PCL XL Warning

IllegalMediaSource

1 （10 分）30 只铆钉随机地取来用于 6 个部件上，其中有 2 个铆钉为次品。若每个部件用 5 只铆钉，则

（1）2 个次品铆钉恰好用于同一部件的概率是多少？

（2）若已知 2 个次品铆钉都用于某一个部件，则它们都用于 1 号部件的概率是多少？

解：设 A=“2 个次品铆钉恰好用于同一部件”，A_i=“2 个次品铆钉恰好用于 i 号部件”

假设每个铆钉都已编号，则样本空间 S 中的样本点数 $\mu[S]=C_{30}^5\times C_{25}^5\times C_{20}^5\times C_{15}^5\times C_{10}^5\times C_5^5$

A 中的样本点个数 $\mu[A]=6\times C_{28}^3\times C_{25}^5\times C_{20}^5\times C_{15}^5\times C_{10}^5\times C_5^5$， 选1个有2次品

则 $P(A)=\dfrac{6\times C_{28}^3\times C_{25}^5\times C_{20}^5\times C_{15}^5\times C_{10}^5\times C_5^5}{C_{30}^5\times C_{25}^5\times C_{20}^5\times C_{15}^5\times C_{10}^5\times C_5^5}=\dfrac{6\times5\times4}{30\times29}=\dfrac{4}{29}$ ------------5 分

(2) $P(A_1)=\dfrac{C_{28}^3\times C_{25}^5\times C_{20}^5\times C_{15}^5\times C_{10}^5\times C_5^5}{C_{30}^5\times C_{25}^5\times C_{20}^5\times C_{15}^5\times C_{10}^5\times C_5^5}=\dfrac{5\times4}{30\times29}=\dfrac{2}{87}$

$P(A_1\mid A)=\dfrac{P(A_1A)}{P(A)}=\dfrac{P(A_1)}{P(A)}=\dfrac{1}{6}$ ------------5 分

注：此题为基本题，考核古典概型和条件概率。

2（15 分）设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}Ax^2e^{-kx} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad (k>0)$$

（1）求常数 A，（2）求 X 的分布函数，（3）$Y=1-X^2$ 的分布函数

解（1） $\int_0^{\infty}Ax^2e^{-kx}dx=1\Rightarrow A=\dfrac{k^3}{2}$ ------------5 分

（2） $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)du=\begin{cases}\int_0^x\dfrac{k^3}{2}u^2e^{-ku}du & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ -----------2 分

$=\begin{cases}1-e^{-kx}\left(\dfrac{k^2}{2}x^2+kx+1\right) & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ -----------3 分

（3）$F_Y(y)=P\{1-X^2\le y\}=P\{X^2\ge 1-y\}$ -----------2 分

当 $y\ge 1$时，$F_Y(y)=1$ ------------1 分

当 $y<1$时，$F_Y(y)=P\left\{X\ge\sqrt{1-y}\right\}+P\left\{X\le-\sqrt{1-y}\right\}$

$$=1-P\left\{X\le\sqrt{1-y}\right\}+P\left\{X\le-\sqrt{1-y}\right\}$$

$$=1-F\left(\sqrt{1-y}\right)+F\left(-\sqrt{1-y}\right)=1-F\left(\sqrt{1-y}\right)$$

于是，$F_Y(y)=\begin{cases} e^{-k\sqrt{1-y}}\left(\dfrac{k^2}{2}(1-y)+k\sqrt{1-y}+1\right) & y<1 \\ 1 & y\ge 1 \end{cases}$ ------------2 分

注：此题为综合题，综合考核连续型随机变量的概率密度的归一性、分布函数、随机变量函数的分布等知识点。

3.(15 分)设随机变量（X，Y）的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} cxe^{-y}, & 0<x<y<+\infty \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

（1） 求常数 C；（2）试判断 X 与 Y 的独立性；(3)求概率 $P\left\{X+Y\le 1\right\}$；

（4）求 X 与 Y 的协方差。

解（1）根据 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$得

$$\int_0^{+\infty}dy\int_0^{y}Cxe^{-y}dx=\frac{C}{2}\int_0^{+\infty}y^2e^{-y}dy=C\Rightarrow C=1$$ ------------4 分

（2）$f_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int\limits_x^{+\infty}xe^{-y}dy \\ 0\end{cases}=\begin{cases}xe^{-x} & x\ge 0 \\ 0 & x<0\end{cases}$

