考试科目名称 离 散 数 学 （A 卷）

2016—2017 学年第 二 学期　　教师________考试方式： 闭 卷

系（专业） 计算机科学与技术系　　年级__________　　班级__________

参考答案

得分	

一、（本题满分 10 分）

请以命题逻辑知识来解决以下谜题：

今有君子、小人和凡人各一。君子所言均真；小人所言均假；凡人所言有真有假。三人之中，A 说：“C 是小人”；B 说：“A 是君子”；C 说：“我是凡人”。问：谁是君子，谁是小人？为什么？

解：【观察，并进行逻辑推理】令命题p为“A 是君子”；q为“B 是君子”；r为“C 是君子”：

[1]. 据题意有：$r \to \neg r$ [C 说：“我是凡人”]，由于$r \to \neg r \vdash \neg r$，即 C 非君子。

[2]. 据题意有：$\neg(p \wedge q)$ [君子唯一]，$p \vdash \neg q$ [B 说：“A 是君子”]，

由于$\neg(p \wedge q), q \to p \vdash \neg q$，即 B 非君子。

[3]. 据题意有：$p \vee q \vee r$ [君子存在]，由于$(p \vee q \vee r) \wedge \neg q \wedge \neg r \vdash p$，即 A 乃君子。于是据 A 所说，C 是小人。

【笨办法】令命题 p 为“A 是君子”；q 为“A 是小人”；r 为“B 是君子”；s 为“B 是小人”；由于君子、小人和凡人各一，“C 是君子”应为$\neg p \wedge \neg r$；“C 是小人”应为$\neg q \wedge \neg s$；由于君子小人互斥，君子只有一个，小人也只有一个，有

$$\neg(p \wedge q),\quad \neg(r \wedge s),\quad \neg(p \wedge r),\quad \neg(q \wedge s),\quad \neg\big((\neg p \wedge \neg r) \wedge (\neg q \wedge \neg s)\big)$$

考虑三人所说，必有

$$p \to \neg q \wedge \neg s,\quad q \to \neg(\neg q \wedge \neg s)$$

$$r \to p,\quad s \to \neg q$$

$$\neg p \wedge \neg r \to \neg(\neg p \wedge \neg r) \wedge \neg(\neg q \wedge \neg s)$$

考察p, q, r, s的十六种指派（使用逻辑推理亦可），使得以上各式均为真的只有

$$p = T; q = F; r = F; s = F$$

即 A 是君子，C 是小人。

得分	

二、（本题满分 8 分）

试证明：若p为一个素数，则$\sqrt{p}$必为无理数.

证明： 使用反证法。若$\sqrt{\boldsymbol{p}}$为有理数，则有互素的正整数$\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$使得$\sqrt{\boldsymbol{p}}=\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}$；

于是$\boldsymbol{p}=\frac{\boldsymbol{m}^2}{\boldsymbol{n}^2}$；于是有$\boldsymbol{pn}^2=\boldsymbol{m}^2$；于是$\boldsymbol{p}|\boldsymbol{m}^2$。由于$\boldsymbol{p}$是素数，必有$\boldsymbol{p}|\boldsymbol{m}$；

从而存在正整数$\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{pk}$。于是$\boldsymbol{n}^2=\boldsymbol{k}^2\boldsymbol{p}$；于是有$\boldsymbol{p}|\boldsymbol{n}$；这与$\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$矛盾。

证毕。

得分	

三、（本题满分 8 分）

某次考试由一些四选一的选择题构成. 学生要么真会，要么随机勾选. 假设某学生有 60% 的题是真会. 若该生第一题答案正确，则该生这题真会的概率是多少?

解： 记事件$\boldsymbol{E}$为该生真会此题，$\mathrm{P}(\boldsymbol{E})=\mathbf{0.6}$；$\boldsymbol{F}$为该生答对此题；所求为$\mathrm{P}(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{F})$.

