Problem 1

1) $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (3x)^k - 1$

$G(x) = 1/(1-3x) - 1$

2) $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} n\cdot x^{2k}$

$(1-x^2)G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = 1/(1-x^2)$

$G(x) = 1/(1-x^2)^2$

3) $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+3, 3)\cdot x^k$

$(1-x)G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+2, 2)\cdot x^k$

$(1-x)^2\cdot G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\cdot x^k = 1/(1-x)^2$

$G(x) = 1/(1-x)^3$

Problem 2

1) $1+x / (1-x)^2 = (1+x) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\cdot x^k$

$a_n = n+1 + n = 2n+1$

2) $x^2+x / (1-x)^3 = (x^2+x) \sum_{k=0}^{\infty} C(k+2, k)\cdot x^k$

$a_n = C(n, n) + C(n+1, n) = 1 + n-1 = n$

3) $1+x / 1-x^2 = 1 / 1+x = \sum_{k=0}^{\infty} C(n, n)\cdot(-1)^k\cdot x^k$

$a_n = 1\cdot(-1)^n = (-1)^n$

4) $1-x-x^2 = (1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)$, 其中$\alpha_1 = 1+\sqrt{5} / 2$, $\alpha_2 = 1-\sqrt{5} / 2$.

$G(x) = x / 1-x-x^2 = x / (1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x) = c_1 / 1-\alpha_1 x + c_2/1-\alpha_2 x$

$x = c_1(1-\alpha_2 x) + c_2(1-\alpha_1 x)$, $c_1 = 1/\sqrt{5}$, $c_2 = -1/\sqrt{5}$

$G(x) = 1/\sqrt{5}\,(1 / 1-\alpha_1 x - 1 / 1-\alpha_2 x) = 1/\sqrt{5} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_1^k\cdot x^k - \alpha_2^k\cdot x^k)$

$a_n = 1/\sqrt{5}\,(\alpha_1^n - \alpha_2^n) = 1/\sqrt{5}\,((1+\sqrt{5} / 2)^n - (1-\sqrt{5} / 2)^n)$

Problem 3

给定系数 a_k 对应的生成函数为 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$,

函数 $1 / 1-x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots$, 对应系数 $c_k = 1$,

则函数 $1 / 1-x\, f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{i=0}^{k} a_i\cdot c_{k-i})\, x^k$, 对应系数 $b_k = \sum_{i=0}^{k} a_i$

Problem 4

令 $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2\cdot x^k$,

$f(x) = (1-x)G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\cdot x^k$

由 Problem 2 (1)可得对函数 $1+x / (1-x)^2$, x^n 的系数为 $n+1 + n = 2n+1$

$f(x) = 1+x / (1-x)^2$, 则 $G(x) = 1+x / (1-x)^3 - k^2\cdot x^{(k+1)} / (1-x)$.

$1 / 1-x\; G(x)$对应的系数 $b_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$.

$h(x) = 1+x / (1-x)^4 = (1+x) \sum_{k=0}^{\infty} C(4+k-1, k)\cdot x^k$.

x^{n-1} 项的系数为 $C(n+2, n-1) + C(n+1, n-2) = C(n+2, 3) + C(n+1, 3)$

$= (n+2)(n+1)n / 6 + (n+1)n(n-1) / 6 = n(n+1)(2n+1) / 6$.

Problem 5

~~1, 2, 3, 1+2 = 3, 1+3 = 4, 2+3=5, 1+2+3 = 6, 可以贴出 6 种不同数值的邮资.~~

$G(x) = (x^0 + x^1 + x^2 \cdots)(x^0 + x^2 + x^4 \cdots)(x^0 + x^3 + x^6 \cdots)$

$G(x) = 1 / 1-x \cdot 1 / 1-x^2 \cdot 1 / 1-x^3 = 1 / (1-x)(1-x^2)(1-x^3)$.

Problem 6

四位数能被 2 整除则个位只能是 2, 等同于 3 个 1, 1 个 2, 5 个 3 这九个数字能够构成多少个三位数. 111; 333; 112 121 211; 332 323 233;
113 131 311; 331 313 133; 123 132 213 231 312 321, 共 20 个.

Problem 7

设 $G(x)$是序列$\{a_k\}$的生成函数, $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$

$(1-4x+4x^2)G(x) = a_0 + a_1x - 4a_0x = 1$, 则 $G(x) = 1 / (1-2x)^2$.

$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C(2+k-1, k) \cdot 2^k \cdot x^k$, $a_k = C(k+1, 1) \cdot 2^k = (k+1) \cdot 2^k$.

Problem 8

$2+13 = 3+12 = 4+11 = 5+10 = 6+9 = 7+8 = 15$, 共 6 组.
从每个组合随机抽取一个数得 6 个, $7>6$, 则至少有一组两个数都被抽中.

Problem 9

从 8 门课程选择 5 门, 有 $C(8, 5) = C(8, 3) = 8\times7\times6\div3\div2\div1 = 56$ 种选法.
至少有 10 名学生的学习计划相同, 则最少有 $56\times9+1 = 505$ 名学生.

Problem 10

任何的有理数可以表示为 $x=a/b$, 其中 $a\in Z$, $b\in Z$, a, b 互质且 $b\neq0$.
任意整数被 b 除的余数一定在$\{0, 1, \cdots, b-1\}$中, 共有 b 种可能.
对 a 进行 c = a // b, a = (a % b)*10 这一操作, 重复 b+1 次,
根据鸽笼原理可得, b+1 次操作中, a 的取值至少会有一次重复.
若这些取值中含有 0, x 是有限小数, 否则 x 从取值重复的一位位开始循环.