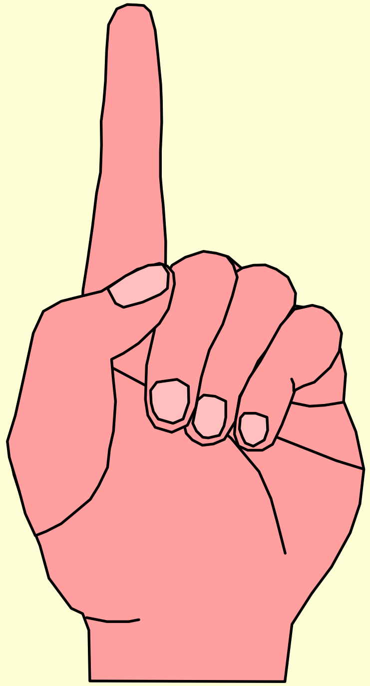
第三章 多维随机变量及其分布

- 二维随机变量的分布
- 边缘分布
- 随机变量的独立性
- 两个随机变量函数的分布



§1 二维随机变量的分布

定义

n个随机变量$X_1, X_2, \cdot\cdot\cdot, X_n$构成的n维随机向量$(X_1, X_2, \cdot\cdot\cdot, X_n)$，称为n维随机变量。

一维随机变量**X**——**R^1**上的随机点坐标。

二维随机变量**(X,Y)**——**R^2**上的随机点坐标。

n维随机变量$(X_1, X_2, \cdot\cdot\cdot, X_n)$——**$R^n$**上的随机点坐标。

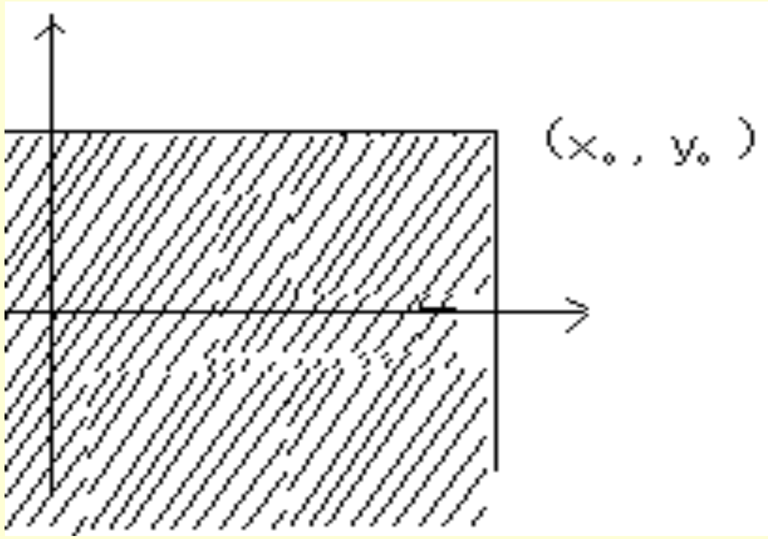
定义

设(X, Y)是二维随机变量，(x, y)$\in R^2$, 则称

