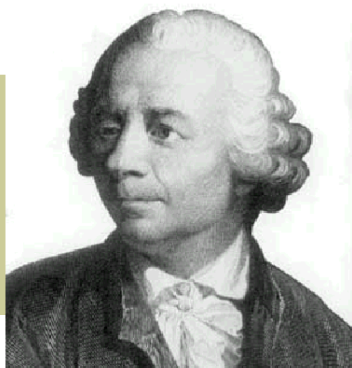
NANJING UNIVERSITY



离 散 数 学
Discrete Mathematics

第六讲：二元关系

吴 楠

南京大学计算机科学与技术系

2020 年 3 月 29 日

本讲主要内容

- 引子：集合与关系
- 有序对
- 笛卡尔积
- 二元关系
- 关系与函数
- 关系的运算

引子：集合与关系

- 由于集合模型中元素的无序性，“序”的刻划是无法直接实现的，但现实世界中存在着大量的有序关系，这就需要在集合论的基础上建立一种描述“序”的模型：

关 系

(RELATION)

有序对

- 序（order）是一个非常重要和基础的数学概念，它刻划出对象的可比性。最简单的序关系可通过有序对（ordered pair，或称序偶）来定义
- 定义：设a,b为对象，二元运算(a,b)称为a与b的有序对指$(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow(a=c\land b=d)$。这里称$a$为$(a,b)$的第一分量，称$b$为$(a,b)$的第二分量
- 集合论作为数学的基础，可以构造数学的其它内容。如何利用集合构造有序对呢？

有序对（续）

- 定义（Kuratowski, 1921）：

$$令\ (a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$$

- 命题：在上述有序对的集合定义下，有：

$$(a,b)\ =(c,d)\Leftrightarrow(a=c\wedge b=d)$$

- 证明*：

“$\Leftarrow$”，即$(a=c\wedge b=d)\Longrightarrow\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$易见，

有序对（续）

"$\Rightarrow$"：

$$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$$

$$令\left[\begin{array}{lcl}\prod_1 Z &=& \cup\cap Z\\ \prod_2 Z &=& \cup(\cup Z-\cap Z)\end{array}\right.$$

$$故\left[\begin{array}{lcl}\prod_1(a,\ b) &=& a\\ \prod_2(a,\ b) &=& \begin{cases}\emptyset,\ 当a=b\\ b,\ 当a\neq b\end{cases}\end{array}\right.$$

设$(a,\ b)=(c,\ d)$，则$\prod_1(a,\ b)=\prod_1(c,\ d)$，

从而$a=c$，且$(a,\ b)=(a,\ d)$，

下面证$b=d$

$Case1:\ a=b$

从而$(a,\ b)=(a,\ d)\Rightarrow\{a,\ b\}=\{a,\ d\}\Rightarrow\{a\}=\{a,\ d\}\Rightarrow d\in\{a\}\Rightarrow d=a\Rightarrow d=b$

有序对（续）

$Case2: \ a \neq b$ $\qquad$ $(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$

