Problem 1

1) f1 = {<0, 0>, <1, 0>}　　f2 = {<0, 0>, <1, 1>}

f3 = {<0, 1>, <1, 0>}　　f4 = {<0, 1>, <1, 1>}

2)

| ° | f1 | f2 | f3 | f4 |
|---|---|---|---|---|
| f1 | f1 | f1 | f4 | f1 |
| f2 | f1 | f2 | f3 | f4 |
| f3 | f4 | f3 | f2 | f1 |
| f4 | f4 | f4 | f1 | f4 |

Problem 2

1) 封闭　2) 不封闭　3) 封闭　4) 加法不封闭，乘法封闭

5) 不封闭　6) 封闭　7) 封闭　8) 不封闭

9) 封闭　10) 加法不封闭，乘法封闭

Problem 3

1) f1, f2, f3, f4, f5, f6 均为 R 是的二元运算

2) f1: 可交换，可结合，不幂等　f2: 不可交换，不可结合，不幂等

f3: 可交换，可结合，不幂等　f4: 可交换，可结合，幂等

f5: 可交换，可结合，幂等　f6: 可交换，不可结合，不幂等

3) f1: 单位元 0，无零元，逆元-x　f2: 无单位元，无零元，无可逆元素

f3: 单位元 1，零元 0，逆元 1/x　f4: 无单位元，无零元，无可逆元素

f5: 无单位元，无零元，无可逆元素　f6: 无单位元，无零元，无可逆元素

Problem 4

1) 能构成代数系统，满足交换律，满足结合律，无单位元，零元是 1

2) 不能构成代数系统，如 3*10 = lcm(3, 10) = 30 ∉ S

3) 能构成代数系统，满足交换律，满足结合律，单位元是 10，零元是 1

4) 不能构成代数系统，如 1*2 = 0 ∉ S

Problem 5

1) 是代数系统，适合交换律，适合结合律，单位元是常函数 f(x) = 0，无零元

2) 是代数系统，不适合交换律，不适合结合律，无单位元，无零元

3) 是代数系统，适合结合律，适合结合律，单位元是常函数 f(x) = 1，无零元

4) 不是代数系统，如对 g(x) = 0 不存在(f/g)(x).

Problem 6

设二元运算*不可交换也不可结合，则 a*b≠b*a, (a*b)*a≠a*(b*a)

设 a*b = a, b*a = b，有 a*a≠a*b = a, a*a = b,

又(b*a)*b≠b*(a*b)，有 b*b≠b*a = b, b*b = a.

| * | a | B |
|---|---|---|
| a | b | a |
| b | b | a |

Problem 7

1) 能, x 的某次幂可以被 16 整除↔x 为偶数(x=2k, x^4=16x^4 可以被 16 整除)
   设 x=2k, y=2t, x+y=2(k+t)仍为偶数, x+y 属于这个子集，运算封闭.
2) 不能，如该子集中有元素 4, 6, 4+6=10, 10 与 5 不互素，故不属于这个子集.
3) 不能，如 30 有因子 2, 5, 2+5=7, 7 不是 30 的因子，故不属于这个子集.
4) 能，设 x=30a, y=30b, x+y=30(a+b)仍为 30 倍数, x+y 属于这个子集，运算封闭.

Problem 8

1) a*b=b*a, a*c=c*a, b*c=c*b, *满足交换律,
   若 x, y, z 中有 a, x, y, z 任有一个为 a 则(x*y)*z = a, x*(y*z) = a,
   若 x, y, z 中无 a, x, y, z 任有一个为 c 则(x*y)*z = c, x*(y*z) = c.
   (b*b)*b = b*(b*b) = b，则*满足结合律,
   a*a = a, b*b = b, c*c = c, *满足幂等律.
   单位元是 b，零元是 a, a 不可逆, b 的逆元是 b, c 不可逆.
2) a°b = a, b°a = b, a°b≠b°a，°不满足交换律,
   x°(y°z) = x°y = x, (x°y)°z = x°z = x，°满足结合律,
   a°a = a, b°b = b, c°c = c，°满足幂等律.
   无单位元，无零元, a, b, c 不可逆.
3) a·b = b, b·a = a, a·b≠b·a，·不满足交换律,
   a·b = a·(a·b) = (x·y)·b = b，其中(x, y)≠(a, b), (a·c)·b = b, a·(c·b) = a·a = a
   (a·c)·b ≠ a·(c·b)，·不满足结合律,
   b·b = a≠b, c·c = a≠c，·不满足幂等律.
   无单位元，无零元, a, b, c 不可逆.