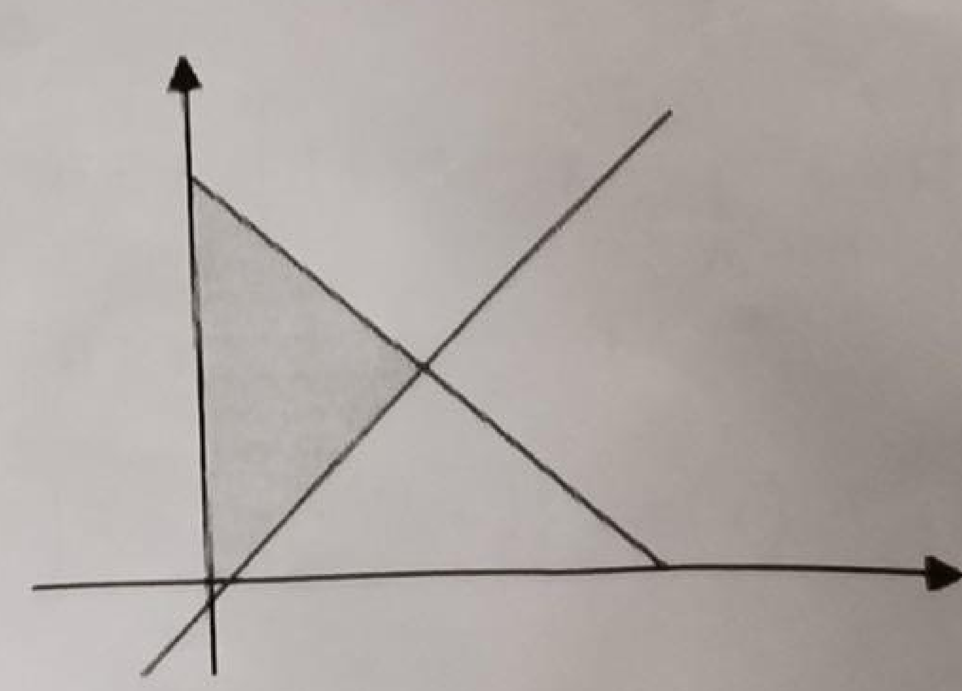
$$f_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int\limits_0^{y}xe^{-y}dx \\ 0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}y^2e^{-y} & y\ge 0 \\ 0 & y<0\end{cases}$$

$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立。------------4 分

(3)

$$P\left\{X+Y\le 1\right\}=\int\limits_0^{1/2}dx\int\limits_x^{1-x}xe^{-y}dy$$

$$=\int\limits_0^{1/2}xe^{-x}dx-\int\limits_0^{1/2}xe^{-(1-x)}dx=1-e^{-1}-e^{-\frac{1}{2}}$$



------------3 分

PCL XL Warning

IllegalMediaSource

（4） $E(X)=\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}dx=2$

$$E(Y)=\int_0^{\infty}\frac{1}{2}y^3e^{-y}dy=3$$

$$E(XY)=\int_0^{\infty}dy\int_0^{y}x^2ye^{-y}dx=\frac{1}{3}\int_0^{\infty}y^4e^{-y}dy=8$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=2$$ ------------4 分

注：此题为基本题，考核二维连续型随机变量概率密度的性质、独立性概念、概率计算及数字特征。

4、（10 分）设某种电子元件的寿命服从均值为 10000 小时的指数分布，假定寿命大于 1000 小时为合格品，

(1)求该电子元件的合格率；（2）为得到至少 1000 个合格品的概率不低于 90%，应生产多少个电子元件？

解：（1）设该电子元件的寿命为 X,则 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10000}e^{-\frac{x}{10000}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

合格率为

$$P\{X>1000\}=\int_{1000}^{\infty}\frac{1}{10000}e^{-\frac{x}{10000}}dx=e^{-0.1}\approx 0.9$$ ---------- 5 分

（2） 设生产 n 个电子元件,其中合格品个数为 Y，则 Y~B（n，0.9），

则 $P\{Y\ge 1000\}\ge 0.9$，由中心极限定理，$P\{Y\ge 1000\}\approx 1-\Phi(\dfrac{1000-0.9n}{\sqrt{0.9\times 0.1n}})\ge 0.9$

$$\Leftrightarrow \Phi(\frac{0.9n-1000}{\sqrt{0.9\times 0.1n}})\ge 0.9 \Rightarrow \frac{0.9n-1000}{\sqrt{0.9\times 0.1n}}\ge 1.28$$