若$c=d$则$a=b$(证明同$Case1$)故设$c \neq d$

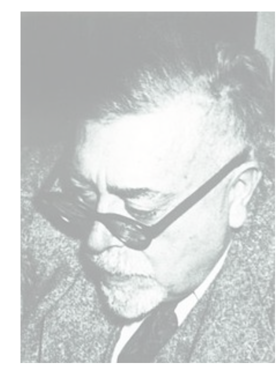
$b=\prod_2(a,\ b)=\prod_2(c,\ d)=d$

$\therefore b=d \qquad \Box$

易见$\{a,\ b\}$不能成为有序对，$\{x,\ \{y\}\}$也不行。

- 有序对最早的集合定义（Wiener, 1914）：

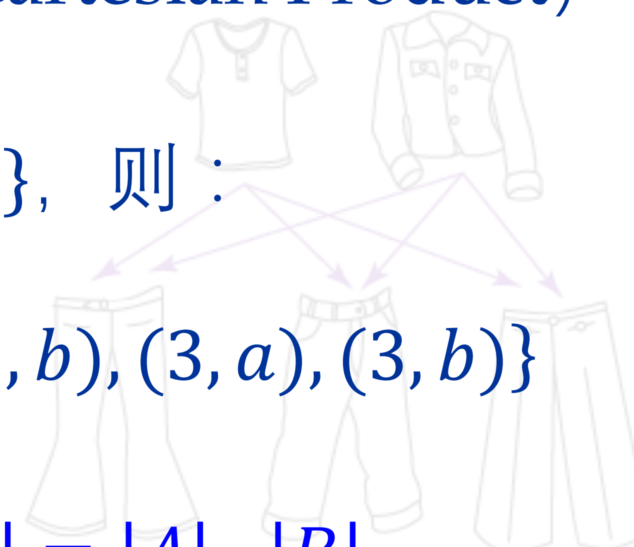
令 $(a,b)=\{\{\{a\},\emptyset\},\{\{b\}\}\}$



笛卡尔积（回顾）

- 任给集合A与B，令$A\times B=\{(a,b)|a\in A\wedge b\in B\}$，

  $A\times B$称为A与B的笛卡尔积（Cartesian Product）



- 例：设$A=\{1,2,3\}$，$B=\{a,b\}$，则：

  $$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

- 若A与B是有限集合，则$|A\times B|=|A|\cdot|B|$

关于笛卡尔积的若干命题

- (1) $A\times\emptyset = \emptyset\times A = \emptyset$
- (2) $A\times B = B\times A \Leftrightarrow [(A=\emptyset)\vee(B=\emptyset)\vee(A=B)]$
- (3) 分配律：$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

$$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$$

$$(B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$$

关于笛卡尔积的若干命题（续）

- 证明(1)：对于任意集合A，由笛卡尔积的定义，$A\times\emptyset=\{(a,b)|a\in A\wedge b\in\emptyset\}=\emptyset$，同理可证$\emptyset\times A=\emptyset$. $\square$
- 证明(2)：“$\Leftarrow$”：$Trivial$；“$\Rightarrow$”：欲证$A\times B=B\times A\Longrightarrow[(A=\emptyset)\vee(B=\emptyset)\vee(A=B)]$，只需证$[(A\neq\emptyset)\wedge(B\neq\emptyset)\wedge(A\neq B)]\Longrightarrow A\times B\neq B\times A$.

$\because A\neq B \quad \therefore A-B\neq\emptyset\vee B-A\neq\emptyset$；

关于笛卡尔积的若干命题（续）

- 证明(2)（续）：不妨设$A-B\neq\emptyset$，且取$a\in A-B$，$b\in B$并假设$(a,b)\in A\times B=B\times A$，即有$(a,b)\in B\times A$，故有$a\in B$，与$a\in A-B$矛盾，故假设错误，$A\times B\neq B\times A$. □
- 证明(3)：$A\times(B\cap C)=\{(a,b)|a\in A\wedge b\in(B\cap C)\}$

$$=\{(a,b)|a\in A\wedge b\in B\wedge b\in C\}$$

$$=\{(a,b)|(a\in A\wedge b\in B)\wedge(a\in A\wedge b\in C)\}$$

$=(A\times B)\cap(A\times C)$，其余同理可证. □

二元关系（Binary Relation）

- 定义（关系）：集合R为关系指：

$$(\forall r \in R)(\exists x, y)\big(r = (x, y)\big)$$

- 定义（二元关系）：设A, B为集合，若$R \subseteq A \times B$，称R为从A到B的二元关系，当$A = B$时，称R为A上的二元关系，在无歧义时一般可简称关系

二元关系（续）

- 相关记号：设$R \subseteq A \times B$
  - (1) $(a,b) \in R$可简记为aRb
  - (2) $(a,b) \notin R$可简记为$a\not R b$或$\neg aRb$
  - (3) $aRb \wedge bRc$可简记为$aRbRc$
- 例：$A = \{1,2\}$，$B = \{3,4,5\}$
  - $R = \{(1,3),(2,3),(1,5)\}$为$A$到$B$的二元关系，每个关系元素可写为$1R3, 2R3, 1R5$，而$(1,4) \notin R$，故$1\not R 4$

