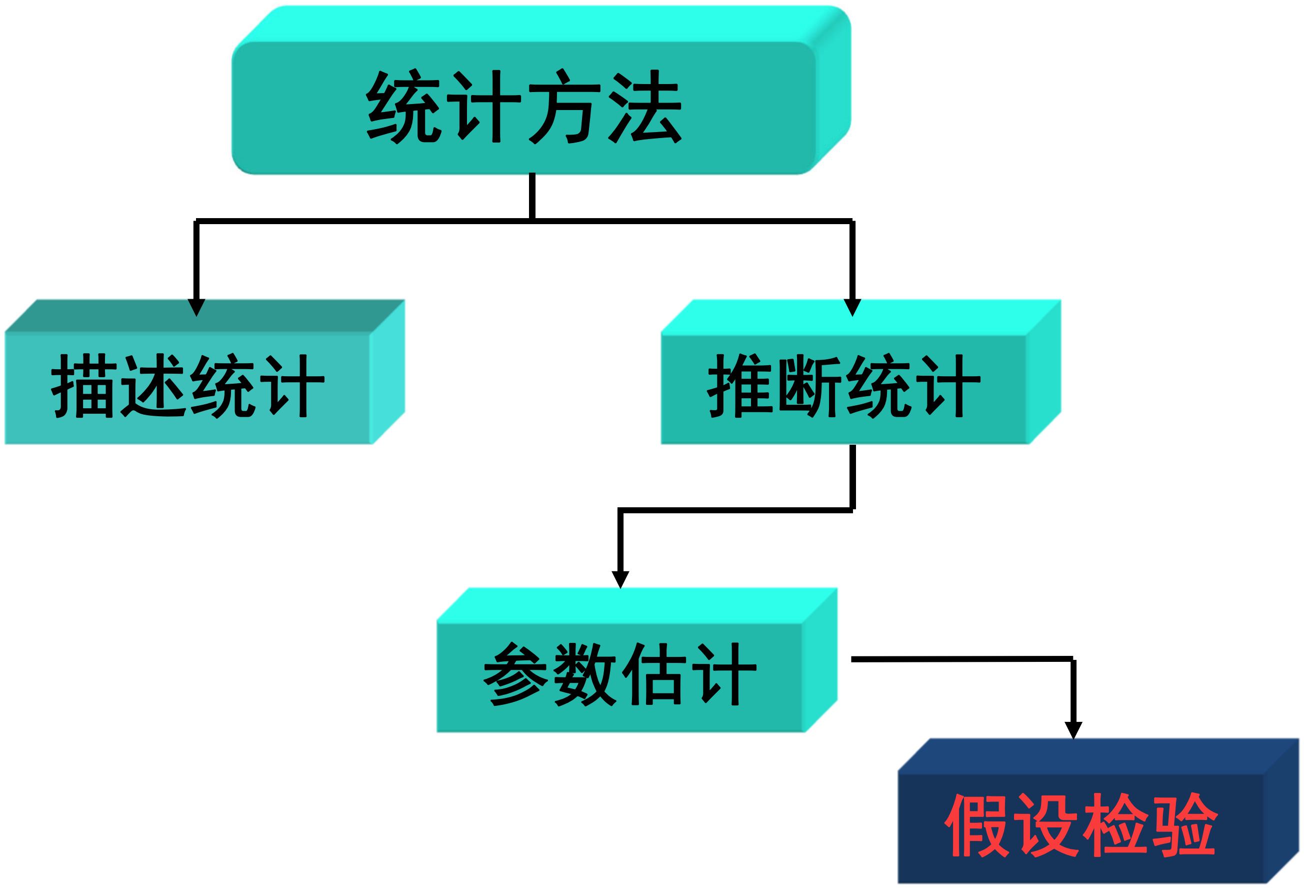
第八章 假设检验

本章主要内容

- 假设检验的基本概念
- 正态总体参数的假设检验
- 两个正态总体参数的假设检验

1 假设检验在统计学中的地位



1 假设检验的基本概念

例 1　根据长期的经验和资料分析，某砖瓦厂生产的砖的“抗断强度”X服从正态分布，方差$\sigma^2=1.21$，今从该厂生产的一批砖中，随机抽取 6 块，测得抗断强度(kg/cm^2)为：32.56, 29.66, 31.64, 30.00, 31.87, 31.03，问可否认为这批砖的平均抗断强度为 32.50 kg/cm^2?

