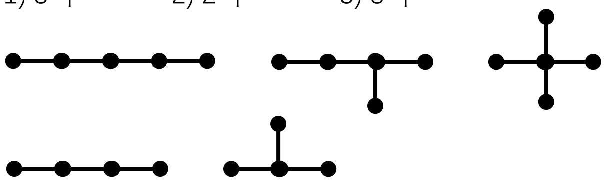
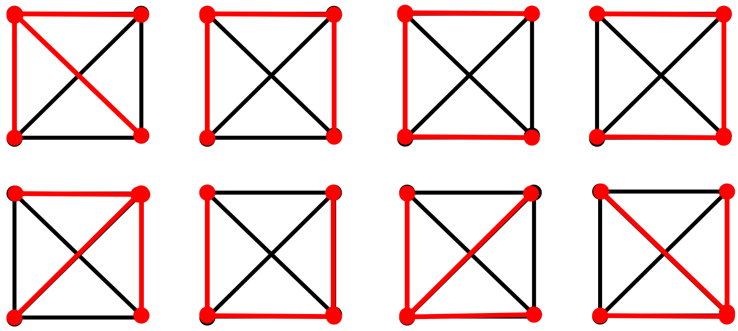
Problem 1

1) 3 个　　2) 2 个　　3) 8 个





Problem 2

用集合{0, 1, 2}里不同的数标记三个顶点的非同构的标记树有 A(3, 3)/2 = 3 种

用{0, 1, 2, 3}里不同的数标记四个顶点的非同构的标记树有 A(4, 4)/2 + 4 = 16 种

Problem 3

a) 当 n=1 时，唯一顶点的度数是 0, $d_1 = 2(1-1) = 0$，$\sum_{i=1}^{k} d_i = 2(k-1)$成立

假设当 n=k 时$\sum_{i=1}^{k} d_i = 2(k-1)$成立，即 n=k 的树中有 k-1 条边

假设树 T 有 k+1 个顶点，任取 T 的一个树叶 v, w 与 v 邻接

从·T 中删除 v 和连接 w 和 v 的边，得到一个有 k 个顶点的树 T’, T’有 k-1 条边

所以 T 中有 k-1+1=k 条边，$\sum_{i=1}^{k} d_i = 2(k-1)$

综上所述，若 D 恰好是某个树 T 的各个顶点的度数序列，$\sum_{i=1}^{k} d_i = 2(k-1)$

b) 当 n=1 时, $d_1 = 2(1-1) = 0$，唯一顶点的度数是 0, d_1 是唯一顶点的度数

假设当 n=k 时 D 满足$\sum_{i=1}^{k} d_i = 2(k-1)$则 D 恰好是某个树 T 顶点的度数序列

假设 D 满足$\sum_{i=1}^{k+1} d_i = 2k$，若对任意 $1 \leqslant i \leqslant k+1$ 都有 $d_i \geqslant 2$

$\sum_{i=1}^{k} d_i \geqslant 2k$，矛盾，即正整数序列 D 中必有取值为 1 的项

若对任意 $1 \leqslant i \leqslant k+1$ 都有 $d_i=1$，$\sum_{i=1}^{k} d_i = k$，矛盾, D 中必有取值大于 1 的项

从 D 中删除一个 1，再任取一个大于 1 的 d_m 减去 1，得到新的序列 D’

对 D’有$\sum_{i=1}^{k} d_i = 2(k-1)$，则 D’恰好是某个树 T’的顶点度数序列

在 T’中增加一个顶点，并将它与 d_m 对应的顶点连接，得到新的树 T

则原序列 D 恰好是 T 的各个顶点的度数序列

综上所述，若 D 满足上式则存在一个树 T 使得 D 恰好是 T 的顶点度数序列

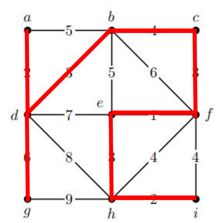
Problem 4

普林算法: (e, f), (c, f), (e, h), (h, i), (b, c), (b, d), (a, d), (d, g)

克鲁斯卡尔算法: (e, f), (h, i), (a, d), (c, f)

(e, h), (b, d), (b, c), (d, g)，可见两种算法结果是相同的

最小生成树的总权值为: 1+2+2+3+3+3+4+6=24



Problem 5

1) 证明：假设每条边权重均不相同的带权图存在两个最小生成树 T1 和 T2，则

其边按权重升序排列分别为{e11, e12, …, e1n}和{e21, e22, …, e2n}

存在 k 使得对于 1⩽i⩽k-1 有 w(e1i)=w(e2i)且 w(e1k)≠w(e2k)

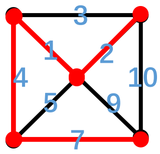
则 T1 中没有 e2k, T2 中没有 e1k。不妨设 w(e1k)<w(e2k), T2+e1k 必有环 C

已知 T1 无环，则 C 中有除{e21, e22, …, e2n}以外的边

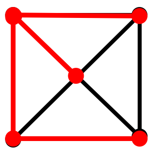
删去任一这样的边，可得到一个更小的生成树，与 T2 是最小生成树矛盾

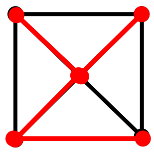
因此每条边权重均不相同的带权图有唯一的最小生成树

2) 反驳: a)为最小生成树，总权值为 14, b) c)均为次小生成树，总权值为 15



a)


b)


c)

如图所示，最小生成树的权值小于该树，其他生成树的权值均大于该树

可见每条边权重均不相同的带权图不一定有唯一的最小生成树

Problem 6

设图中存在最小生成树 T 包含 G 中某个圈上权值最大的边 e

在 T 中删掉 e，得到的 T-{e}不连通，设两个连通为分量 V1 和 V2

在原图 G 中, C-{e}是一条通路，通路中有顶点分别属于 V1 和 V2

存在边 v 的两个顶点分别属于 V1 和 V2, v 不在 T-{e}中

把 v 加入到 T-{e}中，得到的新图连通，形成一棵新树 T'，根据题设有

v 的权值小于 e，则 T'的总权值小于 T，矛盾, e 不在 G 的任何最小生成树中