Problem 1

1) 全体对称矩阵不为空，对称矩阵的和仍为对称矩阵(加法全体对对称矩阵封闭)
   矩阵加法具有结合性，对任意对称矩阵 A 有 $A+O=O+A=A$, O 为幺元
   对任意 A 有 $A+(-A)=O$, $-A$ 仍为对称矩阵，每个元素都有对应逆元，构成
2) 全体对角矩阵不为空，对角矩阵的和仍为对角矩阵(加法全体对对角矩阵封闭)
   矩阵加法具有结合性，对任意对角矩阵 IA 有 $IA+O=O+IA=IA$, O 为幺元
   对任意 IA 有 $IA+(-IA)=O$, $-IA$ 仍为对称矩阵，每个元素都有对应逆元，构成
3) 全体行列式大于等于 0 的矩阵不为空
   取 $A=\begin{bmatrix}1, 0\\ 0, 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1, 1\\ 1, -1\end{bmatrix}$, $|A|=1>0$, $|B|=0$, $A+B=\begin{bmatrix}0, 1\\ 1, 0\end{bmatrix}$, $|A+B| = -1<0$
   行列式大于等于零的矩阵的和行列式可能小于零(加法不封闭)，不构成
4) 全体上(下)三角矩阵不为空，上(下)三角矩阵的和仍为上(下)三角矩阵
   矩阵加法具有结合性，对任意三角矩阵 A 有 $A+O=O+A=A$, O 为幺元
   对任意 A 有 $A+(-A)=O$, $-A$ 仍为三角矩阵，每个元素都有对应逆元，构成

Problem 2

$a\in G$ 且 $aa=aa$, $a\in N(a)$, $N(a)\neq\varnothing$

任取 $x, y\in G$ 满足 $xa=ax$, $ya=ay$, $a^{-1}yaa^{-1}=a^{-1}aya^{-1}$ 即 $a^{-1}y=ya^{-1}$

$(xy^{-1})a = x(y^{-1}a) = x(a^{-1}y)^{-1} = x(ya^{-1})^{-1} = x(ay^{-1}) = (xa)y^{-1}$

$= (ax)y^{-1} = a(xy^{-1})$, $xy^{-1}\in N(a)$，由判定定理可知 $N(a)$是 G 的子群

Problem 3

对于 $e\in G$ 有 $e\in H$ 且 $xex^{-1} = xx^{-1} = e\in xHx^{-1}$, xHx^{-1} 非空

对于 $a, b\in xHx^{-1}$，有 $s, t\in H$ 使得 $a=xsx^{-1}$, $b=xtx^{-1}$

$ab^{-1}=(xsx^{-1})(xtx^{-1})^{-1} = (xsx^{-1})(xt^{-1}x^{-1}) = x(st^{-1})x^{-1}$

H 是 G 的子群，对于 $s, t\in H$ 有 $st^{-1}\in H$, $x(st^{-1})x^{-1}\in xHx^{-1}$

即 $ab^{-1}\in xHx^{-1}$，由判定定理可知 xHx^{-1} 是 G 的子群

Problem 4

H 和 K 分别为 G 的 r, s 阶子群，则 $e\in H$, $e\in K$, $e\in H\cap K$

设存在 $x\neq e$ 满足 $x\in H\cap K$, $x\in H$, $x\in K$, $|x|$为$|H|$与$|K|$的因子, $|x| \mid r$, $|x| \mid s$

又 r 和 s 互素，则$|\langle x\rangle|=|x|=1$, $x=e$，矛盾，不存在这样的 x, $H\cap K=\{e\}$

Problem 5

设群 G 中只有一个 2 阶元 a 满足 $a\neq e$ 且 $a^2=e$，则任取 G 中的元素 x

$(xax^{-1})^2 = (xax^{-1})(xax^{-1}) = xa^2x^{-1} = xex^{-1} = xx^{-1} = e$

若 $xax^{-1}=e$, $xa=x$，由消去律得 $a=e$，矛盾，则 $xax^{-1}\neq e$

xax^{-1} 为 2 阶元，又二阶元只有一个，故 $xax^{-1}=a$, $xa=ax$, a 与 G 中任意 x 可交换