第七章 参数估计

- 点估计
- 估计量的评选标准
- 区间估计

§1 点估计

一、参数估计的概念

定义 设X_1，…，X_n是总体X的一个样本，其分布函数为$F(x;\theta)$, $\theta\in\Theta$。其中θ为未知参数, Θ为参数空间, 若统计量$g(X_1$，…，$X_n)$可作为θ的一个估计, 则称其为θ的一个估计量，记为 $\hat{\theta}$，

即 $\hat{\theta} = g(X_1,\cdots,X_n)$.

注：$F(x;\theta)$也可用分布律或密度函数代替.

若x_1， …， x_n是样本的一个观测值。

$$\hat{\theta}=g(x_1,\cdots,x_n)$$称为θ的估计值，

由于$g(x_1$， …， $x_n)$ 是实数域上的一个点，现用它来估计θ， 故称这种估计为点估计。

点估计的经典方法是矩估计法与极大似然估计法。

二、矩估计法（简称“矩法”）

（p128）

关键点：**1.**用样本矩作为总体同阶矩的估计，即

$$\hat{E}(X^k)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k.$$

2.约定：若 $\hat{\theta}$ 是未知参数θ的矩估计，则**g(θ)**的矩估计为**g($\hat{\theta}$)**

例1：设X_1， …， X_n为取自总体B(m,p),的样本，其中m已知，0<p<1未知，求p的矩估计。

解: $E(X)=mp$,

$$\therefore \quad p=\frac{1}{m}E(X)$$

而 $$\hat{E}(X)=\overline{X}$$

$$\therefore \quad \hat{p}=\frac{1}{m}\overline{X}$$ 为参数p的矩估计

例2。设总体X的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}$

X_1，…，X_n为样本，求参数σ的矩估计。

解：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=0$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=\frac{1}{\sigma}\int_0^{\infty}x^2e^{-\frac{x}{\sigma}}dx$$

$$=-\int_0^{\infty}x^2de^{-\frac{x}{\sigma}}=\int_0^{\infty}2xe^{-\frac{x}{\sigma}}dx=-2\sigma\int_0^{\infty}xde^{-\frac{x}{\sigma}}$$

$$=2\sigma\int_0^{\infty}e^{-\frac{x}{\sigma}}dx=2\sigma^2$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{E(X^2)}{2}}$$

而

$$E(\hat{X^2}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$\therefore \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2n}}$$

例3. 设$X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} U(a,b), a<b$,试求$\hat{a}_M$和$\hat{b}_M$.

解:
$$E(X)=\frac{a+b}{2} \quad D(X)=\frac{1}{12}(b-a)^2$$

$$\therefore \begin{cases} a=E(X)-\sqrt{3D(X)} \\ b=E(X)+\sqrt{3D(X)} \end{cases}$$

由:
$$\hat{E}(X)=\overline{X} \qquad \hat{D}(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

$$\therefore \begin{cases} \hat{a}=\overline{X}-\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2} \\ \hat{b}=\overline{X}+\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2} \end{cases}$$

example

三、极大似然估计法

1、极大似然思想

有两个射手，一人的命中率为0.9, 另一人的命中率为0.1, 现在他们中的一个向目标射击了一发，结果命中了，估计是谁射击的？

一般说，事件A发生的概率与参数$\theta \in \Theta$有关，θ取值不同，则P(A)也不同。因而应记事件A发生的概率为$P(A|\theta)$.若A发生了，则认为此时的θ值应是在Θ中使$P(A|\theta)$达到最大的那一个。这就是**极大似然思想**

1.设总体X为离散型随机变量，它的分布律为

$$P\{X=a_k\mid\theta\}=P_\theta(a_k)\qquad k=1,2,\ldots$$

现有样本观察值$x_1,x_2,\ldots x_n$,其中x_k取值于$\{a_k,k=1,2\ldots\}$

问：根据极大似然思想，如何用$x_1,x_2,\ldots x_n$估计θ?

