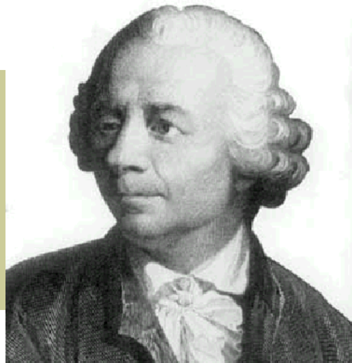
南京大學
NANJING UNIVERSITY



离 散 数 学
Discrete Mathematics

第二十八讲：树

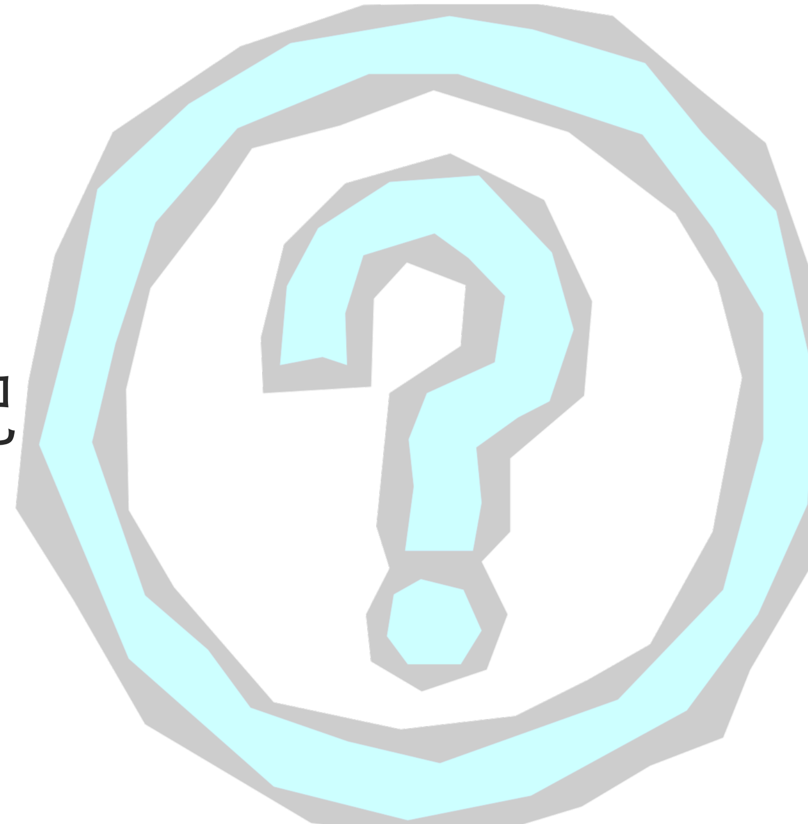
吴 楠

南京大学计算机科学与技术系

2020 年 5 月 27 日

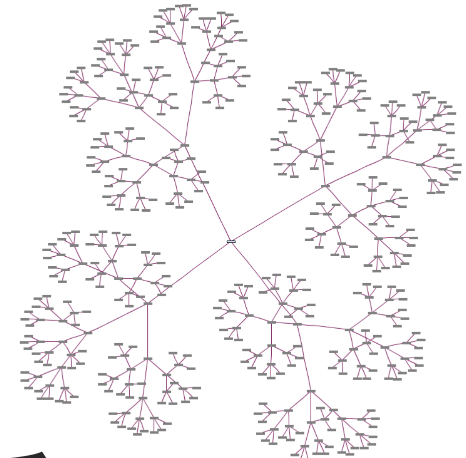
前 情 提 要

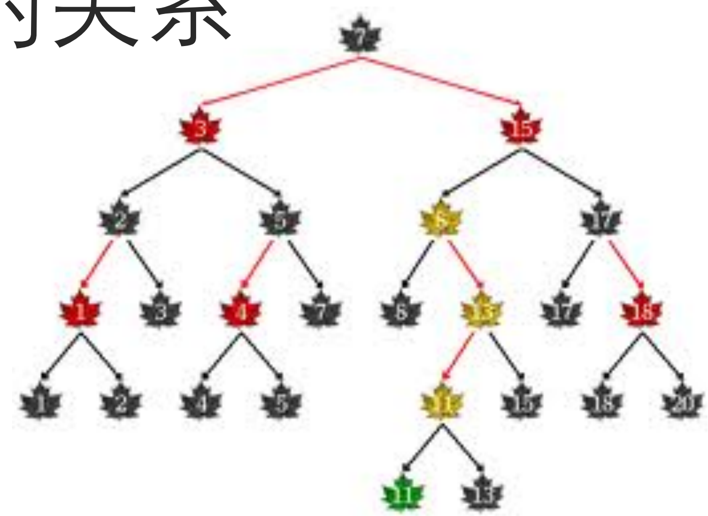
- 二部图及其性质
- 二部图的应用
- 匹　配
- 最大匹配和完美匹配
- 二部图中的匹配
- Hall 定理
- 二部图匹配的应用



