第三周第一次作业

Problem 7

设集合 $A = \{\{1,2\},\{1\},\emptyset\}$，计算下列表达式：

a) $\bigcup \rho(A)$

b) $\bigcap \bigcup \rho(A)$

答案：

a)$\{\{1,2\},\{1\},\emptyset\}$

b)$\emptyset$

注意：求集合$\rho(A)$的广义并，并不用把$\rho(A)$完全写出来。A的幂集中每个元素都是A的子集，且$A \in \rho(A)$，考虑A并任意A的子集都是A，所以$\bigcup \rho(A) = A$。

第三周第二次作业

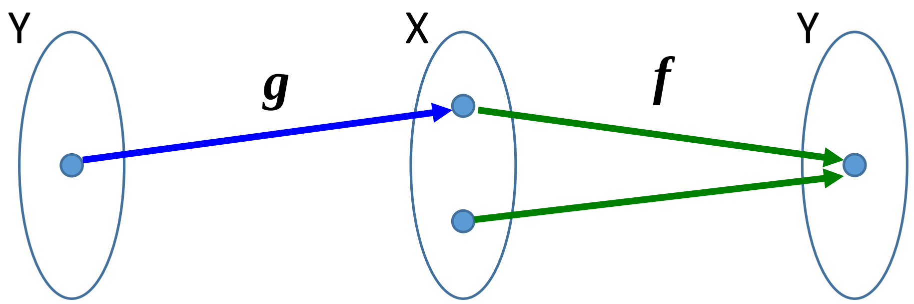
Problem 7

假定f是从X到Y的函数，g是从Y到X的函数。证明$f \circ g = I_Y$，$g \circ f = I_X$与$f^{-1} = g$，$g^{-1} = f$等价。其中I_X和I_Y分别是X和Y上的恒等函数。

常见错误：

因为$f \circ g = I_Y$，所以$\forall y \in Y\ g(y) = x \rightarrow f(x) = y$，所以$f = g^{-1}$；同理...

两个问题：1，如果仅有这个条件，g可能不是满射；2，引入g^{-1}前需要证明g^{-1}存在，即证g是双射！



第三周第二次作业

Problem 7

假定f是从X到Y的函数，g是从Y到X的函数。证明$f \circ g = I_Y$，$g \circ f = I_X$与$f^{-1} = g$，$g^{-1} = f$等价。其中I_X和I_Y分别是X和Y上的恒等函数。

答案：

1. 证明若$f \circ g = I_Y$，$g \circ f = I_X$则$f^{-1} = g$，$g^{-1} = f$：

I_X为双射，则$g \circ f$为双射，f为单射，g为满射。同理可知g为单射f为满射。于是f和g都为双射，存在反函数。所以$f^{-1} = g$，$g^{-1} = f$。

2. 证明若$f^{-1} = g$，$g^{-1} = f$,则$f \circ g = I_Y$，$g \circ f = I_X$：

对任意$x \in X$，$f(x) = g^{-1}(x) = y \in Y$, 有$f(x) = y$, $g(y) = x$。

对任意$x \in X$，$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(y) = x = I_X(x)$。$g \circ f = I_X$。

反之同理。

第三周习题课随堂测验

1. 已知f和g都是R->R的函数，若 $f\circ g$ 是单射，且 $g\circ f$ 是满射，则

- [x] g 一定是单射。
- [x] g 一定是满射。
- [ ] f 不一定是单射。
- [ ] f 不一定是满射。

- 若$f\circ g$是满射，能推出f和g是满射吗？
  - f一定是满射，g不一定是满射。
- 若$f\circ g$是单射，能推出f和g是单射吗？
  - g一定是单射，f不一定是单射。

