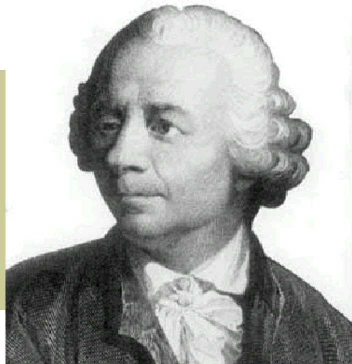
南京大學
NANJING UNIVERSITY



离 散 数 学
Discrete Mathematics

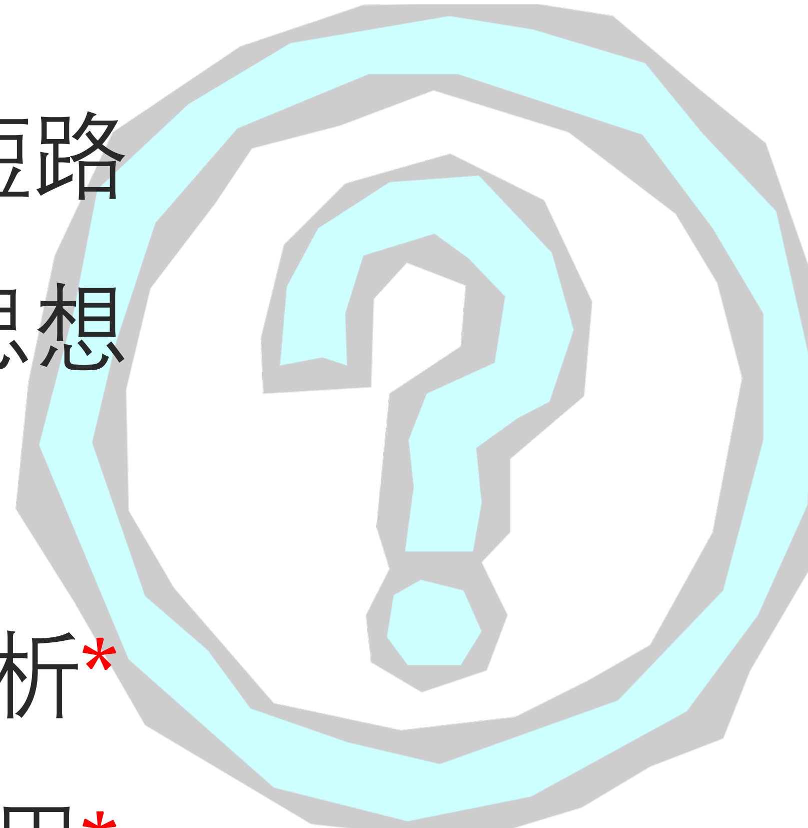
第二十七讲：二部图及其匹配

吴 楠
南京大学计算机科学与技术系

2020 年 5 月 24 日

前情提要

- 带权图
- 带权图的单源最短路
- 求最短路的算法思想
- Dijkstra算法
- Dijkstra算法的分析*
- Dijkstra算法的应用*



本讲主要内容

- 二部图及其性质
- 二部图的应用
- 匹　配
- 最大匹配和完美匹配
- 二部图中的匹配
- Hall 定理
- 二部图匹配的应用

二部图（bipartite graph）

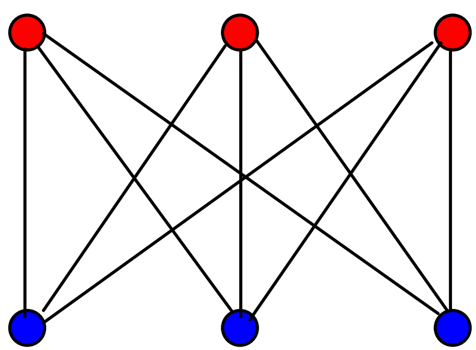
- 定义（二部图）：无向图$G = \langle V, E\rangle$，若能将V分为不交的两部分V_1和V_2，使得G中每条边的两个端点均分属V_1和V_2，即：

$$(\exists V_1, V_2)\begin{pmatrix} V_1 \neq \emptyset \wedge V_2 \neq \emptyset \wedge V_1 \cap V_2 = \emptyset \wedge \\ V_1 \cup V_2 = V \wedge (\forall u, v \in V)\big(u, v \in V_1 \vee u, v \in V_2 \rightarrow \neg(u - v)\big) \end{pmatrix}$$

