第八章　假设检验

- 8.1假设检验的基本概念和思想
- 8.2 单正态总体的假设检验
- 8.3 双正态总体均值差与方差比的 假设检验

几个实际问题

1. 设某种产品的次品率为p,若规定次品率不能超过1%,现随机抽取10个产品进行检验，其中含有1个次品，可否认为这批产品合格?

2. 假定10岁儿童的体重服从正态分布，且标准体重为25公斤，现随机称量某市50名儿童的体重，得数据24，22，27，....。如何根据这些数据判断该市儿童体重是否达标?

3. 如何根据对两批产品质量指标的观察数据比较两批产品的质量?

§1 假设检验的基本概念和思想

（一）原假设与备择假设：H_0：…；H_1：…

(二) 检验法则与拒绝域

样本观测值的全体组成样本空间S, 把S分成两个互不相交的子集W和W*, 即$S=W\cup W^*$, $W\cap W^*=\phi$

假设当$(x_1, \cdots, x_n)\in W$时, 我们就拒绝H_0；当样本观察值$(x_1, \cdots, x_n)\in W^*$时, 我们就接受$H_0$。子集$W\subset S$就称为检验的拒绝域(或临界域)。

这种从样本出发制定的,参考H_1,判断是否拒绝H_0的法则称为H_0对H_1的一个检验法则, 简称检验法

(三) 检验的两类错误

称 H_0 真而被拒绝的错误为第一类错误或弃真错误；

称 H_0 假而被接受的错误为第二类错误或取伪错误。

记 $p(\mathrm{I})=p\{拒绝H_0 | H_0真\}$； $P(\mathrm{II})=p\{接受H_0 | H_0假\}$

对于给定的一对 H_0 和 H_1，总可找出许多拒绝域，人们自然希望找到这种拒绝域W，使得犯两类错误的概率都很小。

但在样本容量一定时，不能同时保证犯两类错误的概率都最小。

于是奈曼—皮尔逊提出了这样一个原则："在控制犯第一类错误的概率不超过指定值α的条件下，尽量使犯第二类错误的概率小"按这种法则做出的检验称为"显著性检验"，α称为显著性水平或检验水平。

一般地，对连续型总体，使$P(I)\leq\alpha$与又使$P(II)$尽可能小的临界值恰好满足$P(I)=\alpha$. 于是，符合奈曼—皮尔逊原则的拒绝域满足$P(I)=\alpha$.

显著性检验的基本步骤：

(1)根据实际问题作出假设H_0与H_1；

(2)构造统计量, 在H_0真时其分布已知；

(3)给定显著性水平α的值, 参考H_1, 令

$P\{$拒绝$H_0 | H_0$真$\} = \alpha$, 求出拒绝域W；

(4) 计算统计量的值, 若统计量$\in W$, 则拒绝 H_0, 否则接受H_0

§2 单个正态总体的假设检验

一、单个正态总体均值的假设检验

设 $X_1,\dots,X_n \overset{i.i.d}{\sim} N(\mu,\sigma^2)$,给定显著性水平α,由观测值

$x_1,\dots,x_n$,检验假设: H_0: $\mu=\mu_0$; H_1: $\mu\neq\mu_0$

1、σ^2已知的情形---U检验

对于假设H_0: $\mu=\mu_0$; H_1: $\mu\neq\mu_0$, 构造

$$H_0\text{真时:}\quad U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

$$p\{|U|\geq U(\frac{\alpha}{2})\}=\alpha,\text{可得拒绝域:}|U|\geq U(\frac{\alpha}{2})$$

查表, 计算, 比较大小, 得出结论

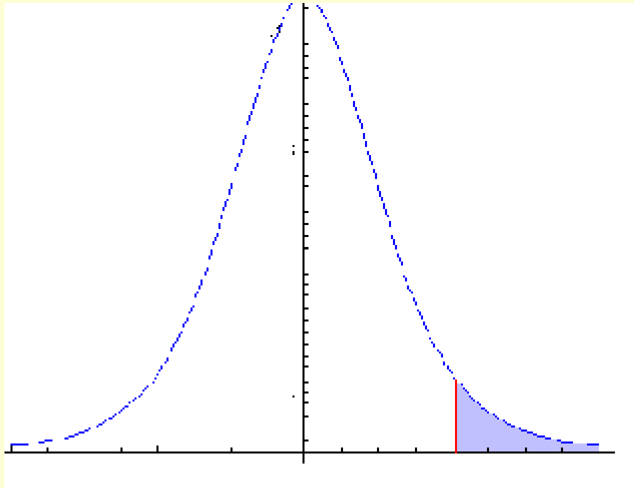
说明：(1) H_0：$\mu=\mu_0$；H_1：$\mu\neq\mu_0$称为双边HT问题；

