



探索：能否只使用一个逻辑运算符号（可以自定义二元运算）构建出全部的命题？（不限制使用次数）

定义逻辑运算符#： $a \# b = \neg(a \wedge b)$ ，判断#是否符合要求

1. 验证 $a \# a = \neg a$ 。
2. 尝试仅用#表示 $a \wedge b$ 、 $a \vee b$ 、 $a \rightarrow b$ 。
3. 存在多少个不同的逻辑运算，满足题目条件？



定义逻辑运算符#: $a \# b = \neg(a \wedge b)$

1. 验证 $a \# a = \neg a$ 。

解: $a \# a = \neg(a \wedge a)$
 $= \neg a$ 幂等律



定义逻辑运算符#: $a \# b = \neg(a \wedge b)$

1. 验证 $a \# a = \neg a$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: } a \# a &= \neg(a \wedge a) \\ &= \neg a \quad \text{幂等律} \end{aligned}$$

2. 用#表示 $a \wedge b$

$$\begin{aligned} \text{解: } a \wedge b &= \neg \neg(a \wedge b) \quad \text{双重否定律} \\ &= \neg(a \# b) \quad \text{定义} \\ &= (a \# b) \# (a \# b) \end{aligned}$$



定义逻辑运算符#: $a \# b = \neg(a \wedge b)$

2. 用#表示 $a \vee b$ 、 $a \rightarrow b$

解: $a \vee b = \neg(\neg a \wedge \neg b)$ 德摩根律

$= \neg(\neg((\neg a) \# (\neg b)))$ 利用上一页的公式

$= (\neg a) \# (\neg b)$ 双重否定律

$= (a \# a) \# (b \# b)$



定义逻辑运算符#: $a \# b = \neg(a \wedge b)$

2. 用#表示 $a \vee b$ 、 $a \rightarrow b$

解: $a \vee b = \neg(\neg a \wedge \neg b)$ 德摩根律

$= \neg(\neg((\neg a) \# (\neg b)))$ 利用上一页的公式

$= (\neg a) \# (\neg b)$ 双重否定律

$= (a \# a) \# (b \# b)$

解: $a \rightarrow b = \neg a \vee b$

$= (\neg \neg a) \# (\neg b)$ 利用上方的公式

$= a \# (\neg b)$ 双重否定律

$= a \# (b \# b)$



探索：能否只使用一个逻辑运算符号（可以自定义二元运算）构建出全部的命题？（不限制使用次数）

答：已验证仅使用逻辑运算符# (真值表如右图所示)， $a \# b = \neg(a \wedge b)$ ，可以表示 \neg ， \wedge ， \vee ， \rightarrow ， \leftrightarrow ，因此可以构建出全部命题。

我们称， $\{\#\}$ 构成的逻辑系统是完备的。

a	b	$a \# b$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



探索：能否只使用一个逻辑运算符号（可以自定义二元运算）构建出全部的命题？（不限制使用次数）

3. 存在多少个不同的逻辑运算，满足题目条件？

尝试：能否逐个验证所有的二元逻辑运算？



探索：能否只使用一个逻辑运算符号（可以自定义二元运算）构建出全部的命题？（不限制使用次数）

3. 存在多少个不同的逻辑运算，满足题目条件？

尝试：能否逐个验证所有的二元逻辑运算？

a	b	$a \odot b$
0	0	?
0	1	?
1	0	?
1	1	?

每行有1或0两个选择，
一共有 $2^4=16$ 种二元逻辑运算！

能否快速去掉一些错误答案？



提示：可以先考虑该运算符能否表示 $\neg a$ 。

a	b	$a \odot b$
0	0	1
0	1	?
1	0	?
1	1	0

答案：只有两个逻辑运算符符合要求：

$$a \odot b = \neg(a \wedge b)$$

a	b	$a \odot b$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$a \odot b = \neg(a \vee b)$$

a	b	$a \odot b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



课后探索：

(\neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow) 中，每次仅使用两个运算，有哪些组合可以构建出全部的命题？