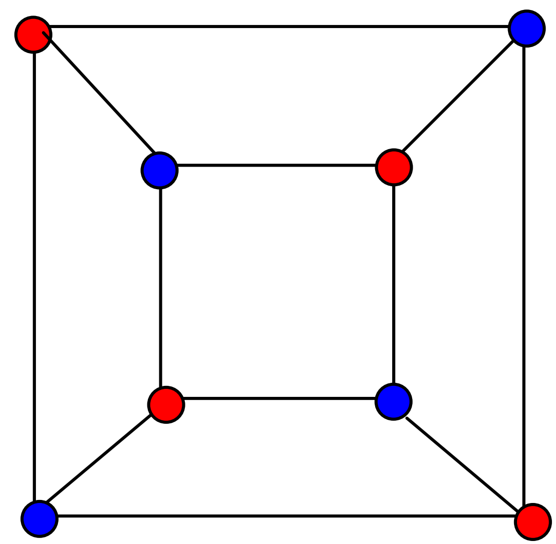
则称G为二部图（或偶图），记为$\langle V_1, V_2, E\rangle$

二部图（续）

- 完全二部图： G为简单二部图， V_1中每个顶点均与V_2中所有顶点相邻，记为$K_{|V_1|,|V_2|}$



$K_{3,3}$



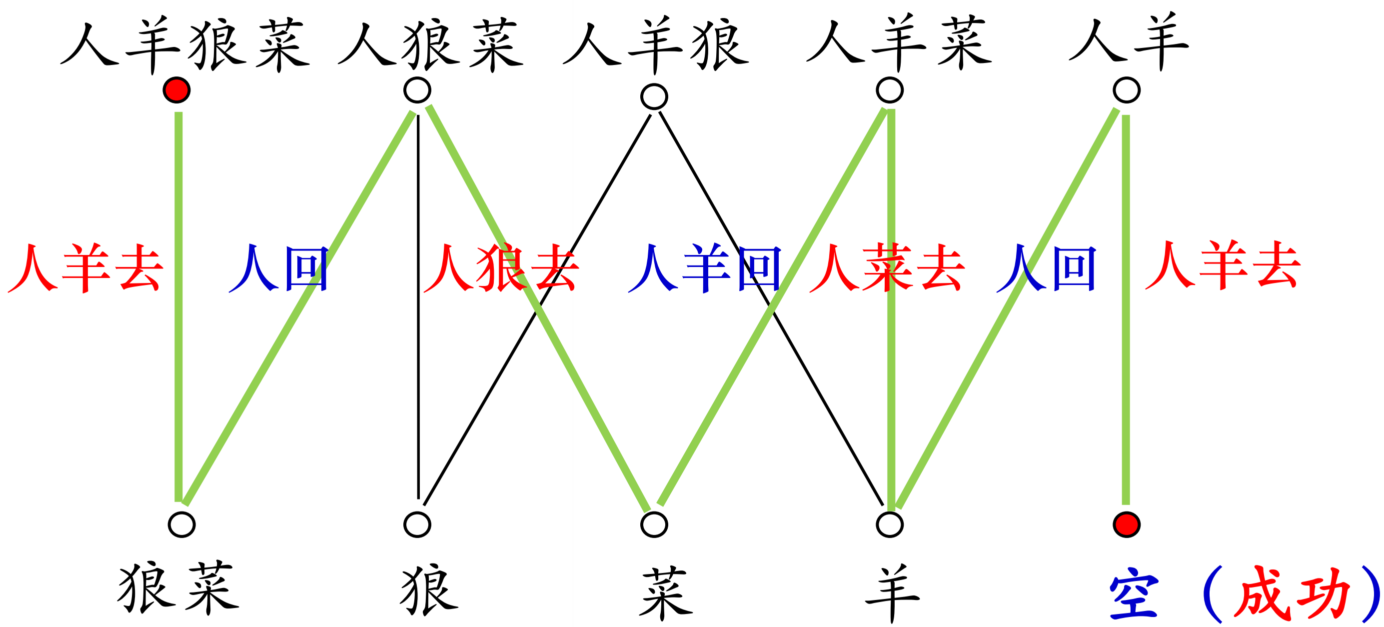
非完全二部图

二部图模型的例子：巧渡河问题

- 问 题：人、狼、羊、菜用一条只能同时载两位的小船渡河，“狼羊”、“羊菜”不能在无人在场时共处，只有人能架船。求最快渡河方案
- 图模型：顶点表示“原岸的状态”，两点之间有边当且仅当一次合理的渡河“操作”能够实现该状态的转变——此为一个二部图
- 起始状态：“人狼羊菜”，结束状态：“空”
- 问题的解：找到一条从起始状态到结束状态的尽可能短的通路