二元关系（续）

- 以下三种关系是A上特别的二元关系，用特有的符号记之（一般写为粗体）：
  - 空关系（empty relation）$\emptyset$：$\emptyset \subseteq A\times A$
  - 全关系（entire relation）$\boldsymbol{E_A}$：$\boldsymbol{E_A} = \{(x,y) | x,y \in A\}$
  - 恒同关系（identical relation）$\boldsymbol{I_A}$：$\boldsymbol{I_A} = \{(x,x) | x \in A\}$

二元关系（续）

- 自然数集ℕ上常见的关系如下：
  - 小于关系：$< \overset{\text{def}}{=} \{(n,m) \mid n < m \land n,m \in \mathbb{N}\}$
  - 整除关系：$\mid \overset{\text{def}}{=} \{(n,m) \mid n \mid m \land n,m \in \mathbb{N}\}$
  - 相等关系：$= \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{I}_{\mathbb{N}}$

二元关系（续）

- 以下定义与关系R有关的3个重要集合，设$R \subseteq A \times B$：
  - R的定义域 $\mathrm{Dom}(R) = \{x | (\exists y \in B)(x, y) \in R\}$
  - R的值域 $\mathrm{Ran}(R) = \{y | (\exists x \in A)(x, y) \in R\}$
  - R的域 $\mathrm{Fld}(R) = \mathrm{Dom}(R) \cup \mathrm{Ran}(R)$
- 例：$A = \{1,2,3\}$，$B = \{r, s\}$，$R = \{(1, r), (2, s), (3, r)\}$

  则：$\mathrm{Dom}(R) = \{1,2,3\}$，$\mathrm{Ran}(R) = \{r, s\}$，

  $\mathrm{Fld}(R) = \{1,2,3, r, s\}$

二元关系（续）

- 对于$R \subseteq A \times B$，我们以集合表示之，当R为有穷集时，还可用矩阵或有向图来表示二元关系
- 定义：设$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$与$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$分别为$m$元与$n$元集，$R \subseteq A \times B$为$A$到$B$的二元关系，可由$m \times n$的矩阵$M_R$表示关系$R$，$M_R = [m_{ij}]_{m \times n}$定义如下，称为关系矩阵：

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & 若(a_i, b_j) \in R \\ 0, & 若(a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

二元关系（续）

- 例：$A = \{1,2,3\}$，$B = \{r,s\}$，$R = \{(1,r),(2,s),(3,r)\}$，

  则用关系矩阵表述关系R为：

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 通常由M_R可方便地验证R是否具备某性质，同时通过M_R可对关系R进行代数处理和机器处理

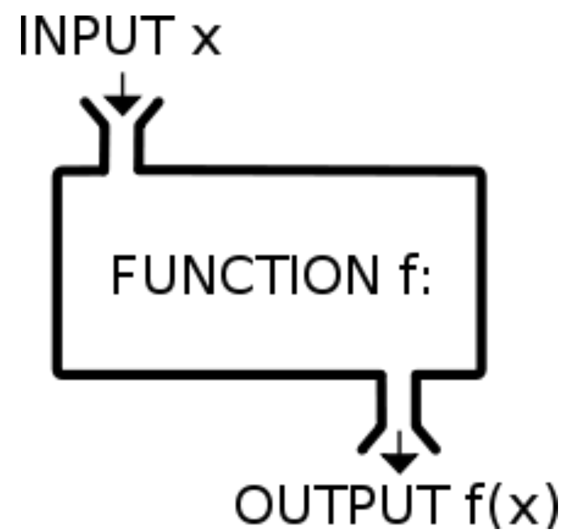
关系与函数

- 函数（function）是人类抽象思维的一个重要对象，函数的提出是科学发展史上一个重要的里程碑
- 从哲学意义上看，函数是将**唯一**的输出值赋予**每一**输入的"法则"，该"法则"可以用函数表达式、数学关系，或者可简单地用一个输入值与输出值的对应表来表示

关系与函数（续）

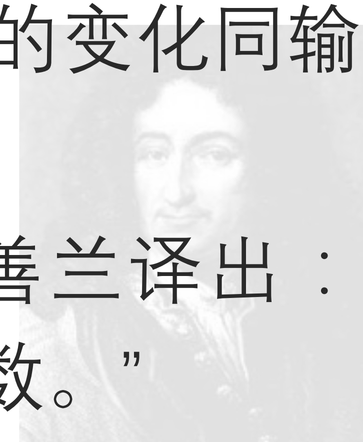
- 函数最重要的性质是其决定性，即同一输入总是对应同一输出（注意，反之未必成立）。从这种视角，可以将函数看作“机器”或者“黑盒”：