本讲主要内容

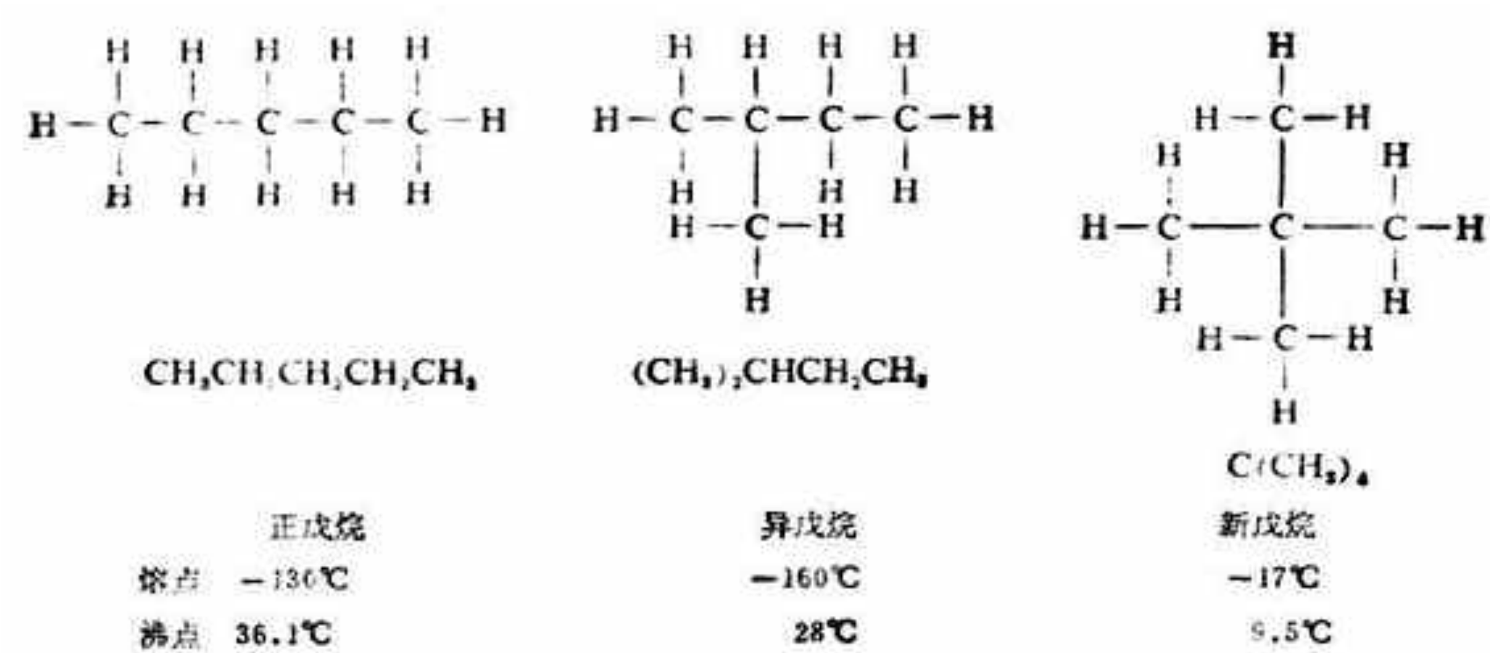
- 树的定义
- 树的连通性质
- 树中边和顶点数量之间的关系
- 生成树与最小生成树
- 求最小生成树的算法