答案：首先，根据课上讲的内容，我们得到g是单射且g是满射，前两个选项正确。

注意：本题比课上讲的多了f和g都是R->R的函数这个条件！

假设f不是单射，即有$x1, x2 \in R, x1 \neq x2,\ f(x1) = f(x2)$。由于g是双射，必存在$y1, y2 \in R, y1 \neq y2$ 使得 g(y1)=x1，g(y2)=x2，从而 $f\circ g(y1) = f\circ g(y2)$，与 $f\circ g$ 是单射矛盾！因此f一定是单射！

同理，假设f不是满射，则存在$a \in R$，$\forall x \in R\ f(x) \neq a$，从而$\forall x \in R\ g\circ f(x) \neq g(a)$，与$g\circ f$为满射矛盾！因此f一定是满射！

第三周习题课随堂测验

2. 我们用ρ(A)代表集合A的幂集，下列哪些选项是正确的？

- [x] 如果A是B的一个子集，那么ρ(A)是ρ(B)的一个子集。
- [x] 如果ρ(A)是ρ(B)的一个子集，那么A是B的一个子集。
- [ ] 如果ρ(A)∈ρ(B)，那么A是B的一个子集。
- [x] 如果ρ(A)∈ρ(B)，那么A∈B。

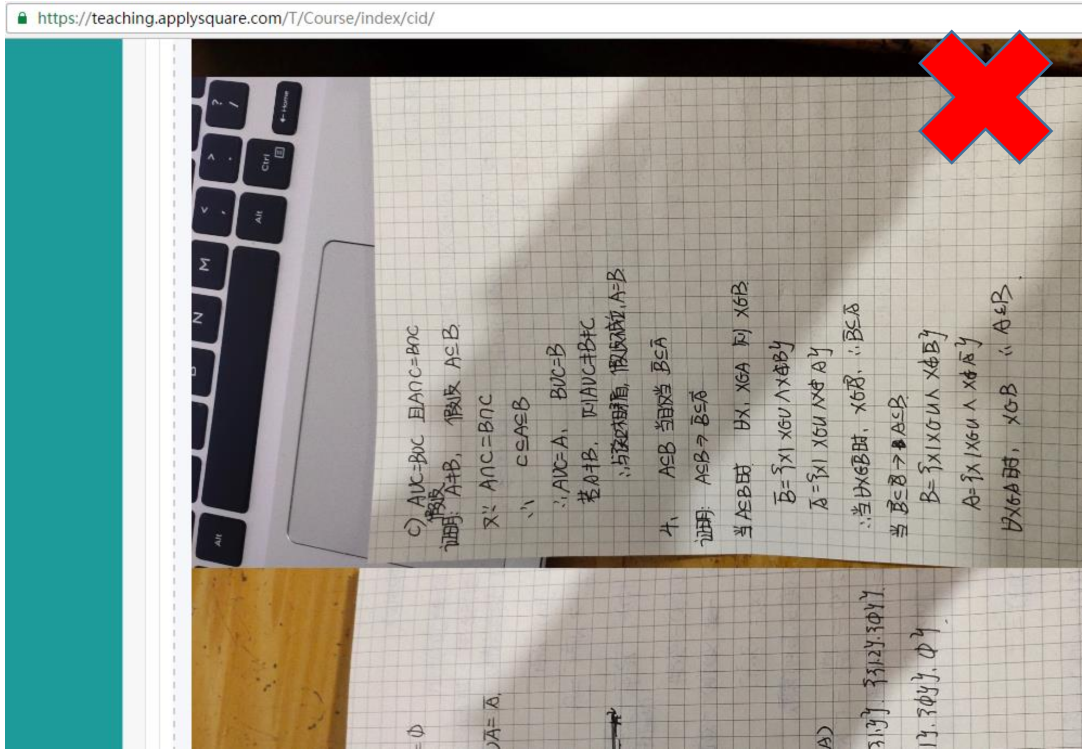
答案：选项1，$\forall X \in \rho(A)$，$X \subseteq A \subseteq B$中，因此$X \in \rho(B)$，因此$\rho(A) \subseteq \rho(B)$；

