Problem 1

a) $0 \in S$, $\forall n \in S(n-2 \in S \vee n+2 \in S)$

b) $3 \in S$, $\forall n \in S(3n \in S)$

c) $0 \in S$, $\forall p(x) \in S(\forall a \in Z\ \forall n \in N\ (p(x) + ax^n) \in S))$

Problem 2

设 $P(n)$是命题: 平面上过同一点的 n 条直线将平面分为 $2n$ 个区域.

基础步骤: 命题 $P(1)$为真, 平面上过一点的 1 条直线将平面分为 2 个区域.

归纳步骤: 假设对正整数 k, $P(k)$为真, 平面上过同一点的 n 条直线将平面分为 $2n$ 个区域.

证明在归纳假设下 $P(k+1)$必为真, 即过一点的 $n+1$ 条直线将平面分为 $2(n+1)$个区域

设第 $n+1$ 条直线 l, l 与前 n 条直线都不重合, 设与 l 距离最近的直线为 $l1$ 和 $l2$,

则 l 将 $l1$ 和 $l2$ 之间形成的 2 个区域分别分为 2 个, $l1$ 与 $l2$ 之间共 4 个区域,

前 n 条直线除去 $l1$, $l2$ 之间共形成 $2n-2$ 个区域, 则 $n+1$ 条共形成 $2n-2+4 = 2n+2$ 个.

根据数学归纳法可知对所有的正整数 n, $P(n)$为真.

得出结论: 平面上过同一点的 n 条直线将平面分为 $2n$ 个区域.

Problem 3

设 $P(n)$是命题: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$.

基础步骤: 命题 $P(1)$表示 $1^3 = 1 = 1^2$, $P(1)$是真的.

归纳步骤: 假设对正整数 k, $P(k)$为真, 即 $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = (1+2+\cdots k)^2$.

证明在归纳假设下 $P(k+1)$必为真, 即 $1^3 + \cdots + (k+1)^3 = (1+2+\cdots+(k+1))^2$.

等式左边$= (1^3 + 2^3 + \cdots + k^3) + (k+1)^3 = (1+2+\cdots k)^2 + (k+1)^3$

$=(k(k+1)/2)^2 + (k+1)^3 = ((k+1)(k+2)/2)^2 = (1+2+\cdots+(k+1))^2 =$右边.

根据数学归纳法可知对所有的正整数 n, $P(n)$为真.

得出结论: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$.

Problem 4

a) $P_{m,m}$ 表示用不超过 m 的正整数之和来表示 m 的不同方式数

P_m 表示 m 不同分拆的数目, 显然分拆正整数必不大于 m, $P_{m,m} = P_m$.

b) 1° 1 的分拆只有一种方式, 即 $1=1$, 显然 $P_{1,n} = 1$.

2° 用不超过 1 的正整数(即 1)表示 m 只一种方式, $m = 1+1+\cdots+1$ (m 个 1), $P_{m,1} = 1$.

3° 当 $m<n$ 时, 由于 m 分拆得到的正整数必不大于 m, $P_{m,n} = P_{m,m}$.

4° 用不超过 $m-1$ 的正整数表示 m 有 $P_{m,m-1}$ 种方式, 用超过 $m-1$ 的正整数(即 m) 表示 m 只有一种方式, 即 $m=m$, $P_{m,m} = 1 + P_{m,m-1}$.

5° 用不超过 $n-1$ 的正整数表示 m 有 $P_{m,n-1}$ 种方式, 用不超过 n 的正整数表示 m 分为两种情形, 若一定不使用 n, 有 $P_{m,n-1}$ 种, 若一定使用 n, 等价先对 m 减去一个 n, 再用不超过 n 的正整数表示 $m-n$, 有 $P_{m-n,n}$ 种, 所以 $P_{m,n} = P_{m,n-1}+P_{m-n,n}$.

c) $P_5 = P_{5,5} = 1+P_{5,4} = 1+P_{5,3}+P_{1,4} = 1+P_{5,2}+P_{2,3}+P_{1,1} = 1+P_{5,1}+P_{3,2}+P_{2,2}+1$

$= 1+1+P_{3,1}+P_{1,2}+1+P_{2,1}+1 = 1+1+1+P_{1,1}+1+1+1 = 6+1 =7$.