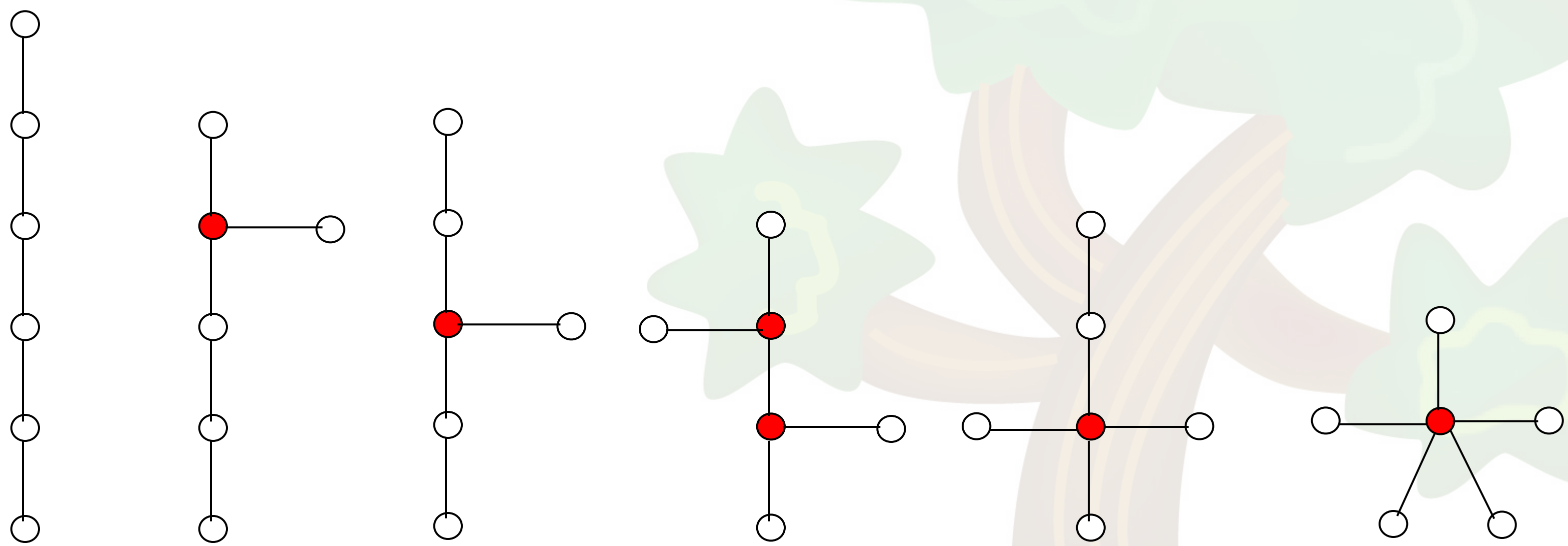
树的定义

- 树(tree)是一种特殊的图，滥觞于19世纪中叶，最初由Cayley提出并用于描述饱和烃的同分异构体



树的定义（续）

- 定义（树）：不含回路的连通简单图称为树
  - 以下列出所有不同构的6个顶点的树



有关树的概念

定义

(1) 无向树——连通无回路的无向图

(2) 平凡树——平凡图

(3) 森林——至少由两个连通分支（每个都是树）组成

(4) 树叶——1 度顶点

(5) 分支点——度数≥2 的顶点

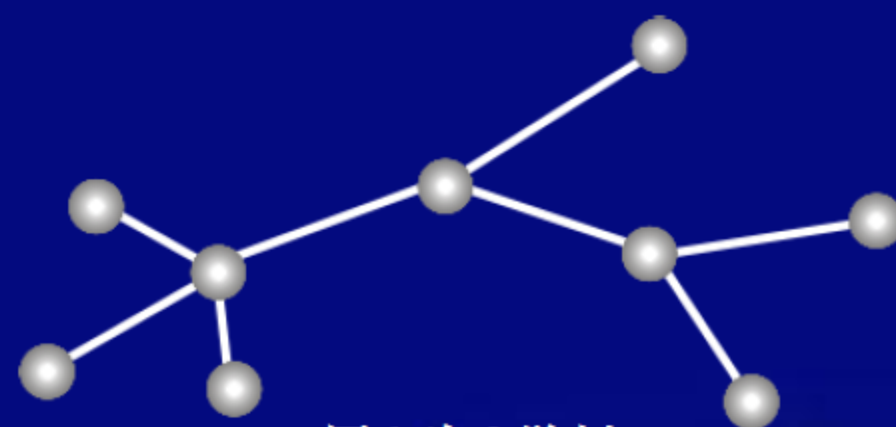


图 1 为 9 阶树.

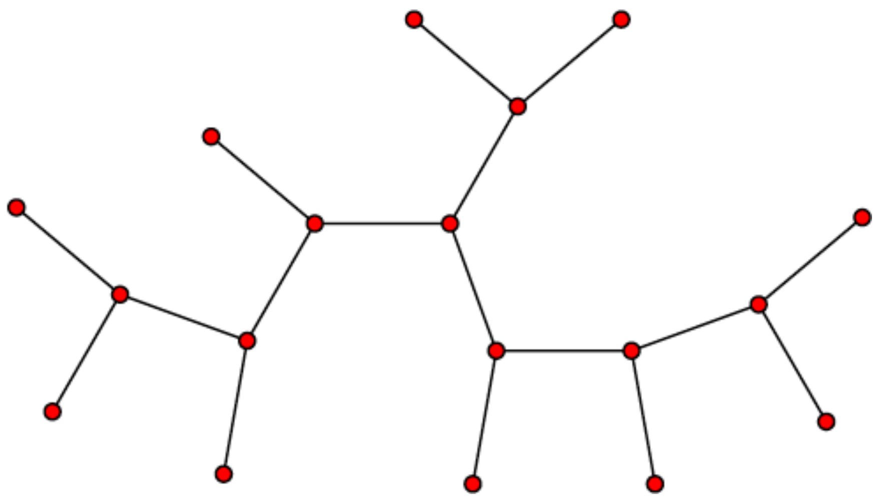
树中的通路

- **定理**（**树中路径的唯一性**）：设T是树，则$\forall u,v\in V(T)$，T中存在唯一的uv－路径

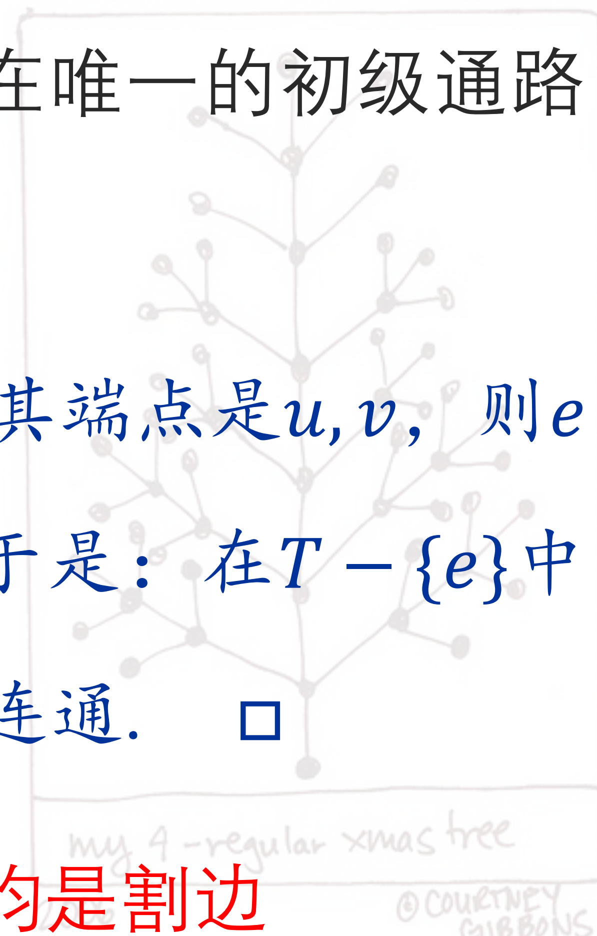
- **证明：** 由定义，T是连通图，故$\forall u,v\in V(T)$，T中存在uv－路径。假设T中有两条不同的uv－路径P_1,P_2。不失一般性，存在$e=(x,y)$满足：$e\in P_1$且在路径P_1上x比y靠近u，但$e\notin P_2$，令$T^*=T-\{e\}$，则T^*中包含P_2，于是：$(P_1\text{中的}xu-\text{段})+P_2+(P_1\text{中的}vy-\text{段})$是$T^*$中的$xy$－通路，所以$T^*$中含$xy$－路径（记为$P'$），则$P'+e$是$T$中的回路，与树的定义矛盾. □

