课程概述

程龚 (gcheng@nju.edu.cn)

教师的联系方式

教师	办公室	电子邮件
程龚	计算机科学技术楼309室	gcheng@nju.edu.cn

课程主页

- 课件：http://ws.nju.edu.cn/courses/gt/
- QQ群：992810158

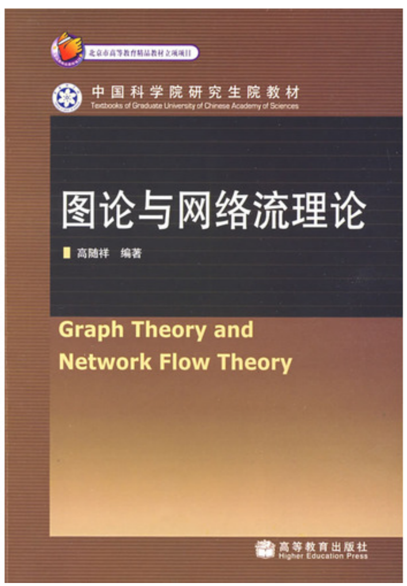
群名称：图论（2021年春）
群　号：992810158

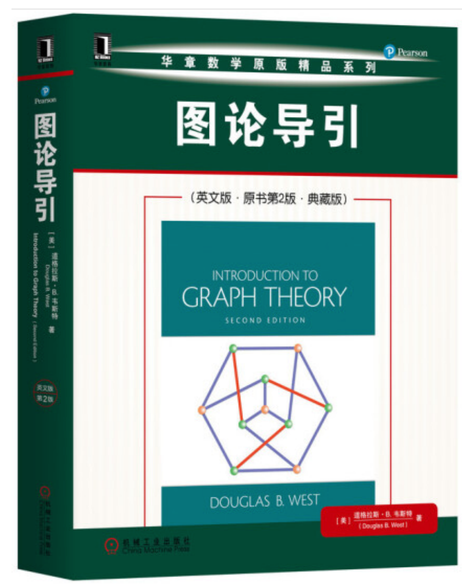
关于本研共修

- 大四保研同学，如果希望将本课程作为研究生阶段的学分，请勿在教务系统选课，而直接将“学号+姓名”发QQ给我。

教材与参考书

- 教材
  - 《图论与网络流理论》，高随祥，高等教育出版社
- 参考书
  - 《图论导引》，英文版第2版，Douglas B. West，机械工业出版社





教学周历

1. 图的基本概念 (1.1, 1.5)
2. 割点、割边和连通度 (2.1, 2.2)
3. k-连通图 (2.3, 2.4)
4. 匹配的概念 (3.1, 3.2)
5. 最大匹配算法 (增广路算法、Hopcroft-Karp算法；Edmonds算法)
6. 中国邮递员问题和旅行商问题 (4.2, 4.4)
7. 支配集、点独立集和点覆盖集 (5.1)
8. 边独立集和边覆盖集 (5.2)
9. 平面图的概念 (7.1, 7.2, 7.4)
10. 可平面图的判断 (7.3；DMP算法)
11. 边染色和点染色 (6.1, 6.2, 6.5)
12. 平面图的面染色和有向图 (7.7, 8.1, 8.2, 8.3, 8.5)
13. 网络流 (9.1, 9.2)
14. 图论的应用 (讨论课)
15. 习题讲解 (复习)
16. 期末考试

预备知识

- 以下内容在离散数学等课程中已有介绍，在本课程中不再专门讲解，但属于需要掌握的范围
  - 最短路问题 (1.2)
  - 树与最小生成树 (1.3, 1.4)
  - 二部图的匹配 (3.3, 3.4)
  - Euler图和Hamilton图 (4.1, 4.3)

考核方式

- 成绩构成
  - 期末开卷考试：70分
  - 平时成绩：30分
    - 随堂练习：6分（共12次，当堂交）
    - 书面作业：11分（共11次，当周作业次周上课前交）
    - 讨论课：5分（1次，制作PPT上台讲解）
    - 编程作业：8分（1次，采用OnlineJudge）
    - 附加分：课堂发言

- 对各类作业的要求
  - 按时提交（迟交成绩减半）
  - 独立完成（抄袭成绩清零）

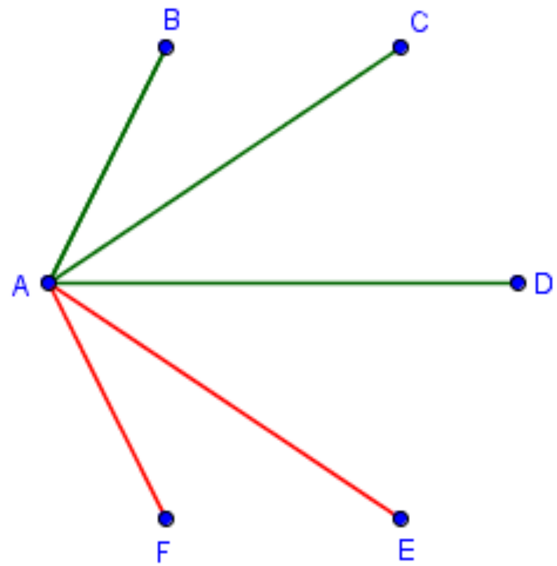
- 去年成绩
  - 均分：82分

图论的学习，仿佛逻辑思维训练的“艺术体操”

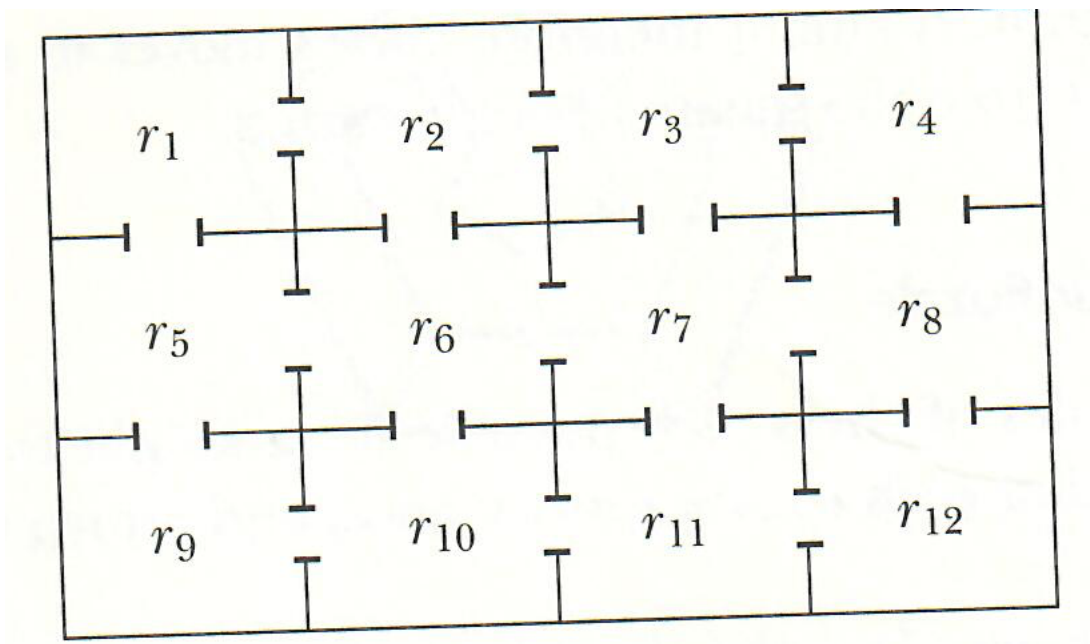
图的基本概念

程龚 (gcheng@nju.edu.cn)

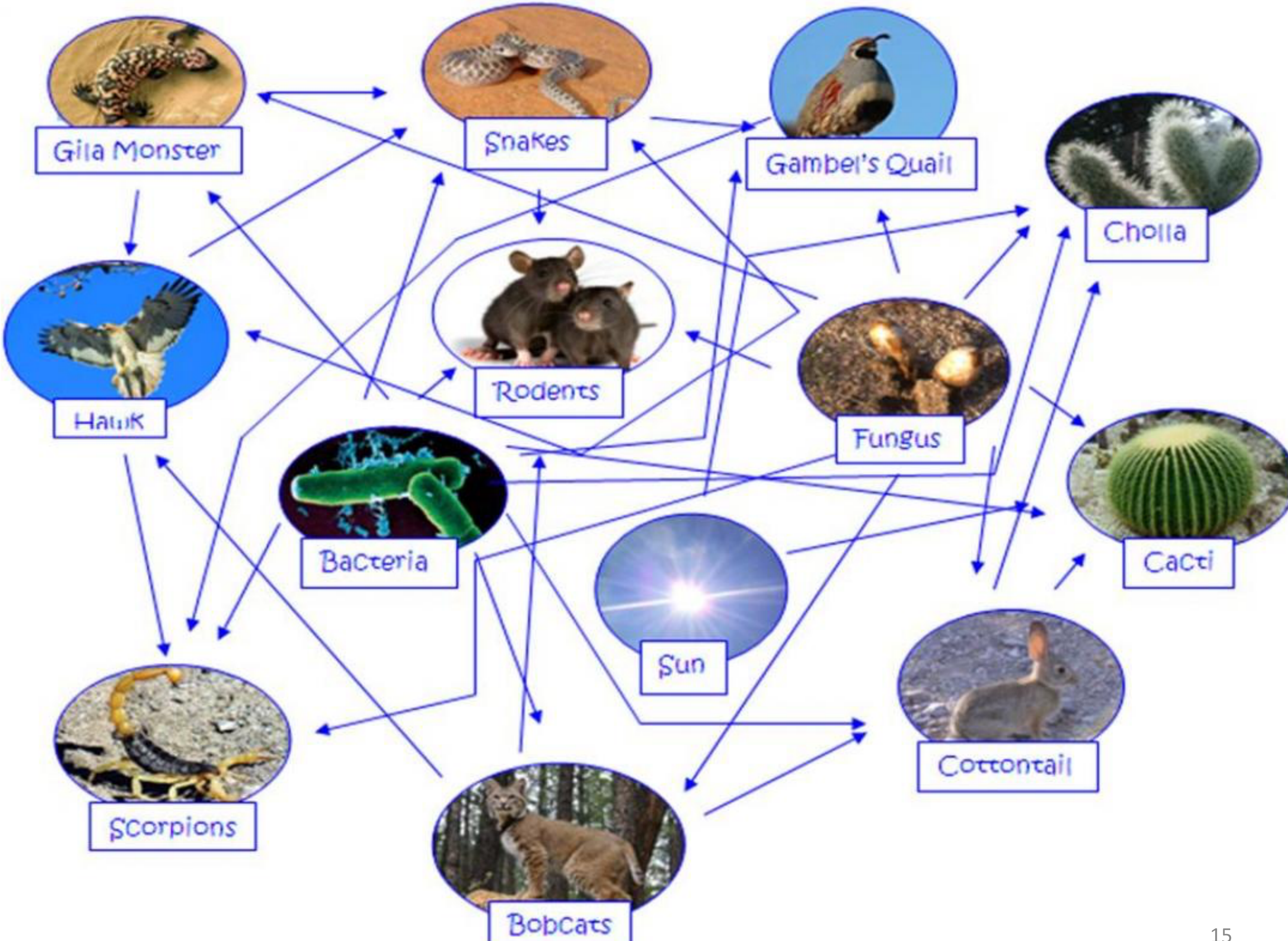
- 当公寓里至少有多少位住户时，可以保证其中一定有3位住户，他们互相都认识或者互相都不认识