(2) H_0：$\mu\leq\mu_0$；H_1：$\mu>\mu_0$ 或H_0：$\mu\geq\mu_0$；H_1：$u<u_0$ 称为单边HT问题。

右边HT问题

H_0: $\mu \le \mu_0$; H_1: $\mu > \mu_0$,

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$



若取拒绝域为 $W=\{U \ge U(\alpha)\}$ 则犯第一类错误的概率为

$$P\{U \ge U(\alpha) \mid \mu \le \mu_0\} = P_{\mu \le \mu_0}\{\frac{\overline{X}-\mu+\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge U(\alpha)\}$$

$$= P_{\mu \le \mu_0}\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge U(\alpha) + \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\}$$

$$\le P_{\mu \le \mu_0}\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge U(\alpha)\} = 1-\Phi(U(\alpha)) = \alpha$$

于是

$$\sup_{\mu \le \mu_0} P\{U \ge U(\alpha) \mid \mu \le \mu_0\} = \alpha$$

故

$W = \{U \ge U(\alpha)\}$ 是**H_0：$\mu \le \mu_0$；H_1：$\mu > \mu_0$，**

的水平为α的拒绝域

例1：设某厂生产一种灯管，其寿命X~N(μ, 200^2)，由以往经验知平均寿命μ=1500小时，现采用新工艺后，在所生产的灯管中抽取25只，测得平均寿命1675小时，问采用新工艺后，灯管寿命是否有显著提高。(α=0.05)

解：$H_0: \mu \le \mu_0 = 1500 \quad H_1: \mu > \mu_0$

检验统计量为 $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ H_0的拒绝域为 $W = \{U \ge u_\alpha\}$

$u = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \dfrac{1675 - 1500}{200 / \sqrt{25}} = 4.375$ 对于α=0.05 $u_\alpha = 1.645$

因为 $u = 4.375 > 1.645$

拒绝H_0，即灯管寿命有显著提高

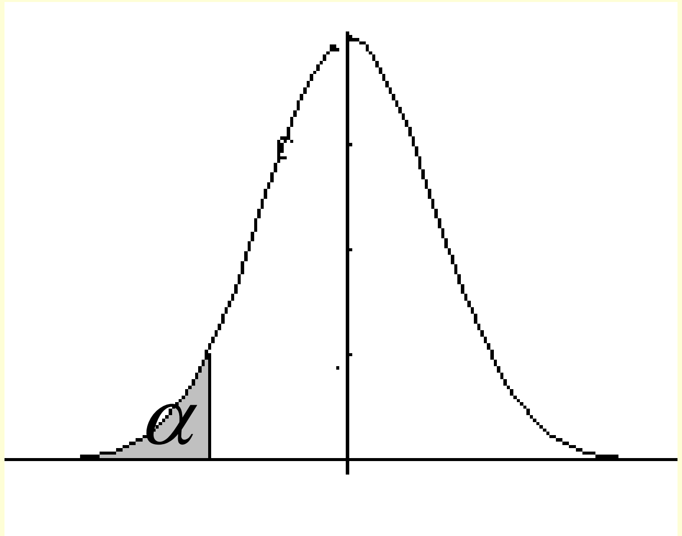
· 左边**HT**问题

H_0： $\mu \ge \mu_0$； H_1： $\mu < \mu_0$,

$$\mu = \mu_0 \text{时} \quad \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$\text{由} P\{U \le -U(\alpha)\} = \alpha$$

可得显著性水平为α的拒绝域为



$$U \le -U(\alpha)$$

例2 已知某炼铁厂的铁水含碳量在正常情况下服从正态分布N(4.55,0.11²).某日测得5炉铁水含碳量如下: 4.28, 4.40, 4.42, 4.35, 4.37. 如果标准差不变,该日铁水的平均含碳量是否显著偏低? (取 α=0.05)

解: $H_0: \mu \geq \mu_0 = 4.55 \quad H_1: \mu < \mu_0$

检验统计量为 $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ $\quad H_0$的拒绝域为 $W = \{U \leq -u_\alpha\}$

计算得 $\bar{x} = 4.364 \quad u = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{4.364 - 4.55}{0.11/\sqrt{5}} = -3.78$

对于α=0.05 $\quad u_\alpha = 1.645$ 因为 $u = -3.78 < -1.645$

拒绝H_0, 即该日铁水的平均含碳量显著偏低

注:上题中,用双边检验或右边检验都是错误的.

