南京大学数学课程试卷 （商学院 18 级）

2019/2020 学年 第 一 学期 考试形式 闭卷 课程名称 概率统计 (A 卷)

考试时间 2019.12.30 系别 ____________ 学号 ____________ 姓名 ____________

题号	一 36	二 12	三 10	四 10	五 10	六 12	七 10	合计
得分								

$\Phi(1.0)=0.8413$, $\Phi(1.28)=0.90$, $\Phi(1.38)=0.9162$, $\Phi(1.58)=0.943$, $\Phi(1.645)=0.95$, $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(2)=0.977$ $\Phi(2.33)=0.99$, $t_{0.025}(8)=2.306$, $t_{0.025}(9)=2.262$, $t_{0.05}(8)=1.86$, $t_{0.05}(9)=1.83$, $t_{0.025}(15)=2.131$, $t_{0.05}(15)=1.750$, $t_{0.025}(16)=2.12$, $t_{0.05}(16)=1.746$ $t_{0.025}(48)=2.01$, $t_{0.025}(49)=2.009$, $t_{0.05}(48)=1.679$, $t_{0.05}(49)=1.678$, $\chi^2_{0.025}(8)=17.535$, $\chi^2_{0.025}(9)=19.023$, $\chi^2_{0.025}(10)=20.483$, $\chi^2_{0.05}(8)=15.507$ $\chi^2_{0.05}(9)=16.919$ $\chi^2_{0.05}(10)=18.3$, $\chi^2_{0.1}(9)=14.68$, $\chi^2_{0.1}(10)=16$, $\chi^2_{0.25}(9)=11.4$, $\chi^2_{0.25}(10)=12.5$

一.（6 分×6=36 分）

1．三人独立地去破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$，问此密码被译出的概率是多少？

$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}$ ……3'

……3'

2. 设随机变量 X, Y, Z 相互独立，且 $X\sim U[0,6]$, $Y\sim N(0,4)$, $Z\sim P(3)$，设 $W=X-2Y+3Z+4$，求期望 E(W) 和方差 D(W).

$EW=EX-2EY+3EZ+4=3-0+3\times3+4=16$ ……3'

$DW=DX+4DY+9DZ=3+4\times4+9\times3=46$ ……3'

3．设 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots Y_{15}$ 相互独立且都是总体 $\xi\sim N(20,3)$ 的样本，求 $P(|\bar{X}-\bar{Y}|>\sqrt{2})$.

$\bar{X}\sim N(20,\frac{3}{10})$，$\bar{Y}\sim N(20,\frac{3}{15})$，且 $\bar{X}$ 与 $\bar{Y}$ 相互独立

$\therefore \bar{X}-\bar{Y}\sim N(0,\frac{1}{2})$ ……3'

$P\{|\bar{X}-\bar{Y}|>\sqrt{2}\}=P\{|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}|>2\}=2(1-\Phi(2))=0.046$ ……3'

4. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_{16}$ 是样本，样本均值 $\bar{X}$，样本方差 $S^2 = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{16}(X_i - \bar{X})^2$，试求满足 $P(\bar{X} > \mu + kS) = 0.95$ 的 k 值.

$t = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{16}} \sim t(15)$　　$P\{\bar{x} > \mu + kS\} = P\{\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{16}} > 4k\} = P\{t > 4k\} = 0.9$　……3'

又 $P\{t \geq 1.75\} = P\{t \leq -1.75\} = 0.05$　∴ $P\{t \geq -1.75\} = 0.95$

故 $4k = -1.75$, $k = -0.4375$　……3'

5. 设某铁矿区的磁化率服从 $N(\mu, \sigma^2)$ 分布. 现从中抽取了 $n=49$ 的样本，计算得 $\bar{x}=0.132$, $S=\sqrt{\frac{1}{48}\sum_{i=1}^{49}(x_i-\bar{x})^2}=0.07$. 求磁化率的数学期望 μ 的置信度为 95% 的置信区间.