$P_6 = P_{6,6} = 1+P_{6,5} = 1+P_{6,4}+P_{1,5} = 1+P_{6,3}+P_{2,4}+P_{1,1} = 1+P_{6,2}+P_{3,3}+P_{2,2}+1$

$= 2+P_{6,1}+P_{4,2}+1+P_{3,2}+1+P_{2,1} = 4+1+P_{4,1}+P_{2,2}+P_{3,1}+P_{1,2}+1$

$= 6+1+1+P_{2,1}+1+P_{1,1} = 9+1+1 = 11$.

Problem 5

a) 对于 $x \in D = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $m(x) = x$;
对于 $s=tx$, 其中 $t \in D*$且 $x \in D$, $m(s) = m(tx) = \min(m(t), x)$.

b) 将 t 表示为 $t=\omega x$, 其中$\omega \in D*$且 $x \in D$.
基础步骤: 对于$\omega=\lambda$, $m(s\cdot t) = m(sx) = \min(m(s), x) = \min(m(s), m(x))$;
归纳步骤: 对于$\omega \neq \lambda$, 假设 $m(s\cdot\omega) = \min(m(s), m(\omega))$成立, 则对 $t=\omega x$ 有
$m(s\cdot t) = m((s\omega)x) = \min(m(s\omega), x) = \min(\min(m(s), m(\omega)), x$
$= \min(m(s), \min(m(\omega), x) = \min(m(s), m(\omega x)) = \min(m(s), m(t))$.
根据结构归纳法可知对所有的 $t \in D*$, $m(s\cdot t) = \min(m(s), m(t))$均成立.
得出结论: $m(s\cdot t) = \min(m(s), m(t))$.

Problem 6

设 P(n)是命题: 对所有正整数 n 有 $\lim_{x\to\infty} (\ln x)^n/x = 0$.
基础步骤: 对于 n=1 由洛必达法则 $\lim_{x\to\infty} \ln x/x = \lim_{x\to\infty} 1/x = 0$, P(1)成立.
归纳步骤: 假设对于 n=k 有 $\lim_{x\to\infty} (\ln x)^k/x = 0$, 则对 n=k+1 由洛必达法则
$\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{(k+1)}/x = \lim_{x\to\infty} (k+1)(\ln x)^k/x = (k+1) \lim_{x\to\infty} (\ln x)^k/x$
k+1 为有界变量, $\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{(k+1)}/x = 0$, P(k+1)成立.
根据数学归纳法可知对所有正整数 n, P(n)成立.
得出结论: 当 n 为正整数时, $\lim_{x\to\infty} (\ln x)^n/x = 0$.

Problem 7

1° 存在性: 设存在大于 1 的自然数 x 既不是质数, 也不能写为 2 个或以上的质数的积.
则存在非空集合 S, 使得对所有符合上述条件的 x 都有 $x \in S$.
由良序原理可知 S 中存在一个最小的元素 n, n 不是质数, 则 n 可以写成 $a * b$.
且 $1<a<n$, $1<b<n$, n 是 S 中最小的元素, 所以 a, b 不属于集合 S.
则 a 和 b 要么是质数, 要么可以写成 2 个或以上质数的乘积,
即 n 可以写成若干质数的乘积, 矛盾, S 是空集, 不存在这样的自然数 x.

2° 唯一性: 设存在大于 1 的自然数 x 质因子按大小排列之后的写法多于一种.
则存在非空集合 S, 使得对所有符合上述条件的 x 都有 $x \in S$.
由良序原理可知 S 中存在一个最小的元素 n, n 质因子按大小排列的写法多于一种.
则 n 不是质数, 设 $n = p_1 * p_2 * \cdots * p_n = q_1 * q_2 * \cdots * q_k$, 存在 $1 \leqslant i \leqslant n$ 使 $p_i \neq q_i$.
由裴蜀定理可知存在 i, j 使 $p_i \mid q_j$ $(1 \leqslant i \leqslant k, 1 \leqslant j \leqslant k)$, 由于 p_i, q_j 均为质数, 则 $p_i = q_j$
存在一个比 n 小的元素 m, 使 $m = p_1 * \cdots * p_{i-1} * p_{i+1} * \cdots * p_k = q_1 * \cdots * q_{j-1} * q_{j+1} * \cdots * q_k$,
且 m 也满足 S 要求的性质, $m \in S$, 与 n 是 S 中最小的元素矛盾.

综上所述, 每个大于 1 的自然数, 要么本身就是质数, 要么可以写为 2 个或以上质数的积.
并且这些质因子按大小排列之后, 写法仅有一种方式.