若用双边检验, H_0: $\mu=4.55$; H_1: $\mu\neq4.55$,则拒绝域为

$$|U| \geq U(\frac{\alpha}{2}) = 1.96$$

由$|U|=3.78>1.96$,故拒绝H_0,说明可以认为该日铁水的平均含碳量显著异于4.55.但无法说明是显著高于还是低于4.55.不合题意

若用右边检验, H_0: $\mu\leq4.55$; H_1: $\mu>4.55$,则拒绝域为

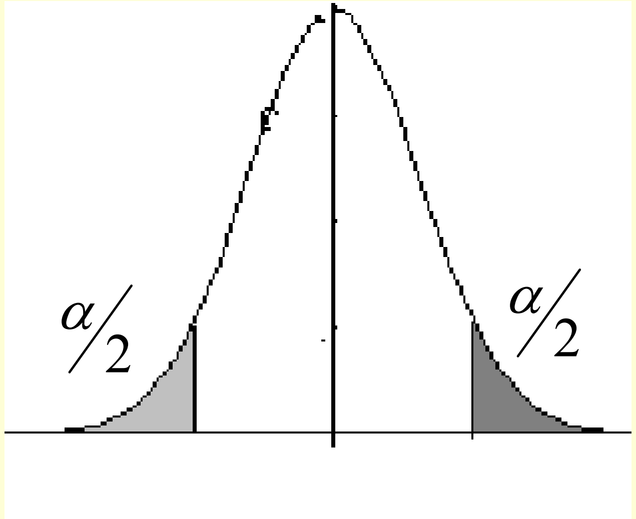
$$U \geq U(0.05) = 1.645$$

由$U=-3.78<1.645$,故接受H_0,说明不能认为该日铁水的平均含碳量显著高于4.55.但无法区分是等于还是低于4.55.不合题意.

2、σ^2未知的情形

·双边检验:对于假设

H_0：$\mu=\mu_0$；H_1：$\mu\neq\mu_0$



$$H_0\text{真时}: T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

由**$P\{|T|\geq t_{\alpha/2}(n-1)\}=\alpha$,**

得水平为α的拒绝域为

$$|T|\geq t_{\alpha/2}(n-1),$$

例3 用热敏电阻测温仪间接温量地热勘探井底温度，重复测量7次，测得温度(℃)： 112.0 113.4 111.2 112.0 114.5 112.9 113.6 而用某种精确办法测得温度为112.6(可看作真值)，试问用热敏电阻测温仪间接测温有无系统偏差(设温度测量值X服从正态分布，取 α=0.05)？

解： $H_0: \mu = \mu_0 = 112.6 \quad H_1: \mu \neq \mu_0$

检验统计量为 $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ H_0的拒绝域为$W = \{|t| \geq T_{\alpha/2}(n-1)\}$

计算得 $\overline{x} = 112.8 \quad s = 1.135$ $t = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{112.8 - 112.6}{1.135/\sqrt{7}} = 0.466$

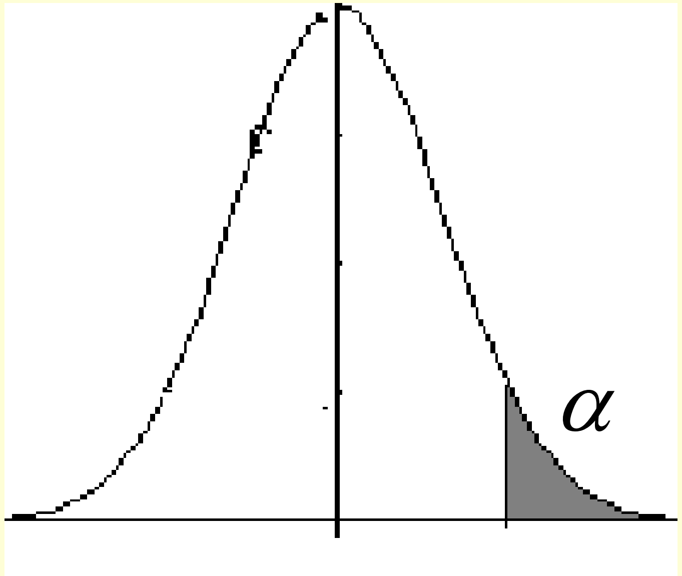
对于α=0.05，n=7 $t_{\alpha/2}(n-1) = 2.4469$ 因为 $|t| = 0.466 < 2.4469$