它将有效的输入值变换为唯一的输出值。通常将输入值称作函数的参数（argument），将输出值称作函数的值（value）



关系与函数（续）

- “function【拉丁：*functio*】”这个数学名词是G. Leibniz在1694年开始使用的，其所指的函数现在被称作“可导函数”，数学家之外的普通人一般接触到的函数即属此类。对于可导函数可以讨论它的极限和导数。此两者描述了函数输出值的变化同输入值变化的关系，是微积分学的基础



- 中文的“函数”一词由清代数学家李善兰译出：“凡式中函（含）天，为天之函（含）数。”

——（清）李善兰《代数学》

函数定义的历史

- 1718年，J. Bernoulli：“一个变量的函数是指由这个变量和常量以任何一种方式组成的一种量。”

- 1748年，L. Euler：“一个变量的函数是由该变量和一些数或常量以任何一种方式构成的解析式。”

函数定义的历史（续）

- 1775年，Euler所著《微分学原理》：“如果某些量以如下方式依赖于另一些量，即当后者变化时，前者本身也发生变化，则称前一些量是后一些量的函数。”
- 19世纪的数学家开始对数学的各个分支作规范整理。K. Weierstrass提出将微积分学建立在算术——而非几何——的基础上，因而更趋向于欧拉的定义

函数定义的历史（续）

- 到19世纪末，数学家开始尝试利用集合论来规范数学。他们试图将每一类数学对象定义为一个集合。J. Dirichlet给出了现代正式的函数定义。
- Dirichlet的定义将函数视作关系的特例。然而对于实际应用的情况，现代定义和Euler定义的区别可以忽略不计

函数的集合定义

- 设F为二元关系，F为函数指：

$$(\forall x, y, z)(xFy \wedge xFz \rightarrow y = z)$$

当F为函数，若有y使xFy，则这样的y是唯一的，这时记这样的y为$F(x)$，且称y为F在x的值。事实上：

$$F\text{为函数} \leftrightarrow \left(\forall x \in \mathrm{Dom}(F) \rightarrow (\exists!\, y)(xFy)\right)$$