记 $A=\{X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n\}$

则 $P(A\mid\theta)=P_\theta\{X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}P_\theta\{x_i\}$

根据极大似然思想,θ值应是在Θ中使P(A|θ) 达到最大的那一个,也就是使 样本联合分布律 $\prod_{i=1}^{n}P_\theta\{x_i\}$ 最大.

2. 设总体X为连续型随机变量，概率密度f(x;θ)

现有样本观察值$x_1, x_2, \ldots x_n,$

问：根据极大似然思想，如何用$x_1, x_2, \ldots x_n$估计θ?

记$\delta(x_1, \ldots, x_n)$为包围点$(x_1, \ldots, x_n)$的小球,

$$A = \{(X_1, \ldots, X_n) \in \delta(x_1, \ldots, x_n)\}$$

则 $$P(A|\theta) = \int_{\delta(x_1, \ldots, x_n)} \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n; \theta) dx_1, \ldots, dx_n$$

$$= \int_{\delta(x_1, \ldots, x_n)} \cdots \int \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) dx_1, \ldots, dx_n$$

根据极大似然思想, θ值应是在Θ中使P(A|θ) 达到最大的那一个,也就是使 样本联合密度最大.

3、似然函数与极大似然估计

设$X_1, \cdots, X_n \overset{iid}{\sim} f(x;\theta), \quad \theta \in \Theta,$ 则称

$$L(\theta) = L(x_1, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$$

为该总体的**似然函数(p131)**。

定义：若有 $\hat{\theta} \in \Theta,$ 使得

$$L(\hat{\theta}) = \max_{\theta\in\Theta} L(\theta) \overset{或}{=} \sup_{\theta\in\Theta} L(\theta),$$

则称 $\hat{\theta}$为θ的**极大似然估计**(p132).记为 $\hat{\theta}_{MLE}$.

3、求极大似然估计的步骤

设$X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} f(x;\theta)$，$\theta\in\Theta$，试求$\hat{\theta}_{MLE}=\hat{\theta}_{MLE}(X_1,\cdots,X_n)$

(1) 做似然函数

$$L(\theta)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

(2) 做对数似然函数

$$\ln L(\theta)=L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i;\theta)$$

(3) 列似然方程, 令

$$\frac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta} = 0$$

若该方程有解，则其解就是

$$\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}} = \hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}(X_1, \cdots, X_n)$$

例5.设X_1， …， X_n为取自参数为λ的泊松分布总体的样本，求λ的极大似然估计

解：

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}P_{\lambda}(X=x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}$$

$$\ln L(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\lambda-n\lambda-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i!)$$

令 $$\frac{d[\ln L(\lambda)]}{d\lambda}=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i-n=0\quad\Rightarrow\lambda=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

所以$\hat{\lambda}_{\mathrm{MLE}}=\overline{X}$为$\lambda$的极大似然估计。

注1：若概率函数中含有多个未知参数，则可解方程组

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_j}=0, \quad 或 \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_j}=0$$

得出 θ_j的极大似然估计 $\hat{\theta}_j,\ j=1,\cdots,m.$

例6：设X_1， …， X_n为取自 $N(\mu,\sigma^2)$ 总体的样本，求参数 μ,σ^2 的极大似然估计。

解：

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

$$\Rightarrow L(\mu,\sigma^2)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n}e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0\\[2ex]\dfrac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x},\quad \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$\therefore$

$$\hat{\mu} = \bar{X},\quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

为 μ,σ^2 的极大似然估计.