$\mathrm{P}(\boldsymbol{F}|\boldsymbol{E})=\mathbf{1}$，$\mathrm{P}(\boldsymbol{F}|\overline{\boldsymbol{E}})=\mathbf{0.25}$，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{F})\\
&=\frac{\mathrm{P}(\boldsymbol{E}\cap\boldsymbol{F})}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{F})}\\
&=\frac{\mathrm{P}(\boldsymbol{F}|\boldsymbol{E})\mathrm{P}(\boldsymbol{E})}{\mathrm{P}(\boldsymbol{F}|\boldsymbol{E})\mathrm{P}(\boldsymbol{E})+\mathrm{P}(\boldsymbol{F}|\overline{\boldsymbol{E}})\mathrm{P}(\overline{\boldsymbol{E}})}\\
&=\frac{\mathbf{1}\times\mathbf{0.6}}{\mathbf{1}\times\mathbf{0.6}+\mathbf{0.25}\times\mathbf{0.4}}\\
&=\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{7}}
\end{aligned}
$$

得分	

四、（本题满分 10 分）

35阶循环群C_{35}有几个子群？为什么？

解：有 4 个子群。

首先，记C_{35}生成元为a，则$\langle a^5\rangle,\langle a^7\rangle$，分别为其 7 阶子群和 5 阶子群；再加上平凡群和C_{35}本身，共 4 个子群；下面说明无其他子群。

根据 Lagrange 定理，C_{35} 的子群的阶必为 35 的因子，故除了平凡群和C_{35}自身，只能有 7 阶子群和 5 阶子群；而素数阶群必为循环群；设某 7 阶子群的生成元为 a^k，则 $a^{7k}=e$；于是 $35|7k$；于是 k 为 $5,10,15,20,25,30$之一；于是 $\langle a^k\rangle=\langle a^5\rangle$；同理可知 5 阶子群必为$\langle a^7\rangle$。

得分	

五、（本题满分 10 分）

今为$1,2,\cdots,n$这n个数的每个排列$a_1\, a_2 \cdots a_n$定义一个逆序表$b_1\, b_2 \cdots b_n$，其中b_j为在排列中数字j的左边比j大的数的个数. 例如：对于排列

5 9 1 8 2 6 4 7 3

其逆序表为

2 3 6 4 0 2 2 1 0

上述逆序表中第 3 个数为 6 表示原排列中数“3”左边有 6 个数比它大.

(1) 请给出排列 1 3 5 7 9 8 6 4 2 的逆序表;

(2) 若将一个排列映射为一个逆序表，试证明该映射为单射.

(1) 解：该排列的逆序表为 0 7 0 5 0 3 0 1 0

(2) 证明： 记这个映射为$\boldsymbol{f}$，设$\boldsymbol{f(a_1\, a_2 \cdots a_n) = b_1\, b_2 \cdots b_n = f(a'_1 a'_2 \cdots a'_n)}$，今证$\boldsymbol{a_1\, a_2 \cdots a_n = a'_1\, a'_2 \cdots a'_n}$。

记$\boldsymbol{H_k}(a_1\, a_2 \cdots a_n)$为$a_1\, a_2 \cdots a_n$中删除$\boldsymbol{1,2,\cdots,n-k}$，而得到的数列（它是$\boldsymbol{n-k+1, n-k+2,\cdots,n}$这$\boldsymbol{k}$个数的某个排列）。令命题$\boldsymbol{P_k}$为

$$\boldsymbol{H_k(a_1\, a_2 \cdots a_n) = H_k(a'_1\, a'_2 \cdots a'_n)},\quad \boldsymbol{1 \le k \le n},$$

当$\boldsymbol{k=1}$时，$\boldsymbol{H_k = [n]}$，唯一确定。(其实$\boldsymbol{b_n}$一定是$\boldsymbol{0}$)；

现证明$\boldsymbol{P_k \Rightarrow P_{k+1}}$ $\boldsymbol{(1 \le k \le n-1)}$.

