

离散数学作业 19-偏序关系

Problem 1. 下面哪些是偏序集?

- (a) $(\mathbb{Z}, =)$ (b) (\mathbb{Z}, \neq) (c) (\mathbb{Z}, \geq) (d) (\mathbb{Z}, \dagger)

Problem 2. 在下面的偏序集中, 找出两个不可比元素

- a) $(2^{\{0,1,2\}}, \subset)$ (b) $(\{1, 2, 4, 6, 8\}, |)$

Problem 3. 集合 S 的幂集上的偏序 $\{(A, B) \mid A \subseteq B\}$ 的覆盖关系是什么? 其中 $S = \{a, b, c\}$.

Problem 4. 证明: 一个有穷偏序集可以从它的覆盖关系重新构造出来. [提示: 证明偏序集是它的覆盖关系的自反传递闭包.]

Problem 5. 对偏序集

$$(\{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}, \subseteq),$$

回答下述问题.

- a) 求极大元素.
- b) 求极小元素.
- c) 存在最大元素吗? 如果存在请求出.
- d) 存在最小元素吗? 如果存在请求出.
- e) 求 $\{\{2\}, \{4\}\}$ 的所有上界.
- f) 如果存在的话, 求 $\{\{2\}, \{4\}\}$ 的最小上界.
- g) 求 $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ 的所有下界.
- h) 如果存在的话, 求 $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ 的最大下界.

Problem 6. 证明: 一个有穷非空偏序集有一个极大元素.

Problem 7. 给定集合 $S = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$, 定义关系

$$xRy \Leftrightarrow \frac{y}{x} = 2^k,$$

其中 $k \geq 0$ 是某一个整数.

Problem 8. 已知 A 是由 54 的所有因子组成的集合, 设 $|$ 为 A 上的整除关系,

(1) 画出偏序集 $(A, |)$ 的哈斯图.

(2) 确定 A 中最长链的长度, 并按字典序写出 A 中所有最长的链.

(3) A 中元素至少可以划分成多少个互不相交的反链, 并完整写出这些反链

Problem 9. 若 (A, \leq) 是一个偏序集, 证明存在函数 $f: A \rightarrow 2^A$ (A 的幂集), 从而使得

$$f(a) \subset f(b) \Leftrightarrow a \leq b.$$

Problem 10. 证明: 长度为 $mn + 1$ 的偏序集存在大小为 $m + 1$ 的链或存在大小为 $n + 1$ 的反链.