解得 $\sqrt{n}\ge 33.55\Rightarrow n\ge 1126$ -----------5 分

注：此题为基本题，考核中心极限定理及指数分布和正态分布的性质。

5.（10 分）设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，X 的概率密度为

$$f(x,\mu)=\begin{cases}e^{-(x-\mu)} & x\ge\mu\\ 0 & x<\mu\end{cases}$$

若取 $\hat{\mu}_1 = \bar{X} - 1$ ，$\hat{\mu}_2 = \min(X_1, X_2, ..., X_n) - \frac{1}{n}$，求证 $\hat{\mu}_1$、$\hat{\mu}_2$ 都是 μ 的无偏估计，并比较 $\hat{\mu}_1$ 与 $\hat{\mu}_2$ 的有效性。

解 $E(\hat{\mu}_1) = E(\bar{X}-1) = E(X)-1$，而 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{\mu}^{+\infty} xe^{-(x-\mu)}dx = \mu+1$，

故 $E(\hat{\mu}_1) = \mu$ 即 $\hat{\mu}_1$ 是 μ 的无偏估计。 ------------2 分

记 $Z = \min(X_1, X_2, ..., X_n)$，则 $F_Z(z) = 1-(1-F_X(z))^n$

而 $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} \int_{\mu}^{x} e^{-(t-\mu)}dt = 1-e^{-(x-\mu)} & x \geq \mu \\ 0 & z < \mu \end{cases}$

则 $F_Z(z) = \begin{cases} 1-e^{-n(z-\mu)} & z \geq \mu \\ 0 & z < \mu \end{cases}$ $\quad \therefore f_Z(z) = \begin{cases} ne^{-n(z-\mu)} & z \geq \mu \\ 0 & z < \mu \end{cases}$，

$E(Z) = \int_{\mu}^{\infty} zne^{-n(z-\mu)}dz = \mu + \frac{1}{n}$，故 $E(\hat{\mu}_2) = E(Z-\frac{1}{n}) = E(Z) - \frac{1}{n} = \mu$

故 $\hat{\mu}_2$ 是 μ 的无偏估计。 ------------5 分

$E(X^2) = \int_{\mu}^{\infty} x^2 e^{-(x-\mu)}dx = \mu^2+2\mu+2$，$D(X) = \mu^2+2\mu+2-(\mu+1)^2 = 1$，

则 $D(\hat{\mu}_1) = D(\bar{X}-1) = D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n} = \frac{1}{n}$

$E(Z^2) = \int_{\mu}^{\infty} z^2 ne^{-n(z-\mu)}dz = \frac{2}{n^2} + \frac{2\mu}{n} + \mu^2$，$D(Z) = \frac{2}{n^2} + \frac{2\mu}{n} + \mu^2 - \left(\mu+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$

则 $D(\hat{\mu}_2) = D\left(Z-\frac{1}{n}\right) = D(Z) = \frac{1}{n^2}$ 因 $D(\hat{\mu}_2) = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} = D(\hat{\mu}_1)$

则 $\hat{\mu}_2$ 更有效 ------------3 分

注：本题为综合题，考核估计量的无偏性、有效性。

6. （10 分）设 X_1，…，X_n 为取自参数为 λ 的泊松分布总体的样本，求 λ 的矩估计和极大似然估计。

解。(1) $E(X) = \lambda$，则 λ 的矩估计为 $\bar{X}$。 ------------4 分

（2）似然函数 $L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n} P_\lambda(X=x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}$ ------------2 分

$\ln L(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\lambda-n\lambda-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i!)$　　$\frac{d[\ln L(\lambda)]}{d\lambda}=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i-n=0$------------2 分

解似然方程 $\lambda=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，则 λ 的极大似然估计为 $\hat{\lambda}_{\text{MLE}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$------------2 分

注：此题为基本题，考核矩估计和极大似然估计。

7. (10 分) 某批矿砂的 9 个样品中的镍含量，经测定为(%):

32.56　29.66　31.64　30　31.37　31.03　29.33　30.23　31.79

设测定值总体服从正态分布,问在 $\alpha=0.05$ 下能否接受假设:这批矿砂的镍含量的均值为 32?

解：要检验的假设是

$$H_0:\mu=32;H_1:\mu\neq 32$$ ------------2 分

H_0 下，$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$　水平 α 的拒绝域为 $|t|\geq t_{\alpha/2}(n-1)$ -----------2 分

这里：$n=9,t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(8)=2.306,\bar{x}=30.85,s=1.09\Rightarrow t=-3.17\Rightarrow|t|>2.306$

------------4 分

满足拒绝域的要求，所以拒绝假设 H_0，即认为这批矿砂的镍含量的均值不是 32。

------------2 分

注：此题为基本题，考核正态总体均值的检验。