B
C
A
D
F
E

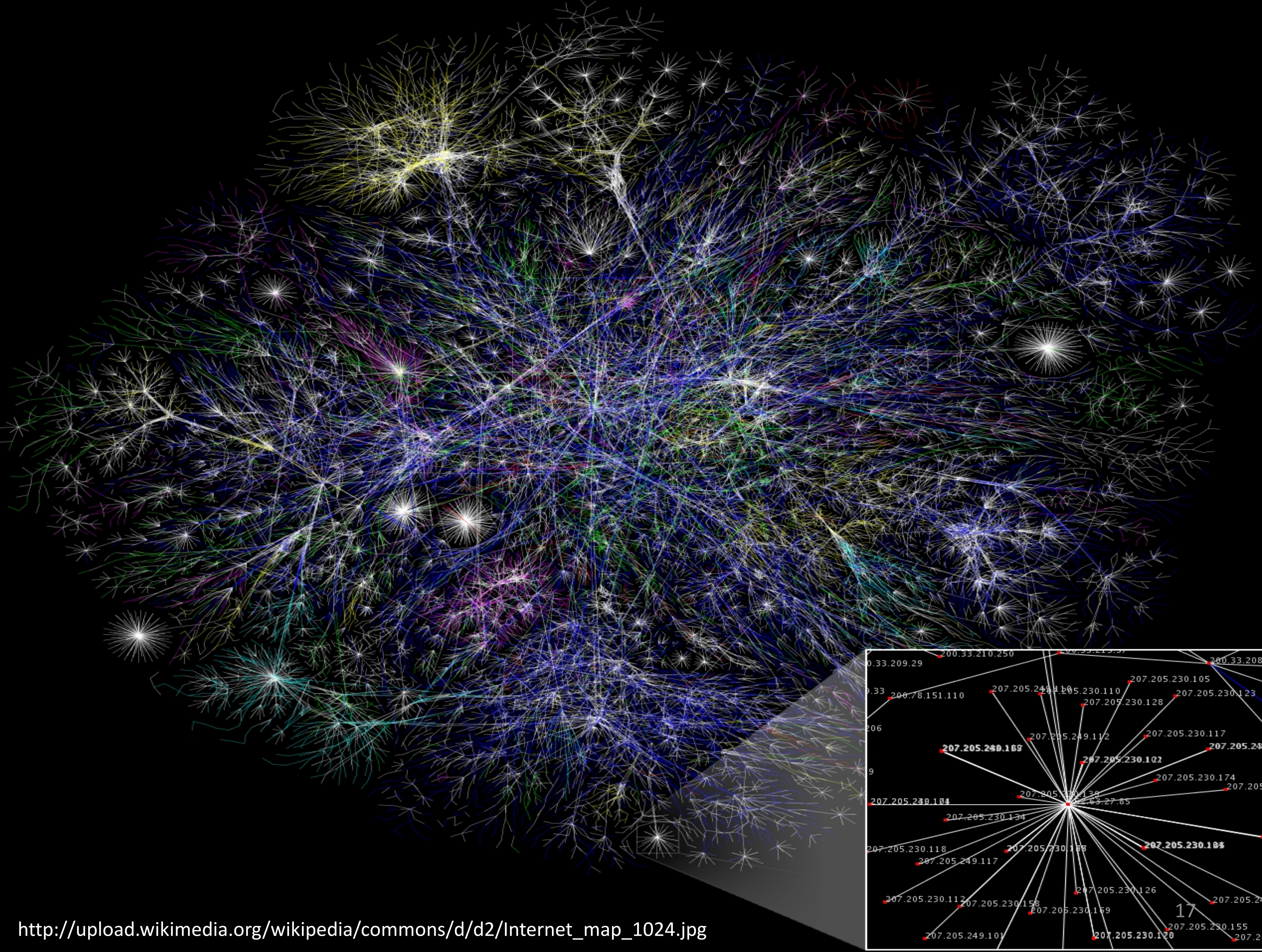
- 这家美术馆在至少哪些展厅内配备保安，可以保证对于每间展厅，或者有保安或者与有保安的展厅相邻



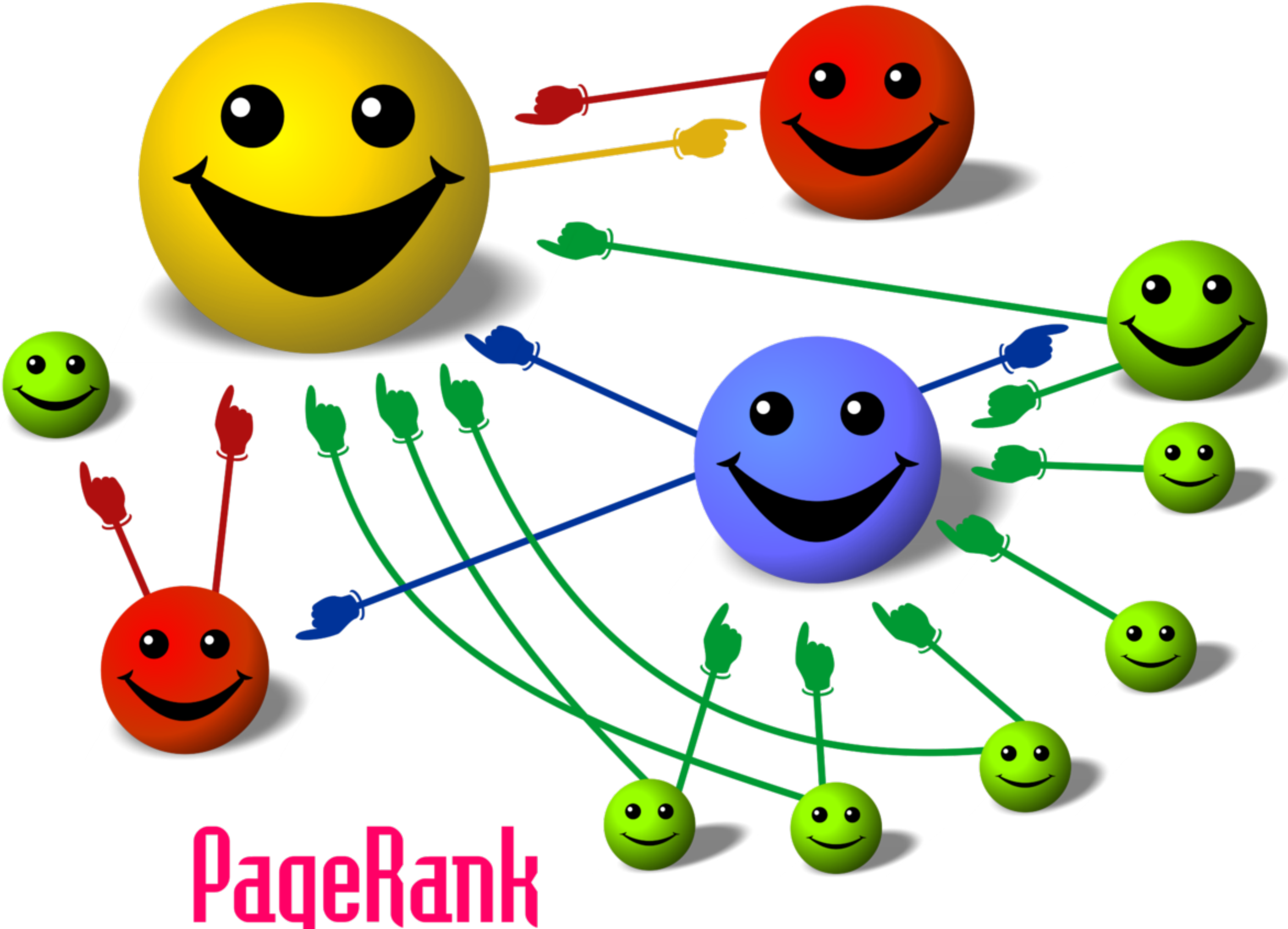
图，就在我们身边



http://www.chainconveyordesign.net/wp-content/uploads/2012/01/Sahara-Desert-Food-Chain1.jpg



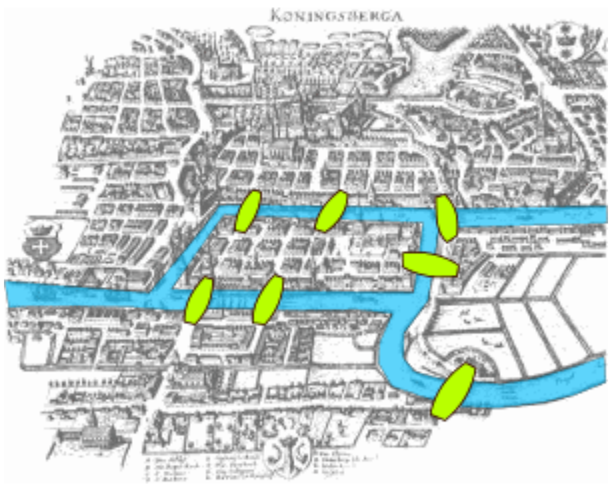
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d2/Internet_map_1024.jpg

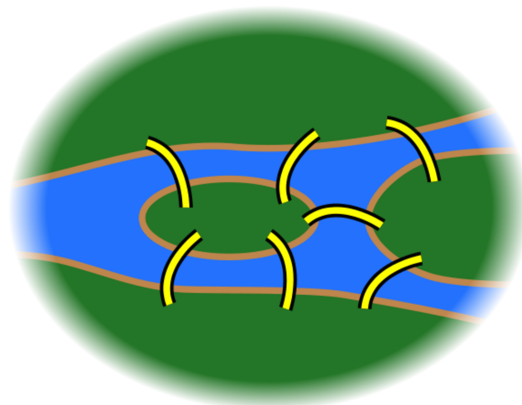


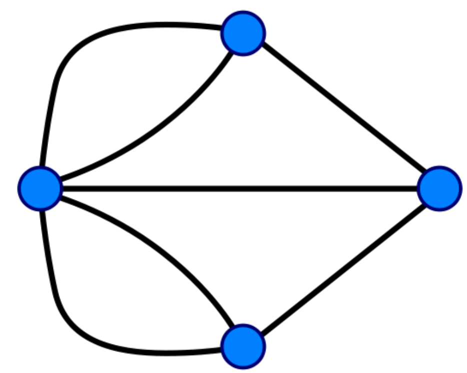
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/69/PageRank-hi-res.png/1200px-PageRank-hi-res.png

你能自己举个例子吗？

一切都源于柯尼斯堡的七座桥







http://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg

本节课的主要内容

1.1 图的基本概念

1.5 图的中心与中位点

集合、无序对

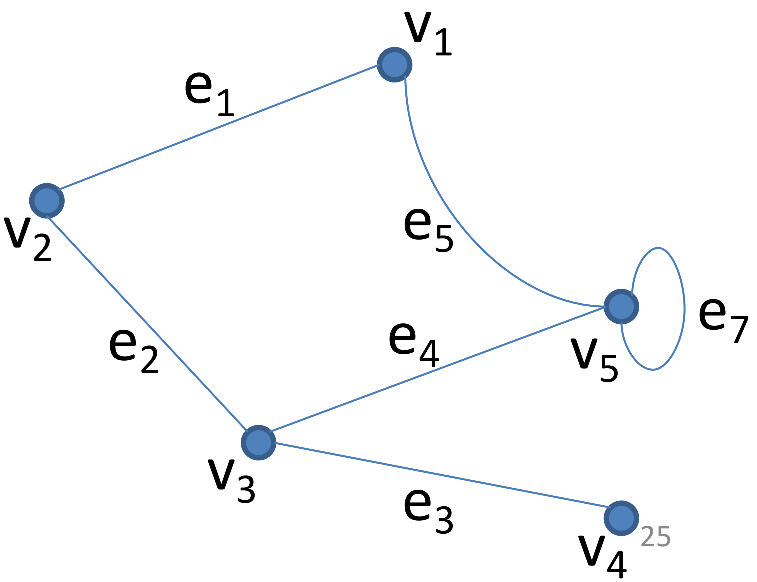
- 集合 (set)
  - 一组不重复的对象
  - 例：$S=\{v_1, v_2, v_3\}=\{v_3, v_2, v_1\}=\{v_1, v_1, v_2, v_3\}$
- 无序对 (unordered pair)
  - 含有2个或1个元素的集合
  - 例：$\{v_1, v_2\}$，$\{v_2\}$
  - 常记作：(v_1, v_2)，(v_2, v_2)

