Problem 1

设(V_1, V_2)是二部图 $G=(V, E)$的一个二部划分, $|V_1|=x$，则$|V_2|=V-x$

当 V_1 中每一点与 V_2 中每一点都连接时，边数最大为 $x(V-x)$

当且仅当 $x=V-x=V/2$ 时, $x(V-x)$取得最大值 $V^2/4$，即 $E\leqslant V^2/4$

Problem 2

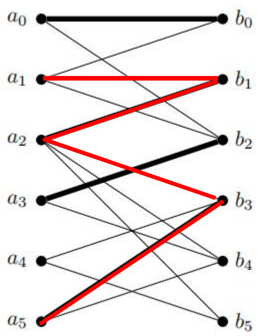
设存在一个无回路的简单连通图 G 不止一个完美匹配，任取其中两个 M_1 和 M_2

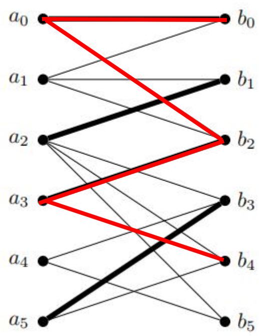
M_1 和 M_2 都是能饱和所有顶点的匹配. 令 $M_3=M_1\cup M_2-M_1\cap M_2$，则 $M_3\neq\varnothing$

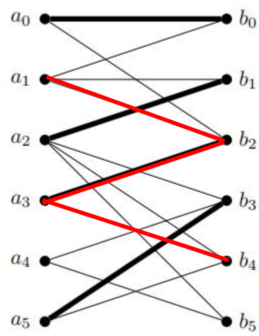
由 M_3 到处 G 的子图，对于子图中任意顶点 v 都有 $\deg(v)\geqslant 2$

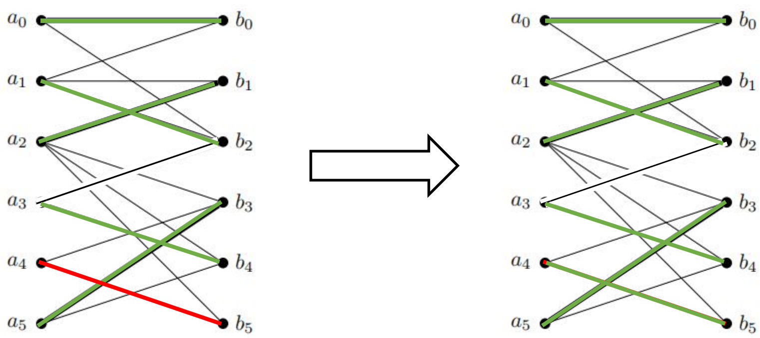
该导出子图中必有回路，则原图 G 中必有回路，矛盾，最多只有一个完美匹配

Problem 3









Problem 4

a) 完全图 K_n 每个端点都与其余 $n-1$ 个邻接

只有当 $n=2$ 时 K_n 才是一个二部图，且此时存在完美匹配

b) 圈图 C_n 中顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$, v_1 与 v_n 邻接，任意 v_i 与 v_{i+1} 邻接$(1\leqslant i\leqslant n-1)$

设 C_n 是二部图, (V_1, V_2)是 $C_n=(V, E)$的一个二部划分, $v_1\in V_1$, $v_n\in V_2$

易见下标为奇数的顶点属于 V_1，下标为偶数的顶点属于 V_2，即 n 为偶数

此时取 $M=\{(v_i, v_{i+1}) \mid i = 1, 3, \cdots, n-1\}$，则 M 是一个完美匹配

c) n 立方体图 Q_n 是用顶点表示 2^n 个长度为 n 的位串的图

顶点可编号为介于 $00\cdots0$(n 个 0)到 $11\cdots1$(n 个 1)之间的 n 个二进制数

图中两个顶点邻接当且仅当它们表示的位串只差一位

令点集 V_1, V_2，位串中 1 个数为偶数的点属于 V_1, 1 个数为奇数的点属于 V_2

则 V_1 中的点互不邻接, V_2 中的点互不邻接, (V_1, V_2)是 Q_n 的一个二部划分
即 Q_n 为二部图, 又 n 立方体中每个顶点的度数均为 n, Q_n 是 n-正则二部图
$n|V_1| = |E| = n|V_2|$, $|V_1|=|V_2|$, 设 S 是 V_1 的一个子集, E_1, E_2 分别表示
S 与 N(S)关联边数, E_1 是 E_2 的子集, $n|N(S)|=|E_2|\geqslant|E_1|=n|S|$, $|N(S)|\geqslant|S|$
则由 Hall's marriage theorem 可得 Q_n 存在完美匹配

综上所述: a) n=2 b) n 是偶数 c) n 为任意正整数

Problem 5
任意有限集合的任意两个 k 划分为 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$和 $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$
将 A, B 中集合表示为顶点, a_i 和 b_j 对应顶点邻接当且仅当 $a_i\cap b_j\neq\varnothing$
对于任意 a_i, B 中存在相邻顶点的个数为 1 当且仅当存在 b_j 使得 $a_i=b_j$
否则相邻顶点的个数大于 1, 假设 a_1 只与 B 中一个顶点相邻, 不妨设 $a_1=b_1$
若 a_2 也只与 B 中一个顶点相邻, 则 $a_2\neq b_1$, 否则 $a_2=a_1$, 不合题意
或者 a_2 与 B 中两个以上顶点相邻, 即 a_1 与 a_2 至少与 B 中 2 个顶点相邻
重复上述步骤可知 A 中任意 n 个顶点至少与 B 中 n 个顶点相邻, $n=1, 2, \cdots, k$
即 A 与 B 形成的二部图是完备匹配, A 中每一个集合在 B 中都有对应的
存在公共元素的集合匹配, 从每个匹配中取出公共元素即得到相同的代表集

Problem 6
对于每一个学生集合 S, 设他们感兴趣的老师集合为 N(S)
令 m 表示 S 和 N(S)之间的边数, S 中每一个顶点的度数至少是 k, 则 $m\geqslant k|S|$,
又 N(S)中每一个顶点的度数至多是 k, $m\leqslant k|N(S)|$, $|N(S)|\geqslant|S|$
老师与学生之间存在完备匹配, 即使得每位学生都选到自己感兴趣的导师的匹配