树中边的极限性

- 树的边数从两个方面分别达到极限：
  - 树是边最少的连通图
  - 树是边最多的无回路图



树是边最少的连通图



- **定理**：设图T的任意两顶点存在唯一的初级通路，则$\forall e \in E(T)$，$T-\{e\}$不连通
- **证明**：设e是T中任意一条边，其端点是u, v，则e即u, v之间唯一的初级通路，于是：在$T-\{e\}$中不存在$uv-$通路，$\therefore T-\{e\}$不连通. $\square$
- 这个定理这意味着树中每条边均是割边

树是边最多的无回路图

- **定理**：假设图T是每条边均为割边的连通图，则T中无回路，但在任意不相邻的两点之间加一条边，得到的图中恰含一个回路

- **证明**：(1) T中不含回路

  假设T中有回路C，$e=(u,v)$是C上任意一条边，$\because e$是割边，$\therefore T^*=T-\{e\}$是非连通图，$\therefore u,v$处于不同的连通分支，但$C-\{e\}$是T^*中的$uv-$通路，矛盾！

  (2) 在任意两个不相邻的顶点之间加一条边，则产生回路

  T中至少有3个顶点。设x,y是不相邻的顶点，$\because T$连通，$\therefore$存在$xy-$通路P，则$P+(x,y)$是$T+(x,y)$中的回路.

  (3) $T+(x,y)$ 的回路是唯一的

  假设另有回路$C'\neq P+(x,y)$，$\because T$中原无回路，$\therefore (x,y)\in C'$，而$C'-(x,y)\neq P$，因此，x,y之间有两条不同的初级通路，$\therefore T$中含回路，矛盾. $\square$

有关树的几个等价命题

- 下列四个命题等价：

  (1) T是不含回路的简单连通图；

  (2) T中任意两点之间有唯一初级通路；

  (3) T连通，但删除任意一条边则不再连通；

  (4) T无回路，但在任意不相邻的顶点对之间加一条边则产生唯一的回路

- 这里只需再证明(4) $\Rightarrow$ (1)

  只需证明连通性：对任意顶点对x, y，若x, y相邻，边(x, y)即$xy-$通路，若x, y不相邻，则$T+(x, y)$中含唯一的回路C，显然(x, y)在C中，因此：$C-(x, y)$是T中的$xy-$通路. □

树中边和点的数量关系

- 定理：设T是树，令$n = |V(T)|$，$m = |E(T)|$，则：

$$\boxed{\boldsymbol{m = n - 1}}$$

- 证明：**对顶点数n进行归纳：**
  - Basis: 当$n = 1$，T是平凡图，结论显然成立；
  - I.H.: 假设当$n \le k$结论成立；
  - Ind. Steps: 若$n = k + 1$，因为T中每条边都是割边，任取$e \in E(T)$，$T - \{e\}$含两个连通分支，设其为T_1, T_2，并设它们边数分别是m_1, m_2，顶点数分别是n_1, n_2，根据归纳假设：$m_1 = n_1 - 1$, $m_2 = n_2 - 1$，注意：$n_1 + n_2 = n$，$m_1 + m_2 = m - 1$，故而$m = m_1 + m_2 + 1 = n - 1$. □

连通图边数的下限

- 定理（**连通图的必要条件**）：连通图的必要条件是：$\boxed{m \geq n-1}$
  - **对于树，$m = n-1$，因此"树是边最少的连通图"**
- **证明**：对n进行归纳：Basis: 当$n=2$时结论显然成立；
  I.H.: 若$n \leq k$时结论成立；Ind. Steps:若G是满足$n=k+1$的连通图，考虑$G' = G - v(v \in V(G))$, 令$|V(G')| = n', |E(G')| = m'$:
  (1)若G'仍连通，由归纳假设：$m' \geq n'-1$，注意：$n' = n-1$，$m' \leq m-1$(G连通，被删除的点至少关联一条边)，所以：$m \geq m'+1 \geq n'-1+1 = n-1$