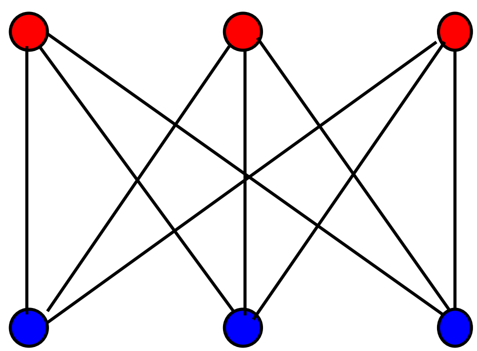
巧渡河问题（续）

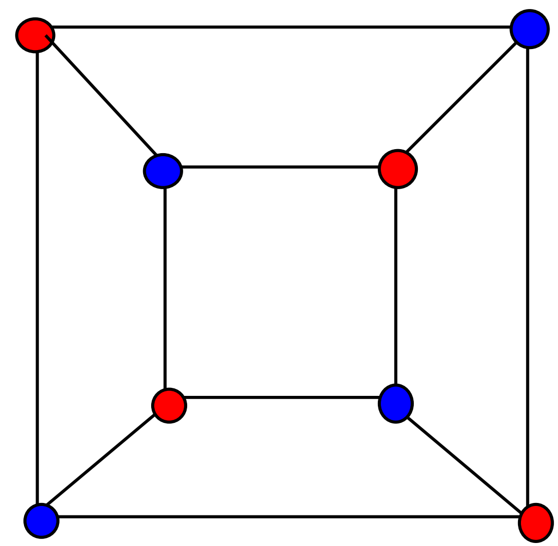
- **注意**：在"人、狼、羊、菜"的16种组合种允许出现的只有10种



二部图的判定

- 定理（**二部图判定定理**）： G 为简单二部图，当且仅当G不包含奇圈





二部图的判定（续）

- 定理（**二部图判定定理**）：G为简单二部图当且仅当G不包含奇圈
- **证明：** 必要性：设$G=\langle V_1,V_2,E\rangle$为简单二部图，显然$G$中至少有2个顶点．若$G$中无回路结论显然成立；若$G$中包含回路，设任意回路$C=v_0v_1v_2\cdots v_tv_0$。由于$V_1$中的顶点仅与$V_2$中的顶点相邻，故不妨设$v_i\in V_1$($i$为奇数)则必有$v_j\in V_2$($j$为偶数)，因此$t$必为奇数，回路$C$的长度为$t+1$，即$C$为偶圈。

二部图的判定（续）

- **证明（续）：** 充分性：设$G=\langle V,E\rangle$为仅包含偶圈（或无回路）的简单连通图（若非连通则分别讨论各连通分支），设v_0是G的任意顶点，令$V_1=\{v\in V|(v_0,v)\in E\wedge d(v_0,v)$为偶$\}$，$V_2=\{v\in V|(v_0,v)\in E\wedge d(v_0,v)$为奇$\}$，显然$V_1\neq\emptyset,V_2\neq\emptyset,V_1\cap V_2=\emptyset,V_2\cup V_2=V$，要证明$G$为简单二部图只需证明$\forall u,v\in V_1$或$\forall u,v\in V_2$，$\neg(u,v)\in E$：反设$\exists u,v\in V_1,e=(u,v)\in E$，设$v_0$到$u,v$的短程线分别为$\Gamma_1,\Gamma_2$，其长度（即$v_0$到$u,v$的距离）分别为$l_1,l_2$，则$l_1,l_2$皆为偶，因此$\Gamma_1+e+\Gamma_2$中一定为奇圈，即回路$v_0-\cdots-v-u-\cdots-v_0$的长度一定为奇数，与已知条件矛盾。类似地可证$V_2$中同样不存在相邻顶点，于是$G$为二部图。 □

