

离散数学-第 16 次作业

Problem 1

判断下列集合关于指定的运算是否构成半群，独异点（么半群）和群：

- (1) a 是正实数, $G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$, 运算是普通乘法。
- (2) \mathbb{Q}^+ 为正有理数, 运算是普通乘法。
- (3) \mathbb{Q}^+ 为正有理数, 运算是普通加法。
- (4) 一元实系数多项式的集合关于多项式的加法。
- (5) 一元实系数多项式的集合关于多项式的乘法。
- (6) $U_n = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge x^n = 1\}$, n 为某个给定正整数, \mathbb{C} 为复数集合, 运算是复数乘法。

Problem 2

$S = \{a, b, c\}$, $*$ 是 S 上的二元运算, 且 $\forall x, y \in S, x * y = x$ 。

证明 S 关于 $*$ 运算构成半群。

Problem 3

设 $V = \langle \{a, b\}, * \rangle$ 是半群, 且 $a * a = b$, 证明:

- (1) $a * b = b * a$
- (2) $b * b = b$

Problem 4

证明偶数阶群必含 2 阶元。

注：关于元素的阶及 k 阶元的定义详见：[屈婉玲] 10.1 节。

Problem 5

设 G 为群, $a, b, c \in G$, 证明: $|abc| = |bca| = |cab|$

注: $|abc|$ 表示 abc 的阶, 其它同理。

Problem 6

设 G 为非 $Abel$ 群, 证明 G 中存在非单元 a 和 b , $a \neq b$, 且 $ab = ba$ 。

Problem 7

设 $i = \sqrt{-1}$, 证明 $S = \{1, -1, i, -i\}$ 是复数上的乘法群。

Problem 8

设 G 是一个群, 证明:

$$\forall a, b \in G, (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}.$$

Problem 9

设 $\langle S, \cdot \rangle$ 是一个半群, $e \in S$ 称为 S 的一个左 (右) 单位元, 如果对于任意的 $a \in S$ 都有 $e \cdot a = a$ ($a \cdot e = a$). 对于 $a \in S$, 如果存在 $b \in S$ 使 $b \cdot a = e$ ($a \cdot b = e$), 则称左 (右) 可逆的, b 是 a 的一个左 (右) 逆元. 假设 S 有左 (右) 单位元 e , 且 S 中每个元素都有关于 e 的左 (右) 逆元. 证明: $\langle S, \cdot \rangle$ 是一个群.

Problem 10

设 G 是一个有限群. 证明: G 中使得 $x^3 = e$ 的元素 x 的个数是奇数。