注2：极大似然估计具有下述性质：

若 $\hat{\theta}$是未知参数θ的极大似然估计， u(θ)是θ的严格单调函数，则u(θ)的极大似然估计为$u(\hat{\theta})$

例7：设X_1，…，Xn为取自参数为λ的指数分布总体的样本，a>0为一给定实数。

求p=P{X<a}的极大似然估计

解：
$$p = P\{X < a\} = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda a}$$

关于λ单调.故若λ的极大似然估计为 $\hat{\lambda}$,则p的极大似然估计为 $1 - e^{-\hat{\lambda} a}$. 先求λ的极大似然估计

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\ln L(\lambda) = \ln \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i} = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

令

$$\frac{d[\ln L(\lambda)]}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \qquad \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$$

$$\therefore \qquad \hat{p} = 1 - e^{-\frac{a}{\overline{X}}}$$

注3：由似然方程解不出θ的似然估计时，可由定义通过分析直接推求。事实上$\hat{\theta}_{MLE}$满足

$$L(\hat{\theta}_{MLE}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$$

例8：设X_1，…，X_n为取自 U(0,θ) 总体的样本，θ>0未知，求参数θ 的极大似然估计。

解：

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^n} & 0 < x_i < \theta \\ 0 & others \end{cases}$$

$$\ln L(\theta)=\ln\frac{1}{\theta^n}=-n\ln\theta$$

令 $$\frac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}=0$$ 无解!

注意到 $$L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n} & 0<x_i<\theta\\ 0 & others\end{cases}$$

为使L(θ)≠0, 必须0<max(x_i)< θ,故θ的值域为(max(x_i), ∞), 再由 $L(\theta)=\frac{1}{\theta^n}$ 关于θ单减,故θ越小,L(θ)越大. 于是L(max(x_i))=maxL(θ) $\therefore \hat{\theta}_{MLE}=\max(X_i)$

example

§2 估计量的评选标准

一、无偏性

设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$为$\theta$的估计量，若$E\hat{\theta}=\theta$

则称 $\hat{\theta}$ 是θ的无偏估计量．

若$X_1,\cdots,X_n$为来自期望为 μ，方差为 σ^2的总体的样本，则

$$E(\overline{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\mu=E(X),$$

$$E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2]=\frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

例1　设$X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} U(0,\theta)$,

考察θ的矩估计和极大似然估计的无偏性

解: θ的矩估计和极大似然估计分别为

$$\hat{\theta}_M = 2\overline{X} \quad ,\hat{\theta}_{MLE} = \max(X_i)$$

$$E(\hat{\theta}_M) = 2E(\overline{X}) = 2\times E(X) = 2\times\frac{\theta}{2} = \theta$$

θ的矩估计是无偏的.记　$Z = \hat{\theta}_{MLE} = \max(X_i)$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{nz^{n-1}}{\theta^n}, 0 < z < \theta \\ 0, \qquad 其它 \end{cases}$$

$$E\hat{\theta}_{MLE}=\int_0^\theta z\frac{nz^{n-1}}{\theta^n}dz=\frac{n}{n+1}\theta\neq\theta$$

故θ的极大似然估计不是无偏的.

注:取

$$\theta^*=\frac{n+1}{n}\hat{\theta}_{MLE}$$

则θ*是θ的无偏估计.

无偏性修正

二、有效性

设$\hat{\theta}_i=\hat{\theta}_i(X_1,\cdots,X_n), i=1,2$分别是参数$\theta$的两个无偏估计，若$D\hat{\theta}_1<D\hat{\theta}_2$，则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效.

续例1　考察例 1中$\hat{\theta}_M$与$\dfrac{n+1}{n}\hat{\theta}_{MLE}$的有效性

已知$\hat{\theta}_M$与$\dfrac{n+1}{n}\hat{\theta}_{MLE}$都是$\theta$的无偏估计

$$D\hat{\theta}_M=D(2\overline{X})=\frac{4\sigma^2}{n}=\frac{4}{n}\times\frac{\theta^2}{12}=\frac{\theta^2}{3n}$$

$$D\left(\frac{n+1}{n}\hat{\theta}_{MLE}\right)=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 D(Z)$$