接受H_0，热敏电阻测温仪间接测温无系统偏差

·右边**HT**问题

H_0：　$\mu \le \mu_0$；　H_1：　$\mu > \mu_0$,

$$\mu = \mu_0\text{时}: T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$



由$P\{T \ge t_\alpha(n-1)\} = \alpha$,

得水平为α的拒绝域为

$T \ge t_\alpha(n-1)$,

例4 某厂生产镍合金线，其抗拉强度的均值为10620（kg/mm^2）今改进工艺后生产一批镍合金线，抽取10根,测得抗拉强度(kg/mm2)为： 10512， 10623， 10668， 10554， 10776， 10707， 10557， 10581， 10666， 10670. 认为抗拉强度服从正态分布,取α=0.05，问新生产的镍合金线的抗拉强度是否比过去生产的合金线抗拉强度要高?

解： $H_0: \mu \le \mu_0 = 10620 \qquad H_1: \mu > \mu_0$

检验统计量为 $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ H_0 的拒绝域为 $W = \{t \ge T_\alpha(n-1)\}$

计算得 $\overline{x} = 10631.4 \quad s = 81 \qquad t = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{10631.4 - 10620}{81/\sqrt{10}} = 0.45$

对于α=0.05，n=10 $t_\alpha(n-1) = 1.8331$ 因为 $t = 0.45 < 1.8331$

接受H_0, 新生产不比过去生产的抗拉强度要高

·左边**HT**问题

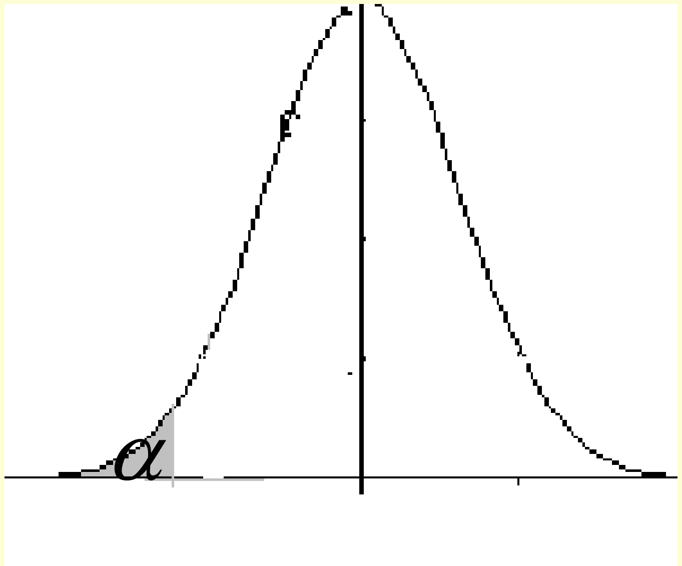
H_0： $\mu \geq \mu_0$ ； H_1： $\mu < \mu_0$,

$$\mu = \mu_0\text{时}: T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

由**P{T≤ - t_α(n –1)} =α,**

得水平为α的拒绝域为

T≤ - t_α(n –1)



EX 设正品镍合金线的抗拉强度服从均值不低于10620 (kg/mm²)的正态分布, 今从某厂生产的镍合金线中抽取10根,测得平均抗拉强度10600 (kg/mm²) ,样本标准差为80.,问该厂的镍合金线的抗拉强度是否不合格? ($\alpha=0.1$)

解: $H_0: \mu \geq \mu_0 = 10620 \qquad H_1: \mu < \mu_0$

检验统计量为 $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ $\qquad H_0$的拒绝域为$W = \{t \leq -T_\alpha(n-1)\}$

其中 $\bar{x} = 10600 \quad s = 80 \qquad t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{10600 - 10620}{80/\sqrt{10}} = -0.79$