连通图边数的下限（续）

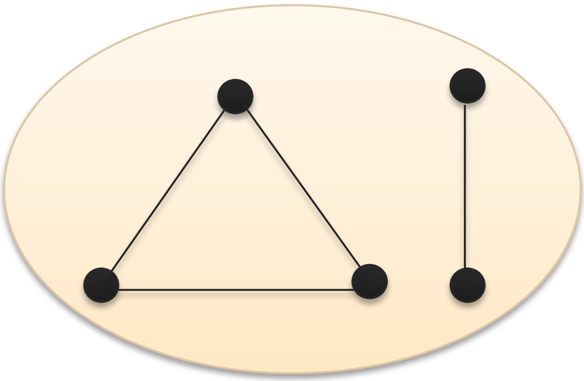
- 定理（**连通图的必要条件**）：连通图的必要条件是：$\boxed{m \geq n-1}$

- **证明（Ind. Steps 续）：**

  (2) 若G'不连通，设G'有$\omega(\omega>1)$个连通分支$G_1, G_2, \cdots, G_\omega$，且$G_i$的边数和顶点数分别是$m_i$和$n_i$。由归纳假设，$m_i \geq n_i - 1$（$i=1,2,\cdots,\omega$）。注意：$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_\omega + 1$，$m \geq m_1 + m_2 + \cdots + m_\omega + \omega$（即每个连通分支中至少有一个顶点在$G$中与要删除的$v$相邻，即$v$的度数不小于$\omega$），所以：$m \geq m_1 + m_2 + \cdots + m_\omega + \omega \geq n_1 + n_2 + \cdots + n_\omega - \omega + \omega = n - 1$. □

与边点数量关系有关的等价命题

- 注意：对任意图，$m = n - 1$不是树的充分条件
- 下列三个命题等价：



(1) T是树

(2) T不含回路，且$m = n - 1$

(3) T连通，且$m = n - 1$

  - **证明：** (1)⇒(2)已证；(2)⇒(3)：若不连通，分支数$\omega \geq 2$则$m = n - \omega < n - 1$，矛盾；(3)⇒(1)：设e是T中任意一边，令$G' = T - e$，且其边数和顶点数分别是m'和n'，则$m' = m - 1 = n - 2 < n - 1$，$\therefore G'$是非连通图，即$T$的任意边均不在回路中，$\therefore T$中无回路. □

课堂练习

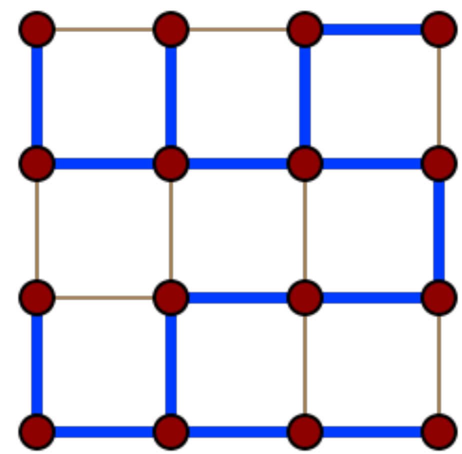
- 试证明：恰有2个1度顶点的树必为一链.
- **证明：**

设T是一棵具有两个1度点的树，m为边数，则$m = n-1$且$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m = 2(n-1)$；又因$T$连通且除了两个1度点外其余点的度数均大于或等于2，而$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2 + \sum_{i=1}^{n-2} d(v_i)$；故有$2(n-1) = 2 + \sum_{i=1}^{n-2} d(v_i)$，即$\sum_{i=1}^{n-2} d(v_i) = 2(n-2)$。这表明$n-2$个分支点的度数都恰为2，即$T$为一条链. □

生成树（spanning tree）

- 定义（**生成树**）：若图G的生成子图是树，则该子图称为G的生成树
- 定理（**生成树存在定理**）：无向图G有生成树当且仅当G连通
- **证明：** $\Rightarrow$：显然成立；

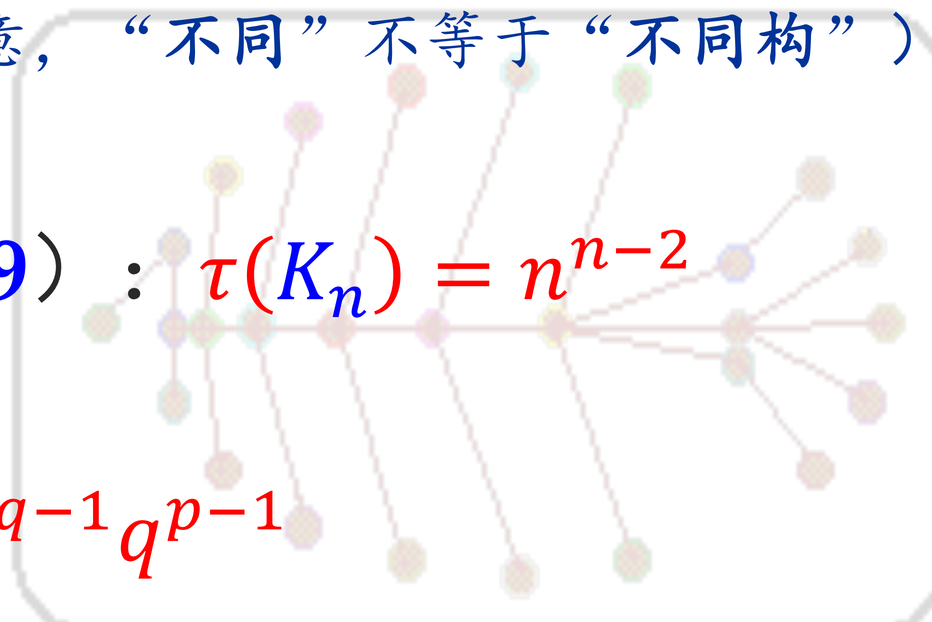
  $\Leftarrow$：若G是有回路的连通图，删除回路上的一条边，G中的回路一定减少——此为图论证明常用之“破圈法”——用“破圈法”总可以构造连通图的生成树．　□