你能用集合来表示无序对吗？

- 如无特殊说明，本课程中
  - 用()表示无序对
  - 用<>表示有序对

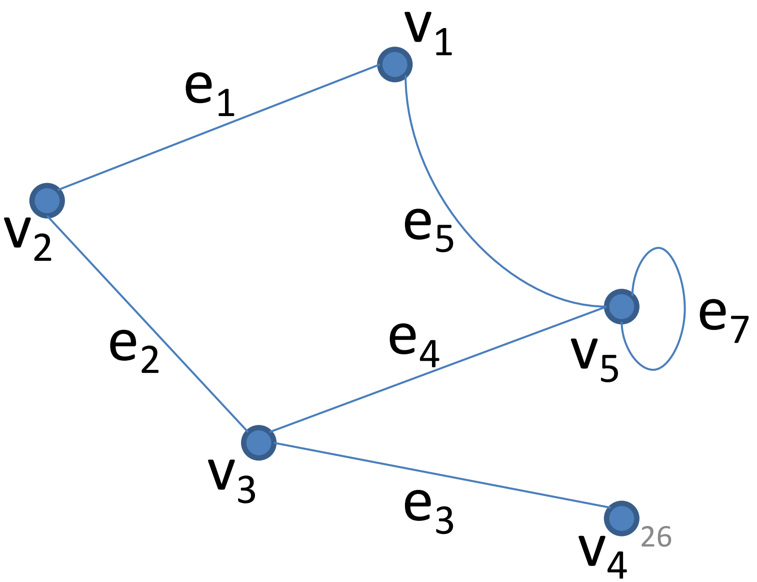
图、顶点、边

- 图： G=<V,E>
  - 顶点集 (vertex set)： V或V(G)
  - 边集 (edge set)： E或E(G)
  - 如果将边e视作顶点无序对，那么它作为一个集合要满足哪些条件？
    - $\forall e \in E(G), (|e| \in \{1,2\})$
      $\forall e \in E(G), (e \subseteq V(G))$
- 图的规模
  - 阶 (order)： ν(G)=|V(G)| //读音“纽”
  - 边数 (size)： ε(G)=|E(G)|
- 边的几种记法： e=(u, v)=uv

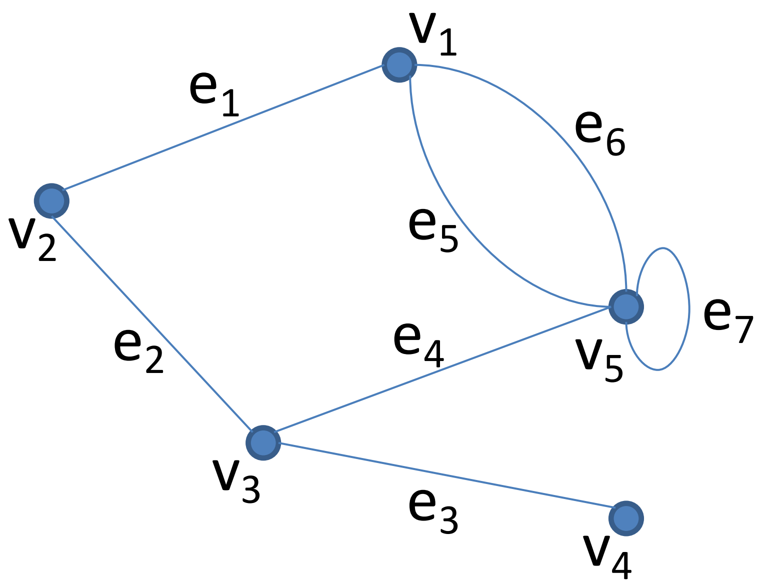


图、顶点、边(续)

- 一些术语
  - v_1、v_2是e_1的端点 (endpoint)
  - v_1、v_2和e_1关联 (incident)
  - v_1和v_2相邻 (adjacent)
  - e_1和e_2相邻 (adjacent)
  - e_7是环边 (loop)

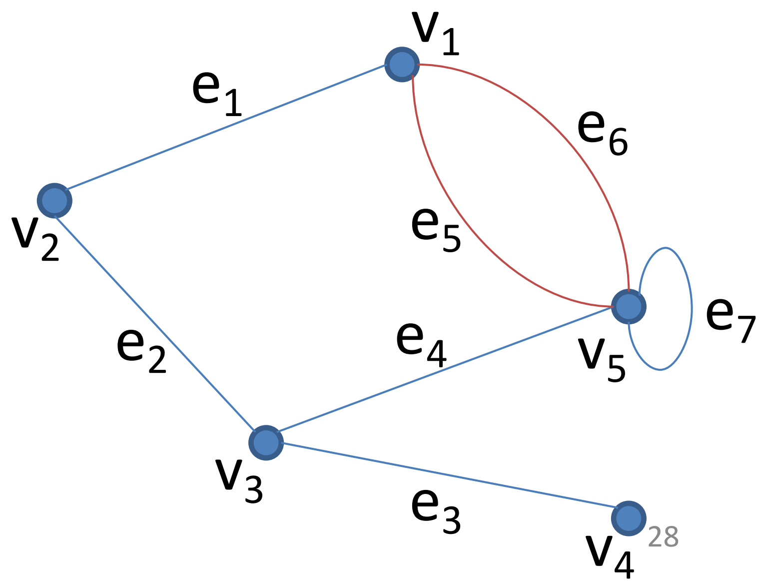


- 如果我们用刚才的集合表示法来表示这个图，你觉得会不会有什么问题？



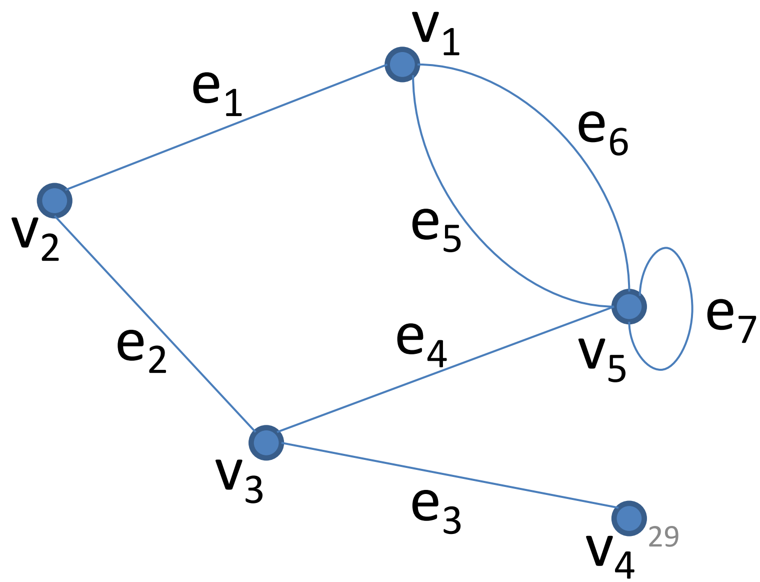
多重集合、重边

- 多重集合 (multiset)
  - 一组可重复的对象
  - 例：S={v1, v2, v3}={v3, v2, v1}≠{v1, v1, v2, v3}
- 重边 (multiple edges)
  - 例：e_5和e_6
  - $E(G)=\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_1, v_5), (v_1, v_5), (v_5, v_5)\}$



度

- 顶点的度 (degree)
  - 顶点关联的边的数量，环边计2次
  - 例：$d(v_1)=3$，$d(v_5)=5$
- 图的度
  - 最大度：$\Delta(G)=\max_{v\in V(G)} d(v)$
  - 最小度：$\delta(G)=\min_{v\in V(G)} d(v)$



推论1.1.1

- 任何图中，奇度顶点的个数总是偶数（包括0）。

证明：你能自己证明吗？

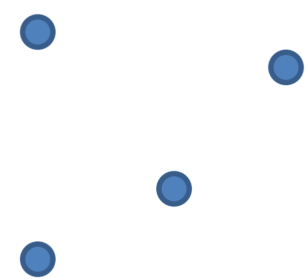
1. 顶点度数之和为偶数。
2. 奇度顶点的个数不能是奇数。

一些重要类型的图

- **零图 (null graph)**
  - V(G)=Ø
- 空图 (empty graph)
- 平凡图 (trivial graph)
- 简单图 (simple graph)
- 完全图 (complete graph)
- k-正则图 (k-regular graph)
- 二部图 (bipartite graph)
- 完全二部图 (complete bipartite graph)

一些重要类型的图

- 零图 (null graph)
- **空图 (empty graph)**
  - E(G)=∅
- 平凡图 (trivial graph)
- 简单图 (simple graph)
- 完全图 (complete graph)
- k-正则图 (k-regular graph)
- 二部图 (bipartite graph)
- 完全二部图 (complete bipartite graph)

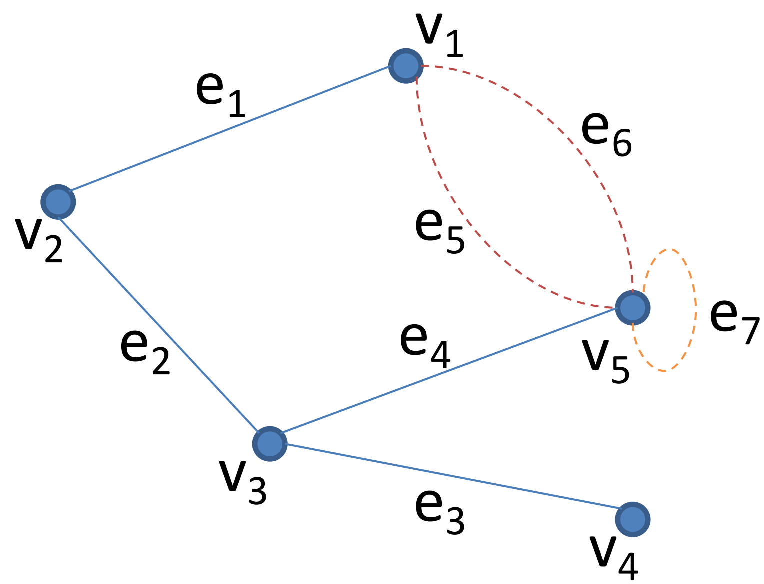


一些重要类型的图

- 零图 (null graph)
- 空图 (empty graph)
- **平凡图 (trivial graph)**
  - v(G)=1的空图
- 简单图 (simple graph)
- 完全图 (complete graph)
- k-正则图 (k-regular graph)
- 二部图 (bipartite graph)
- 完全二部图 (complete bipartite graph)

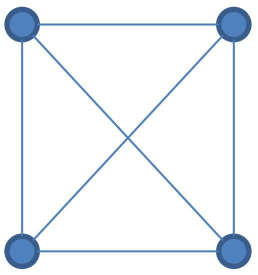
一些重要类型的图

- 零图 (null graph)
- 空图 (empty graph)
- 平凡图 (trivial graph)
- **简单图 (simple graph)**
  - 没有环边和重边
- 完全图 (complete graph)
- k-正则图 (k-regular graph)
- 二部图 (bipartite graph)
- 完全二部图 (complete bipartite graph)