$$E(Z^2)=\int_0^{\theta} z^2\frac{nz^{n-1}}{\theta^n}dz=\frac{n}{n+2}\theta^2$$

$$D\left(\frac{n+1}{n}\hat{\theta}_{MLE}\right)=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\theta^2\left[\frac{n}{n+2}-\frac{n^2}{(n+1)^2}\right]=\frac{1}{(n+2)n}\theta^2$$

$$D\hat{\theta}_M=\frac{\theta^2}{3n}\ \geq\ \frac{\theta^2}{(n+2)n}=D\left(\frac{n+1}{n}\hat{\theta}_{MLE}\right)$$

三、一致性

设 $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(X_1, \cdots, X_n)$ 是 θ 的估计量，若 $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$，则称 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的一致估计量。

例2.设 $X_1, \cdots, X_n \overset{iid}{\sim} B(m, p)$，m已知,0<p<1, 讨论p的极大似然估计量的一致性。

解：
$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} P_p(X = x_i) = \prod_{i=1}^{n} C_m^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{m-x_i}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} C_m^{x_i}\right) p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(m-x_i)}$$

$$\ln L(p)=\sum_{i=1}^{n}\ln C_m^{x_i}+\sum_{i=1}^{n}x_i\ln p+\sum_{i=1}^{n}(m-x_i)\ln(1-p)$$

令 $$\frac{d[\ln L(p)]}{dp}=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{1-p}(nm-\sum_{i=1}^{n}x_i)=0$$

$$\Rightarrow p=\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad \therefore \hat{p}_{\text{MLE}}=\frac{\overline{X}}{m}$$

由辛钦大数定理, $$\therefore \frac{1}{m}\overline{X}\xrightarrow{p}p$$

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{p}E(X)=mp$$

p的极大似然估计量是一致性估计量.

EX:设$\overline{X}_1,\overline{X}_2$分别为取自总体X的容量为$n_1,n_2$的两个样本的样本均值，求证：对任意实数a>0,b>0,a+b=1统计量 $a\overline{X}_1+b\overline{X}_2$都是E（X）的无偏估计，并求a,b使所得统计量最有效

解：$E(a\overline{X}_1+b\overline{X}_2)=aE(\overline{X}_1)+bE(\overline{X}_2)=E(X)$

故对任意实数a>0,b>0,a+b=1,统计量 $a\overline{X}_1+b\overline{X}_2$ 都是E（X）的无偏估计

$$D(a\overline{X}_1+b\overline{X}_2)=a^2D(\overline{X}_1)+b^2D(\overline{X}_2)=(\frac{a^2}{n_1}+\frac{b^2}{n_2})D(X)$$

$$记:h(a)=\frac{a^2}{n_1}+\frac{(1-a)^2}{n_2}$$

$$令\ \frac{\partial h(a)}{\partial a}=\frac{2a}{n_1}-\frac{2(1-a)}{n_2}=0$$

$$\Rightarrow a=\frac{n_1}{n_1+n_2}$$

$$\Rightarrow b=1-\frac{n_1}{n_1+n_2}=\frac{n_2}{n_1+n_2}$$

§3 区间估计

一、概念

定义：设总体**X**的分布函数**F(x；θ)**含有未知参数θ，对于给定值α（**0< α<1),**若由样本$X_1, \cdots,$ X_n确定的两个统计量$\underline{\theta},\overline{\theta}$使

$$P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}=1-\alpha$$

则称随机区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$为θ的置信度为**1–α**的置信区间

$\underline{\theta}$,和$\overline{\theta}$分别称为置信度为$1-\alpha$的置信下限和置信上限。

注：**F(x;θ)**也可换成概率密度或分布律。

复习：正态总体的抽样分布定理

1. 若$\mathbf{X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu,\sigma^2)}$, 则$\mathbf{U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)}$

2. 若$X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu,\sigma^2)$，则

(1) $\overline{X}$与S^2相互独立; (2) $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$;

(3) $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$.