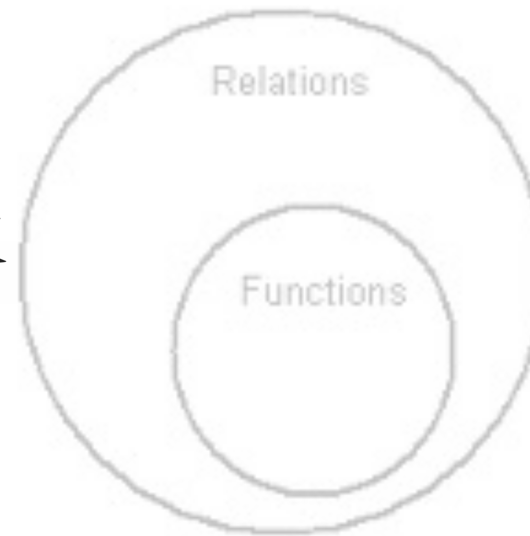
函数的集合定义（续）

- 例：

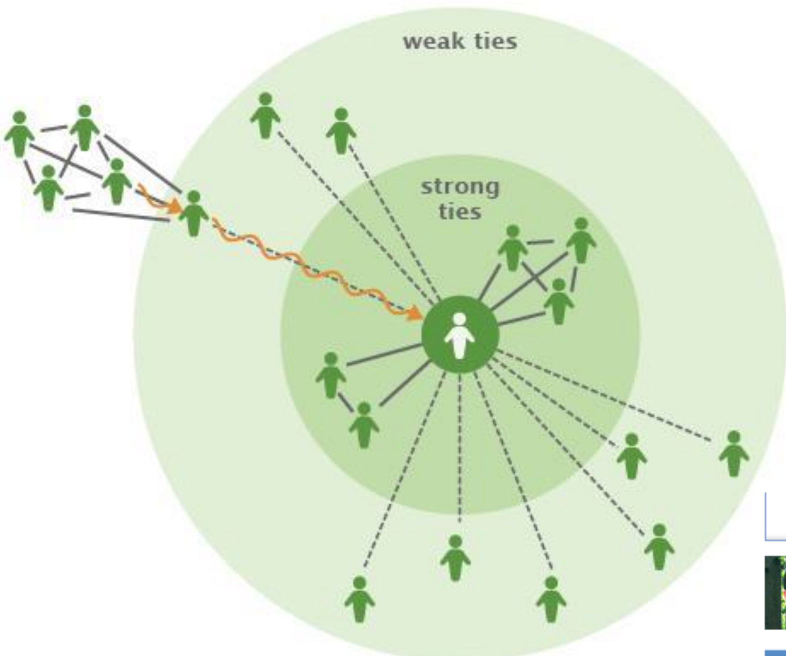
$$F_1 = \{(1,2),(3,2)\}$$ 为函数

$$F_2 = \{(1,2),(1,3)\}$$ 不为函数

$$F_3 = \emptyset$$ 为函数



关系的运算



$$M_{TR} = \sum_{n=1}^{\infty} M_T^n$$

关系的运算（续）

- 定义：设$R \subseteq A \times B$，R的逆（inverse）为

$$R^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in R\}$$

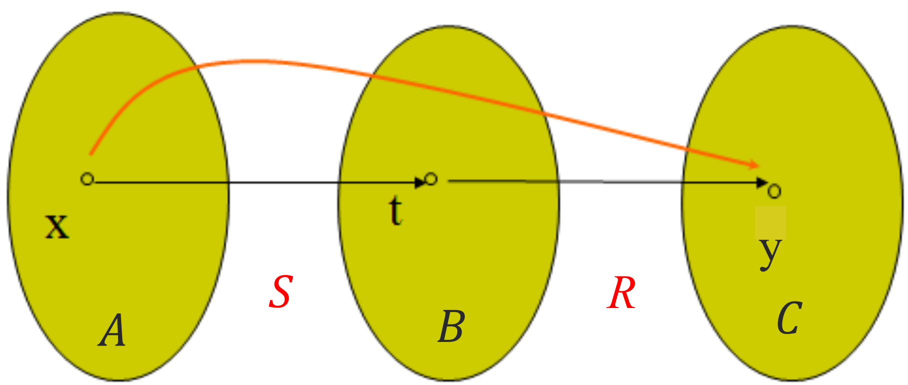
易见，R^{-1}为从B到A的关系：$R^{-1} \subseteq B \times A$

关系的运算（续）

- 定义：设$S \subseteq A\times B, R \subseteq B\times C$，$R$与$S$的复合为

$$R\circ S=\{(x,y)|(\exists t\in B)((x,t)\in S\land(t,y)\in R)\}$$

事实上，$x(R\circ S)y \Leftrightarrow \exists t(xStRy)$ 或 $x(R\circ S)y=$ xS□Ry，$R\circ S$为从A到C的关系



关系的运算（续）

- 设$S \subseteq A \times B$，$R \subseteq B \times C$，则:
  - (1) $(R^{-1})^{-1} = R$
  - (2) $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$
  - (3) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$
  - (4) $\boldsymbol{I_B} \circ S = S \circ \boldsymbol{I_A} = S$

关系的运算（续）

- 求证：$(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$（设 $R_2 \subseteq A\times B$，$R_1 \subseteq B\times C$）
- 证明：只要证明等号左右两个集合相等即可。$(x,y) \in (R_1 \circ R_2)^{-1} \Leftrightarrow (y,x) \in R_1 \circ R_2 \Leftrightarrow \exists t(t \in B \wedge (y,t) \in R_2 \wedge (t,x) \in R_1) \Leftrightarrow \exists t(t \in B \wedge (t,y) \in R_2^{-1} \wedge (x,t) \in R_1^{-1}) \Leftrightarrow (x,y) \in R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$。根据集合相等的定义，命题得证. □

