离散数学-第 18 次作业

Problem 1

对以下各小题给定的群 G_1 和 G_2，以及 $f: G_1 \to G_2$，说明 f 是否为群 G_1 到 G_2 的同态，如果是，说明是否为单同态、满同态和同构。求同态像 $f(G_1)$。

(1) $G_1 =< Z, + >$, $G_2 =< R^*, \cdot >$, 其中 R^* 为非零实数集合，$+$ 和 $\cdot$ 分别表示数的加法和乘法。

$$f : Z \to R^*, f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 是偶数} \\ -1 & x \text{ 是奇数} \end{cases}$$

(2) $G_1 =< Z, + >$, $G_2 =< A, \cdot >$, 其中 $+$ 和 $\cdot$ 分别表示数的加法和乘法, $A = \{x | x \in C \wedge |x| = 1\}$, 其中 C 为复数集合。

$$f : Z \to A, f(x) = \cos x + i \sin x$$

Problem 2

证明循环群一定是阿贝尔群，说明阿贝尔群是否一定是循环群，并证明你的结论。

Problem 3

设 G_1 为循环群，f 是群 G_1 到 G_2 的同态，证明 $f(G_1)$ 也是循环群。

Problem 4

设 $G =< a >$ 是 15 阶循环群。

(1) 求出 G 的所有生成元；

(2) 求出 G 的所有子群。

Problem 5

证明：三阶群必为循环群.

Problem 6

设群 $< G, * >$ 除单位元外每个元素的阶均为 2，则 $< G, * >$ 是阿贝尔群。

Problem 7

设 G 为群，试证明: G 为阿贝尔群 $\Leftrightarrow \forall a, b \in G, (ab)^2 = a^2 b^2$