$n=49$　$\alpha=0.05$　$t_{0.025}(48)=2.01$　$\bar{x}=0.132$, $S=0.07$

$(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{0.025}(48),\ \bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{0.025}(48))$　……3'

$=(0.132-\frac{0.07}{7}\times 2.01,\ 0.132+\frac{0.07}{7}\times 2.01)=(0.1119,\ 0.1521)$　……3'

6. 对总体 X，有 $EX=\mu$, $DX=\sigma^2$ 均存在，$X_1, X_2, \cdots X_n$ 为样本，设 $\hat{\mu}_1 = \bar{X}$ 和 $\hat{\mu}_2 = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$（其中 $C_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} C_i = 1$）为 μ 的两个估计量. (1) 证明 $\hat{\mu}_1$ 和 $\hat{\mu}_2$ 都是 μ 的无偏估计；(2) 比较 $\hat{\mu}_1$ 和 $\hat{\mu}_2$ 的有效性.

(1)　$E\hat{\mu}_1 = E\bar{x} = \mu$,　$E\hat{\mu}_2 = \mu\sum_{i=1}^{n}C_i = \mu$　……2'

(2)　$D\hat{\mu}_1 = D\bar{x} = \frac{\sigma^2}{n}$,　$D\hat{\mu}_2 = \sum_{i=1}^{n}C_i^2 DX_i = \sigma^2\sum_{i=1}^{n}C_i^2$　……2'

由于 $1=(\sum_{i=1}^{n}C_i)^2 \leq n\sum_{i=1}^{n}C_i^2 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^{n}C_i^2 \Rightarrow D\hat{\mu}_1 \leq D\hat{\mu}_2$

$\hat{\mu}_1$ 比 $\hat{\mu}_2$ 有效　……2'

二. (12 分)某商店正在销售一批产品共 10 件，其中有 3 件次品，其余是正品。某顾客去选购时，商店已售出 2 件，该顾客从剩下的 8 件中任意选购一件，试求：(1) 该顾客购到正品产品的概率；(2) 若已知该顾客购到正品产品，则已售出的两件产品都是次品的概率.

(1)　$B=\{$顾客购到正品$\}$,　$A_i=\{$售出的2件中有i件次品$\}$　$i=0,1,2$

$P(A_0)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}$,　$P(A_1)=\frac{C_3^1C_7^1}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}$,　$P(A_2)=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{15}$　……3'

$P(B|A_0)=\frac{5}{8}$,　$P(B|A_1)=\frac{6}{8}$,　$P(B|A_2)=\frac{7}{8}$　……3'

$P(B)=\frac{7}{15}\times\frac{5}{8}+\frac{7}{15}\times\frac{6}{8}+\frac{1}{15}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{10}$　……3'

(2)　$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{15}\times\frac{7}{8}}{\frac{7}{10}}=\frac{1}{12}$　……3'

三．(10 分)设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X～E(3)，Y～E(4)，求 Z=3X+4Y 的概率密度．

令 $\begin{cases} z=3x+4y \\ v=x \end{cases}$ $\begin{cases} x=v \\ y=\frac{z-3v}{4} \end{cases}$，$J=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{vmatrix}=-\frac{1}{4}$ ------ 3'

$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(v)\,p_Y\left(\frac{z-3v}{4}\right)\left|-\frac{1}{4}\right|dv=\frac{1}{4}\int_{\substack{v>0 \\ z>3v}} 3e^{-3v}\cdot 4e^{-4\left(\frac{z-3v}{4}\right)}dv$ ---- 3'

当 $0<z<+\infty$ 时，$p_Z(z)=3e^{-z}\int_0^{\frac{z}{3}} 1\,dv=ze^{-z}$ ---- 4'

四．(10 分)检验员逐个地检查某种产品，每次花 10 秒钟检查一个，但也有可能有的产品需要重复检查一次再用去 10 秒钟．假定每个产品需要重复检查的概率为 $\frac{1}{2}$，求在 8 小时内检查员检查的产品数不少于 1900 个的概率．