- 推论：简单无向图G是树当且仅当G有唯一的生成树

生成树的计数*

- 定义：设G为无向连通图，$\tau(G)$为G的不同生成树的个数（注意，“**不同**”不等于“**不同构**”）



- 定理（**Cayley 1889**）：$\tau(K_n) = n^{n-2}$
- 定理：$\tau(K_{p,q}) = p^{q-1}q^{p-1}$

求生成树的算法

- 求连通图G（设其边集为$\{e_1, \cdots, e_m\}$）的生成树的算法可归为两类——“破圈法”和“避圈法”：

破圈法(G)

$T \leftarrow G$
for $i \leftarrow 1$ **to** m
  do if e_i 在 T 的回路上
    then $T \leftarrow T - e_i$

避圈法(G)

$T \leftarrow \emptyset$
for $i \leftarrow 1$ **to** m
  do if $G[T \cup \{e_i\}]$ 无回路
    then $T \leftarrow T \cup \{e_i\}$
      $T \leftarrow G[T]$

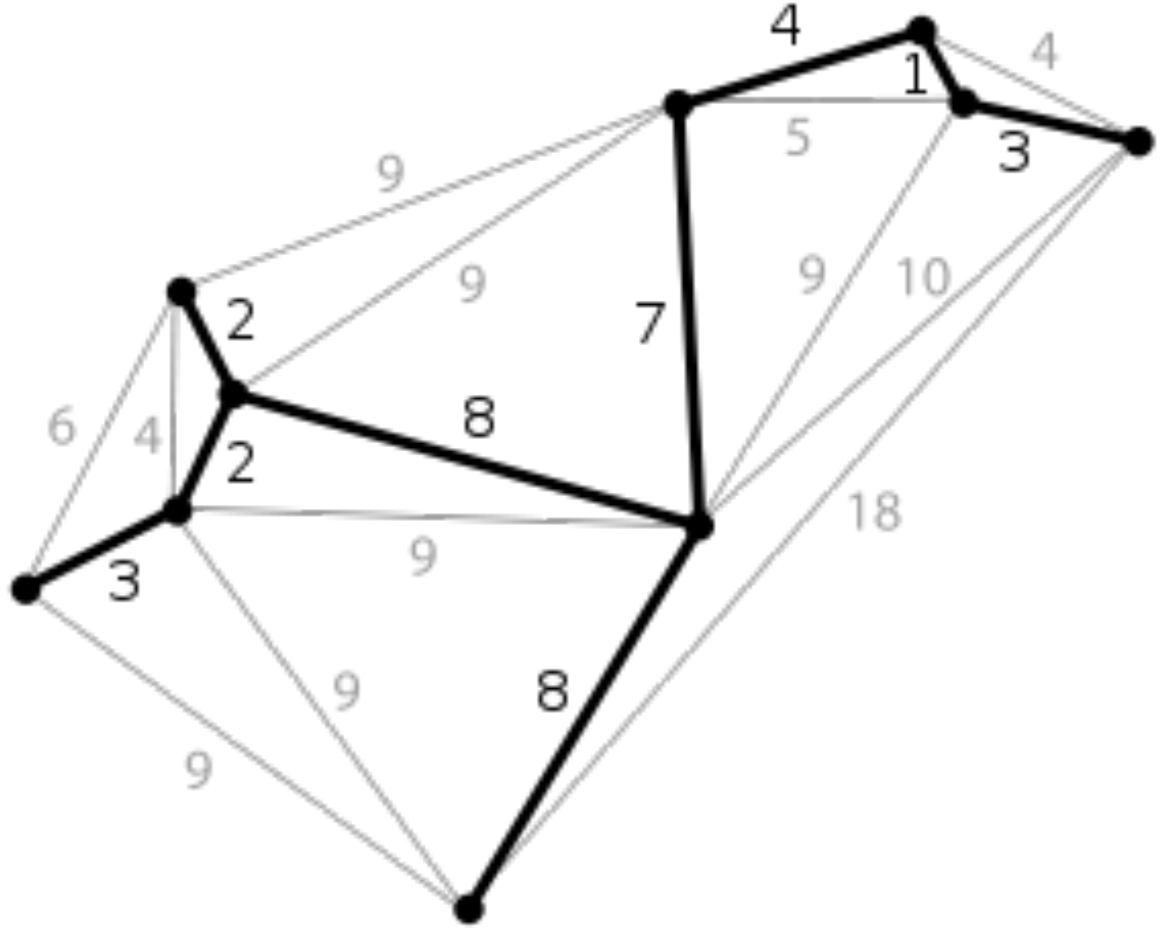
最小生成树（MST）

- 定义（**子图的权**）：设$G = \langle V, E, w\rangle$为带权无向图，$w: E \to \mathbb{R}$，对于$e \in E(G)$，$w(e)$为$e$之权。设$S$为$G$之子图，$S$的权：