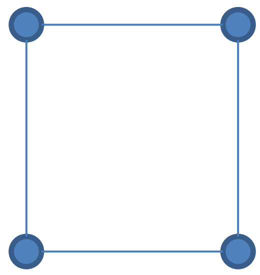
一些重要类型的图

- 零图 (null graph)
- 空图 (empty graph)
- 平凡图 (trivial graph)
- 简单图 (simple graph)
- **完全图 (complete graph)**
  - 每对顶点都相邻的简单图，记作$K_{v(G)}$
- k-正则图 (k-regular graph)
- 二部图 (bipartite graph)
- 完全二部图 (complete bipartite graph)



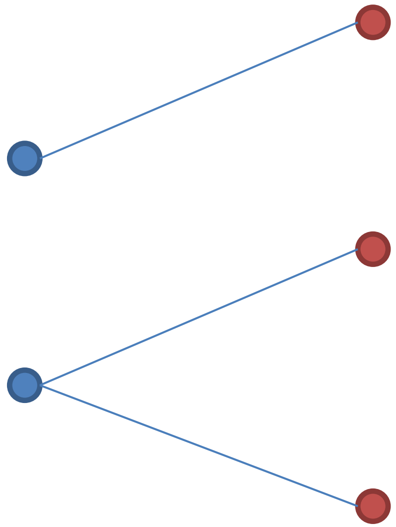
一些重要类型的图

- 零图 (null graph)
- 空图 (empty graph)
- 平凡图 (trivial graph)
- 简单图 (simple graph)
- 完全图 (complete graph)
- **k-正则图 (k-regular graph)**
  - $\forall v \in V(G), (d(v) = k)$
- 二部图 (bipartite graph)
- 完全二部图 (complete bipartite graph)



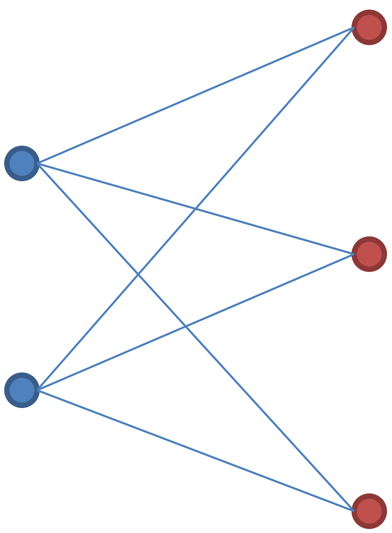
一些重要类型的图

- 零图 (null graph)
- 空图 (empty graph)
- 平凡图 (trivial graph)
- 简单图 (simple graph)
- 完全图 (complete graph)
- k-正则图 (k-regular graph)
- **二部图 (bipartite graph)**
  - $V(G) = X \cup Y, X \neq \varnothing, Y \neq \varnothing, X \cap Y = \varnothing$
  - $\forall e \in E(G), ((e \cap X \neq \varnothing) \wedge (e \cap Y \neq \varnothing))$
- 完全二部图 (complete bipartite graph)



一些重要类型的图

- 零图 (null graph)
- 空图 (empty graph)
- 平凡图 (trivial graph)
- 简单图 (simple graph)
- 完全图 (complete graph)
- k-正则图 (k-regular graph)
- 二部图 (bipartite graph)
- **完全二部图 (complete bipartite graph)**
  - 每对X-Y顶点都相邻的简单图，记作$K_{|X|,|Y|}$



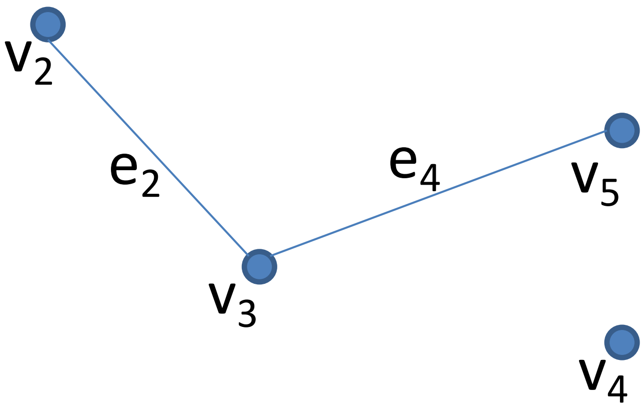
一些重要类型的图

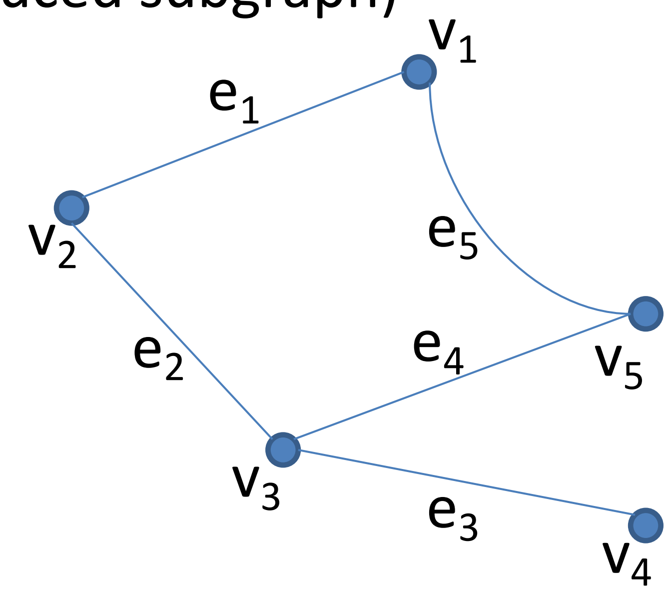
- 零图 (null graph)
- 空图 (empty graph)
- 平凡图 (trivial graph)
- 简单图 (simple graph)
- 完全图 (complete graph)
- k-正则图 (k-regular graph)　　　　你能举出生活中的例子吗？
- 二部图 (bipartite graph)
- 完全二部图 (complete bipartite graph)

- 如无特殊说明，本课程讨论的是简单图

图的关系1：父子

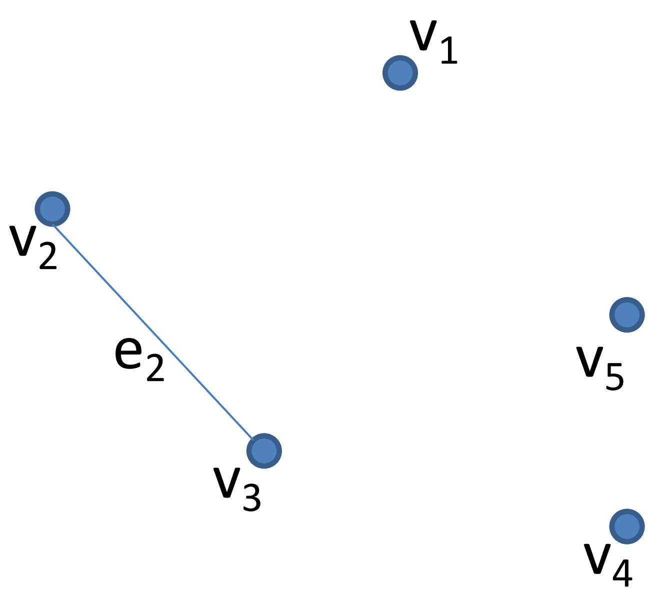
- **H是G的子图 (subgraph)**
  - V(H)⊆V(G)
  - E(H)⊆E(G)
- H是G的生成子图 (spanning subgraph)
- H是G的V’-点导出子图 (induced subgraph)
- H是G的E’-边导出子图 (edge-induced subgraph)

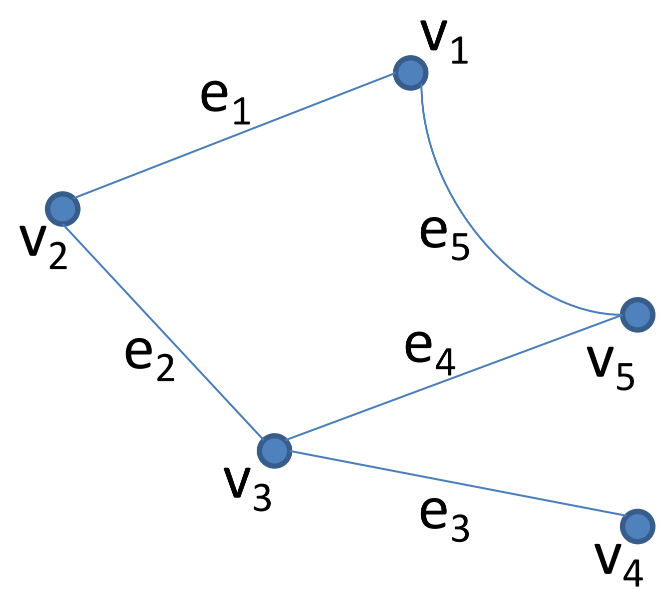




图的关系1：父子

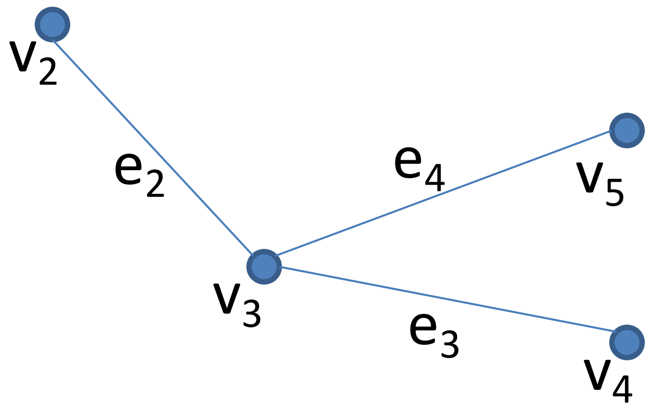
- H是G的子图 (subgraph)
- **H是G的生成子图 (spanning subgraph)**
  - V(H)=V(G)
- H是G的V’-点导出子图 (induced subgraph)
- H是G的E’-边导出子图 (edge-induced subgraph)

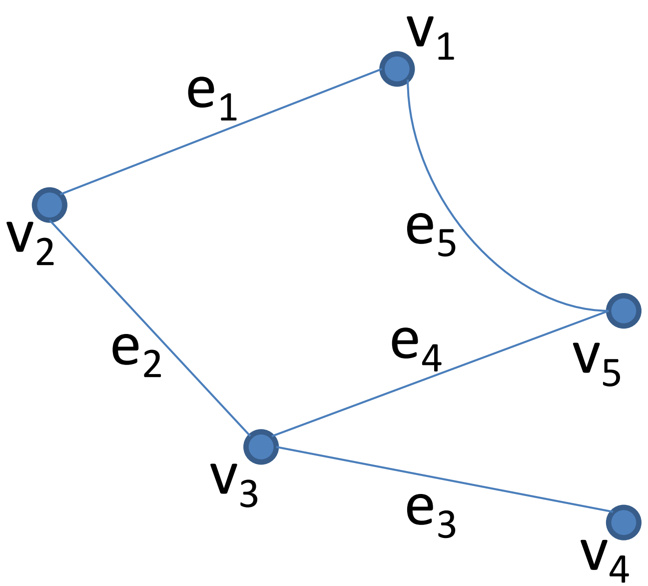




图的关系1：父子

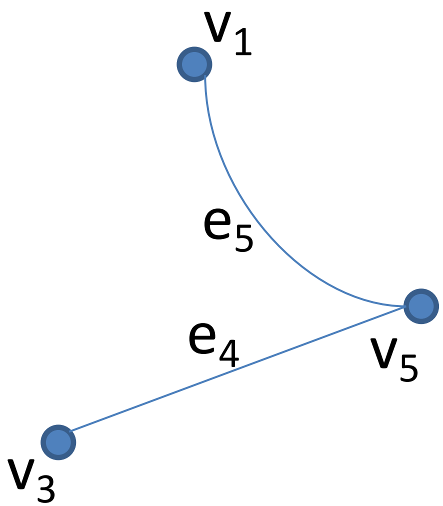
- H是G的子图 (subgraph)
- H是G的生成子图 (spanning subgraph)
- **H是G的V’-点导出子图 (induced subgraph)**
  - $\forall v_i, v_j \in V' = V(H), ((v_i, v_j) \in E(G) \rightarrow (v_i, v_j) \in E(H))$，记作H=G[V’]
- H是G的E’-边导出子图 (edge-induced subgraph)