注意到对于数$\boldsymbol{n-k, 1, 2, \cdots, n-k-1}$这些较小数不会影响$\boldsymbol{b_{n-k}}$，而其他较大的数都在$\boldsymbol{H_k(a_1\, a_2 \cdots a_n)}$中，于是$\boldsymbol{H_{k+1}(a_1\, a_2 \cdots a_n)}$必为将$\boldsymbol{n-k}$插入$\boldsymbol{H_k(a_1\, a_2 \cdots a_n)}$中的前$\boldsymbol{b_{n-k}}$个数之后而得的数列。故$\boldsymbol{H_{k+1}(a_1\, a_2 \cdots a_n) = H_{k+1}(a'_1 a'_2 \cdots a'_n)}$。

于是$\boldsymbol{a_1\, a_2 \cdots a_n = H_n(a_1\, a_2 \cdots a_n) = H_n(a'_1, a'_2 \cdots a'_n) = a'_1, a'_2 \cdots a'_n}$，可知$\boldsymbol{f}$为单射。

证毕。

得分	

六、（本题满分 12 分）

考虑有限集合S上的偏序关系R所对应的哈斯图G.（注：哈斯图中略去了由自反和传递关系引出的边，每条边都是方向朝上的有向边.）

(1) 试证明：G中不存在长度大于 1 的有向回路;

(2) 试证明：若(S,R)构成一个格，则G中存在一个顶点u，使得对于任意一个其它顶点x，都有一条从u到x的有向通路；亦存在一个顶点v，使得对于任意一个其它顶点x，都有一条从x到v的有向通路;

(3) 考虑上述命题的逆命题成立与否。即若存在这样的u和v，(S,R)是否一定构成格？若是，给出证明；若否，给出一个反例.

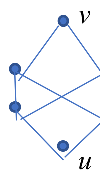
(1) 证明： **若有这样的回路，可记此回路为$v_0\, v_1 \cdots v_n v_0$，$n \geq 1, v_n \neq v_0$。**

在关系中有 $v_0 R\, v_1, \cdots, v_{n-1} R v_n, v_n R v_0$。 根据偏序关系的传递性，有$v_0 R v_n, v_n R v_0$，与偏序的反对称性矛盾。

证毕。

(2) 证明： **由于(S,R)是一个有限格，它必有全下界u，由于对于任意一个其它元素x，都有$u \preccurlyeq_R x$，即在哈斯图中，都有一条从u到x的有向通路；同理，它必有全上界v，对于任意一个其它顶点x，都有一条从x到v的有向通路。证毕。**

(3) 解： **上述命题的逆命题不成立。下图即是一个反例：**



得分	

七、（本题满分 10 分）

今有二人，于一图G上玩下列游戏：二人交替选择该图的顶点，要求除了第一步选择，每一步选择的顶点都与对手刚刚选择的顶点相邻. 最后还能做出合法选择的玩家获胜.

试证明：当且仅当G中没有完美匹配时，先走的选手有必胜策略.

证明： 必要性：

反证法，假设G中存在完美匹配M，无论先走选手采用什么策略，后走选手均可依据M应对而获胜：当先走选手选择顶点v_{2i}时，后走选手选择v_{2i+1}使得M中有一条边连接v_{2i}和v_{2i+1}, $i \geq 0$ 。由于M是完美的，这样的v_{2i+1}总可以选到。于是先走选手无必胜策略。

充分性：

若G中没有完美匹配，令M为一最大匹配，先走选手首先选择一不被M饱和的点v_0；由于不存在M的增广路径，而后他的总可以使得G中有边$v_{2i}v_{2i+1}$但该边不在M中，且边$v_{2i+1}v_{2i+2}$在M中。