对于$\alpha=0.1$, $n=10$ $\qquad t_\alpha(n-1) = 1.8331$

因为 $\qquad t = -0.79 > -1.8331$

接受H_0, 新生产不低于过去生产的抗拉强度

二、单个正态总体方差的假设检验

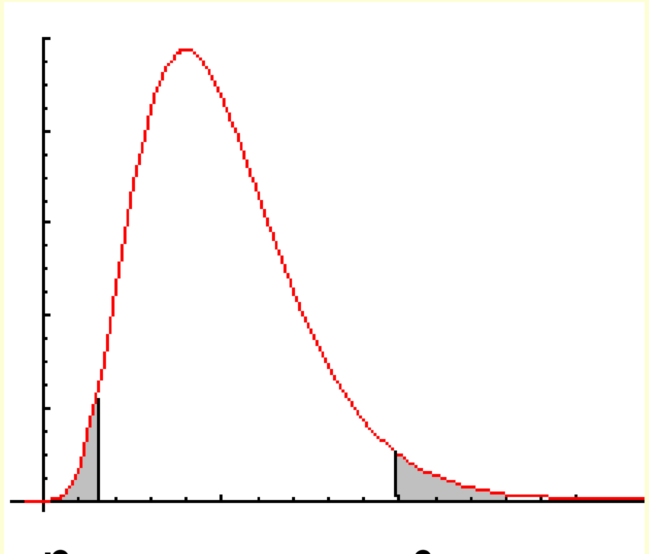
设$X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu,\sigma^2)$，给定检验水平 α，由观测值$x_1,\cdots,x_n$检验假设

$$H_0:\ \sigma^2=\sigma_0^2;\ H_1:\ \sigma^2\neq\sigma_0^2。$$

假定μ未知，双边检验: 对于假设

$$H_0:\ \sigma^2=\sigma_0^2;\ H_1:\ \sigma^2\neq\sigma_0^2$$

$$H_0\text{下}\quad \chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$$



$\chi^2_{1-\alpha/2}$ $\chi^2_{\alpha/2}$

由$P\{\chi^2 \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$或$\chi^2 \ge \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\} = \alpha$

得水平为α的拒绝域为

$$\boldsymbol{\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\text{或}\boldsymbol{\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1)}。$$

而对单边问题H_0：$\sigma^2 \le \sigma_0^2$；H_1：$\sigma^2 > \sigma_0^2$，

可解得拒绝域：$\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha}(n-1)$；

对于单边问题H_0：$\sigma^2 \ge \sigma_0^2$；H_1：$\sigma^2 < \sigma_0^2$，

可解得拒绝域：$\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$。

例5 电工器材厂生产一批保险丝，取10根测得其熔化时间（min）为42，65，75，78，59，57，68，54，55，71. 问是否可以认为整批保险丝的熔化时间的方差小于等于80?(α=0.05，熔化时间为正态变量.)

解: $H_0:\sigma^2 \le \sigma_0^2 = 80 \qquad H_1:\sigma^2 > \sigma_0^2$

检验统计量为 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ H_0 的拒绝域为 $W = \{\chi^2 \ge \chi_\alpha^2(n-1)\}$

计算得 $s^2 = 121.8$ $\chi^2 = \dfrac{9\times121.8}{80} = 13.7$ 对于α=0.05，n=10

$\chi_{0.05}^2(9) = 16.919$ 因为 $\chi^2 = 13.7 < 16.919$

接受H_0, 认为整批保险丝的熔化时间的方差小于等于80

EX

设保险丝的融化时间服从正态分布，取9根测得其熔化时间（min）的样本均值为62,标准差为10.

(1)是否可以认为整批保险丝的熔化时间服从 $N(60, 9^2)$? ($\alpha=0.05$)

(2)是否可以认为整批保险丝的熔化时间的方差显著大于70?($\alpha=0.05$)