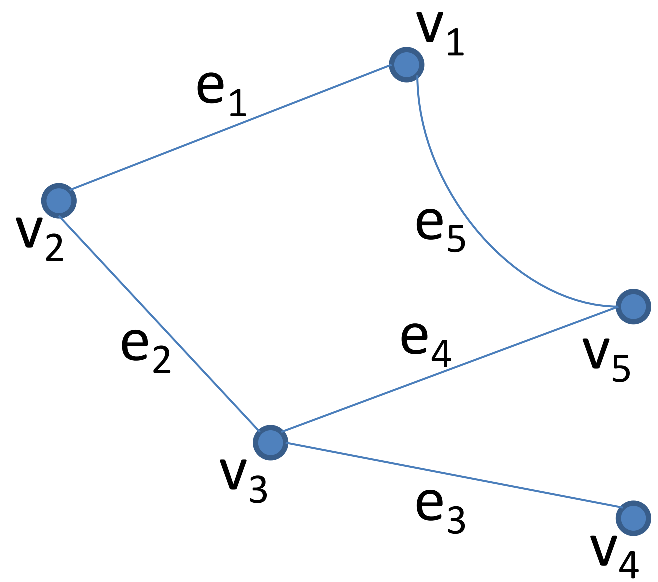




图的关系1：父子

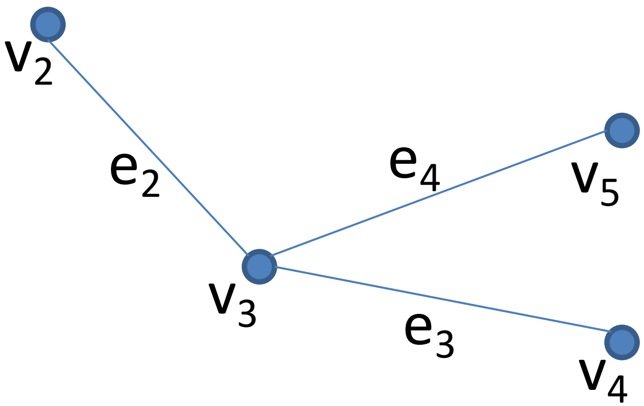
- H是G的子图 (subgraph)
- H是G的生成子图 (spanning subgraph)
- H是G的V’-点导出子图 (induced subgraph)
- **H是G的E’-边导出子图 (edge-induced subgraph)**
  - $V(H)=\bigcup_{e\in E'=E(H)} e$ ，记作H=G[E’]

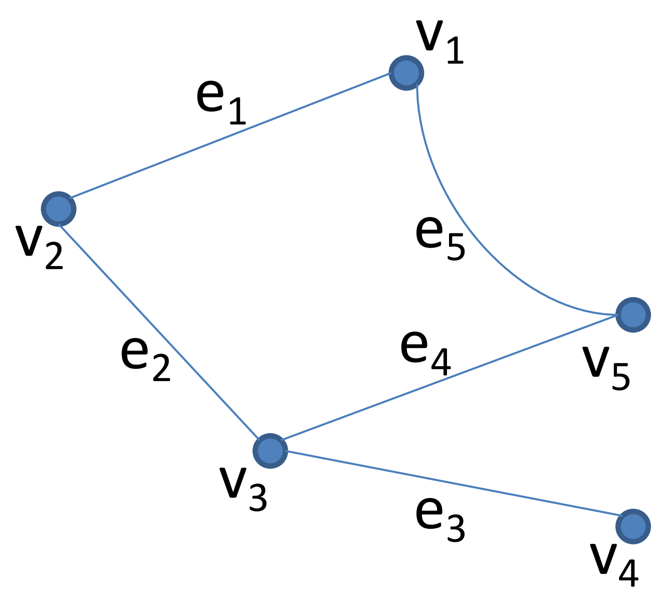




图的关系1：父子(续)

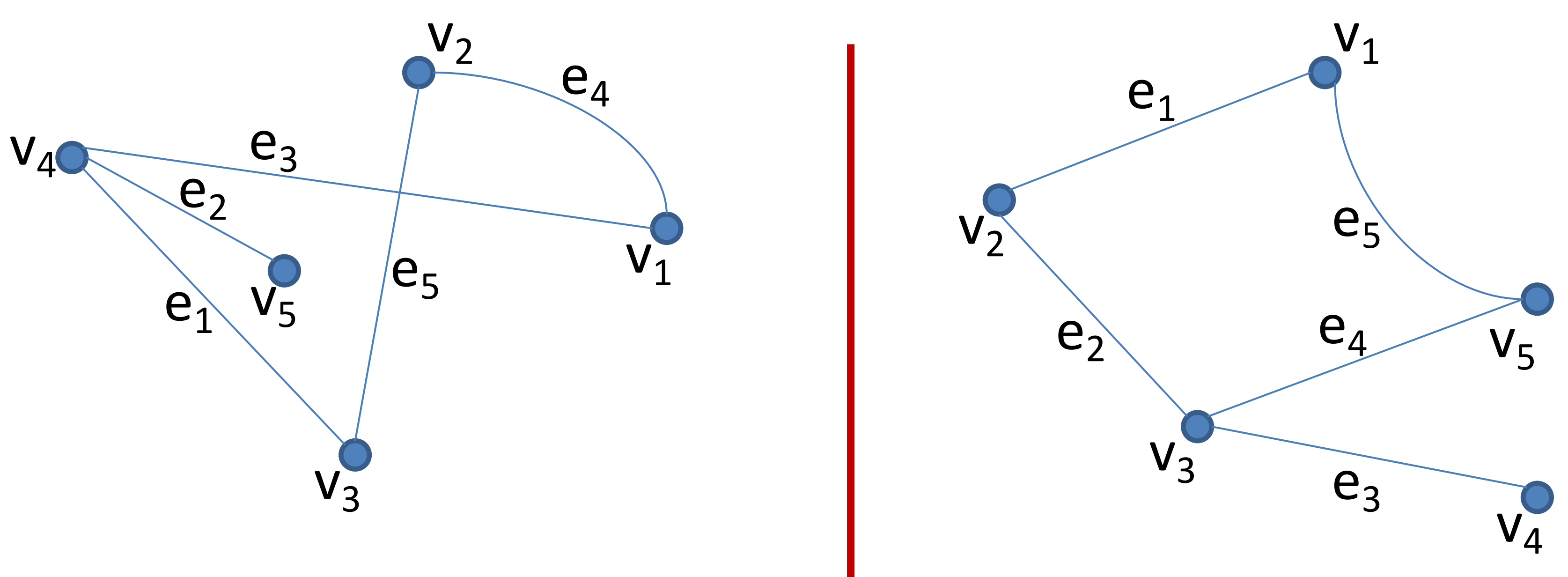
- 一些记法
  - G-V'：G[V(G)\V']
  - G-v：G-{v}
  - G-E'：<V(G), E(G)\E'>
  - G-e：G-{e}





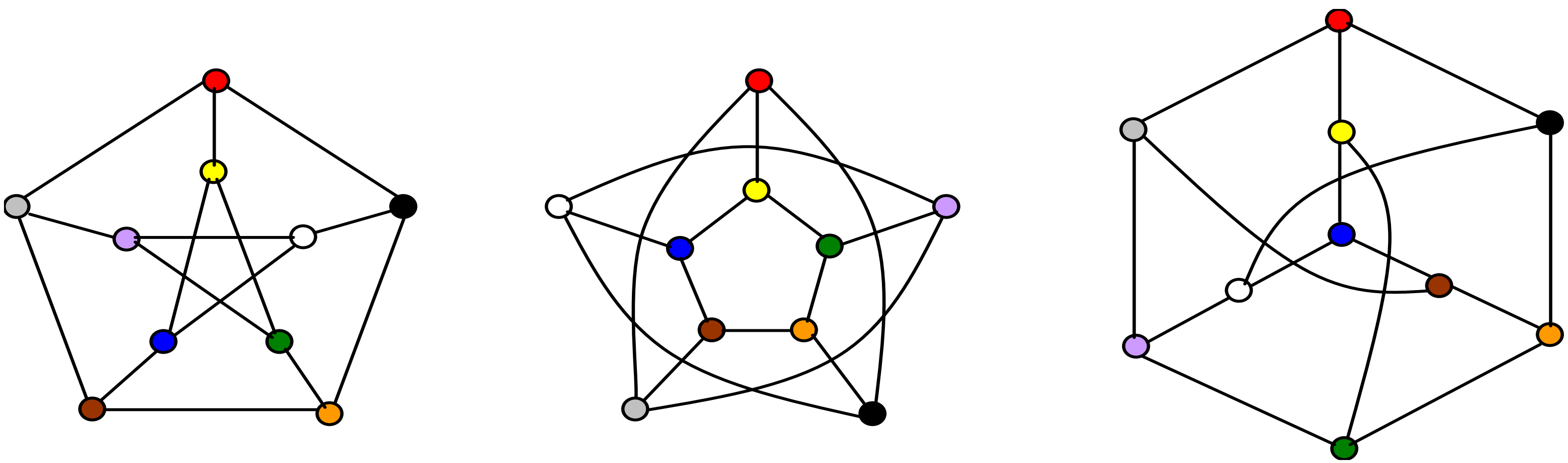
图的关系2：同构

- G和H同构 (isomorphism)　　你能用数学语言来描述“长得一样”吗？
  - 存在双射α: V(G)→V(H)
  - (u, v)∈E(G) iff. (α(u), α(v))∈E(H)
- 记作 $G \cong H$
- 图的同构关系是等价关系吗？（自反、对称、传递）



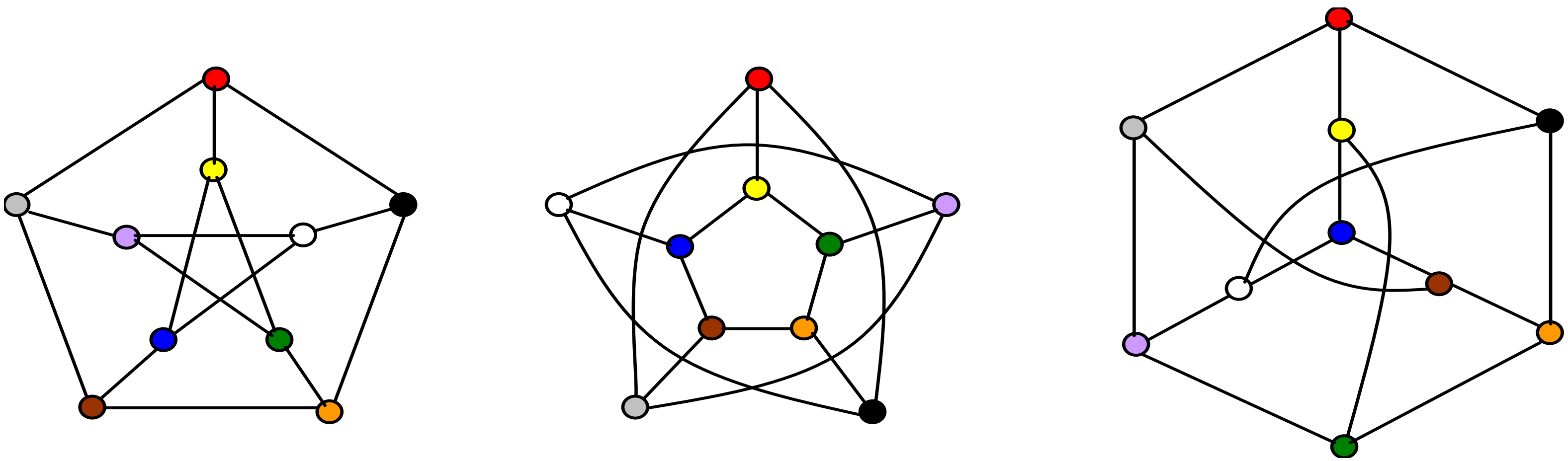
图的关系2：同构(续)

