

离散数学-图论作业 1 图的基本概念

如无特意说明，以后各题只考虑有限个顶点的图。

Problem 1

证明或反驳：若无向图 G 至少有两个顶点且各顶点度数均不相同，则 G 不是简单图。

Problem 2

度序列：一个图的度序列是由图的各个顶点度按非递增序排列的序列（书 P.561）

判断下列序列是否能作为简单图的度序列。如果是，请画出一个简单图使其具有给定的度序列；若否，请说明理由。

a) 5,4,3,2,1,0

b) 2,2,2,2,2

c) 5,4,2,1,1,1

d) 5,3,3,3,3,3

Problem 3

设无向图 G 有 \mathcal{V} 个顶点， \mathcal{E} 条边， $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示 G 中度最小和度最大的顶点的度，证明 $\delta(G) \leq \frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}} \leq \Delta(G)$ 。（其中 $\frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}}$ 称为图的**顶点平均度**）

Problem 4

令 G 是一个顶点平均度为 a 的无自环的无向图。

a) 证明： G 删去一个顶点 x 后平均度至少为 a ，当且仅当 $\deg(x) \leq \frac{a}{2}$ ；

b) 证明或反驳：如果 $a > 0$ ，那么 G 有一个最小度大于 $\frac{a}{2}$ 的子图。

Problem 5

用顶点表示语句，s 到 t 有一条边表示执行语句 s 之前不能执行语句 t 的有向图称为程序的**优先图**（书 P.545）
构造下列程序的优先图

$$S_1 \ x := 1$$

$$S_2 \ x := x + 1$$

$$S_3 \ y := 2$$

$$S_4 \ z := y$$

$$S_5 \ x := x + 2$$

$$S_6 \ y := x + z$$

Problem 6

证明：不包含三角形 K_3 作为子图的 n 阶图，其边数 m 必满足 $m \leq \frac{n^2}{4}$ 。