3.若$X_1,\cdots,X_{n_1} \overset{iid}{\sim} N(\mu_1,\sigma_1^2), Y_1,\cdots,Y_{n_2} \overset{iid}{\sim} N(\mu_2,\sigma_2^2)$,

且两样本独立.则

(1)$F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$;

(2)进一步,假定$\sigma_1^2=\sigma_2^2$,就有,

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \sim t(n_1-1+n_2-1).$$ 其中

$$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$称为混合样本方差.

一、 正态总体参数的区间估计

设$X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu，\sigma^2)$,给定$\alpha$，由观测值$x_1,\cdots,x_n$,求出$\mu$的$1-\alpha$置信区间.

1、σ²已知

$$令: p\{\overline{X}-a<\mu<\overline{X}+b\}=1-\alpha$$

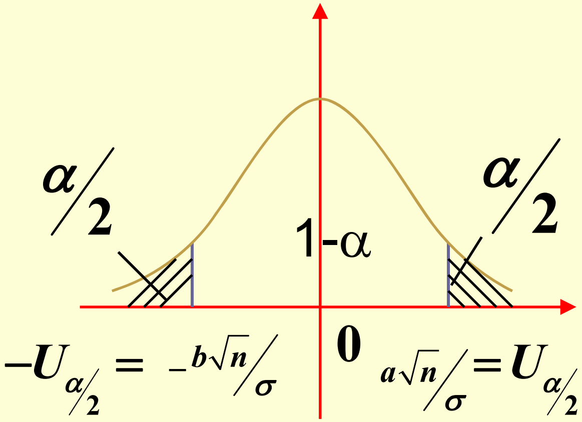
$$\Leftrightarrow p\{-b<\overline{X}-\mu<a\}=1-\alpha$$

$$\because\ U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

$$\Leftrightarrow p\{-b\sqrt{n}/\sigma<U<a\sqrt{n}/\sigma\}=1-\alpha$$

可取

$$-b\sqrt{n}/\sigma=-U_{\alpha/2}\Rightarrow b=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{\alpha/2}$$

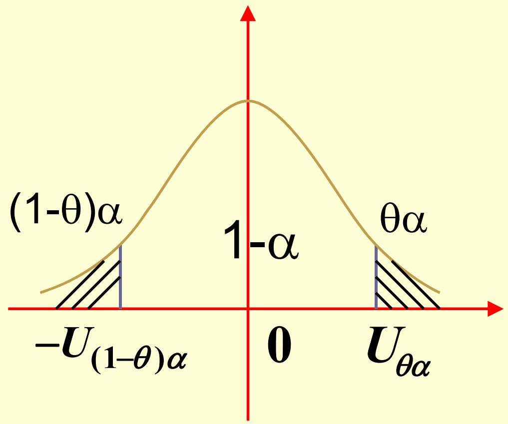


$$a\sqrt{n}/\sigma=U_{\alpha/2}\Rightarrow a=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{\alpha/2}$$

μ的置信度为1–α的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{\alpha/2},\quad \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{\alpha/2}\right)。$$

注：μ的1–α置信区间不唯一。



$$\forall\theta,\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{\theta\alpha},\quad \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{(1-\theta)\alpha}\right)$$

都是μ的1–α置信区间.但θ=1/2时区间长度最短.

求正态总体参数置信区间的解题步骤：

(1)根据实际问题构造样本的函数，要求仅含待估参数且分布已知-----枢轴量；

(2)令枢轴量落在由分位点确定的区间里的概率为给定的置信度1–α，要求区间按几何对称或概率对称；

(3)解不等式得随机的置信区间；

(4)由观测值及α值查表计算得所求置信区间。

例1 (P139,27(1))从一批钉子中抽取16枚，测得其长度为（单位:cm）2.14, 2.10，2.13，2.15，2.13，2.12，2.13，2.10，2.15，2.12，2.14，2.10, 2.13，2.11，2.14，2.11。设钉长分布为正态分布，若已知 $\sigma = 0.01$ （cm），求总体期望值μ的90%置信区间.