- 你是如何判定图是否同构的？



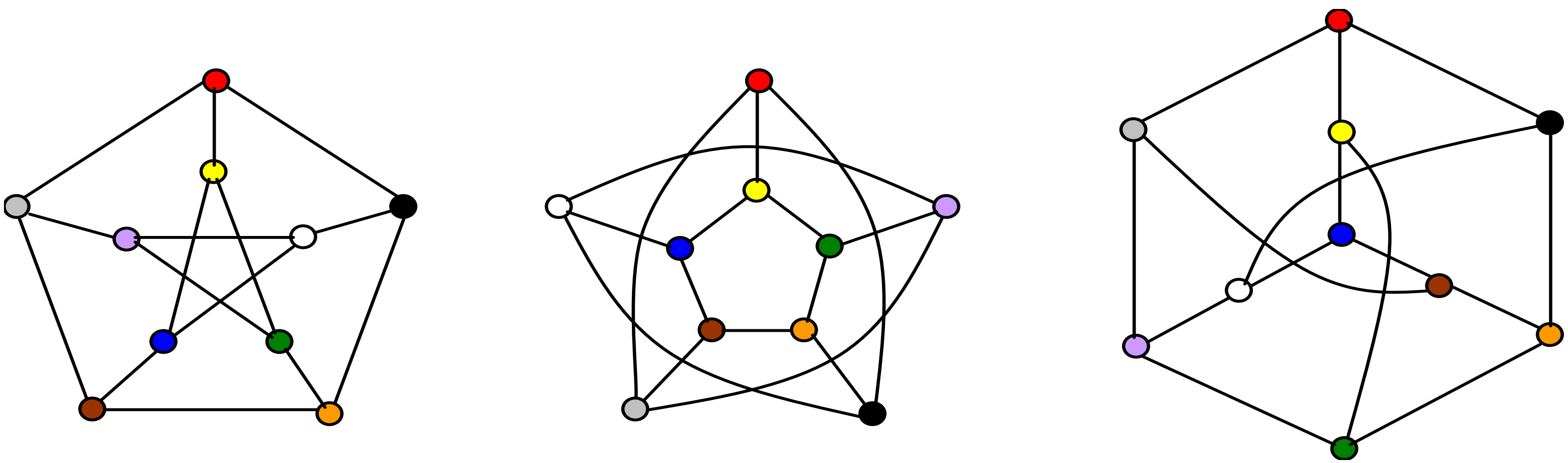
图片来自陈道蓄老师

- 尝试写出10种方法来断定两个图不同构



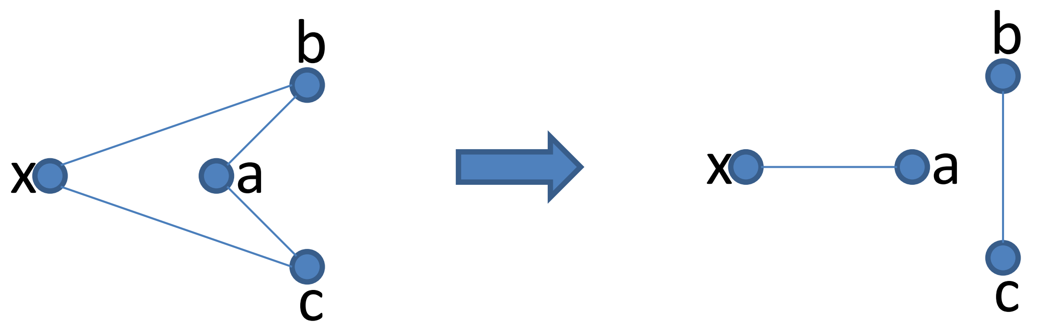
图的关系2：同构 (续)

- 你是如何判定图是否同构的？
- 属于NP，但属于P还是NPC？不知道
- 但2015年起有进展（“似乎”有quasi-polynomial time算法）



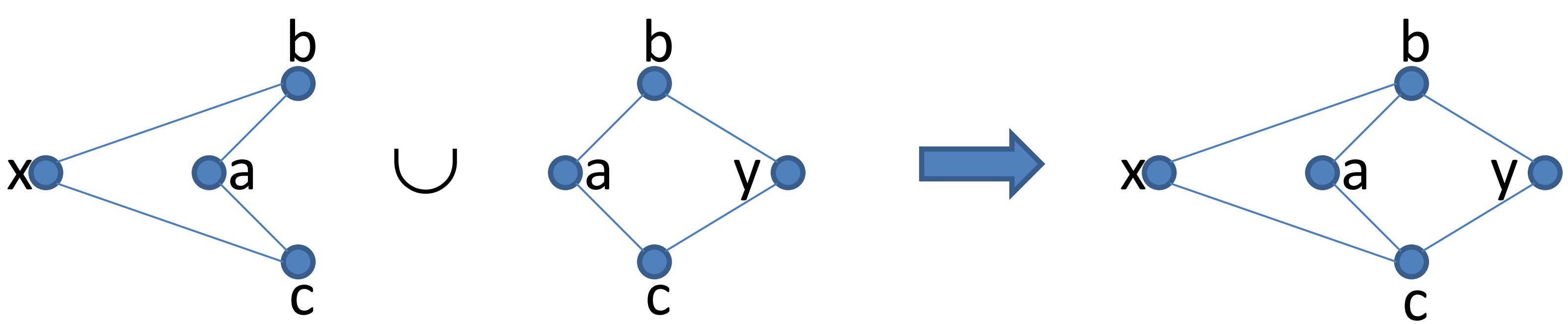
图的运算

- **G的补图 (complement)**
  - $\overline{G} = \langle V(G), \{(x, y) \notin E(G)\}\rangle$
- G和H的并 (union)
- G和H的不交并/和 (addition)
- G和H的联/连接 (join)
- G和H的对称差 (symmetric difference)



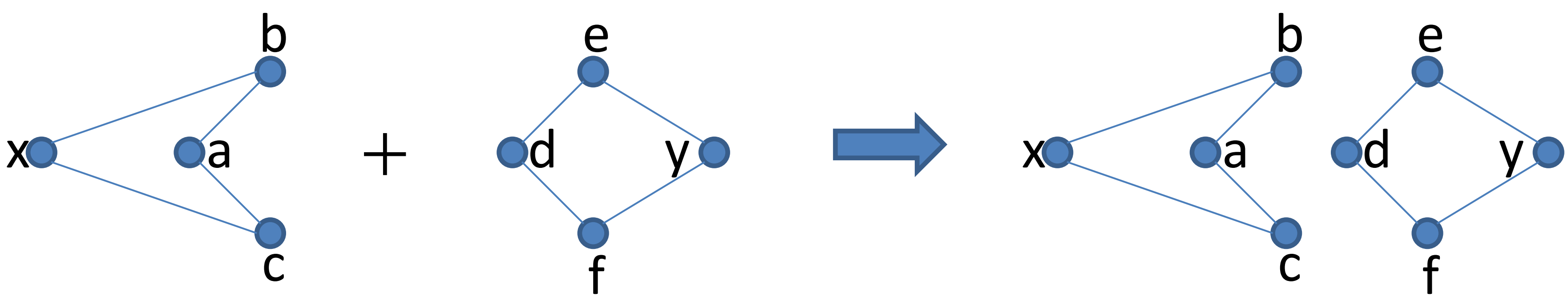
图的运算

- G的补图 (complement)
- **G和H的并 (union)**
  - $G \cup H = \langle V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H) \rangle$
- G和H的不交并/和 (addition)
- G和H的联/连接 (join)
- G和H的对称差 (symmetric difference)



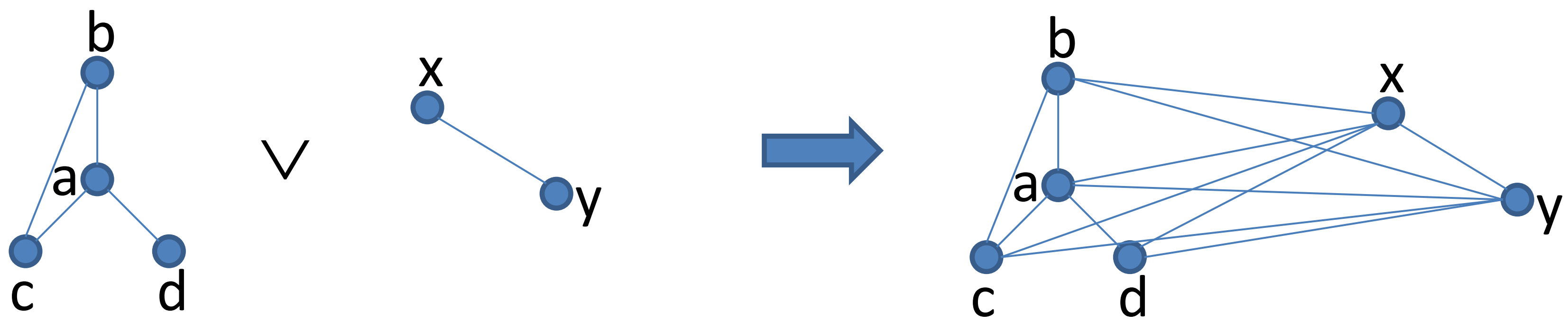
图的运算

- G的补图 (complement)
- G和H的并 (union)
- **G和H的不交并/和 (addition)** 仅当$V(G)\cap V(H)=\varnothing$
  - $G+H=\langle V(G)\cup V(H), E(G)\cup E(H)\rangle$
- G和H的联/连接 (join)
- G和H的对称差 (symmetric difference)



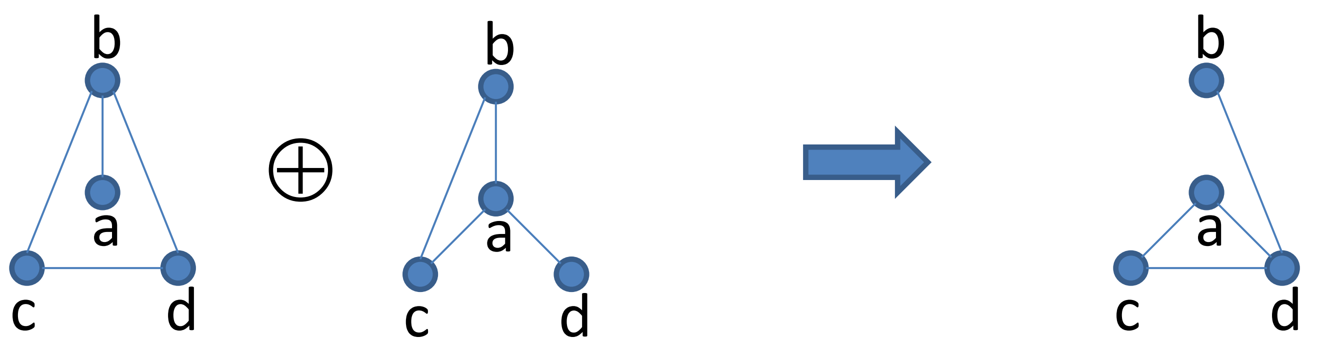
图的运算

- G的补图 (complement)
- G和H的并 (union)
- G和H的不交并/和 (addition)
- **G和H的联/连接 (join)** 仅当$V(G)\cap V(H)=\varnothing$
  - $G\vee H=\langle V(G)\cup V(H), E(G)\cup E(H)\cup\{(x,y)\mid x\in V(G)\wedge y\in V(H)\}\rangle$
- G和H的对称差 (symmetric difference)