答:**(1) $|t|=0.6<2.306$,接受60;$2.18<\chi^2=9.877<17.535$,接受 H_0**

(2) $\chi^2=11.43<15.507$, 认为方差不显著大于70

原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
$\mu\le\mu_0$ $\mu\ge\mu_0$ $\mu=\mu_0$ (σ^2已知)	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu\ne\mu_0$	$u\ge u_\alpha$ $u\le -u_\alpha$ $\lvert u\rvert\ge u_{\alpha/2}$
$\mu\le\mu_0$ $\mu\ge\mu_0$ $\mu=\mu_0$ (σ^2未知)	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S_n^*/\sqrt{n}}$	$\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu\ne\mu_0$	$t\ge t_\alpha(n-1)$ $t\le -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert\ge t_{\alpha/2}(n-1)$
$\sigma^2\le\sigma_0^2$ $\sigma^2\ge\sigma_0^2$ $\sigma^2=\sigma_0^2$ (μ未知)	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma_0^2}$	$\sigma^2>\sigma_0^2$ $\sigma^2<\sigma_0^2$ $\sigma^2\ne\sigma_0^2$	$\chi^2\ge\chi_\alpha^2(n-1)$ $\chi^2\le\chi_{1-\alpha}^2(n-1)$ $\chi^2\ge\chi_{\alpha/2}^2(n-1)$或 $\chi^2\le\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$

8.3 双正态总体均值差与方差比的假设检验

一、均值差的假设检验

设$\mathbf{X_1,\cdots,X_{n_1}} \overset{\text{iid}}{\sim} \mathbf{N(u_1,\ \sigma_1^2)}$; $\mathbf{Y_1,\cdots,Y_{n_2}} \overset{\text{iid}}{\sim} \mathbf{N(u_2,\ \sigma_2^2)}$，两样本独立，给定检验水平$\alpha$，由观测值$x_1,\cdots,x_{n_1}$; $y_1,\cdots,y_{n_2}$检验假设 $\mathrm{H_0}$: $\mu_1=\mu_2$; $\mathrm{H_1}$: $\mu_1 \neq \mu_2$

假定$\boldsymbol{\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2}$

$$H_0\text{下，}\quad T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

由$P\{|T| \geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\}=\alpha$，即得拒绝域

$$|T| \geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2).$$

而对应的单边问题

$$H_0: \mu_1 \leq \mu_2; H_1: \mu_1 > \mu_2$$

拒绝域为 $\boldsymbol{T \geq t_{\alpha}(n_1+n_2-2)}$

$$H_0: \mu_1 \geq \mu_2; H_1: \mu_1 < \mu_2$$

拒绝域为 $\boldsymbol{T \leq -t_{\alpha}(n_1+n_2-2)}$

例6. 比较甲, 乙两种安眠药的疗效。将20名患者分成两组, 每组10人. 其中10人服用甲药后延长睡眠的时数分别为1. 9, 0. 8, 1. 1, 0. 1, -0. 1, 4. 4, 5. 5, 1. 6, 4. 6, 3. 4; 另10人服用乙药后延长睡眠的时数分别为0. 7, -1. 6, -0. 2, -1. 2, -0. 1, 3. 4, 3. 7, 0. 8, 0. 0, 2. 0. 若服用两种安眠药后增加的睡眠时数服从方差相同的正态分布. 试问两种安眠药的疗效有无显著性差异?(α=0. 10)

解: $H_0:\mu_1=\mu_2;H_1:\mu_1\neq\mu_2$

检验统计量为 $t=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}}$

拒绝域为 $W=\{|t|\geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\}$

这里: $\bar{x} = 2.33, s_1 = 2.002 \quad \bar{y} = 0.75, s_2 = 1.789$

$$s_w = \sqrt{\frac{9s_1^2 + 9s_2^2}{18}} = 1.898 \quad t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w\sqrt{1/10 + 1/10}} = 1.86$$

对于α=0. 10， $n_1 = 10, n_2 = 10$

$$t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) = 1.7341$$

因为 $|t| = 1.86 > 1.7341$

拒绝H_0, 认为两种安眠药的疗效有显著性差异

EX1

上题中,试检验是否甲安眠药比乙安眠药疗效显著?

$$H_0:\mu_1 \le \mu_2 ; H_1:\mu_1 > \mu_2$$

$$H_0\text{下,}\quad T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{1/10+1/10}} \sim t(18)$$

由$P\{T \ge t_{0.1}(18)\}=0.1$,即得拒绝域

$$T \ge t_{0.1}(18)=1.3304$$

这里:**t=1.86>1.3304**,故拒绝H_{0},认为甲安眠药比乙安眠药疗效显著

EX2

上题中,试检验是否乙安眠药比甲安眠药疗效显著?