1 假设检验的基本概念

解： 以μ表示X的均值，于是$X \sim N(\mu, 1.21)$，问题是要检验：

$$H_0: \mu = \mu_0 = 32.50, \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

辛钦大数定律：样本均值$\bar{X}$依概率收敛到总体均值μ

估 计 理 论： $\bar{X}$是μ的无偏估计.

因此，当H_0(即$\mu=\mu_0$)成立时，差值$|\bar{x}-\mu_0|$应该较小，或$\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|$较小；反之，当$H_1$成立时，$\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|$体现为较大.

因此， 可适当选取一个正数k，称为**临界点**，当$\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq k$时，拒绝假设$H_0$；反之，当$\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<k$时，接受假设$H_0$.

设$H_0:\mu=\mu_0$为真，构造统计量

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

给定一个小概率α(称为显著性水平)，取$k=z_{\alpha/2}$，得

$$P\{|Z|\geq z_{\alpha/2}\}=P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq z_{\alpha/2}\right\}=\alpha$$

由于α是一个小概率，因此$\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq z_{\alpha/2}\right\}$是一个小概率事件，在一次试验中是几乎不能发生的．当样本观察值$\bar{x}$满足$\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq z_{\alpha/2}$时，小概率事件发生，故拒绝假设$H_0$；反之，接受$H_0$.

通常，称假设H_0为原假设或零假设，H_1为备择假设。备择假设是指在原假设被拒绝后可供选择的假设，假设检验中所用的统计量称为检验统计量.