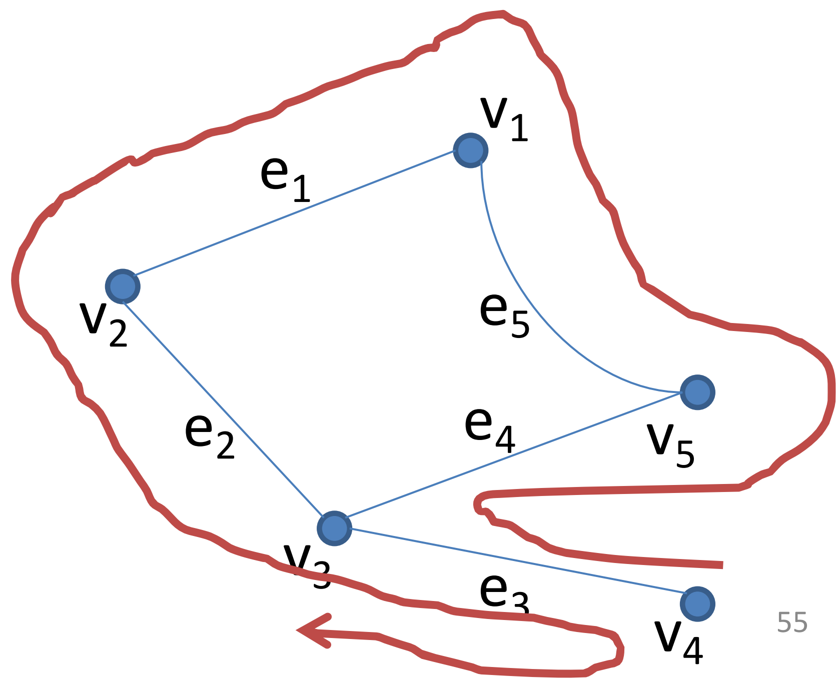
图的运算

- G的补图 (complement)
- G和H的并 (union)
- G和H的不交并/和 (addition)
- G和H的联/连接 (join)
- **G和H的对称差 (symmetric difference)** 仅当$V(G)=V(H)=V$
  - $G\oplus H=\langle V,(E(G)\cup E(H))\setminus(E(G)\cap E(H))\rangle$



途径、迹、路、圈

途径 (walk)
- 顶点和边交替出现的序列$v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$
- $e_i=(v_{i-1}, v_i)$
- v_0和v_k分别称作起点和终点



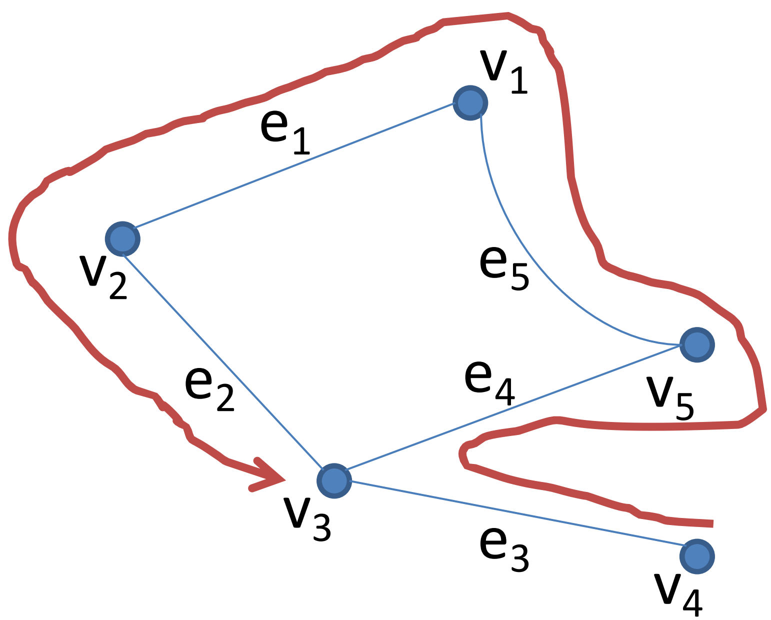
途径、迹、路、圈

途径 (walk)

- 顶点和边交替出现的序列v_0, e_1, v_1, …, e_k, v_k
- $e_i=(v_{i-1}, v_i)$
- v_0和v_k分别称作起点和终点

边不重复出现

迹 (trail)



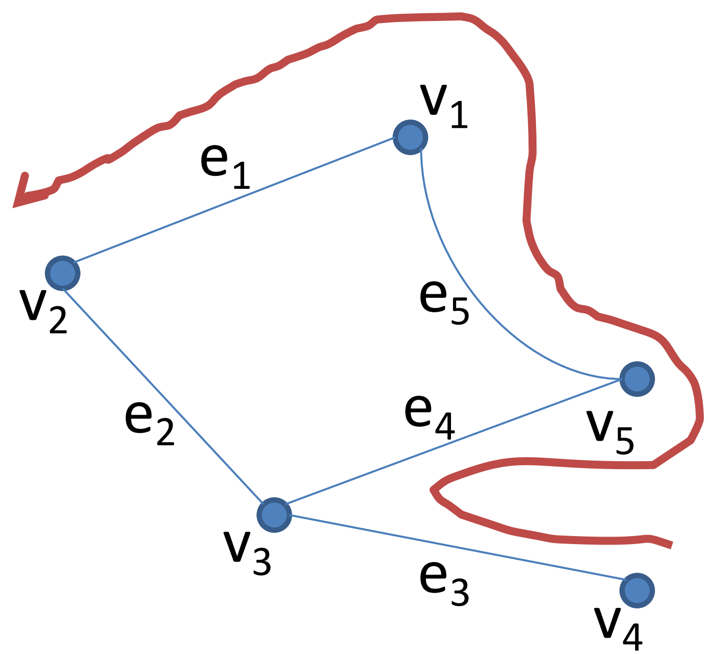
途径、迹、路、圈

途径 (walk)
- 顶点和边交替出现的序列$v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k$
- $e_i=(v_{i-1}, v_i)$
- v_0和v_k分别称作起点和终点

边不重复出现 → **迹 (trail)**

顶点不重复出现 → **路 (path)**

简单图中，路的记法中可以省略边



途径、迹、路、圈

途径 (walk)
- 顶点和边交替出现的序列$v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$
- $e_i=(v_{i-1}, v_i)$
- v_0和v_k分别称作起点和终点

起点和终点相同（至少含2个点）

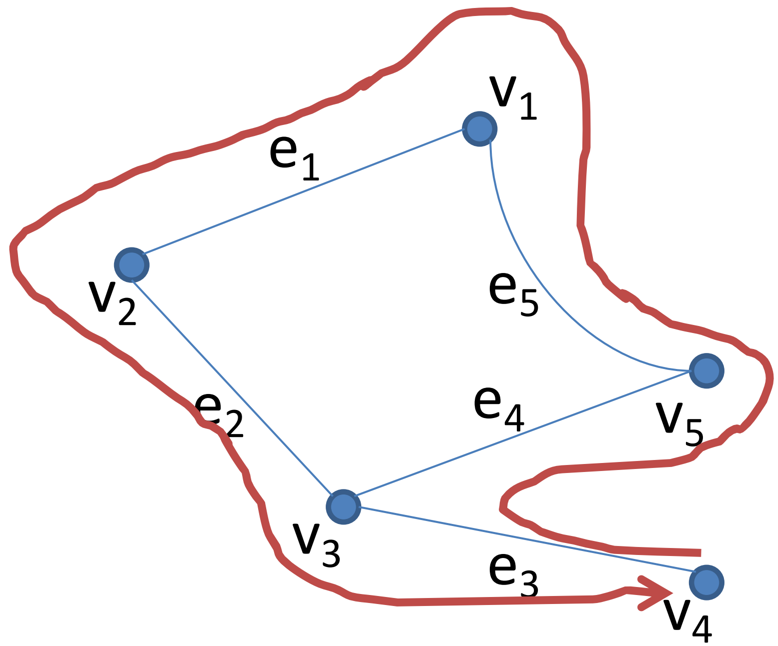
闭途径 (closed walk)

边不重复出现

迹 (trail)

顶点不重复出现

路 (path)



途径、迹、路、圈

途径 (walk)
- 顶点和边交替出现的序列$v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$
- $e_i=(v_{i-1}, v_i)$
- v_0和v_k分别称作起点和终点

起点和终点相同（至少含2个点）

闭途径 (closed walk)

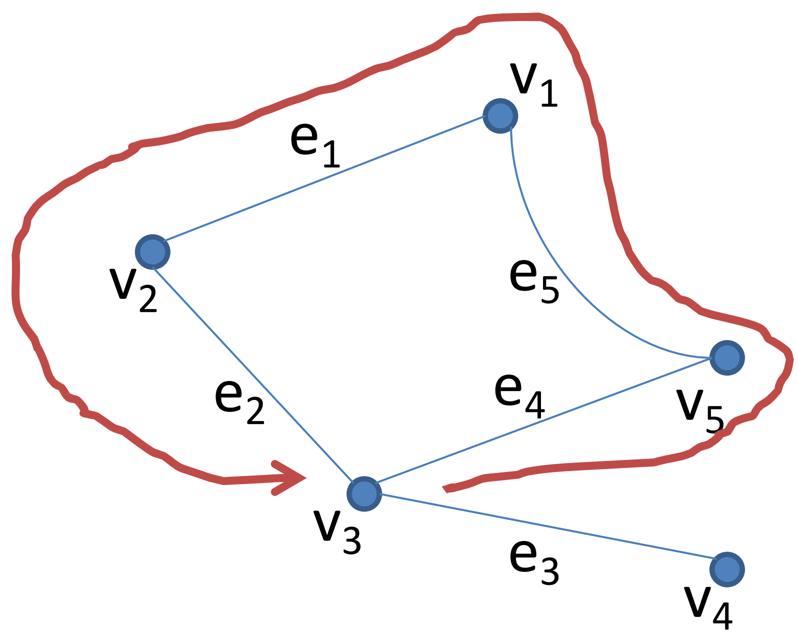
边不重复出现

迹 (trail)

闭迹 (closed trail)

顶点不重复出现

路 (path)



途径、迹、路、圈

途径 (walk)

- 顶点和边交替出现的序列$v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$
- $e_i=(v_{i-1}, v_i)$
- v_0和v_k分别称作起点和终点

起点和终点相同（至少含2个点）

闭途径 (closed walk)

边不重复出现

迹 (trail)

