

# 离散数学第九次作业

## Problem 1

给出下述集合的递归定义:

- a) 正偶数集合.
- b) 3 的正整数次幂的集合.
- c) 整系数多项式的集合.

## Problem 2

用数学归纳法证明平面上过同一点的  $n$  条直线将平面分为  $2n$  个区域.

## Problem 3

证明 (亦可不用数学归纳法):

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left( \sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

## Problem 4

正整数  $n$  的拆分是把  $n$  写成正整数之和的方式. 例如,  $7 = 3 + 2 + 1 + 1$  是 7 的拆分. 设  $P_m$  等于  $m$  的不同分拆的数目, 其中和式里项的顺序无关紧要, 并设  $P_{m,n}$  是用不超过  $n$  的正整数之和来表示  $m$  的不同方式数.

- a) 证明:  $P_{m,m} = P_m$ .
- b) 证明: 下面的  $P_{m,n}$  的递归定义是正确的.

$$P_{m,n} = \begin{cases} 1 & m = 1 \\ 1 & n = 1 \\ P_{m,m} & m < n \\ 1 + P_{m,m-1} & m = n > 1 \\ P_{m,n-1} + P_{m-n,n} & m > n > 1 \end{cases}$$

c) 用这个递归定义求出 5 和 6 的拆分数。

## Problem 5

a) 对于表示十进制数字的非空字符串  $s$ , 给出计算  $s$  中最小数字的函数  $m(s)$  的递归定义.

b) 用结构归纳法证明  $m(s \cdot t) = \min(m(s), m(t))$ . (其中  $s \cdot t$  表示位串  $s$  和位串  $t$  的连接)

## Problem 6

利用数学归纳法证明: 当  $n$  为正整数时,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = 0.$$

## Problem 7

证明算术基本定理. 即: 每个大于 1 的自然数, 要么本身就是质数, 要么可以写为 2 个或以上的质数的积. 并且这些质因子按大小排列之后, 写法仅有一种方式.