离散数学作业 21–布尔代数引论

Problem 1

在布尔代数中证明, 每一个元素 x 都有唯一的一个补 $\bar{x}$ 使得 $x \vee \bar{x} = 1$ 且 $x \wedge \bar{x} = 0$.

Problem2

证明下列等式成立或不成立. $\oplus$ 为异或 (XOR) 符号.

(a) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$.

(b) $x + (y \oplus z) = (x + y) \oplus (x + z)$.

(c) $x \oplus (y + z) = (x \oplus y) + (x \oplus z)$.

Problem 3

设 B 是布尔代数, $\forall a, b \in B$, 证明: $a \preceq b \Leftrightarrow a \wedge b^{'} = 0 \Leftrightarrow a^{'} \vee b = 1$.

Problem 4

设 $< B, \wedge, \vee, {}' , 0, 1 >$ 是布尔代数, 在 B 上定义二元运算 $\oplus$, $\forall x, y \in B$ 有

$$x \oplus y = (x \wedge y^{'}) \vee (x^{'} \wedge y)$$

问 $< B, \oplus >$ 能否构成代数系统? 如果能, 指出是哪一种代数系统. 为什么?

Problem 5

设 B 是布尔代数, $\forall a, b, c \in B$, 若 $a \preceq c$, 则有

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$$

称这个等式为模律，证明布尔代数适合模律。

Problem 6

设 B 是布尔代数, $a_1, a_2, \cdots, a_n \in B$, 证明:

(1) $(a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n)' = a_1' \wedge a_2' \wedge \cdots \wedge a_n'$

(2) $(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n)' = a_1' \vee a_2' \vee \cdots \vee a_n'$

Problem 7

设 B 为布尔代数，试证明: $(\forall a, b \in B)(a \preceq b \Leftrightarrow b' \preceq a')$, 其中 a' 表示 a 的补元.

Problem 8

设 B_1, B_2, B_3 是布尔代数, 证明: 若 $B_1 \cong B_2$,$B_2 \cong B_3$, 则 $B_1 \cong B_3$.

Problem 9

今有 x, y, z 三个布尔变元，用 xyz 表示 0-7 之间的一个二进制数。定义布尔函数 F: 当 xyz 是一个斐波那契数时 $F(x, y, z) = 1$，否则 $F(x, y, z) = 0$。

(1) 给出 F 的真值表。

(2) 以 “布尔积之布尔和” 的形式给出 F 的表达式（无需化简）。

(3) 化简该表达式。