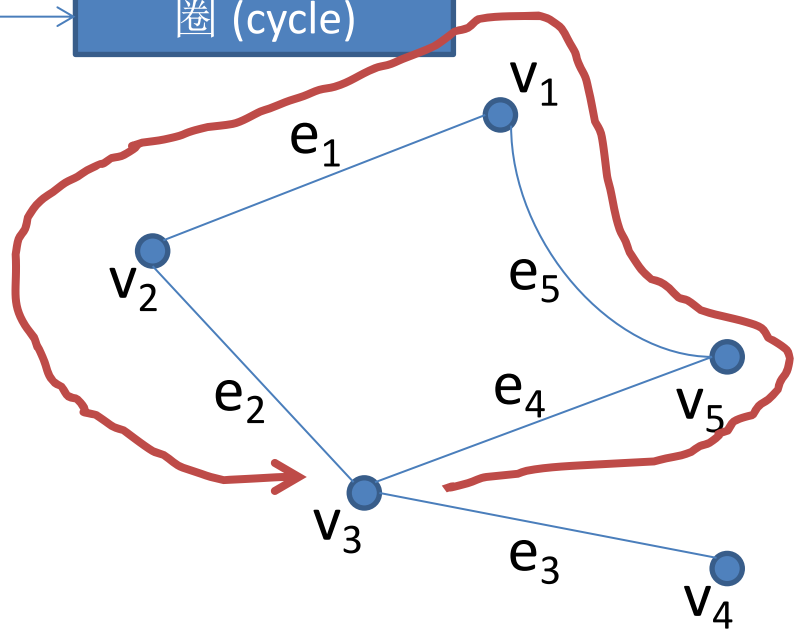
闭迹 (closed trail)

顶点不重复出现

路 (path)

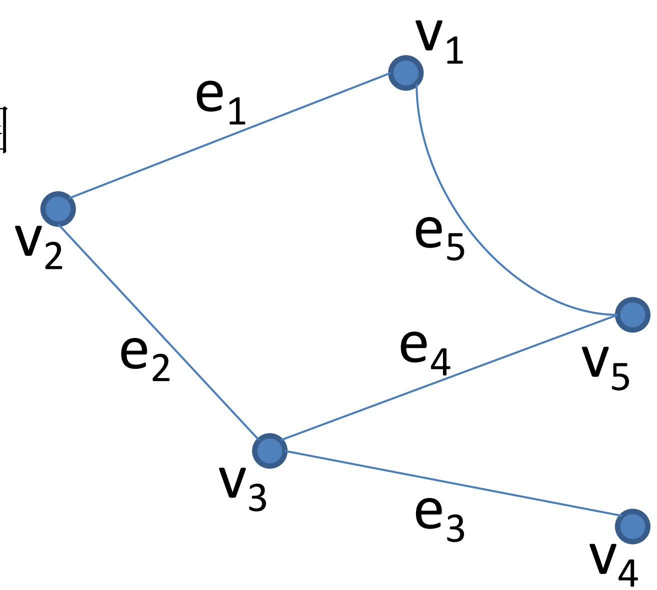
（起点和终点除外）

圈 (cycle)



长度

- 途径的长度 (length)
  - 边的数量
- 最短路的长度
  - u到v的最短路 (shortest path)：u到v的长度最小的路
  - 距离 (distance)：最短路的长度，记作d(u, v)
- 圈的长度
  - 奇圈 (odd cycle)：长度为奇数的圈
  - 偶圈 (even cycle)：长度为偶数的圈

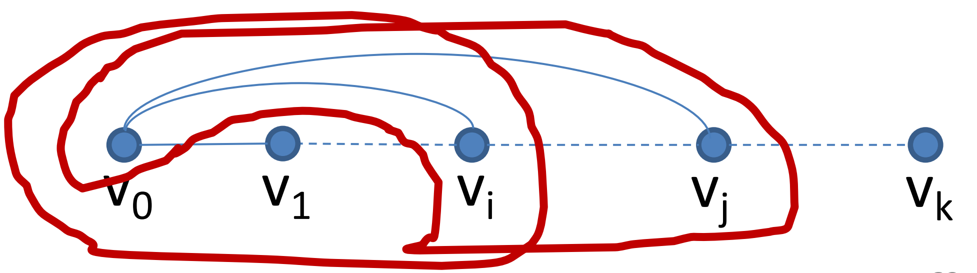


例1.1.3

- 设G是简单图，若$\delta(G)\geq 3$，则G必有偶圈。

证明：极值证明法（取一种极值情况，营造出一个条件）

1. G有最长路，记作$P=v_0, \ldots, v_k$
2. v_0在P上有两个不同于v_1的相邻顶点v_i和v_j
   - i或j是奇数，存在偶圈
   - i和j是偶数，存在偶圈

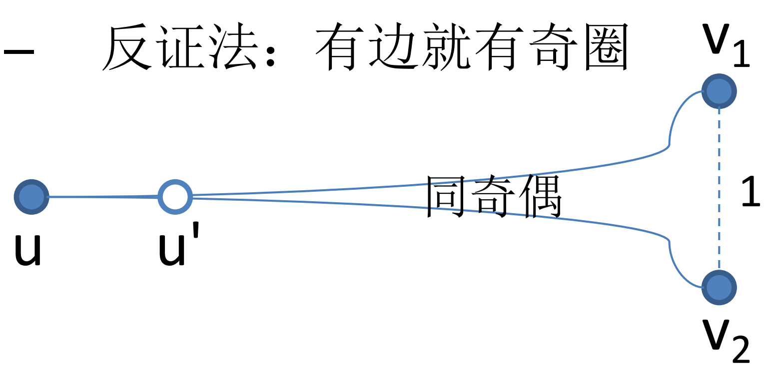


定理1.1.2

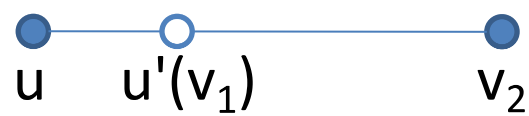
- 一个v≥2的图是二部图当且仅当它不含奇圈。

证明：

1. 必要性：你能自己证明吗？
   - 每次走回起点，都要经过偶数条边
2. 充分性：
   - 目标：将所有顶点分为X和Y两部分，证明X和Y的内部不可能有边
   - 任取顶点u，定义：X={与u距离为奇数的顶点}，Y={与u距离为偶数的顶点}
   - 反证法：有边就有奇圈



思考：u’ 恰是v_1或v_2怎么办？

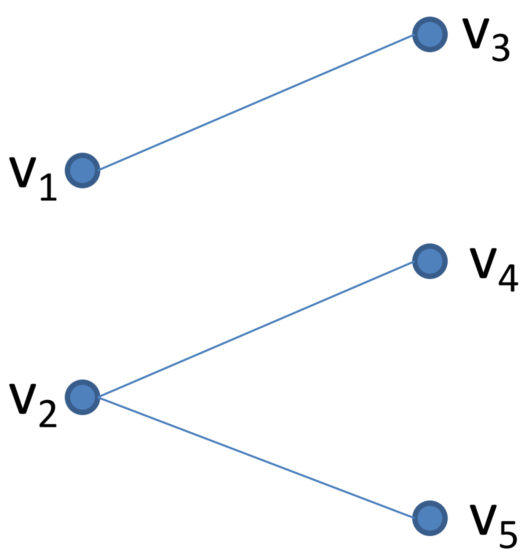


思考：u无路可达的顶点怎么办？

连通

- 连通 (connected)
  - 两顶点间有路
- 连通图 (connected graph)
  - 每对顶点都连通
- 连通分支 (connected component)
  - 极大连通子图

- G的连通分支数记作w(G)

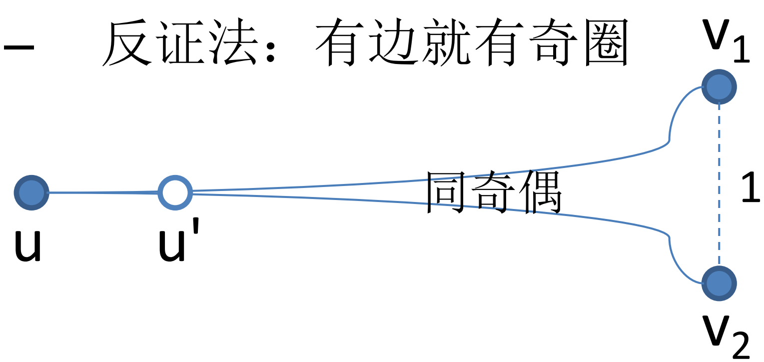


定理1.1.2 (续)

- 一个$v≥2$的图是二部图当且仅当它不含奇圈。

证明：

1. 必要性：
   - 每次走回起点，都要经过偶数条边
2. 充分性：
   - 提示：将所有顶点分为X和Y两部分，证明X和Y的内部不可能有边
   - 任取顶点u，定义：X={与u距离为奇数的顶点}，Y={与u距离为偶数的顶点}
   - 反证法：有边就有奇圈



思考：u′ 恰是v_1或v_2怎么办？

思考：u无路可达的顶点怎么办？

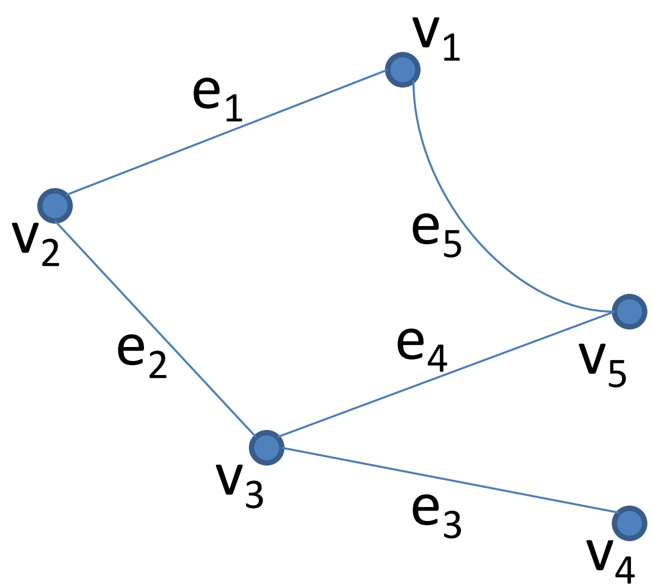
证明每个连通分支都是二部图

连通图的性质

- 若图G连通，则$\varepsilon(G) \geq \nu(G)-1$。

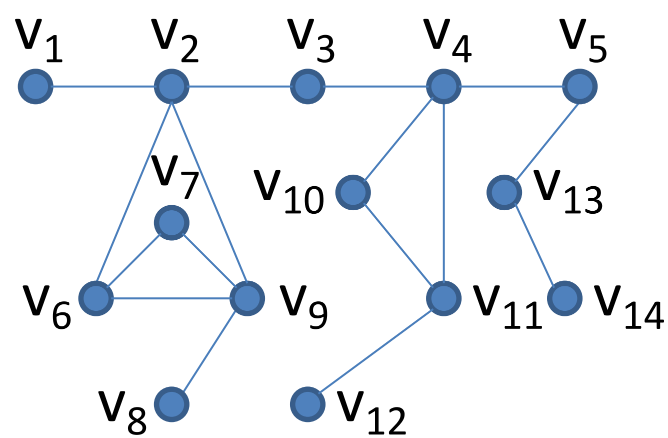
证明：你能用一句话证明吗？

1. 从空图开始，每添加一条边，w最多减少1



连通图的中心和中位点

- 离心率 (eccentricity)
  - $e(v) = \max_{u \in V(G)} d(v,u)$
- 中心 (center)
  - $\arg\min_{v \in V(G)} e(v)$
- 半径 (radius)
  - $rad(G) = \min_{v \in V(G)} e(v)$
- 直径 (diameter)
  - $diam(G) = \max_{v \in V(G)} e(v)$



作业

- 1.4 //度
- 1.35 (同构要写出双射，不同构要说明原因) //同构
- 1.23 //长度
- 1.31 //连通
- 1.63 //离心率