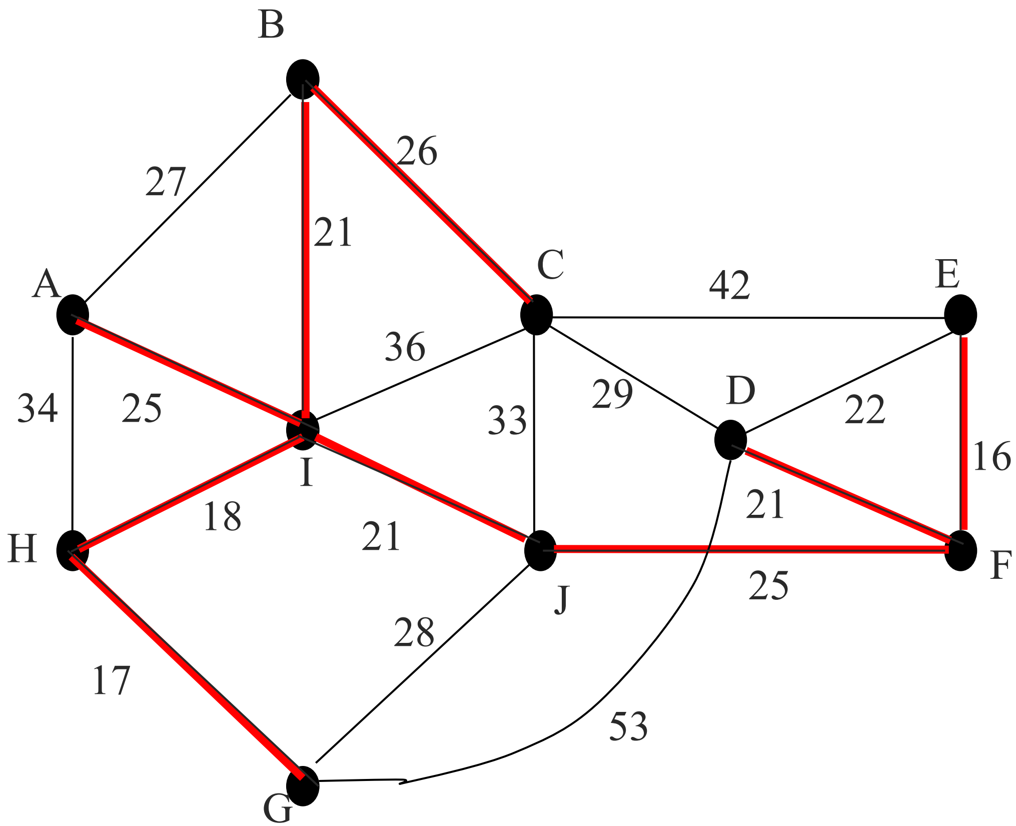
$$w(S) = \sum\{w(e) | e \in E(S)\}$$

- 定义（**最小生成树**）：设T为G之生成树，若对任何G的生成树T'有$w(T') \geq w(T)$，则称T为最小生成树（minimum spanning tree, MST）

最小生成树（续）



求最小生成树的Kruskal算法



算法：**Kruskal（1956）**

1. $E = \{\}$;
2. 从 E 以外选择权尽可能小，又不会与 E 中已有的边构成回路的边加入 E;
3. 重复第2步，直到 E 中包含 $n-1$ 条边;
4. 算法结束

求最小生成树的Kruskal算法（续）

Kruskal Algorithm(E)