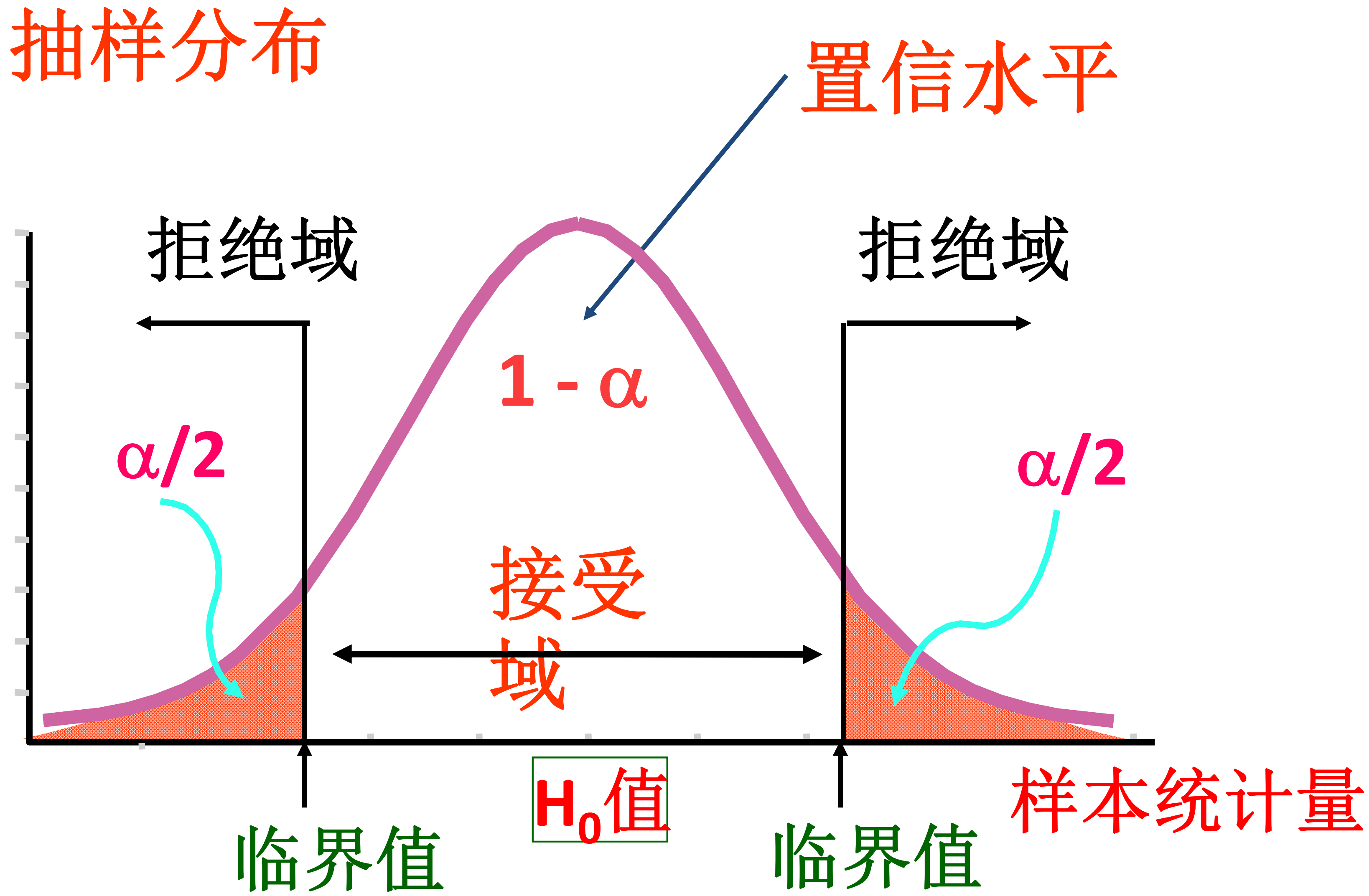
例 1 的检验法使用了正态统计量及其符号

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