图的通路与回路的应用

- 变形巧渡河问题*：一人(F)携带三物：狼(W)、羊(S)、菜(H)渡河，渡船只许人带一物过渡，又狼与羊，羊与菜不能独处同岸，问共有几种本质不同的过法？

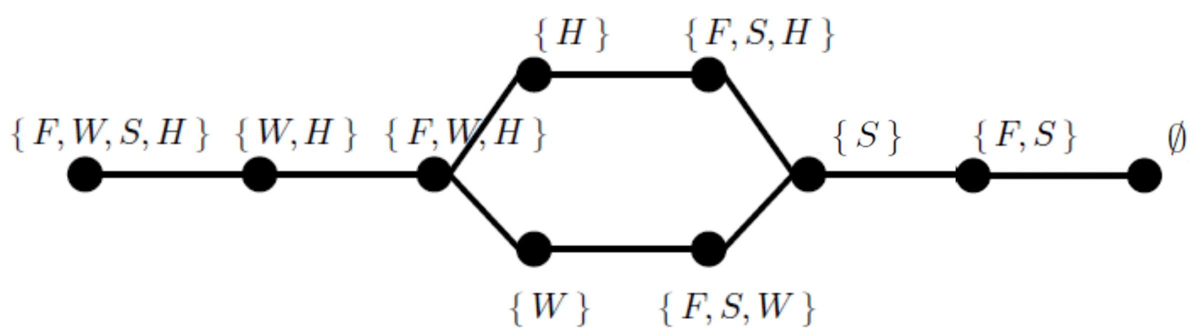
图的通路与回路的应用（续）

解答： 建模：令 $S = \{F, W, S, H\}$，$V = \{\{F, S, W, H\}, \{F, S, W\}, \{F, S, H\}, \{F, W, H\}, \{F, S\}, \{F, W\}, \{F, H\}, \{W, H\}, \{S\}, \{W\}, \{H\}, \emptyset\}$，即允许放在一起的 S 之子集。$\forall u, v \in V\, u - v$ 指由 u 经一次渡河得 v。

$$E = \{e_{uv} \mid u, v \in V \wedge u - v\}, \quad G = (V, E) \text{ 为简单图}$$

抽象描述：从 $\{F, S, W, H\}$ 到 $\emptyset$ 有几条路径？

答案：



匹 配（matching）

- **定义**（**匹 配**）：在图$G = \langle V, E\rangle$中，$E^* \subseteq E$为G的匹配（即G的边独立集）指：

$$(\forall e_1, e_2 \in E^*)(e_1\text{与}e_2\text{不相邻})$$

- **定义**（**极大匹配**）：E^*为匹配且E^*加边后为非匹配

- **定义**（**匹配数**）：图G的匹配数β_1指：

$$\beta_1(G) = \max\{|E^*| \mid E^*\text{为}G\text{的匹配}\}$$

匹 配（续）

- 定义（**最大匹配**）：E^*为最大匹配指E^*为匹配且$|E^*| = \beta_1(G)$

定义： 设 M 为 G 中一个匹配.