【注：由M的最大性，后走选手的第一步必选某个被M饱和的点。而后先走选手每次依据M选v_{2i+2}即可】

证毕。

得分	

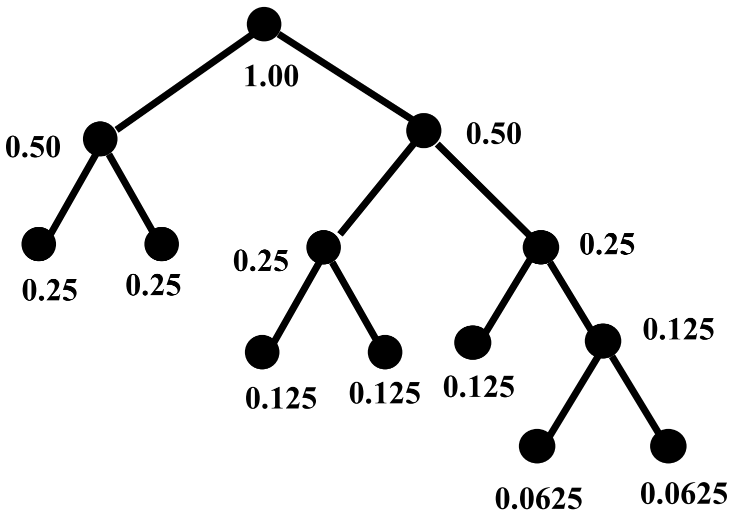
八、（本题满分 10 分）

Huffman 编码：今有报文，系由七种符号构成：

符 号	A	B	C	D	E	F	G
出现概率	0.25	0.25	0.125	0.125	0.125	0.0625	0.0625

试给出 Huffman 编码使得平均码长最短，并给出此编码下的平均码长.

解：按照 Huffman 编码算法，构造最优二叉树，如下图所示。（5 分）



其平均码长：

0.25*2+0.25*2+0.125*3+0.125*3+0.125*3+0.0625*4+0.0625*4=2.625 （5 分）

得分	

九、（本题满分 10 分）

(1) 正整数m,n满足什么条件时，完全二部图$K_{m,n}$是欧拉图？证明你的结论。

(2) 正整数m,n满足什么条件时，完全二部图$K_{m,n}$是哈密尔顿图？证明你的结论。

(1) 解： 正整数m,n都是偶数时，完全二部图$K_{m,n}$是欧拉图。(5 分)

证明要点：连通图是欧拉图的充要条件是：各点度都为偶数。

完全二部图$K_{m,n}$是连通的。

正整数m,n都是偶数时，各点的度都是偶数。

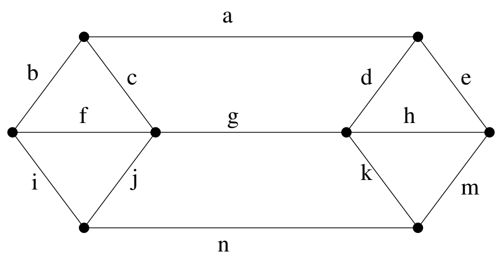
(2) 解： 正整数m,n相等且大于 1 时，完全二部图$K_{m,n}$是哈密尔顿图。(5 分)

证明要点：m,n相等且等 1 时，只有哈密尔顿通路，但没有回路。

得分	

十、（本题满分 12 分）

(1) 下图G有13条边，其各边权重列于下表中.



Edge	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n
Weight	1	1	3	3	6	4	5	6	2	4	2	7	2

试用 Kruskal 算法找出G的一棵最小生成树S. 按算法中的加边顺序给出S的各边.

(2) 令G为一无向带权连通图，假设图中存在一个回路. 试证明：在此回路上若存在一条边e其权值严格大于此回路上的其它各边，则e不在G的任何最小生成树中.

(1) 解：a, b, i, k, n, c, h. （7 分）

(2) 不妨假设该回路 C 是顶点不重复的简单回路，设 e=uv。

以下使用反证法来证明 e 不在任何最小生成树中，假设 T 是包含 e 的最小生成树。

T-{e}必含两个连通分支，设为 T_1, T_2。C-{e} 是图 G 中的 uv-通路，其中必有一边满足其两个端点 x,y 分别在 T_1, T_2 中，设其为 e'。

T’=T-{e}∪{e'}，显然 T’是生成树。

因 e 的权重大于 e' 的权重，T' 的权重比 T 更小，矛盾。

所以，e 不在任何最小生成树中。（5分）