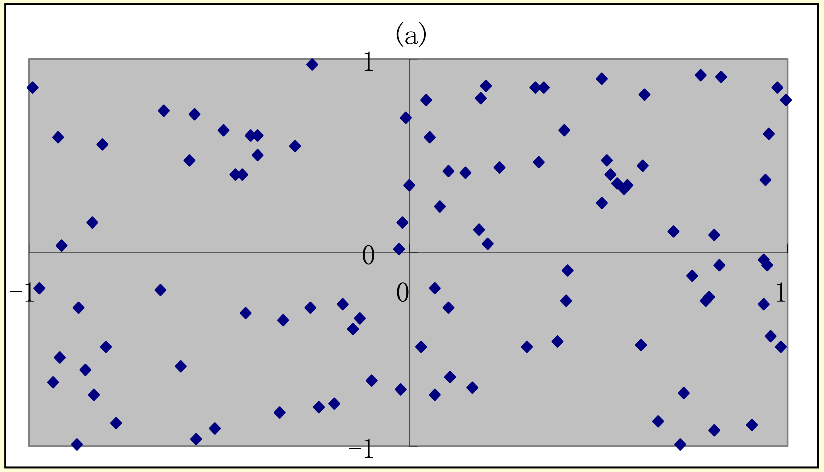
令

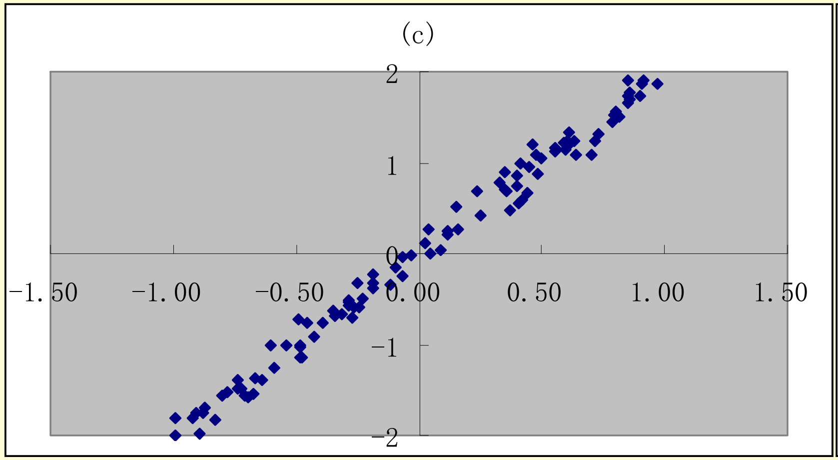
$$\frac{0.01}{a^2}\leq 0.1$$

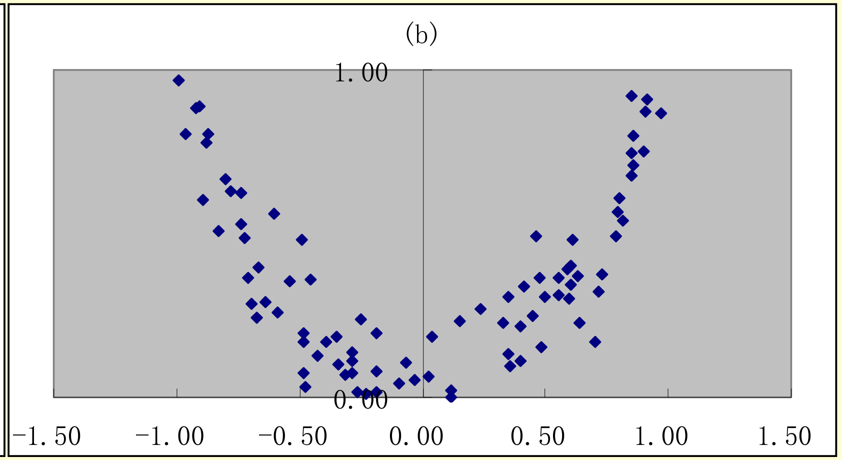
$$\Rightarrow a^2\geq 0.1 \quad \Rightarrow a\geq 0.32$$

如何描述两个随机变量之间的关系?

若(X,Y)的全部可能取值坐标如图a,b,c,X与Y的关系各是什么?