(1) v_i 与 v_j 被 M 匹配——$(v_i,v_j)\in M$

(2) v 为 M 饱和点——有 M 中边与 v 关联

(3) v 为 M 非饱和点——无 M 中边与 v 关联

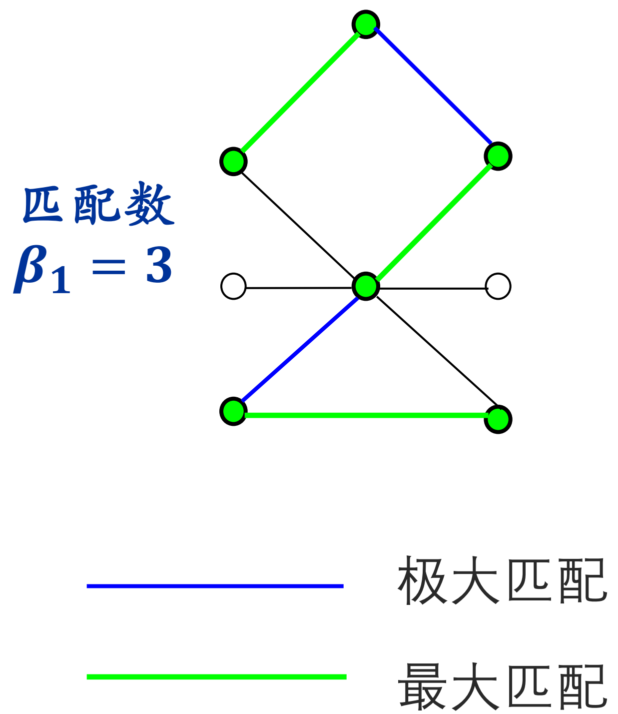
(4) M 为完美匹配——G 中无 M 非饱和点

(5) M 的交错路径——从 M 与 $E-M$ 中交替取边构成的 G 中的路径

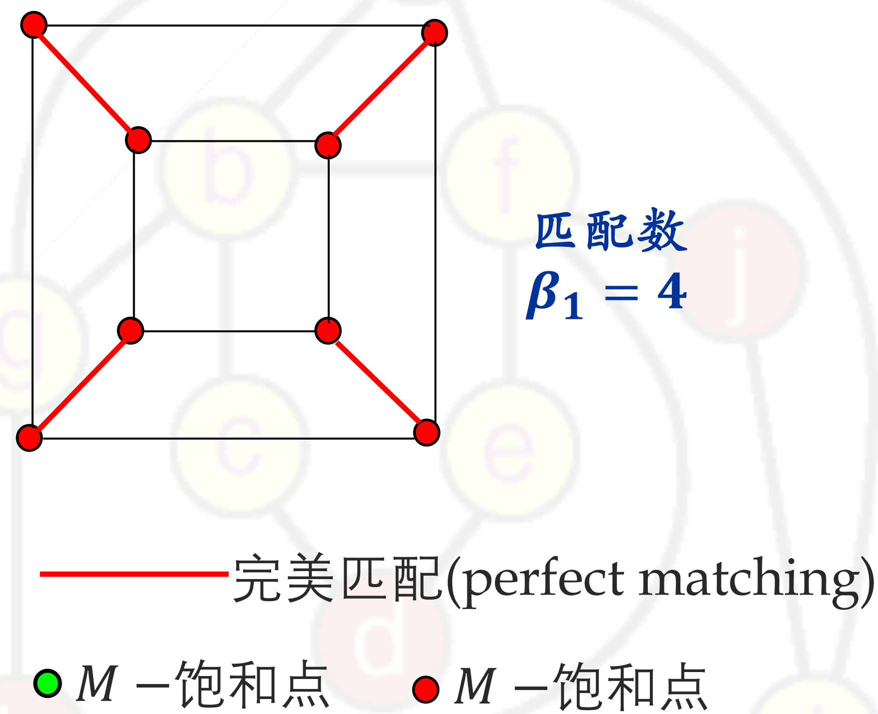
(6) M 的可增广交错路径——起、终点都是 M 非饱和点的交错路径

(7) M 的交错圈——由 M 与 $E-M$ 中的边交替出现构成的 G 中的圈

匹 配（续）



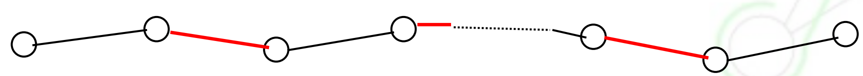
匹配数
$\beta_1 = 3$
极大匹配
最大匹配



匹配数
$\beta_1 = 4$
完美匹配(perfect matching)
M –饱和点
M –饱和点

由匹配决定的交错路径

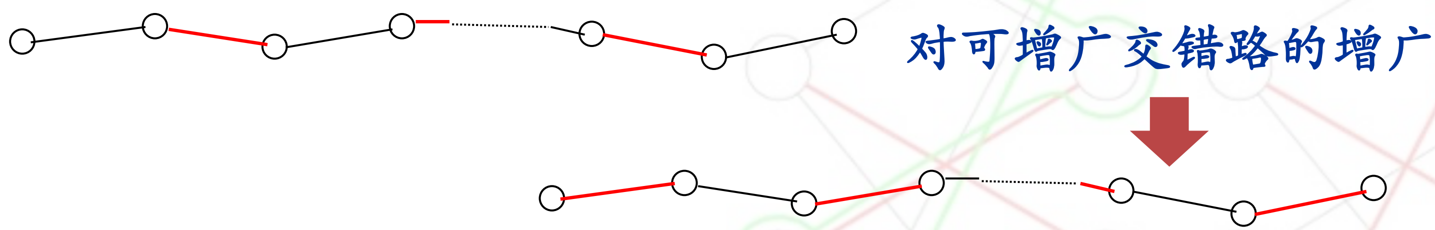
- **定义（交错路）**：设M是G中一个匹配，若G的路径P中M与$E_G - M$中的边交替出现，则称P为$M-$交错路(径)（alternating path，亦可为回路）
- **定义（可增广路）**：若交错路P的起点与终点都是$M-$非饱和点，则称P是$M-$可增广交错路（或称可增广路，augmentable path）