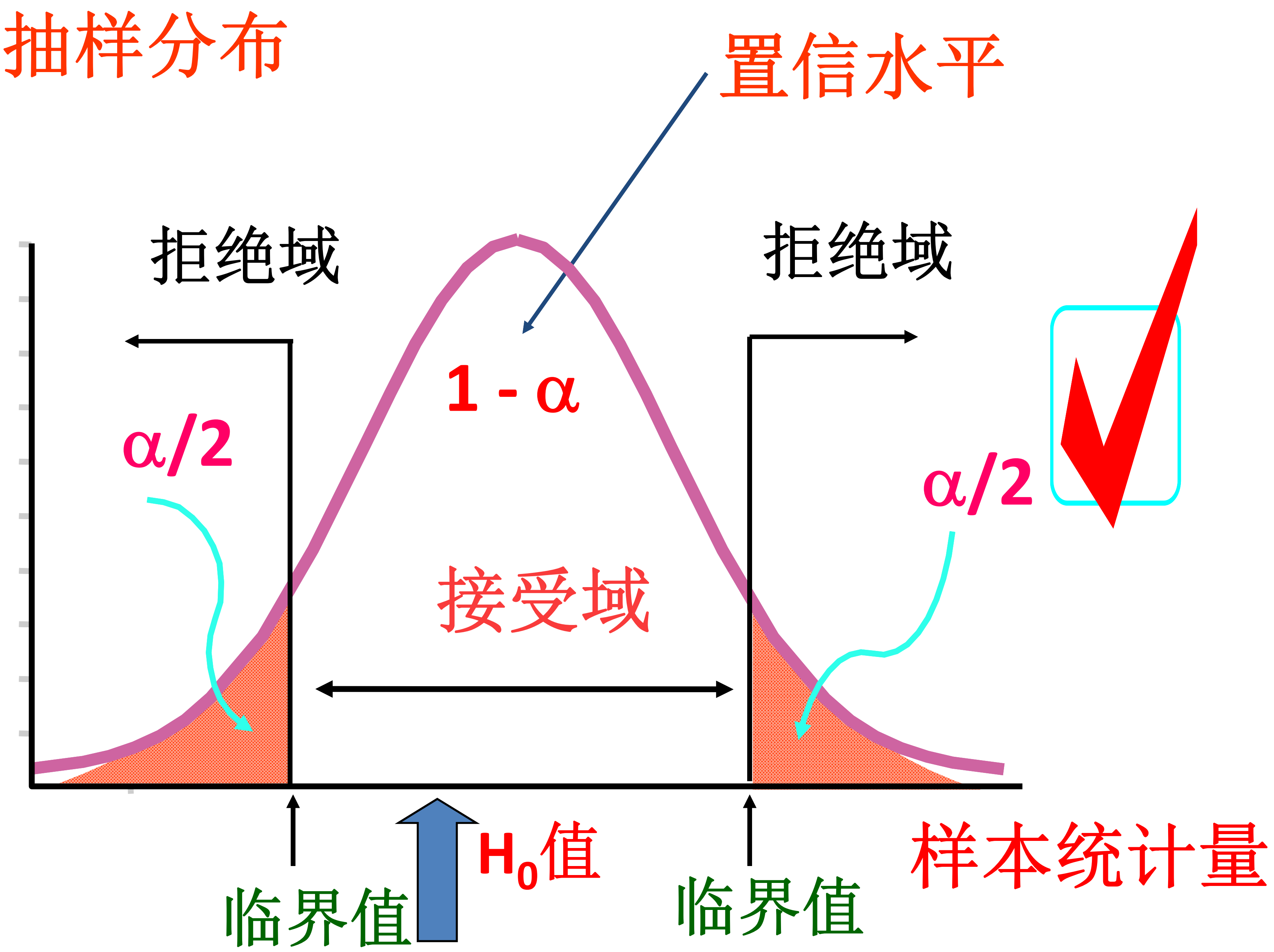
故称为Z检验法

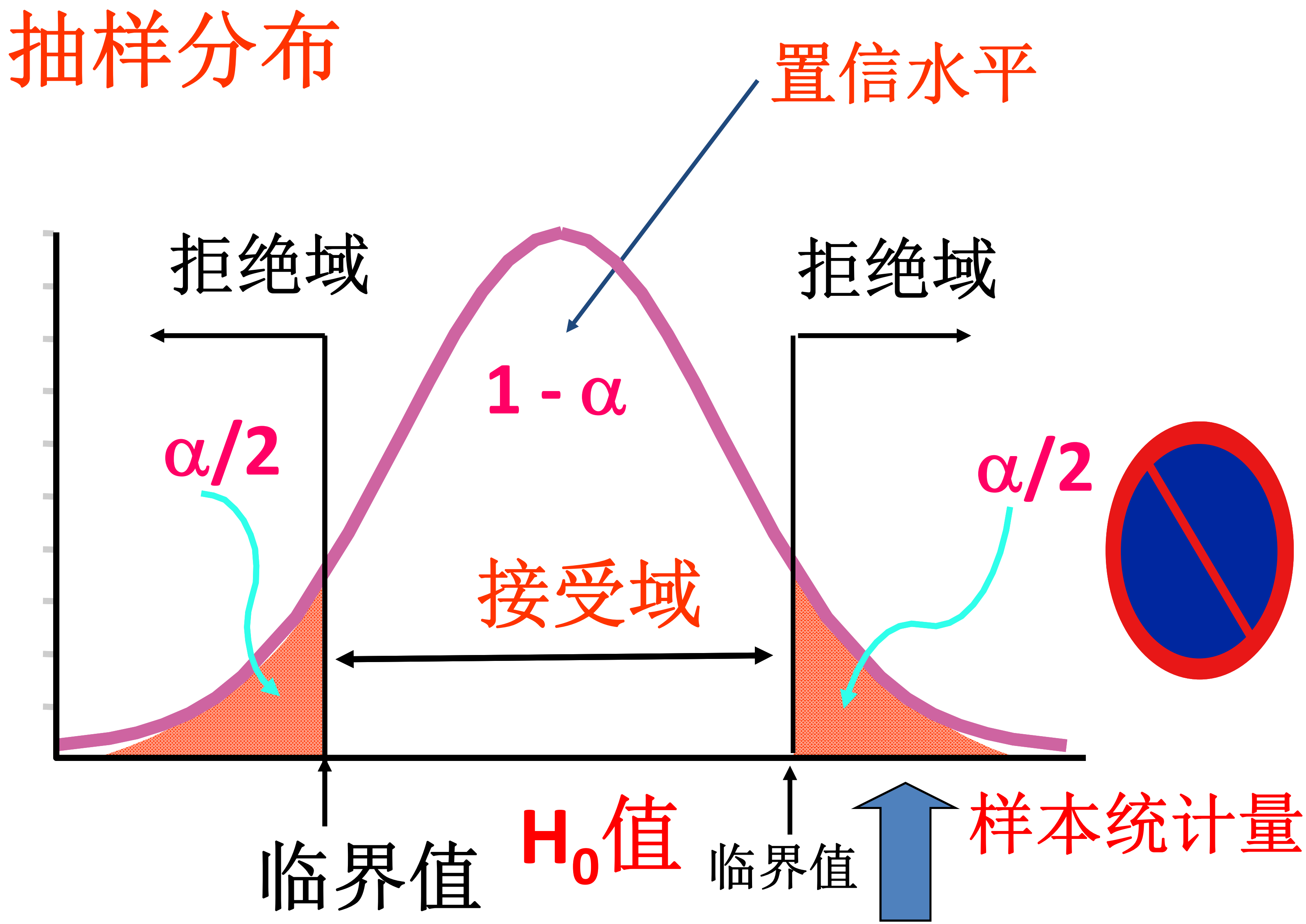
当检验统计量的取值落在某个区域C时，根据检验方法，应该拒绝原假设H_0，称区域C为**拒绝域**. 显然，例 1 中的拒绝域为