解:σ已知时,μ的置信度为1−α的置信区间为

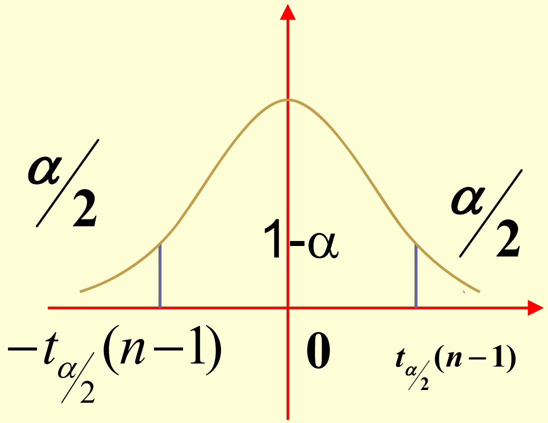
这里 $$(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{\alpha/2})。$$

$$\overline{x}=2.125,\ \sigma=0.01,\ \sqrt{n}=4,\ \alpha=0.1,\ U_{\alpha/2}=U_{0.05}=1.645$$

$$(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{\alpha/2})=(2.121,2.129)$$

2、σ²未知

由 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$



令 $p\{|T|<t_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha$，

即得

$$p\{\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)S/\sqrt{n}<\mu<\overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)S/\sqrt{n}\}=1-\alpha$$

μ的1−α置信区间为

$$(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1))$$

（续上例）(2) 若σ未知，求总体期望值 μ 的90%置信区间.

解：σ未知时,μ的置信度为1−α的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)。$$

这里

$$\overline{x}=2.125 \quad s=0.017 \quad \sqrt{n}=4 \quad \alpha=0.1$$

$$t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.05}(15)=1.7531$$

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)=(2.117,2.132)$$

二、单正态总体方差的置信区间

设$X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$，给定置信度$1-\alpha$，由观测值$x_1,\cdots,x_n$，推求$\sigma^2$（或$\sigma$）的置信区间。

假定μ未知，

引进
$$\eta = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

令
$$p\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \eta < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$$

可得
$$p\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\} = 1-\alpha$$

σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

σ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\ \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$$

(续例1), 求总体标准差σ的95%置信区间.

解: σ的置信度为1−α的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\ \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)=(0.0127,0.0265)$$

这里

$$s^2=0.00029, n=16,\ \alpha=0.05,\ \chi^2{}_{0.025}(15)=27.488$$

$\chi^2{}_{0.975}(15)=6.262$, σ的置信度为95%的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\ \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)=\left(\frac{\sqrt{15\times0.0029}}{\sqrt{27.488}},\frac{\sqrt{15\times0.0029}}{\sqrt{6.262}}\right)$$

三、两个正态总体均值差的置信区间

设$X_1,\cdots X_{n_1} \overset{iid}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y_1,\cdots, Y_{n_2} \overset{iid}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$，两样本独立。给定置信 度$1-\alpha$，求$\mu_1-\mu_2$的置信区间。

假定$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知

引进 $$\mathrm{T}=\frac{\overline{\mathrm{X}}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

令 $$\mathrm{P}\{|\mathrm{T}|<t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\}=1-\alpha$$

可解得μ_1- μ_2 的置信区间

$$\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}$$

其中

$$S_{\omega}^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

四、两个正态总体方差比的置信区间

设 $X_1,\cdots,X_{n_1}\overset{iid}{\sim}N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$，$Y_1,\cdots,Y_{n_2}\overset{iid}{\sim}N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$，两样本独立。给定置信度 $1-\alpha$，由观测值 $x_1,\cdots,x_{n_1}$；$y_1,\cdots,y_{n_2}$，求出 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间。