关系的运算（续）

- 定义(关系的幂)：

  设$R \subseteq A \times A$，以下归纳定义关系R的n次幂：

$$R^0 = \boldsymbol{I_A},\ R^{n+1} = R \circ R^n$$

- 一般来说，计算关系的高次幂R^n是比较复杂的，然而我们可以方便地通过关系矩阵M_R来计算M_{R^n}（在第13讲中介绍）

关系的运算（续）

- 关于关系的幂的定理：设R为集合A上的关系
  - (1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$， $m,n \in \mathbb{N}$
  - (2) $(R^m)^n = R^{mn}$， $m,n \in \mathbb{N}$
  - (3) 若存在$S \in \mathbb{N}, T \in \mathbb{N}^+$使$R^S = R^{S+T}$，则：
    - ① $(\forall k \geq S)(R^k = R^{k+T})$
    - ② $(\forall k \geq S)(\forall n \in \mathbb{N})\left(R^k = R^{k+nT}\right)$
    - ③ $\{R^0, R^1, \cdots, R^{S+T-1}\} = \{R^0, R^1, \cdots, R^n, \cdots\}$
  - (4) 若$|A| = n$,则$(\exists s,t \in \mathbb{N})(R^s = R^t \wedge 0 \leq s < t \leq 2^{n^2})$

关系的运算（续）

- 证明：(1)(2)：对n归纳即可；(3)：设$R^S = R^{S+T}$
  - (3.1) 设 $k \geq S, R^k = R^{S+(k-S)} = R^S \circ R^{k-S} = R^{S+T} \circ R^{k-S} = R^{S+T+k-S} = R^{k+T}$

    $\{R^0, R^1, \cdots, R^{S+T-1}\} = \{R^0, R^1, \cdots, R^n, \cdots\}$
  - (3.2) $R^k = R^{k+T} = R^{k+T+T} = R^{k+\overbrace{T+\cdots+T}^{n}} = R^{k+nT}$
  - (3.3) 由(3.2)容易看出，T为R复合的周期。该式说明有穷集上的关系有周期，但无穷集上关系未必有周期

关系的运算（续）

- 证明(4)：$|A| = n \Longrightarrow (\exists \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \in \mathbb{N})(\boldsymbol{R^s} = \boldsymbol{R^t} \wedge \boldsymbol{0} \le \boldsymbol{s} < \boldsymbol{t} \le \boldsymbol{2^{n^2}})$

设$R \subseteq A \times A$，$\because |A| = n \Longrightarrow |A \times A| = n^2 \Longrightarrow$

$|P(A \times A)| = 2^{n^2}$，$\therefore R^0, R^1, \cdots R^{2^{n^2}}$共有$2^{n^2} + 1$个关系在$P(A \times A)$中，由鸽笼原理，$(\exists s, t \in \mathbb{N})(R^s = R^t \wedge 0 \le s < t \le 2^{n^2})$. $\square$

- 鸽笼原理："If $n + 1$ objects are put into n boxes, then at least one box contains two or more of the objects." ——**Pigeonhole Principle** (Das Schubfachprinzip) 由Peter Gustav Lejeune Dirichlet于1834年首提，他用这一原理证明数论中的定理

笛卡尔 (Descartes, 1596－1650)

- 绅士、军人和数学家
- “（解析几何学）使笛卡尔的名字不朽，它构成了人类在精确科学的进步史上所曾迈出的最伟大的一步。”

  —John Stuart Mill
- “我只要求安宁和平静。”，他一生中经常不得不在军营里寻找安宁，寻找在孤独中冥思的平静。
- 笛卡尔生在重建宗教和政治的阵痛中陷于战火中的欧洲。但在非物质的、永恒的一面，情况要好得多。笛卡尔所处的时代是文明史上最伟大的智力时期之一。费马和帕斯卡是他数学上的同代人；莎士比亚辞世时笛卡尔20岁；笛卡尔比伽利略多活8年，笛卡尔卒年牛顿8岁；密尔顿出生时笛卡尔12岁，而哈维比笛卡尔多活了7年

资料来源：E. T. Bell《数学精英》

本次课后作业

- 教材内容：[Rosen] 2.1.6节，9.1节
- 课后习题：
  - 请见“教学立方”课后第七周第一次作业
- 提交截止时间：见“教学立方”