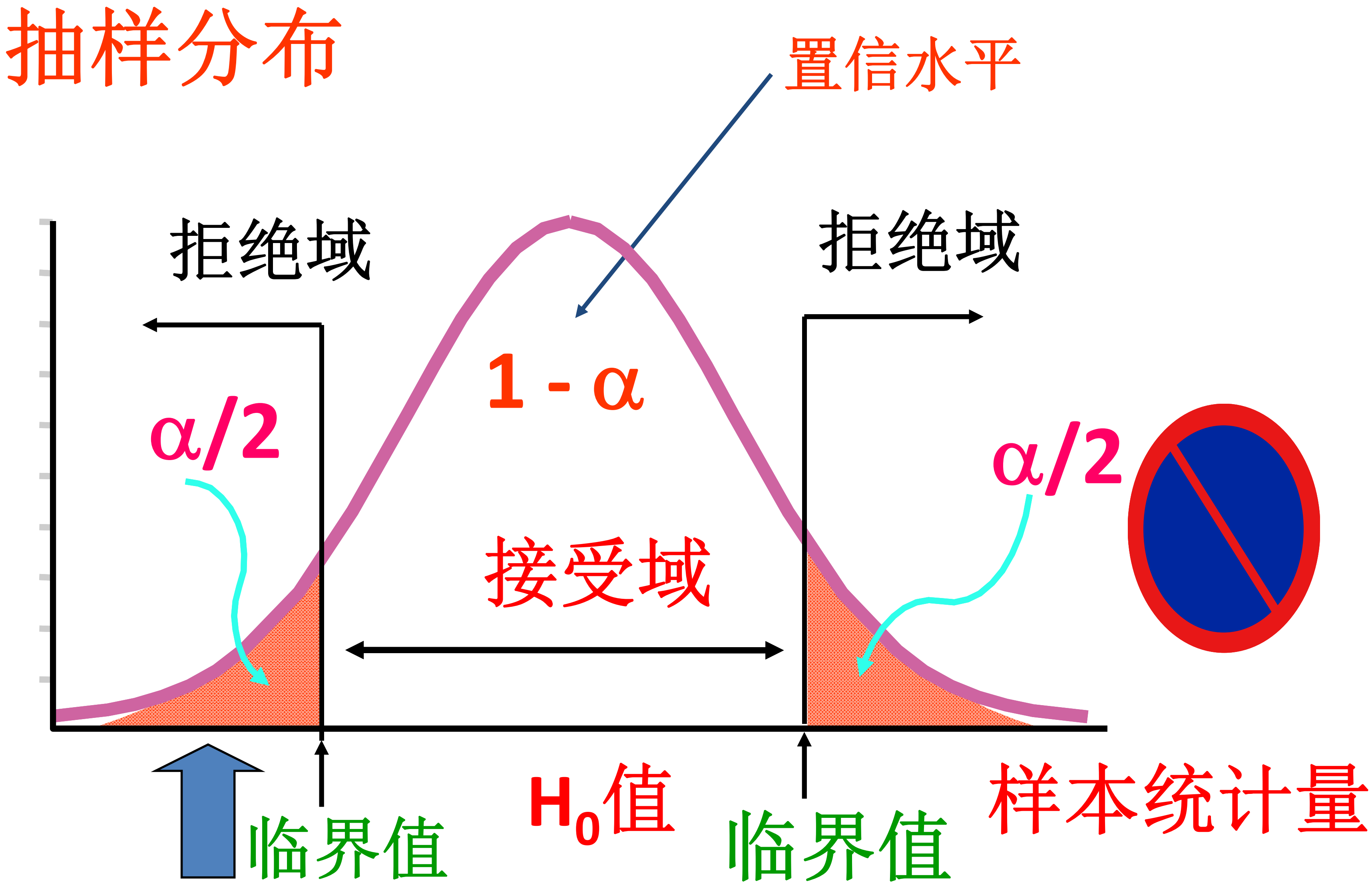
$$\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq z_{\alpha/2}$$



