Problem 1

对 $m=n\geqslant 2$ 来说，完全二部图 $K_{m,n}$ 具有哈密尔顿回路.

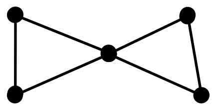
当 $m=n$ 时，每个顶点的度数为 $m=n=(m+n)/2$，由狄拉克定理 $K_{m,n}$ 具有哈密尔顿回路

当 $m\neq n$ 时，不妨设 $m>n$, m 个顶点中任取 n 个与 n 个构成 $K_{n,n}$，具有哈密尔顿回路

哈密尔顿回路不能包含更小的回路，则 $K_{m,n}$ 不具有哈密尔顿回路

Problem 2

a) 反驳：如图, $n=5$，$\delta(G)=2$, $2\geqslant(5-1)/2$，但不存在哈密尔顿回路



b) 证明：构造 $G'=G*K1$，即增加一个顶点, V(G)条边使其与 G 中所有顶点都邻接

此时 $V(G')=V(G)+1$，$\delta(G')=\delta(G)+1$，由$\delta(G)\geqslant(V(G)-1)/2$ 可得

$\delta(G')\geqslant(V(G)+1)/2=V(G')/2$，由狄拉克定理 G'存在哈密尔顿回路

从通路中删去新增的点得到哈密尔顿通路，即 G 一定存在哈密尔顿通路

Problem 3

充分性：设竞赛图中的顶点数为 n, n=1 或 n=2 时竞赛图不可能是强连通的

1) 当 $n\geqslant 3$ 时，任取一点 v，构建 $V1=\{u\in V \mid <u, v>\in E\}$, $V2=\{u\in V \mid <v, u>\in E\}$

竞赛图强连通，则 V1, V2 非空且 $V1\cup V2=V-\{v\}$，存在 $v1\in V1$, $v2\in V2$

满足$<v2, v1>\in E$，则 v, v1, v2 构成长度为 3 的回路

2) 假设当 $n\geqslant 3$ 时，竞赛图中存在长度为 $k<n$ 的回路 $C=v1v2\cdots vkv1$

则若对任意 vs, vt$(1\leqslant s<t\leqslant k)$，回路 C 外存在一点 v 使得$<vs, v>$, $<v, vt>\in E$

对 vi, vi+1$(1\leqslant i\leqslant k-1)$，存在 v 使得$<vi, v>$, $<v, vi+1>\in E$

可以构建回路 $C'=v1v2\cdots vi\ v\ vi+1\cdots vkv1$，是长度为 k+1 的回路

若对任意 vs, vt$(1\leqslant s<t\leqslant k)$，回路 C 外不存在点 v 使得$<vs, v>$, $<v, vt>\in E$

令 $V1=\{v$ 不属于回路 $C \mid$ 存在 C 上一点 vi 使$<v, vi>\in E\}$

$V2=\{v$ 不属于回路 $C \mid$ 存在 C 上一点 vi 使$<vi, v>\in E\}$

则 V1, V2 非空，且 $V1\cup V2=V-\{vi \mid i = 1, 2, \cdots, k\}$

存在 $s\in V1$, $t\in V2$ 满足$<s, t>\in E$，在 C 上任取三点 vi-1, vi, vi+1

可以构建回路 $C'=v1v2\cdots vi-1\ s\ t\ vi+1\cdots vkv1$，是长度为 k+1 的回路

对强连通竞赛图重复 1) 2)步骤一定可以构建长度为 n 的回路，即哈密尔顿回路

必要性：竞赛图含有哈密尔顿回路，则图中任意两点 s, t 均位于哈密尔顿回路上

设回路 $c=v1v2\cdots vi-1\ s\ vi+1\cdots vj-1\ t\ vj+1\cdots vnv1$，则存在从 s 到 t 的通路

$s\ vi+1\cdots vj-1\ t$ 和从 t 到 s 的通路 $t\ vj+1\cdots vnv1\cdots vi-1\ s$，竞赛图强连通

Problem 4

设 G 为 11 阶图，每个点对应一门课程，两点之间有边当且仅当这两门课程老师不同

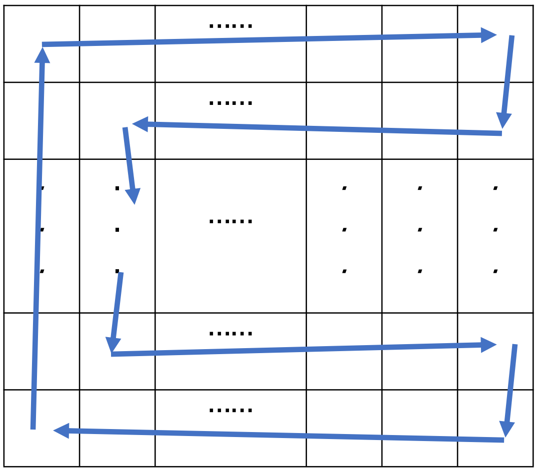
没有老师担任多于 6 门课程，即顶点的度最小是 5，$\delta(G)\geqslant 5=(V(G)-1)/2$

由 Problem 2 b)可知 G 中存在哈密尔顿通路，即一个符合上述要求的考试安排

Problem 5

a) 当 N 是偶数且 M>1 时，在 N 行 M 列的网格中记第 i 行 j 列方格对应的点为 vij 则

构造 C=v11, v12, ⋯, v1n, v2n, v2 (n-1), ⋯, v22, v32, v33, ⋯, v3n, ⋯,
Vmn, vm(n-1), ⋯, vm1, v(m-1) 1, ⋯, v21, v11. 则 C 为哈密尔顿回路，如图



b) 当 N 和 M 都是大于 1 的奇数时，取前 N-1 行，则 N-1 为偶数
由 a) 中构造方法可得 M×N-1 的网格构成的图 G 有哈密尔顿回路
哈密尔顿回路不能包含更小的回路，则 M×N 网格的图不具有哈密尔顿回路

Problem 6

简单图 G 中 V(G)=n, E(G)=m，所有顶点的度数之和为 $2m>(n-1)(n-2)+2=n^2-3n+4$
在该图中去掉任意两个顶点 u 和 v，有(n-2)个顶点的完全图有(n-2)(n-3)/2 条边
即一个有(n-2)个顶点的简单图中所有点的度数之和最大为$(n-2)(n-3)=n^2-5n+6$
则有 $deg(u)+deg(v)>[(n^2-3n+4)-(n^2-5n+6)]/2=n-1$
即对 G 中任意两点 u, v 都有 $deg(u)+deg(v)\geqslant n$, G 一定存在哈密尔顿通路