选项2，反证法，假设A不是B的子集，则存在$x \in A \wedge x \notin B$，则$\exists Y \in \rho(A), x \in Y$，因此$Y \notin \rho(B)$，与$\rho(A)$是$\rho(B)$的子集矛盾！

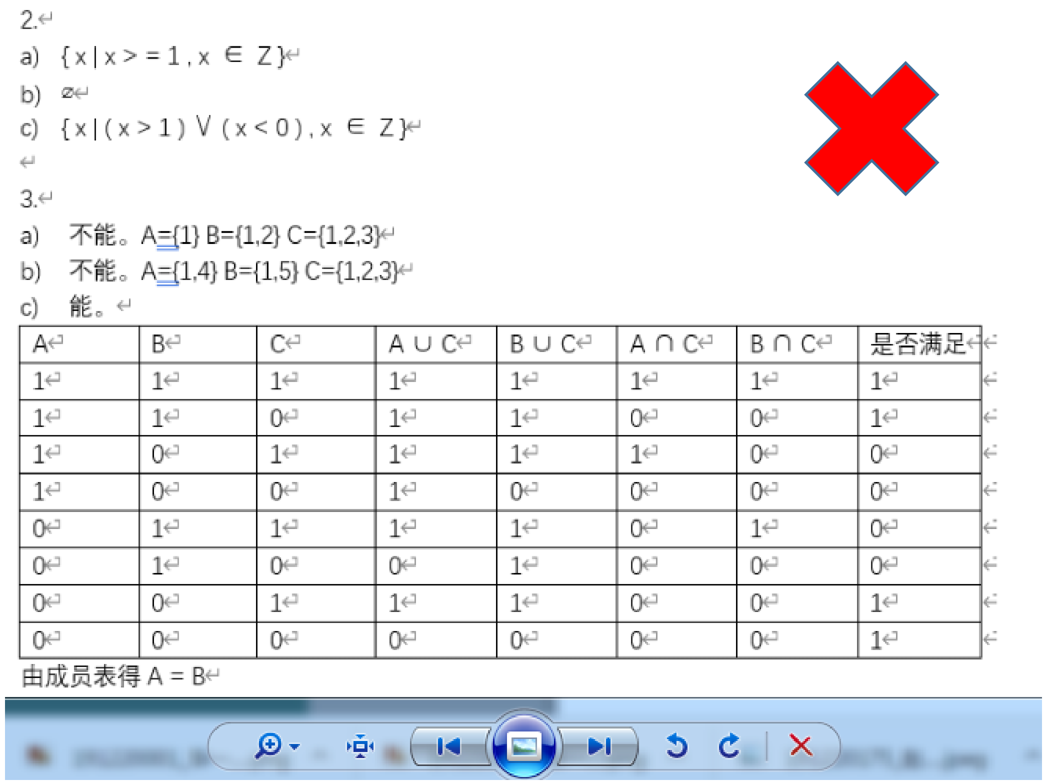
选项3，举反例，A={1}，B={∅,{1}}，$\rho(A) = \{\emptyset,\{1\}\}$，$\rho(B) = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{1\}\},\{\emptyset,\{1\}\}\}$。A不是B的子集；

选项4，$A \in \rho(A) \in \rho(B)$，则$\rho(A) \subseteq B$，从而$A \in B$。

关于作业提交的额外说明：



请将作业照片旋转到正确的方向，
不要横着提交！



2.

a) {x | x >= 1 , x ∈ Z}

b) ∅

c) {x | (x > 1) ∨ (x < 0) , x ∈ Z}

3.

a) 不能。A={1} B={1,2} C={1,2,3}

b) 不能。A={1,4} B={1,5} C={1,2,3}

c) 能。

A	B	C	A ∪ C	B ∪ C	A ∩ C	B ∩ C	是否满足
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1

由成员表得 A = B

Word文档请转成PDF提交，
不要截图上传Word文档！