可增广交错路

由匹配决定的交错路径（续）

- 定义（**增广路**）：将可增广路的匹配边变为非匹配边，非匹配边变为匹配边的过程称为路径的增广，获得的新路径称为增广路（augmenting path, AP）



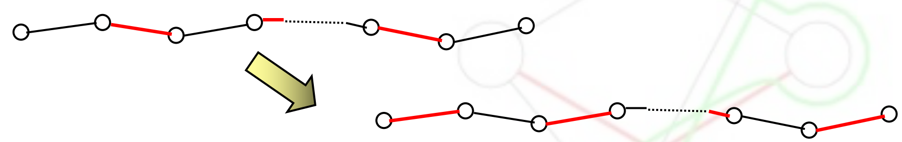
- 对可增广交错路的增广可借由图的环和运算实现：

$$G_1 = \langle V, E_1 \rangle, G_2 = \langle V, E_2 \rangle,$$

$$G_1 \oplus G_2 = \langle V, E_1 \oplus E_2 \rangle = \langle V, (E_1 \cup E_2) - (E_1 \cap E_2) \rangle$$

最大匹配的判定

- 定理（**Berge, 1957**）：M是G中最大匹配当且仅当G不含M –可增广交错路
  - **证明*：** $\Rightarrow$ 设M是最大匹配。若G中含可增广路P，其边集设为E_P，显然$E_P \oplus M$（即将P中的非匹配边换为非匹配边，非匹配边换为匹配边）仍是匹配，且边数比M多1，与最大匹配矛盾；

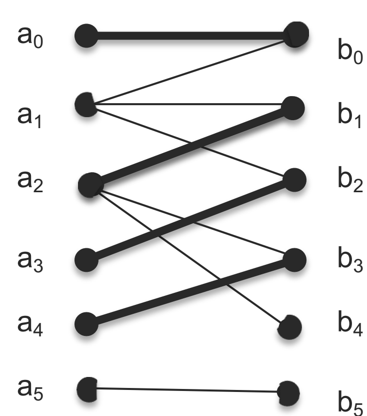


$\Leftarrow$ 设G中不含增广路，假设M'是G的一个最大匹配。设H是$M \oplus M'$边诱导子图[†]。若$H = \emptyset$则$M = M'$，即M是最大匹配；否则，因为M和M'均为匹配，H不可能有3度或3度以上的顶点，H的每个连通分支只能是交错回路或交错路，在两种情况下，H中取自M和M'的边总是一样多(否则，M和M'中有一个含可增广路)，$\therefore M$是最大匹配. □

（[†]诱导子图（induced subgraph）指点集为原图子集，边集为原图边集诱导的最大子集的子图.
i.e. $V(G') \subseteq V(G), \forall e \in E(G')(e \in E(G') \Leftrightarrow e \in E(G))$）

最大匹配的判定（续）

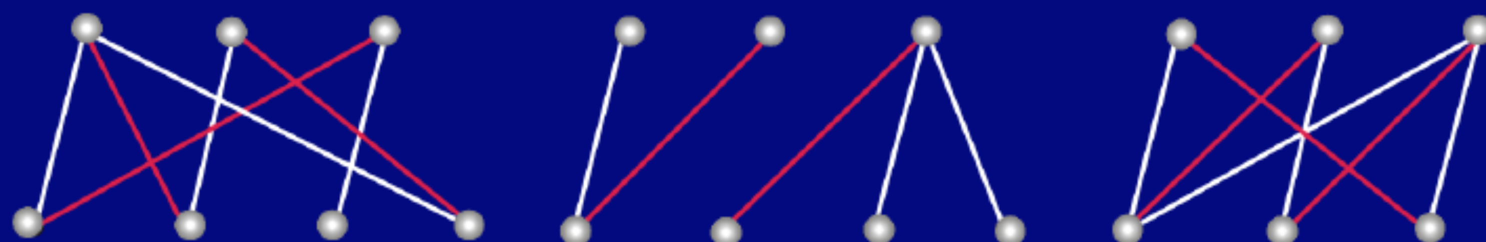
- **练习：** 下图中匹配M由粗线给出，(1) 找出下图的一条交错路；(2) M是否为最大匹配？如不是请找出图中的一条可增广路；(3) 对上述可增广路进行增广，并将M改造为最大匹配.



二部图中的完备匹配(complete matching)

定义： 设 $G=<V_1,V_2,E>$为二部图，$|V_1|\le|V_2|$，M 是 G 中最大匹配，若 V_1 中顶点全是 M 饱和点，则称 M 为 G 中完备匹配.