考虑Y与X的线性函数aX+b的“最小距离”：

$$e = E\left\{\left[Y-(aX+b)\right]^2\right\} = E(Y^2) + a^2E(X^2) + b^2$$
$$-2aE(XY) + 2abE(X) - 2bE(Y) \qquad (1)$$

取a,b使e最小:

令
$$\frac{\partial e}{\partial a} = 2aE(X^2) - 2E(XY) + 2bE(X) = 0$$
$$\frac{\partial e}{\partial b} = 2b + 2aE(X) - 2E(Y) = 0$$

解得:
$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{E(XY) - E(X)E(Y)}{D(X)} \\ b_0 = E(Y) - E(X)\dfrac{E(XY) - E(X)E(Y)}{D(X)} \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

将(2)带入(1),得

$$\min_{a,b} E\{[Y-(aX+b)]^2\}$$

$$= D(Y)\left[1-\frac{(E(XY)-E(X)E(Y))^2}{D(X)D(Y)}\right] \qquad (3)$$

易见,当 $\frac{(E(XY)-E(X)E(Y))^2}{D(X)D(Y)}=1$ 时, **Y与X的线性函数a_0X+b_0的” 距离”为0,说明此时可以用X的线性函数a_0X+b_0表示Y.**

---------称 $\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$ 为X与Y的相关系数.

§3 协方差及相关系数

一、协方差定义与性质

定义

若r.v. X的期望E(X)和Y的期 望E(Y)存在, 则称

$$Cov(X, Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

为X与Y的协方差, 易见

$$Cov(X, Y)=E(XY) - E(X)E(Y).$$ (P91)