二、方差比的假设检验

设 $X_1,\cdots,X_{n_1} \overset{iid}{\sim} N(\mu_1,\sigma_1^2)$; $Y_1,\cdots,Y_{n_2} \overset{iid}{\sim} N(\mu_2,\sigma_2^2)$,

两样本独立, 给定检验水平 α, 由观测值

$$x_1,\cdots,x_{n_1}; \qquad y_1,\cdots,y_{n_2}$$

检验假设H$_0$: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$; H$_1$: $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

假定μ_1, μ_2未知　　F检验法

$$H_0\text{真时}, F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,\ n_2-1)$$

由$p\{F \le F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$

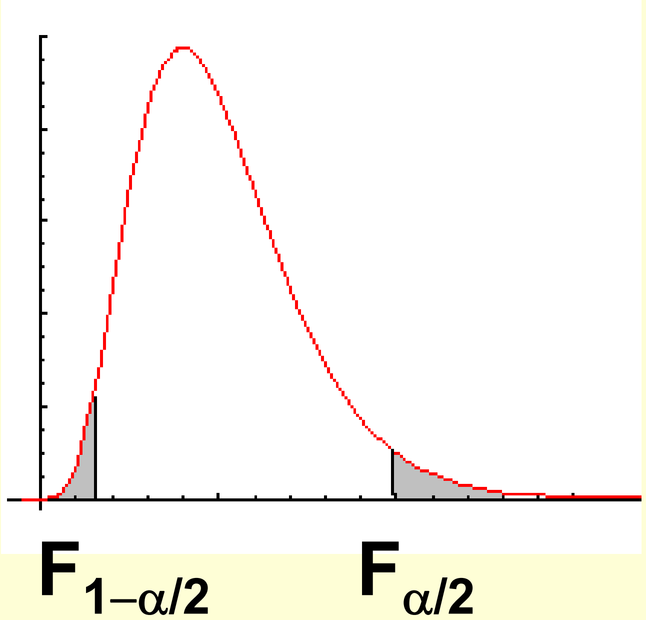
或$F \ge F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\} = \alpha$

得拒绝域

$F \le F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$

或

$F \ge F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$



而对应的单边问题

$$H_0:\sigma_1\le\sigma_2;H_1:\sigma_1>\sigma_2$$

拒绝域为 **$F\ge F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)$**

$$H_0:\sigma_1\ge\sigma_2;H_1:\sigma_1<\sigma_2$$

拒绝域为 **$F\le F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$**

例7.有甲乙两种机床,加工同样产品,从这两台机床加工的产品中随机地抽取若干产品,测得产品直径为(单位:mm):

甲：**20.5, 19.8, 19.7, 20.4, 20.1, 20.9, 19.6, 19.9.**

乙: **19.7, 20.8, 20.5, 19.8, 19.4, 20.6, 19.2.**

假定甲,乙两台机床的产品直径都服从正态分布,试比较甲,乙两台机床加工的精度有无显著差异?(α=0.05)

解: H_0: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$; H_1: $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

检验统计量为 $F=S_1^2/S_2^2$

拒绝域为：$\{F\le F_{1-\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1)$ 或 $F\ge F_{\alpha/2}(n_1-1,\ {}_2-1)\}$

计算得: $S_1^2=0.204$ $S_2^2=0.397$ $F=0.51$

$F_{1-0.025}(7,\ 6)=1/5.12=0.1953$ $F\ge F_{0.025}(7,\ 6)=5.7$

0.1957<F<5.7,接受H_0, 甲,乙两台机床加工的精度无显著差异

第6－8章　小结

- 总体 → 样本 → 样本观察值
- 理论分布
- 统计量
  - 参数估计
  - 假设检验

- 参数估计
  - 点估计
    - 矩估计
    - 极大似然估计
    - 无偏性、有效性、一致性
  - 区间估计 → 正态总体均值与方差的区间估计

- 假设检验 → 基本步骤 → 正态总体均值与方差的假设检验

习题课

1．设总体X服从正态分布 ，其中μ是已知的，而σ未知，(X_1, X_2, X_3) 是从总体中抽取的一个简单随机样本。

（1）求(X_1, X_2, X_3)的密度函数；

（2）指出$X_1 + X_2 + X_3$，$X_1 + 2\mu$，$\min(X_1, X_2, X_3)$ $\sum_{i=1}^{3}\frac{X_i^2}{\sigma^2}$，$\frac{X_3 - X_1}{2}$之中，哪些是统计量，哪些不是统计量，为什么？

2.设总体**X**的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)} & x>\theta \\ 0 & x\le\theta\end{cases}$$

其中**θ>0,**未知**,**从总体中抽取简单随机样本 $X_1,\ldots,X_n$

(1)求θ的矩估计和极大似然估计

(2)求极大似然估计量的分布函数

(3)判断所得估计量的无偏性.