$|V_1|=|V_2|$ 时完备匹配变成完美匹配.

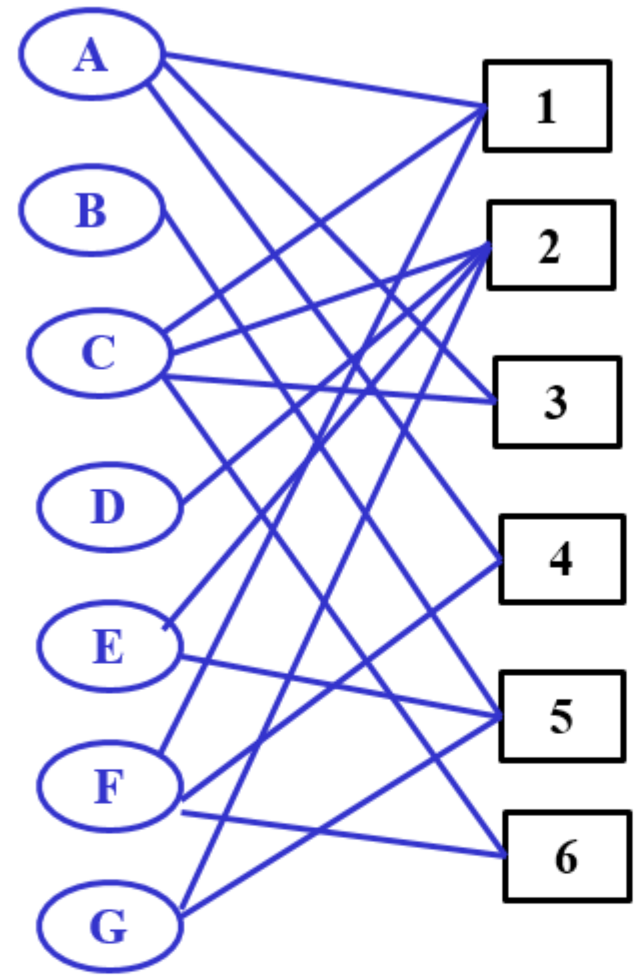


(1)　　(2)　　(3)

在上图中，红边组成各图的一个匹配，(1) 中为完备匹配，(2) 中匹配不是完备的，其实 (2) 中无完备匹配，(3) 中匹配是完备的，也是完美的.

二部图最大匹配模型

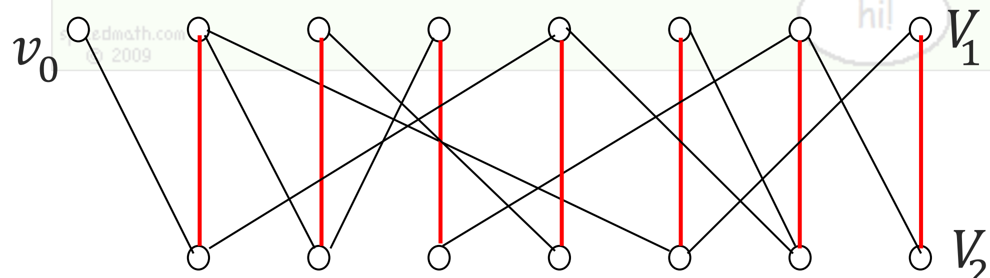
- 问 题（**Hall's marriage problem**）：孤岛上有m个男子和n个女子，每个人均有一个中意的配偶列表，如何成就尽可能多的满意婚姻？
- 图模型：每个人对应一个顶点，男子和女子的集合对应二部图中的两个不相交集合，边对应着中意的配偶关系
- 解：求二部图中的最大匹配