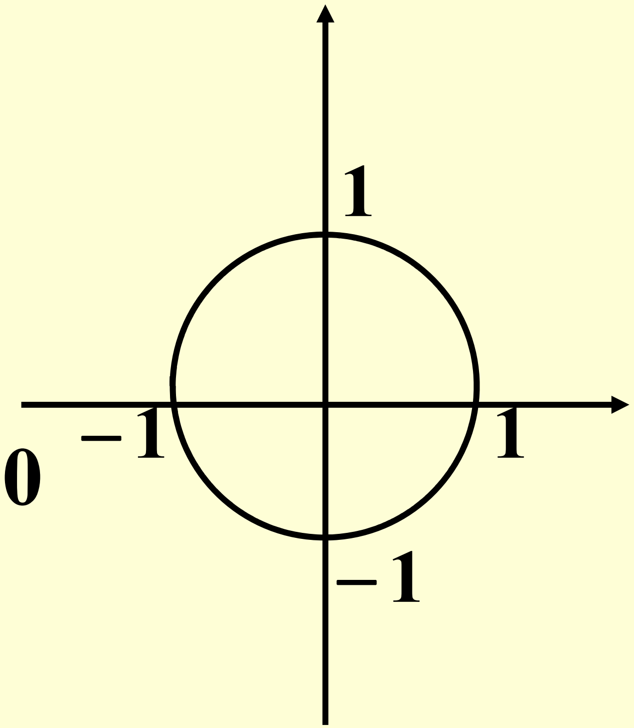
当Cov(X, Y)=0时，称X与Y不相关。

“X与Y独立”和“X与Y不相关”有何关系？

例1　设(X, Y)在D={(X, Y)：$x^2+y^2\le 1$}上服从均匀分布，求证：X与Y不相关，但不是相互独立的。

证：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

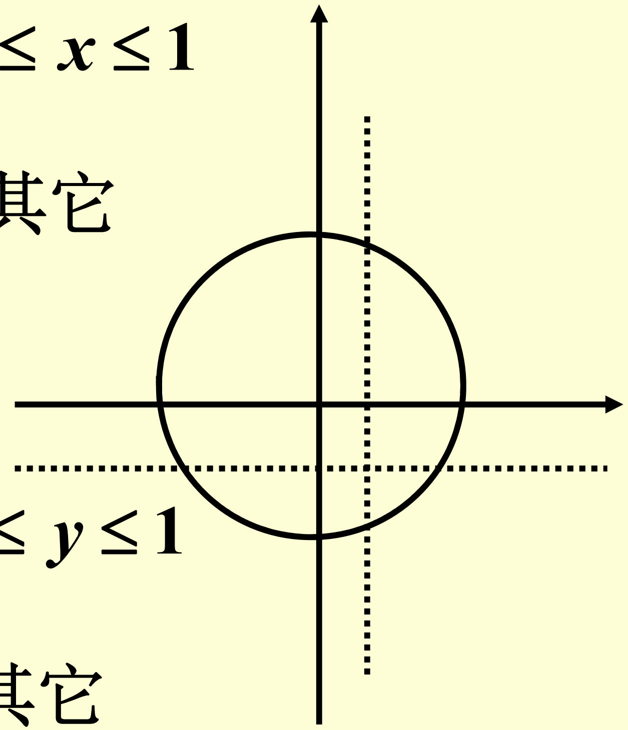


$$E(X)=\int_{-1}^{1}x\,dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=0$$

$$E(XY)=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{xy}{\pi}dy=0$$

$$\therefore \quad Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



$$f_Y(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & -1 \le y \le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$f(x,y) \ne f_X(x) f_Y(y)$ 故，X与Y不独立.

3.协方差性质

(1) $Cov(X, Y)=Cov(Y, X)$;

(2) $Cov(X,X)=D(X)$;$Cov(X,c)=0$

(3) $Cov(aX, bY)=abCov(X, Y)$, 其中a, b为 常数

证: $Cov(aX, bY)=E(aXbY)-E(aX)E(bY)$

$=abE(XY)-aE(X)bE(Y)$

$=ab[E(XY)-E(X)E(Y)]$

$=abCov(X,Y)$

(4) Cov(X+Y，Z)=Cov(X, Z)+Cov(Y, Z);

证: Cov(X+Y，Z)= E[(X+Y)Z]-E(X+Y)E(Z)

=E(XZ)+E(YZ)-E(X)E(Z)-E(Y)E(Z)

=Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)

(5) D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X, Y).

证: 由方差性质(3)的证明过程有

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + \underbrace{2E(XY) - 2E(X)E(Y)}_{2Cov(X,Y)}$$

注:D(X-Y)=D[X+(-Y)]

=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)

EX:设随机变量X~B（12,0.5),Y~N(0,1),Cov(X,Y)=-1,分别求V=4X+3Y+1与W=-2X+4Y的方差及V和W的协方差。

$$答: E(X)=12\times 0.5=6, D(X)=3, D(Y)=1$$

$$D(V)=16D(X)+9D(Y)+24Cov(X,Y)=33$$

$$D(W)=4D(X)+16D(Y)-16Cov(X,Y)=44$$

$$Cov(V,W)=Cov(4X+3Y,-2X+4Y)$$

$$=-8D(X)+16Cov(X,Y)-6Cov(Y,X)+12D(Y)$$

$$=-22$$

二、相关系数

定义

若r.v. X，Y的方差和协方差均存在,
且DX>0,DY>0，则

$$\rho = \rho_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

称为X与Y的相关系数. (P93)

相关系数的性质

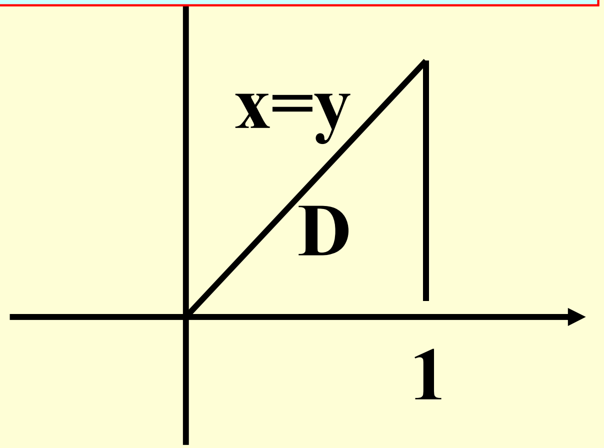
(1) $|\rho_{XY}| \le 1$;

(2) $|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow$ 存在常数a, b 使 $P\{Y = aX + b\} = 1$;

(3) X与Y不相关 $\Leftrightarrow \rho_{XY} = 0$;

EXT

设(X,Y)服从区域 D: 0<x<1,0<y<x 上的均匀分布,求X与Y的相关系数.