$T^* \leftarrow$ 空图

for $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$

    do $e_i \leftarrow e$ 其在 $E - \{e_1, \ldots, e_{i-1}\}$ 中极小且 $T^* + e_i$ 无回路

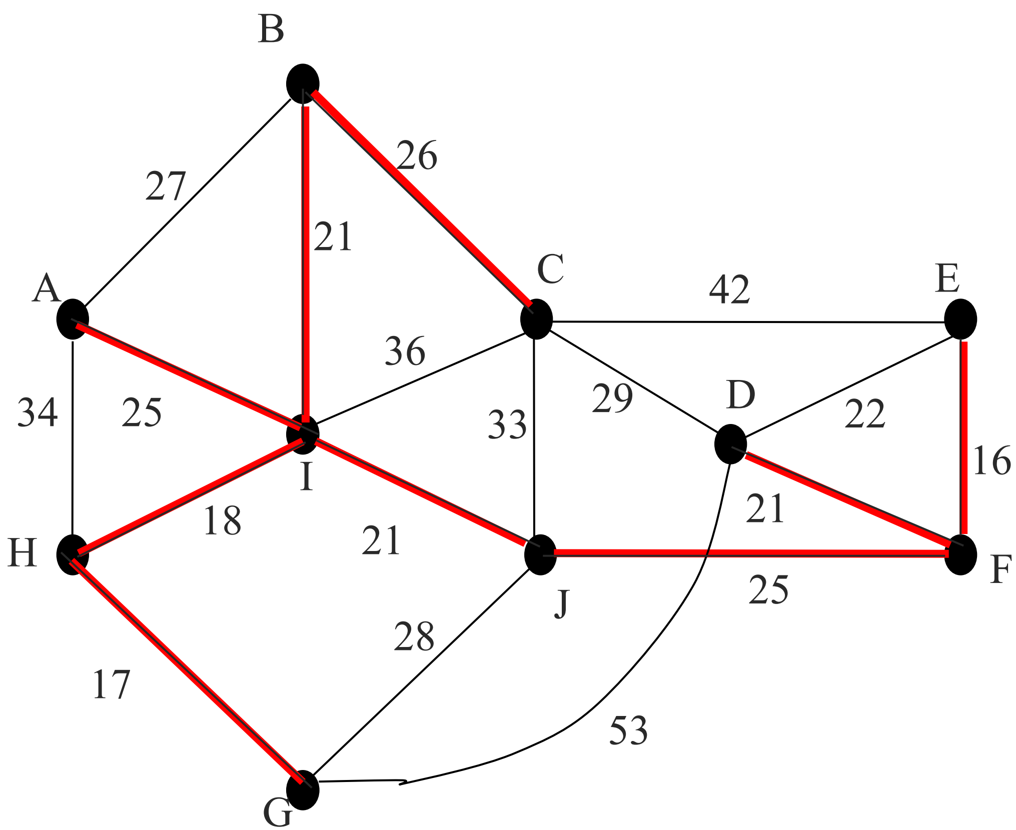
        $T^* \leftarrow T^* + e_i$

return T^*

Kruskal算法的证明*

- (1) 显然T是生成树
- (2) 假设T不是最小生成树。按在算法中加边顺序，T中边是$e_1, e_2, \cdots, e_{k-1}, e_k, \cdots, e_{n-1}$。而$T'$是从开始与$T$有最多连续公共边的最小生成树$e_1, e_2, \cdots, e_{k-1}, e_k', \cdots$；$e_k$是第一个不在$T'$中的边。$T' + e_k$含回路，设该回路上的$e_k'$不在$T$中，则$T^* = T' - \{e_k'\} \cup \{e_k\}$也是生成树，而且$w(T^*) = w(T') - w(e_k') + w(e_k)$，根据算法的选择，必有$w(e_k') \geq w(e_k)$，$\therefore w(T^*) \leq w(T')$，即$T^*$也是最小生成树，但$T^*$从开始与$T$有的连续公共边数多于$T'$，矛盾. $\square$

求最小生成树的Prim算法*



算法：**Prim（1957）**

1. 选取一条极小权边e_1

2. $T=\{e_1\}$

3. 从T以外选择与T中一点邻接且权尽可能小，又不会与T中已有边构成回路的边加入T

4. 重复第2步，直到E中包含$n-1$条边

5. 算法结束

求最小生成树的Prim算法*（续）

PRIM ALGORITHM(G : n 阶无向连通带权图)

$e_1 \leftarrow$ 一条极小权边

$T \leftarrow \{e_1\}$

for $i \leftarrow 2$ **to** $n-1$

  do $e_i \leftarrow e$ 其为在 $E-\{e_1,\ldots,e_{n-1}\}$ 中

    使与 T 的一点邻接且 $T+e$ 无回路的具极小权的边

    $T \leftarrow T+e_i$

return T

求最小生成树的破圈算法*

- 1975年我国数学家管梅谷（1934－）提出求最小生成树的破圈算法：其思想为在给定的图中任意找出一个回路，删去该回路中权最大的边。然后在余下的图中再任意找出一个回路，再删去这个新找出的回路中权最大的边，一直重复上述过程，直到剩余的图中没有回路。这个没有回路的剩余图便是最小生成树

Tips：生成树的计数

Counting spanning trees

[edit]

The number $t(G)$ of spanning trees of a connected graph is an important invariant. In some cases, it is easy to calculate $t(G)$ directly. It is also widely used in data structures in different computer languages.[citation needed] For example, if G is itself a tree, then $t(G)=1$, while if G is the cycle graph C_n with n vertices, then $t(G)=n$. For any graph G, the number $t(G)$ can be calculated using Kirchhoff's matrix-tree theorem (follow the link for an explicit example using the theorem).

Cayley's formula is a formula for the number of spanning trees in the complete graph K_n with n vertices. The formula states that $t(K_n) = n^{n-2}$. Another way of stating Cayley's formula is that there are exactly n^{n-2} labelled trees with n vertices. Cayley's formula can be proved using Kirchhoff's matrix-tree theorem or via the Prüfer code.

If G is the complete bipartite graph $K_{p,q}$, then $t(G) = p^{q-1}q^{p-1}$, while if G is the n-dimensional hypercube graph Q_n, then $t(G) = 2^{2^n-n-1}\prod_{k=2}^{n} k^{\binom{n}{k}}$. These formulae are also consequences of the matrix-tree theorem.

If G is a multigraph and e is an edge of G, then the number $t(G)$ of spanning trees of G satisfies the *deletion-contraction recurrence* $t(G)=t(G-e)+t(G/e)$, where $G-e$ is the multigraph obtained by deleting e and G/e is the contraction of G by e, where multiple edges arising from this contraction are not deleted.

WIKIPEDIA
The Free Encyclopedia

本次课后作业

- 教材内容：[Rosen] 11.1，11.5 节
- 课后习题：请见“教学立方”
- 提交方式：请见“教学立方”