二部图完备匹配的充分必要条件

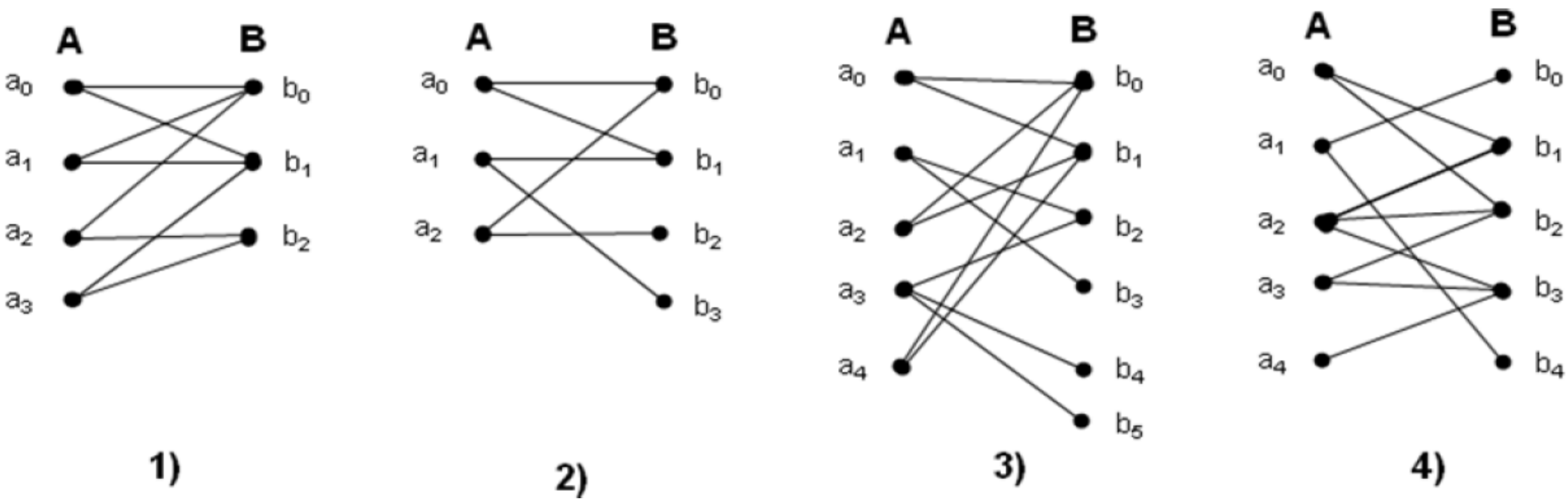
- **定理** (**Hall's marriage theorem, 1935**)：二部图 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$，$|V_1|\le|V_2|$，存在完备匹配当且仅当$V_1$中任意$k$个顶点至少与$V_2$中的$k$个顶点相邻，其中$k=1,2,\cdots,|V_1|$
  - **证明：** 必要性显然，只需证明充分性：

$\Leftarrow$ 假设M是最大，但非完备匹配，则存在$v_0\in V_1$是$M-$非饱和点。v_0不可能是孤立点。考虑从v_0出发的所有尽可能长的交错路，$\because$ M是最大匹配，$\therefore$所有这样的交错路终点必在V_1中(否则是可增广路)。令S为这些路上在V_1中的点的集合，T是这些路上在V_2中的点的集合，则S中的点只和T中的顶点相邻，但$|S|=|T|+1$, 矛盾. $\square$



二部图完备匹配的充分必要条件（续）

- **练习：** 以下四个二部图（$\langle A,B,E\rangle$）是否存在完备匹配？给出存在的最大匹配或不存在的原因.



二部图匹配的应用：工作分配问题

- 问　题：n个毕业生有可供选择的m个岗位，每个毕业生给出若干个志愿，是否存在每个人都满意的工作分配方案？
- 数学模型：建立二部图$G=\langle V_1, V_2, E\rangle$，$V_1$中每个点对应一个毕业生，$V_2$中每个点对应一个可选的岗位，$(u,v)\in E \Leftrightarrow u$对应的毕业生愿意选择$v$对应的岗位
- 问题的解：问题有解当且仅当二部图G存在完备匹配

二部图匹配的应用：棋盘覆盖问题

- 问　题：一个$2n \times 2n$个格子组成的棋盘($n \geq 2$)，去除左上角和右下角的2个格子后能否恰好用若干1×2或者2×1个格子组成的矩形不重叠覆盖？
- 数学模型：建立二部图，左上角第一个未被去除的格子对应V_1中的顶点，与其相邻的顶点为V_2中的顶点，以此类推
- 问题的解：问题有解当且仅当二部图存在完美匹配

二部图匹配的应用：稳定匹配问题

- 问题（二部图的稳定匹配问题，SMP）：孤岛上有m个男子和n个女子，每人心中均有一个对岛上异性喜爱程度的排序表，能否或者如何成就尽可能多的稳定婚姻？（稳定：已经结婚的男女不同时存在比现实婚姻中更喜爱的异性）
- 数学模型：留作思考题
- 问题的解：留作思考题，在习题课上讲解

本次课后作业

- 教材内容：[Rosen] 10.4.5、10.2.5 节
- 课后习题：请见“教学立方”
- 提交时间：请见“教学立方”