$$F(x,y)=P\{X\le x,\ Y\le y\}$$

为(X, Y)的分布函数，或称为X, Y的联合分布函数。

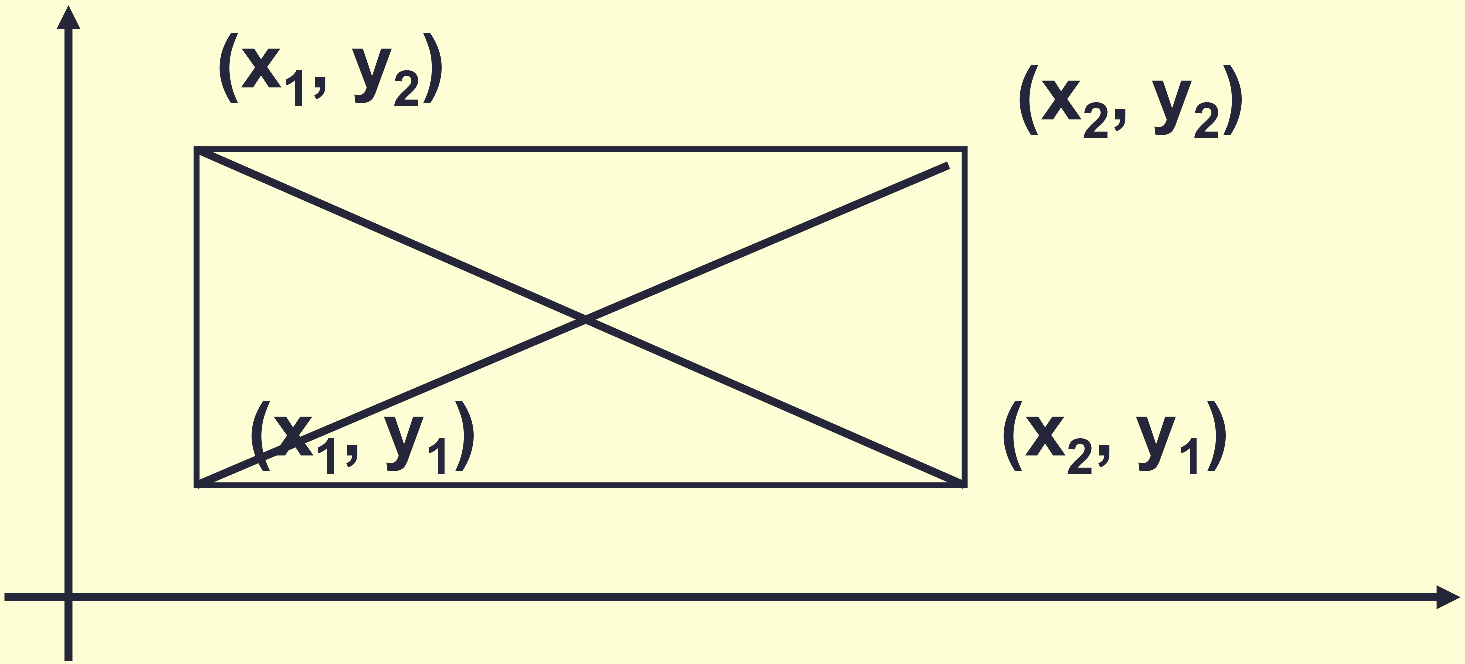
几何意义：分布函数$F(x_0,y_0)$表示随机点(X,Y)落在区域$\{(x,y)|-\infty<x<x_0,\ -\infty<y<y_0\}$中的概率。如图阴影部分：



对于$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R^2$, $(x_1 < x_2,\ y_1 < y_2)$,则

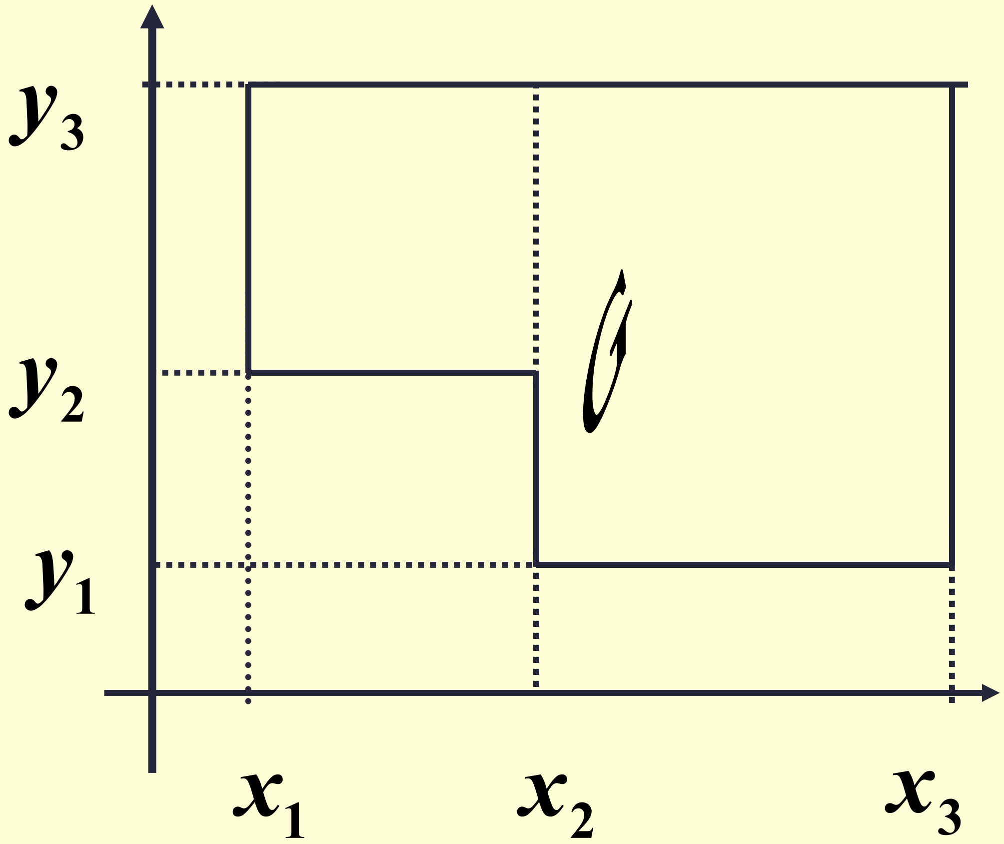
$$P\{x_1 < X \le x_2,\ y_1 < Y \le y_2\}$$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1).$$



