Problem 1

必要性：简单图 G 是二部图，任取 G 中长度为 m 的回路 $C = v_0, v_1, \cdots, v_{m-1}, v_0$

由 G 是二部图可将 $V(G)$分为两个互补子集 V_a 和 V_b，不妨设 $v_0 \in V_a$，则 $v_1 \in V_b$

以此类推，$v_2, v_4, \cdots, v_{m-2} \in V_a$，$v_3, v_5, \cdots, v_{m-1} \in V_b$

即下标为偶数的点属于 V_a，下标为奇数的点属于 V_b，$m-1$ 为奇数，m 为偶数.

充分性:简单图 G 没有包含奇数条边的简单回路，即任一回路都包含偶数条边

假设 G 是连通图，任取点 $v_0 \in V(G)$，设 $V_a = \{v_i \mid v_i \text{ 与 } v_0 \text{ 距离为偶数}\}$

$V_b = \{v_i \mid v_i \text{ 与 } v_0 \text{ 距离为奇数}\}$，任取 $e \in E(G)$，若 e 的两个端点 v_m, v_n 均在 V_a 中

可构建回路 $C = v_i, \cdots, v_0, \cdots, v_j, v_i$，该回路的长度为奇数，矛盾

若 e 的两个端点 v_m, v_n 均在 V_a 中，构建回路长度也为奇数，矛盾

则 v_m, v_n 分别位于 V_a, V_b 中，根据二部图的定义可知 G 是二部图

假设 G 是非连通图，则对 G 的每个连通分量进行上述分析都是二部图，G 是二部图

Problem 2

$\kappa(G)=1$ 的 r-正则图 G $(r>1)$，设每个顶点的度数均为 $deg(v)$，$\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant deg(v)$

原图连通，任意删除一个顶点得到的图不连通，即每个顶点都是割点

剩余 $r-1$ 个点形成的简单图至少有两个连通分量，

最大边数为$(r-2)(r-3)/2$，这 $r-1$ 个点的平均度数最大为$(r-2)(r-3)/2(r-1)$

$deg(v) \leqslant (r-2)(r-3)/2(r-1) + 1 = (r^2-3r+4)/2(r-1) \leqslant r/2$ $(r>1)$，$\lambda(G) \leqslant r/2$

Problem 3

必要性：G 是 2-边连通图，则 G 没有割边. 任取 G 中两个顶点 u, v

则 u, v 之间存在通路 P_1，若任取 u, v 之间其他的通路 P_2 都与 P_1 有公共边

则取 $e \in P_1 \cap P_2$，e 属于 u, v 之间的任何通路，e 是 G 的割边，矛盾

则 G 中任意两个顶点之间至少有两条不含公共边的通路.

充分性：G 中任意两个顶点之间至少有两条不含公共边的通路

若 G 不是 2-边连通图，则 G 有割边，任取 G 的割边 e，两个端点 u, v 之间

至少有两条不含公共边的通路，删除 e 后 G 仍连通，矛盾，则 G 是 2-边连通图.

Problem 4

G 是 k-连通图，则 G 中任意两点被至少 k 条除端点外顶点不相交的路径所连接

从 G 中任意删除 k 条边，至多破坏两点之间的全部路径，形成 2 个连通分支

Problem 5

a) 1° $n=2$，由 G 是连通的简单图可知 $E \geqslant 1 = n-1$，成立

2° 假设 $n=k$ 时成立，即 $E \geqslant k-1$

3° $n=k+1$，G 是连通的简单图，不存在孤立点，顶点最小度数是 1

若 G 中没有度数为 1 的顶点，G 中所有顶点度数和$\geqslant 2k+2$

由握手定理可知 $E \geqslant k+1$，$E \geqslant k$ 成立

若 G 中至少有一个度数为 1 的顶点，任取一个这样的顶点 v

$G' = G-v$，则 G'有 k 个顶点且连通，$E(G') \geqslant k-1$，$E(G)=E(G')+1 \geqslant k$ 成立

b) 令 $E = V$，对 a) 中 $E = V - 1$ 时的 v_i, v_{i+1} 连接加上边 $e = \{v_V, v_1\}$

则该通路首尾相接，G 中全部 V 个点位于同一长度为 $E = V$ 的回路 C 上

若 $E > V$ 时，在上述通路中任意添加边，均不破坏回路 C

Problem 6

若顶点不重复的最大通路长度小于 $\min\{2\delta(G), |V(G)|-1\}$，设通路中的点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，由鸽笼原理存在 i 满足 $1 \leqslant i \leqslant n$ 使得 v_1 与 v_{i+1}, v_i 与 v_n 连通得到一个回路，与回路外任意一点可以构造更长的通路

Problem 7

若 n 阶图 G 不是连通图，则 G 至少有两个连通分支

设 G 恰好有两个连通分支，它们分别为 a 阶连通图和 b 阶连通图

边数和最大为 $C(2, a) + C(2, b) = a(a-1)/2 + b(b-1)/2$，其中 $a+b=n$，则 $a=1, b=n-1$ 时边数最大，为 $C(2, 1) + C(2, n-1) = C(2, n-1)$

则当 n 阶图 G 的边数 $m > C(2, n-1)$ 时，G 只能有一个连通分支，为连通图