解:

$$f(x,y)=\begin{cases}2 & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$E(X)=\int_0^1 2x\,dx\int_0^x dy=\frac{2}{3}\qquad E(Y)=\int_0^1 2\,dx\int_0^x y\,dy=\frac{1}{3}$$

$$E(XY)=\int_0^1 2x\,dx\int_0^x y\,dy=\frac{1}{4}$$

$$COV(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{36}$$

$$D(X)=\int_0^1 2x^2dx\int_0^x dy-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$

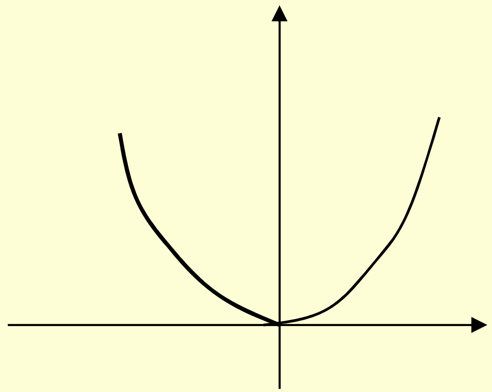
$$D(Y)=\int_0^1 2dx\int_0^x y^2dy-\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$$

$$\rho_{XY}=\frac{COV(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{1}{2}$$

EX2

1) $X \sim U(0,1), Y = X^2$, 求 ρ_{XY}

2) $X \sim U(-1,1), Y = X^2$, 求 ρ_{XY}



解1)

$$E(X) = \frac{1}{2}, E(Y) = \frac{1}{3}, E(XY) = \frac{1}{4}, D(X) = \frac{1}{12}, D(Y) = \frac{4}{45}$$

$$\rho_{XY} = \frac{\frac{1}{12}}{\sqrt{\frac{1}{12} \times \frac{4}{45}}} \approx 0.968$$

2) $E(X) = 0, E(XY) = 0$

$$\rho_{XY} = 0$$

以上EX的结果说明了什么？

例3　设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 则 $\rho_{XY}=\rho.$

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\quad Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

P87

若（X，Y）服从二维正态分布，

则：X与Y独立的充分必要条件是X与Y不相关。

协方差与相关系数的定义

期望、方差、协方差的性质对比

不相关与独立

期望、方差、协方差的性质对比

期望	方差	协方差
$E(c)=C$	$D(c)=0$	$Cov(c,X)=0$
$E(aX)=aE(X)$,	$D(aX)=a^2D(X)$,	$Cov(aX,bY)$ $=abCov(X,Y)$
$E(X+Y)$ $=E(X)+E(Y)$ 当X与Y独立时 $E(XY)=E(X)E(Y)$	$D(X+Y)=D(X)+$ $D(Y)+2Cov(X,Y)$	$Cov(X+Y,Z)$ $=Cov(X,Z)$ $+Cov(Y,Z)$

§ 4 矩与协方差矩阵

1. K阶(原点)矩　　$E(X^k)$, $k=1, 2, \ldots$

2. K 阶中心矩　　$E[X-E(X)]^k$, $k=2, \ldots$

3. K+l 阶混合原点矩

$$E(X^k Y^l),\quad k, l=1, 2, \ldots$$

4. K+l 阶混合中心矩

$$E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\},\quad k, l=1, 2, \ldots$$

5. 设X_1， … , X_n为n个r.v., 记c_{ij}=Cov(X_i, X_j), i, j=1, 2, …, n. 则称由c_{ij}组成的矩阵为随机变量X_1， … , X_n的协方差矩阵C。即

$$C=(c_{ij})_{n\times n}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

§5 n 维正态分布(P100)

1. 相互独立正态随机变量的线性组合还是正态随机变量。即

若X_1，…，X_n相互独立，且 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, \cdots, n$ ，

则对任意常数α_1，…α_n

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2\right).$$

2. r.v.(X_1，…, X_n)^{T}服从n维正态分布的充要条件是X_1，…, X_n的任意线性组合$l_1 X_1 + \cdots + l_n X_n$服从一维正态分布。

3. n维正态变量（X_1， … , X_n ）的每一个分量都是正态变量；反之，若X_1， … , X_n都是正态变量，且相互独立，则（X_1， … , X_n ）是n维正态变量。

4. 若（X_1， … , X_n ）服从n维正态分布，设 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_k$ 是 $X_i, i=1,2,\cdots,n$ 的线性函数，则 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$ 也服从多维正态分布。

5. 服从n维正态分布的随机变量的两两不相关性与相互独立性是等价的。

例1 一架小飞机可载客9人，其载重量为750千克，设人的体重（千克）服从N（51，10^2）分布，求飞机超载的概率。

解：设X_i — 第i人体重，$i=1,2,\ldots 9$

$X_i \sim N(51,10^2)$，$X_1,\ldots X_9$独立.