EX

已知随机变量(X,Y)的分布函数F (x,y),求(X,Y)落在如图区域G内的概率.



答:

$$P\{(X,Y)\in G\}=[F(x_2,y_1)+F(x_3,y_3)-F(x_2,y_3)-F(x_3,y_1)]$$

$$+[F(x_1,y_2)+F(x_2,y_3)-F(x_1,y_3)-F(x_2,y_2)]=\cdots$$

分布函数F(x, y)具有如下性质：

(1) 归一性　对任意$(x, y)\in R^2$，　$0\le F(x, y)\le 1$，

且

$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1$$

$$F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x,y)=0$$

$$F(-\infty,y)=\lim_{x\to-\infty}F(x,y)=0$$

$$F(x,-\infty)=\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0$$

(2) 单调不减性

对任意$y\in R$，当$x_1<x_2$时，

$$F(x_1, y) \le F(x_2, y);$$

对任意$x\in R$，当$y_1<y_2$时，

$$F(x, y_1) \le F(x, y_2).$$

(3) 右连续性　　对任意$x\in R$，　$y\in R$，

$$F(x, y_0+0) = \lim_{y\to y_0^+} F(x, y) = F(x, y_0).$$

$$F(x_0+0, y) = \lim_{x\to x_0^+} F(x, y) = F(x_0, y);$$

(4) 矩形不等式

对于任意$(x_1, y_1), (x_2, y_2)\in R^2$, $(x_1< x_2,\ y_1<y_2)$,

$$F(x_2, y_2)-F(x_1, y_2)-F(x_2, y_1)+F(x_1, y_1)\geq 0.$$

反之，任一满足上述四个性质的二元函数F(x, y)都可以作为某个二维随机变量(X, Y)的分布函数。

例1 已知二维随机变量(X, Y)的分布函数为

$$F(x,y)=A[B+arctg(\frac{x}{2})][C+arctg(\frac{y}{3})]$$

1) 求常数A，B，C。 2) 求P{0<X≤2,0<Y≤3}

解: $$F(+\infty,+\infty)=A[B+\frac{\pi}{2}][C+\frac{\pi}{2}]=1$$

$$F(-\infty,y)=A[B-\frac{\pi}{2}][C+arctg(\frac{y}{3})]=0$$

$$F(x,-\infty)=A[B+arctg(\frac{x}{2})][C-\frac{\pi}{2}]=0$$

$$\Rightarrow B=C=\frac{\pi}{2} \quad A=\frac{1}{\pi^2}$$

$$P\{0<X\le 2,0<Y\le 3\}=F(0,0)+F(2,3)-F(0,3)-F(2,0)=\frac{1}{16}$$