

第九周习题课

第八周常见错误及答案讲解

本周内容

- 简单回顾
- 错题讲解
- 思考题

简单回顾

线性代数课程中所研究的线性空间是一个特殊的代数系统

定义

设 V 是一个非空集合， K 是一个数域。又设：

- (1)在 V 中定义了加法，使得 V 中任意两个元素 α 、 β 都按某一法则对应于 V 内唯一确定的一个元素，记为 $\alpha + \beta$ ；
- (2)在 K 中的数与 V 中的元素间定义了数乘，使得 V 中任意元素 α 和数域 K 中任意数 k ，都按某一法则对应于 V 内唯一确定的一个元素，记为 $k\alpha$ 。

非空集合+运算+封闭=代数系统

从具体上升到抽象，才能认识到事物的本质，带来突破和进展(例如，高次代数方程没有求根公式取决于其群结构)。

定义

满足这4条运算法则的运算为加法：

- (1) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V, \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma;$
- (2) $\forall \alpha, \beta \in V, \alpha + \beta = \beta + \alpha;$
- (3) \exists 一个元素 $0 \in V$, 使得 $\forall \alpha \in V$, 有 $\alpha + 0 = \alpha;$
- (4) $\forall \alpha \in V$, 都 $\exists \beta \in V$, 使得 $\alpha + \beta = 0;$

结合性
交换性
有么元
有逆元

满足这四条运算法则的运算为数乘：

- (5) 对数域中的数1, 有 $1 \cdot \alpha = \alpha;$
- (6) $\forall k, l \in K, \alpha \in V$, 有 $(kl)\alpha = k(l\alpha);$
- (7) $\forall k, l \in K, \alpha \in V$, 有 $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha;$
- (8) $\forall k \in K, \alpha, \beta \in V$, 有 $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta.$

结合性
分配性
分配性

通过在给定基下的坐标建立了与数域 K 上的 m 维向量空间 K^m 的一个双射同构使得解决问题可以从抽象到具体

H15Pro2(4) 判断下列集合对所给的二元运算是否封闭：
全体 $n \times n$ 实可逆矩阵集合 $M_n(R)$ 和矩阵加法及乘法，其中 $n \geq 2$.

要点：可逆！ $AB = BA = E$

加法不封闭：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

乘法封闭：

方阵满秩

可经过初等变换化为单位阵

若干初等矩阵的乘积

行列式不为零(乘积的行列式)

.....

H15Pro3 R 为实数集, 定义函数 $f_6: \forall x, y \in R$, 有 $f_6(< x, y >) = |x - y|$, 求 R 上二元运算单位元。

常见错误: 0是单位元

$$\forall x \in S, e \circ x = x \circ e = x$$

$$f_6(< x, 0 >) = |x - 0| = |0 - x| = f_6(< 0, x >)$$

但 $x = |x|$ 不一定成立

H15Pro5 设 $S = \{f | f \text{ 是 } [a, b] \text{ 上的连续函数}\}$, 其中 $a, b \in R, a < b$, 运算为函数加法, 即 $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in [a, b]$, 求这个系统的单位元。

常见错误: 1是单位元

$$e = \text{zero}(x) = 0$$

$$(f + \text{zero})(x) = f(x) + \text{zero}(x) = f(x) = \text{zero}(x) + f(x) = (\text{zero} + f)(x)$$

0是集合 K 及其上**加法**组成的代数系统的**单位元**

H15Pro6 设 $A = \{a, b\}$, 试给出 A 上一个不可交换、也不可结合的二元运算.

要点:
集合内元素是抽象的, 运算也是抽象的, 不能具体化!
只能通过运算表构造:

- 1. 不可交换, 则运算表不对称. $x \circ y \neq y \circ x$
- 2. 不可结合, 试一试不幂等. $(x \circ x) \circ x = y \circ x \neq x \circ y = x \circ (x \circ x)$

\circ	a	b
a	b	b
b	a	a

典型错误: 减法, 既不抽象, 也不封闭。

思考题

有限集合 A 上的一个封闭的二元运算 \circ 可看作一个函数： $\circ: A \times A \rightarrow A$ ，也可看作定义在 A 上的一个运算表. 设 A 为 n 元集，试求： A 上有多少个既不可交换又不等幂的封闭二元运算？

要点：

运算是函数，函数是关系，关系是有序对的集合，分步选取有序对。

可交换的二元运算：对应的矩阵非对角线元素取值相同，对角线元素没有限制。前者有 $C(n,2)$ 种组合，每个组合都有 n 种取值；后者有 n 种组合，每个组合都有 n 种取值；共 $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ 种组合，构成一个集合(关系)。共 $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 个运算符符合条件。

幂等的二元运算：对应的矩阵性质为主对角线元素确定，只有一种，其余元素任意，故这样的 n 阶方阵共有 n^{n^2-n} 个。

方法一：分步，先取非对角线元素，再取对角线元素

$$(n^{n(n-1)} - n^{\frac{n(n-1)}{2}})(n^n - 1)$$

方法二：容斥原理

既幂等又可交换的二元运算有 $n^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 个；

由容斥原理，既不可交换又不幂等的二元运算共有 $n^{n^2} - \left(n^{\frac{n(n+1)}{2}} + n^{n(n-1)} \right) + n^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 个。