$X=\sum_{I=1}^{9} X_i$为9人总体重，$\therefore X \sim N$（$459,30^2$）

$$P\{X>750\}=1-\Phi\left(\frac{750-459}{30}\right)=1-\Phi(9.7)=0$$

例2 设(X, Y)服从N(1, 0, 3^2, 4^2, -0.5)分布，Z=X/3+Y/2

1)求Z的概率密度

2)求X与Z的相关系数

3)问X与Z是否相互独立？为什么？

解： $$1)E(Z)=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)=\frac{1}{3}$$

$$D(Z)=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)}=3$$

$$\therefore f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{(z-1/3)^2}{6}}$$

$$2)COV(X,Z)=COV(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)}$$

$$=\frac{1}{3}\times 9+\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})\times\sqrt{9\times 16}=0$$

$$\therefore \rho_{XZ}=0$$

3）因为（X，Z）是二维正态变量（X，Y）的线性变换，故（X，Z）服从二维正态分布。又由于

$$\rho_{XZ}=0$$

说明X与Z不相关，从而是独立的。

小结

E（X）

定义式
函数的期望

E(C)
E(cX)
E(X+Y)
E（XY）

D（X）

定义式
计算式

D(C)
D(cX)
D(X+Y)

COV（X,Y）

定义式
计算式

COV(X,X)
COV(aX,bY)
COV(X+Y,Z)

相关系数

不相关
与
独立

六种常用随机变量的期望与方差

1. 某射手对靶独立射击5发，若5发全中靶得10分，命中4发可得6分，命中3发可得3分，命中2发可得1分，其它情况得负1分. 已知该射手的单发命中概率为0. 8， 求他的期望得分数.

解：设**X:**命中发数，**Y:**得分数，则**X～B(5,0.8)**

Y	10	6	3	1	-1
P_k	P{X=5}	P{X=4}	P{X=3}	P{X=2}	P{X=0}+P{X=1}

$$E(Y)=10\times 0.8^5+6C_5^4 0.8^4 0.2+3C_5^3 0.8^3 0.2^2$$

$$+C_5^2 0.8^2 0.2^3-[C_5^1 0.8\times 0.2^4+0.2^5]\approx 6.39$$

2 设工厂生产的设备的寿命**X**（单位：年）的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}\exp\left\{-\frac{x}{4}\right\} & (x>0)\\ 0 & (x\le 0)\end{cases}$$

按规定，已出售设备在一年内损坏可以包换.若工厂售出一台设备盈利**100**元，调换一台设备厂方需花费**300**元.

① 求一台设备的平均寿命

② 求厂方售出一台设备净赢利的期望值.

解：(1) $E(X)=\int_0^{\infty}\frac{x}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx=4$

(2) 设Y一厂方售出一台设备净赢利

$$Y=\begin{cases}-300+100 & X<1\\ 100 & X\geq 1\end{cases}$$

$$E(Y)=-200\int_0^1\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx+100\int_1^{\infty}\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx$$

$$=300e^{-\frac{1}{4}}-200\approx 33.64$$

3 设随机变量X与Y满足: $D(X)=D(Y)=1$ 而且 $\rho_{XY}=\frac{1}{2}$

令 $U=aX$, $V=bX+cY$ **求常数a,b,c的值，使**

得 $D(U)=D(V)=1$ **，而且U与V不相关.**

解: $D(U)=a^2=1;$

$$D(V)=b^2+c^2+2bcCov(X,Y)$$

$$=b^2+c^2+2bc\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)}$$

$$=b^2+c^2+bc=1$$

且$Cov(U,V)=ab+\frac{ac}{2}=0$

解得 $a=\pm1;\ \ b=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\ \ c=\mp\frac{2}{\sqrt{3}}$