假定 μ_1，μ_2 未知

引进 $$\mathbf{F}=\frac{\mathbf{S}_1^2/\boldsymbol{\sigma}_1^2}{\mathbf{S}_2^2/\boldsymbol{\sigma}_2^2}\sim \boldsymbol{F}(\boldsymbol{n}_1-1,\boldsymbol{n}_2-1)$$

令 $$P\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)<F<F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\}=1-\alpha$$

可解得　σ_1^2 / σ_2^2的$1-\alpha$置信区间

$$\left(\frac{S_1^2 / S_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{S_1^2 / S_2^2}{\mathrm{F}_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}\right)$$

7-1 (2003年，数学一） 已知一批零件的长度X(单位:cm)服从正态分布 $N(\mu,1)$,从中随机地抽取16个零件,得到长度的平均值40(cm),则 μ 的置信度为0.95的置信区间是_______。

注:标准正态分布函数值

$$\Phi(1.645)=0.95,\qquad \Phi(1.96)=0.975$$

$$\underline{(39.51,40.49)}.$$

EX1 产品的某一指标X服从 N(μ, 0.04)分布，现从这批产品中随机抽取n只进行测定，问n需要多大，才能保证μ的95%置信区间的长度不大于0.1?

解: 因为μ的置信度为1−α的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{\alpha/2},\quad \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{\alpha/2}\right)$$

令 $\dfrac{2\times 0.2}{\sqrt{n}}U_{0.025}<0.1$ 而 $U_{0.025}=1.96$

解得 $n>\left(\dfrac{2\times 0.2}{0.1}\times 1.96\right)^2=61.46\approx 62$

EX2 产品的某一指标X服从 $N(\mu,\sigma^2)$分布，现从这批产品中随机抽取9只进行测定，测得数据的样本均值为100，样本方差为4，分别求参数 μ,σ^2的95%置信区间

解: μ的置信度为**95%**的置信区间为

$$[\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{9}}t_{0.05/2}(8),\ \ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{9}}t_{0.05/2}(8)]$$

$$=[100-\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}\times 2.306,\ \ 100+\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}\times 2.306]$$

