

Problem 1

- a) 3
- b) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}: f(n) = n^2, \aleph_0$
- c) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}: f(n) = n^{109}, \aleph_0$
- d) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}: f(n) = n^{218}, \aleph_0$
- e) 整系数一元二次方程组的解含有无理数, 不可数, \aleph_1
- f) 圆心的横坐标集合为实数集, 不可数, \aleph_1

Problem 2

- a) $A \subseteq B$ 则对任意 $x \in A, x \in B$, 存在 $A \rightarrow B$ 的单射 $f(x) = x, |A| \leq |B|$.
- b) 1° 若 $A = \emptyset, B = \emptyset, B$ 是可数的.
2° 若 A 是有限集, $|A| \geq |B|, B$ 是有限集, B 是可数的.
3° 若 A 是可数无限集, 存在自然数集 \mathbb{N} 到 A 的满射函数 g ,
则存在自然数集 \mathbb{N} 到 B 的满射函数 $f \circ g, B$ 是可数的.

Problem 3

$A = \{a, b, c\}, P(A) = \{\emptyset, \{c\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$
 $2 = \{0, 1\}, 2^A = \{\langle a, 0 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle c, 0 \rangle, \dots, \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 1 \rangle\}$
 A 中每个元素是否含有 a, b, c 与 B 中每个元素中数对 0 或 1 一一对应, $A \approx B$.

Problem 4

$\{1, 2, 3\}^\omega = \{x \mid x = x_0x_1x_2\cdots, x_0, x_1, x_2\cdots \in \{1, 2, 3\}\}$
假设有线性排列: $x_{11}x_{12}x_{13}\cdots, x_{21}x_{22}x_{23}\cdots, x_{31}x_{32}x_{33}\cdots, \dots$
构造 $x_1x_2x_3\cdots (x_i \neq x_{ii})$, 它不在这个序列中, 则该集合不可数.

Problem 5

$\mathbb{N}^\mathbb{N} = \{f \mid f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$, 假设对任意 x 把 $y = f(x)$ 置于数串的第 n 位,
 f 表示为 $y_1y_2y_3\cdots$, 构造 $f = y_1y_2y_3\cdots (y_i \neq y_{ii})$ 则 f 不在序列中, 集合不可数.

Problem 6

- a) $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, 可看作 $|A|$ 个 $\{(a_i, b) \mid b \in B\}$ 的并集.
其中第 i 个可以对其元素进行排序得 $(a_i, b_1), (a_i, b_2), (a_i, b_3)\cdots$
集合 $A \times B$ 中元素可列为 $(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3)\cdots, (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\cdots$
- b) 假设 $A_1, A_2, A_3\cdots$ 是可数集, 任意 A_i 可以对其元素进行排序得 $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}\cdots$.
集合 $\bigcup_{i=1}^\infty A_i$ 中元素可列为 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{21}, a_{22}, \dots, \dots, a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}\cdots$.

Problem 7

- a) $A \cap B = A \cap C = \emptyset$ 则 $|A \cup B| = |A| + |B|, |A \cup C| = |A| + |C|$
又 $|B| = |C|$, 则 $|A \cup B| = |A \cup C|$.
- b) 假设 A 是可数集, 对 $A \cup B$ 可以交替列出 A 的元素与 B 的元素排成序列,
与 $A \cup B$ 是不可数集矛盾, 故 A 一定是不可数集.