$X_i=\{$检查第i个产品所花的时间$\}$ $i=1,2,\cdots,1900$

则 $X_i\sim\begin{pmatrix} 10 & 20 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，$EX_i=15$，$\sigma^2=DX_i=25$ ------ 3'

故 $P\left\{\sum_{i=1}^{1900} X_i\le 8\times 3600\right\}=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{1900} X_i-1900\times 15}{5\sqrt{1900}}\le\frac{8\times 3600-1900\times 15}{5\sqrt{1900}}\right\}$ ···· 4'

$\approx\Phi\left(\frac{6}{\sqrt{19}}\right)=\Phi(1.38)=0.9162$ ------ 3'

五．(10 分)从正态总体 $N(\mu,0.5^2)$ 中抽取样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$，(1) 已知 $\mu=0$，求概率 $P(\sum_{i=1}^{10} X_i^2\ge 4)$；(2) μ 未知，求概率 $P(\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2\ge 2.85)$．

(1) $\chi_1^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{10}X_i^2\sim\chi^2(10)$ $\sigma^2=0.5^2$

$P\left\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2\ge 4\right\}=P\left\{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{10}X_i^2\ge\frac{4}{0.5^2}\right\}=P\{\chi_1^2\ge 16\}=0.1$ ······ 5'

(2) $\chi_2^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(9)$

$P\left\{\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2\ge 2.85\right\}=P\left\{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2\ge\frac{2.85}{0.5^2}\right\}=P\{\chi_2^2\ge 11.4\}=0.25$

---- 5'

六. (12 分)设总体 X 的密度函数为 $p(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta^2}(\theta-x), & 0<x<\theta \\ 0, & 其它\end{cases}$， $X_1, X_2, \cdots X_n$ 为样本， (1)求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}$； (2)此估计量 $\hat{\theta}$ 是无偏和一致的吗？说明理由.

(1) $EX=\int_0^\theta x\frac{2}{\theta^2}(\theta-x)dx=\frac{\theta}{3}$ 令 $\frac{\theta}{3}=\bar{X}$. 矩估计量 $\hat{\theta}=3\bar{X}$ ……3'

(2) $E\hat{\theta}=3E\bar{X}=3\times\frac{\theta}{3}=\theta$. $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计. ……3'

又 $EX^2=\int_0^\theta x^2\frac{2}{\theta^2}(\theta-x)dx=\frac{\theta^2}{6}$， $DX=\frac{\theta^2}{18}$ ……3'

$D\hat{\theta}=9D\bar{X}=9\frac{DX}{n}=\frac{9}{n}\frac{\theta^2}{18}=\frac{\theta^2}{2n}\longrightarrow 0\ (n\to\infty)$

∴ $\hat{\theta}$ 是 θ 的一致估计. ……3'

七. (10 分) 一种元件，要求其平均使用寿命不得低于 1000 小时，今从这批元件中随机地抽取 25 件，测得其平均寿命为 950 小时. 已知该种元件寿命 X 服从标准差 $\sigma=100$ 小时的正态分布.（1）试在显著水平 $\alpha=0.05$ 下确定这批元件是否合格？（2）求 $\mu=EX$ 的置信度为 95%的置信区间.

(1) $H_0: \mu\geq 1000$， $H_1: \mu<1000$

$$U=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{950-1000}{100/\sqrt{25}}=-2.5$$

$\alpha=0.05$， $u_{0.05}=1.645$. $W=(-\infty, -1.645]$ ——5'

拒绝 H_0. 这批产品不合格.

(2) $\alpha=0.05$ $u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}=1.96$

$$\left(\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\ \bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right)=\left(950-\frac{100}{\sqrt{25}}\times 1.96,\ 950+\frac{100}{\sqrt{25}}\times 1.96\right)$$

$=(910.8,\ 989.2)$ ——5'