综上所述，得

$$E(X-EX)^k=\begin{cases}0, & k\text{ 为奇数}\\ \sigma^k(k-1)!!, & k\text{ 为偶数}\end{cases}。$$

我们将随机变量标准化后的三阶矩称为偏度，同时将标准化随机变量的四阶矩称为峰度。由例 4.27 不难看出，正态分布的偏度为 0，峰度为 3。峰度可以用来衡量分布形状的陡峭程度。在实际中，高于四阶的矩是较少用到的。

二、协方差阵

对于 n 维随机向量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$，也可以定义其数学期望及协方差阵。

定义 4.7　对随机向量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$，称

$$EX=(EX_1,EX_2,\cdots,EX_n)^{\mathrm{T}}$$

为 X 的**数学期望**。记 $c_{ij}=\mathrm{cov}(X_i,X_j),i,j=1,2,\cdots,n$。称矩阵

$$\varSigma=(c_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}$$

为 X 的**协方差阵**。

显然，协方差阵是一个对称阵。例如我们考虑二维正态分布 (X_1,X_2) 时，其协方差阵为

$$\varSigma=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho\\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2\end{pmatrix}。$$

此时二维正态分布的联合密度函数可以写成如下形式：

$$p(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{2}{2}}(\det\varSigma)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(x-\mu)\right\},$$

其中 $x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}},\mu=(\mu_1,\mu_2)^{\mathrm{T}}=(EX_1,EX_2)^{\mathrm{T}}$。该公式展开后与第三章公式 (3.17) 是完全相同的。且容易记忆，因为它与一维正态分布的公式是类似的。

习　题　四

1. 随机变量 X 的分布列为

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1\end{pmatrix}$$

试求 EX。

2. 袋中有 5 个球，编号为 1，2，3，4，5，现从中任取 3 个球，用 X 表示取出 3 个球中的最大编号，求 EX。

3. 设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} ax & 0<x<2 \\ bx+c & 2\leqslant x<4 \\ 0 & 其他 \end{cases}。$$

又 $EX=2$, $P(1<X<3)=3/4$，求常数 a,b,c 的值。

4. (几何分布的数学期望) 独立重复地做一项试验，每次试验成功的概率为 p，$0<p<1$，记 X 为第一次成功时试验的次数，则 X 的期望是多少?

5. 设我国每年某种出口商品的需求量 (单位为吨) 为 [2000，4000] 的均匀分布。若售出该种商品 1 吨，收益 3 万元；如不能售出，每吨的仓库保管费为 1 万元，试问该商品应出口多少吨才能得到最大收益?

6. 已知随机变量 $Y=\ln X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，此时我们称 X 为对数正态分布，试求其数学期望 EX。

7. 已知随机变量 X 与 Y 服从 $x^2+y^2\leqslant R^2$ 上的均匀分布，记 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$，求 $E(Z)$。

8. 有 N 个人将他们的帽子抛向空中，帽子充分混合后，每人随机地从中取出一顶，求刚好拿到自己帽子的人数的数学期望。

9. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 均服从 $[0，1]$ 上的均匀分布，且相互独立。令 $X_{(1)}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$。试求 $EX_{(1)}$。

10. 设随机变量 X 的密度函数为 $p(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x-\mu|},\mu\in\mathbf{R}$，试求 DX。

11. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布 $P(\lambda),\lambda>0$。试求 DX。

12. 设随机变量 X 的方差存在，试证明：$DX\leqslant E(X-c)^2$，c 为任意常数。

13. 设 X_1，X_2，X_3 相互独立，X_1 服从 $U\,[0,\ 6]$，X_2 服从 $N\,(0,4)$，X_3 服从参数为 $\lambda=5$ 的泊松分布，令 $Y=X_1-2X_2+3X_3$，试求 $D\,(Y)$。

14. 设随机变量 X 服从 $N(0,4)$，随机变量 Y 服从 $U[0,4]$，且 X 和 Y 相互独立，试求 $D(X+Y)$; $D(2X-3Y)$。

15. 设 X 和 Y 的相关系数为 0.25，$EX=0,EY=2,DX=DY=1$，试求 $E\,(2X+Y)^2$。

16. 已知随机变量 X 与 Y 独立同分布，且 X 的概率分布为 $P\,(X=1)=1-P\,(X=2)=\dfrac{2}{3}$。记 $U=\max\,(X,Y)$，$V=\min\,(X,Y)$，求：(1) $(U,\ V)$ 的概率分布；(2) $E\,(U)$ 和 $E\,(V)$；(3) U 与 V 的协方差 $\mathrm{cov}(U,\ V)$。

17. 设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

X \ Y	0	1
0	$1-p$	0
1	0	p

试求：(1) $\mathrm{cov}(X,Y)$；(2) ρ_{XY}。

18. 设随机向量 $(X,\ Y)$ 在矩形 $\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上服从均匀分布。令

$$U=\begin{cases} 0 & 若\ X\leqslant Y \\ 1 & 若\ X>Y \end{cases};\qquad V=\begin{cases} 0 & 若\ X\leqslant 2Y \\ 1 & 若\ X>2Y \end{cases}。$$

求：(1) 二维随机向量 $(U,\ V)$ 的概率分布；

(2) U 和 V 的相关系数 ρ_{UV}。

19. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 为 n 个独立同分布的随机变量，它们的数学期望为 μ，方差为 σ^2。$\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 表示样本均值，随机变量 $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$ 称为样本方差。求: (1) $E\bar{X}; D(\bar{X})$；(2) $E\left[S^2\right]$。

20. 设随机向量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y) = \begin{cases} x+y & 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases},$$

试求：X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY}。

21. 设 X 和 Y 为两个随机变量，参数 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$，且 $ac \neq 0$。试证：$aX+b$ 和 $cY+d$ 的相关系数与 X 和 Y 的相关系数相同。

22. 利用切比雪夫不等式确定，在投掷一枚均匀硬币时需要掷多少次，才能保证正面向上的频率在 0.4 与 0.6 之间的概率不小于 90%？

23. 试证明下面结论。

(1) 设 X 是取非负整数值的离散型随机变量，则

$$EX = \sum_{k=1}^{+\infty} P\left(X \geqslant k\right)。$$

(2) 若 X 是取非负实数值的连续型随机变量，分布函数为 $F(x)$，密度函数为 $p(x)$，则

$$EX = \int_0^{+\infty} (1 - F(x))\mathrm{d}x。$$

24. 已知随机变量 X 与 Y 相互独立，求证：$D(XY) \geqslant DX \cdot DY$。

25. 设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases},$$

试计算 k 阶矩 EX^k。

26. 设二维随机变量 (X, Y) 的密度函数为

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{8} & 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases},$$

求 (X, Y) 的协方差阵。

27. 设二维正态分布随机变量 (X, Y) 的协方差阵为

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 196 & -91 \\ a & 169 \end{pmatrix},$$

试求：a 及 X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY}。