3.从正态总体 $N(3.4,6^2)$ 中抽取容量为n的样本，如果要求其样本均值位于区间（1.4,5.4）之间的概率不小于0.95，问样本容量n至少取多大?

4. 设总体X的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中θ (0< θ <0.5)未知,利用总体X的如下样本观察值: 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3, 求θ的矩估计值与极大似然估计值.

5. 设保险丝的融化时间服从正态分布，取9根测得其熔化时间（min）的样本均值为62, 标准差为10.

1. 是否可以认为整批保险丝的熔化时间服从 $N(60, 9^2)$?（α=0.05）

2. 求总体均值的95%置信区间.

3. 置信区间与假设检验结果有什么关系?

4. 若已知总体真分布为**N(61,9²)**, 检验准则取为 $\left|\dfrac{\bar{X}-60}{9/\sqrt{n}}\right| > 1.96$ 则检验犯第**II**类错误的概率是多少?

答: 1) H_0: $\mu=60$; H_1: $\mu\neq60$

$$H_0\text{真时}: T=\frac{\overline{X}-60}{S/\sqrt{9}}\sim t(8),$$

水平为$\alpha=0.05$的拒绝域为 **$|T|\geq t_{0.025}(8)=2.306$**

这里 $|t|=0.6<2.306$　接受H_0

$$H_0': \sigma^2=9^2;\ H_1': \sigma^2\neq 9^2$$

H_0'下，$\chi^2=\dfrac{8S^2}{9^2}\sim\chi^2(8)$ **,水平为α=0.05的拒绝域为:**

$$\chi^2\geq\chi^2_{0.025}(8)=17.535\bigcup\chi^2\leq\chi^2_{0.975}(8)=2.18$$

这里 $\chi^2=9.877\in[2.18,17.535]$　接受**H'_0**

可以认为整批保险丝的熔化时间服从$N(60,9^2)$

2. μ的1-α 置信区间为

$$[\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)]$$

$$=[\ 62-\frac{10}{\sqrt{9}}\times 2.306,62+\frac{10}{\sqrt{9}}\times 2.306]=\left[54.313,69.687\right]$$

3.对比置信区间与假设检验拒绝域:

$$\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)<\mu<\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)$$

$$W=\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\Rightarrow \quad \mu_0\leq\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)$$

$$or \quad \mu_0\geq\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)$$

以上结果表明:若未知参数θ的1-α 置信区间为 $\left[\theta_L, \theta_U\right]$
则关于参数θ= θ_0的双边检验的拒绝域为:

$$\theta_0 \le \theta_L \quad or \quad \theta_0 \ge \theta_U$$

4. 若已知总体真分布为N(61,9^2), 则 $\dfrac{\overline{X}-61}{9/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,

则检验犯第II类错误的概率是

$$n=9\text{时}，P(II)=P\{\left|\frac{\overline{X}-60}{9/\sqrt{9}}\right|<1.96 \mid \mu=61\}$$

$$=P\{-1.96<\frac{\overline{X}-61+1}{9/\sqrt{9}}<1.96\}=P\{-2.29<\frac{\overline{X}-61}{9/\sqrt{9}}<1.63\}$$

$$\approx\Phi(1.63)-1+\Phi(2.29)=0.9374$$

6. 某种零件的尺寸方差 $\sigma^2 = 1.21$ ，对一批这类零件检查**6**件，得尺寸数据（单位：）**32.56, 29.66, 31.64, 30.00, 31.37, 31.03**，当显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时，问这批零件的平均尺寸是否显著低于**32.50(**零件尺寸服从正态分布**)**？

7. 化肥厂用自动打包机装化肥，某日测得**8**包化肥的重量斤）如下：**98.7 100.5 101.2 98.3 99.7 99.5 101.4 100.5**。已知各包重量服从正态分布，是否可以认为每包平均重量显著高于**100**斤（取**α=0.05** ）？

8. 从一台车床加工的一批轴料中抽取**15**件测量其椭圆度，计算得 $S^2 = 0.025^2$，问该批轴料椭圆度的总体方差与规定的**0.0004**有无显著差异（ **α=0.05** ，椭圆度服从正态分布）？