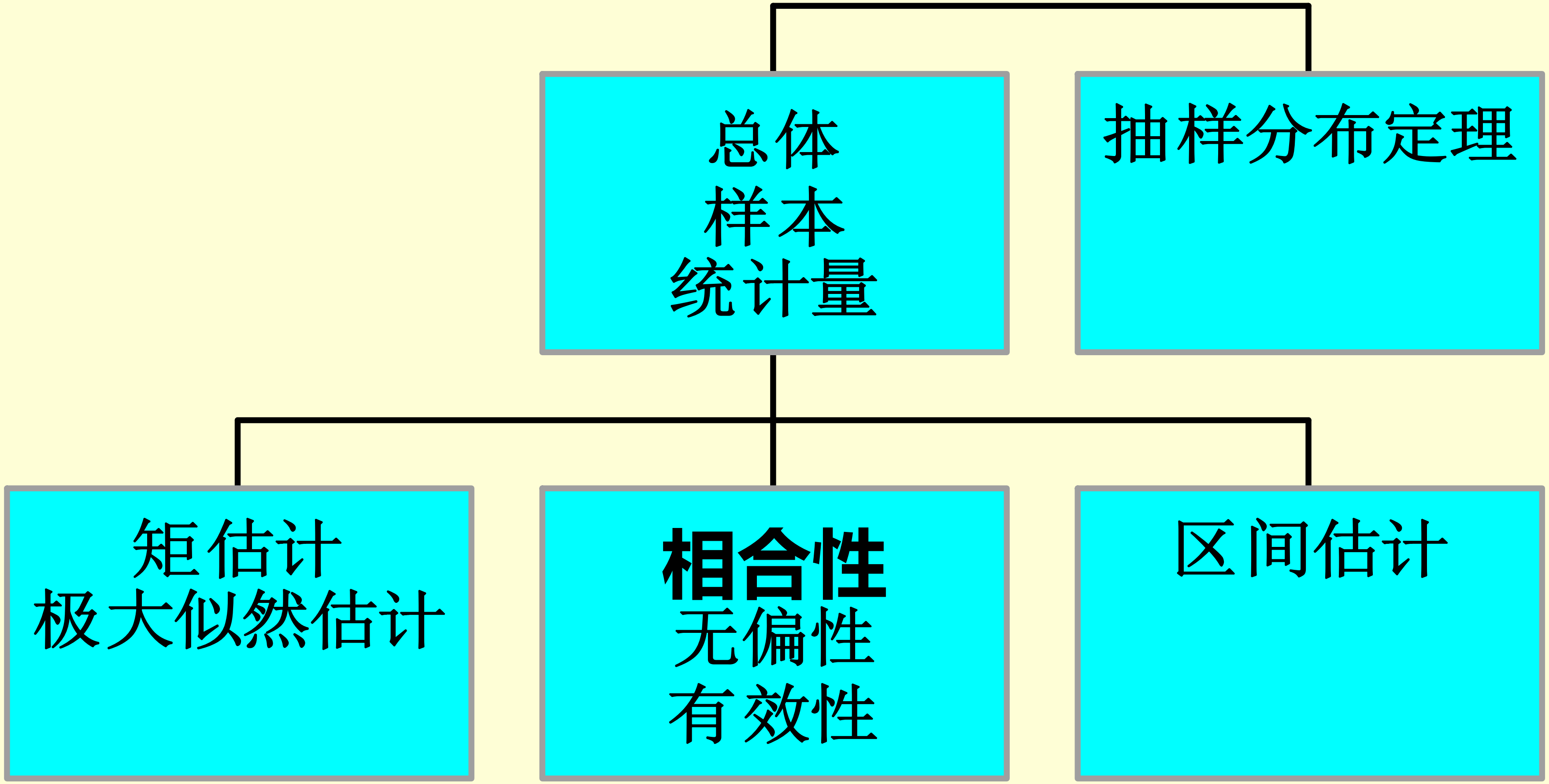
$$\approx[98.46,101.54]$$

σ^2的95%置信区间为

$$\left[\frac{8s^2}{\chi^2_{0.05/2}(8)},\ \frac{8s^2}{\chi^2_{1-0.05/2}(8)}\right]$$

$$=\left[\frac{8\times 4}{17.535},\ \frac{8\times 4}{2.18}\right]\approx[1.82, 14.67]$$

第6-7章　小结



习题课

1. 设总体X服从正态分布 ，其中μ是已知的，而σ未知， (X_1,X_2,X_3)是从总体中抽取的一个简单随机样本。

（1）求(X_1,X_2,X_3)的密度函数；

（2）指出$X_1+X_2+X_3$，$X_1+2\mu$，$\min(X_1,X_2,X_3)$ $\sum_{i=1}^{3}\frac{X_i^2}{\sigma^2}$，$\frac{X_3-X_1}{2}$之中，哪些是统计量，哪些不是统计量，为什么？

2.设总体**X**的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)} & x>\theta \\ 0 & x\leq\theta\end{cases}$$

其中**θ>0,**未知**,**从总体中抽取简单随机样本 $X_1,\ldots,X_n$

(1)求θ的矩估计和极大似然估计

(2)求极大似然估计量的分布函数

(3)判断所得估计量的无偏性.

3.从正态总体 $N(3.4,6^2)$ 中抽取容量为n的样本，如果要求其样本均值位于区间（1.4,5.4）之间的概率不小于0.95，问样本容量n至少取多大?

4. 设总体**X**的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中θ **(0< θ <0.5)**未知,利用总体**X**的如下样本观察值: **3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3,** 求θ的矩估计值与极大似然估计值.