抽样分布
置信水平
拒绝域
拒绝域
1 - α
α/2
α/2
接受域
H0值
临界值
临界值
样本统计量


抽样分布
置信水平
拒绝域
拒绝域
1 - α
α/2
α/2
接受域
H_0值
临界值
临界值
样本统计量


抽样分布
置信水平
拒绝域
拒绝域
1 - α
α/2
α/2
接受域
临界值
H0值
临界值
样本统计量



抽样分布
置信水平
拒绝域
拒绝域
1 - α
α/2
α/2
接受域
临界值
H0值
临界值
样本统计量

二、检验中的两类错误

真实情况 \ 所作判断	接受 H_0	拒绝 H_0
H_0 为真	正确	第I类错误
H_0 为假	第II类错误	正确

弃真错误又称第I类错误

取伪错误又称第II类错误

弃真错误：H_0为真时，根据样本检验后却做出了拒绝H_0的判断.

将H_0为真时拒绝H_0这一事件记为$\{$拒绝$H_0|H_0$为真$\}$，则

$$P\{\text{拒绝}H_0|H_0\text{为真}\}\triangleq P_{\mu\in H_0}\{\text{拒绝}H_0\}\le\alpha$$

α称为**显著性水平**

取伪错误：H_0不真时，根据样本检验后做出了接受H_0的判断，其概率记为

$$P\{\text{接受}H_0|H_0\text{不真}\} \triangleq P_{\mu\in H_1}\{\text{接受}H_0\}=\beta$$

检验的类型

假设	研究的问题		
	双边检验	左边检验	右边检验
H_0	$\mu = \mu_0$	$\mu \geq \mu_0$	$\mu \leq \mu_0$
H_1	$\mu \neq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\mu > \mu_0$

正态总体参数的检验

一. 正态总体$N(\mu,\sigma^2)$均值的检验

1. Z检验法(适用于σ^2已知)

设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，其中方差σ^2已知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自X的一个样本, 现对均值μ提出假设. Z检验法的检验步骤如下：

(1) 提出如下假设之一

$$H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$H_0: \mu \leq \mu_0, \quad H_1: \mu > \mu_0$$

$$H_0: \mu \geq \mu_0, \quad H_1: \mu < \mu_0$$

(2) 选取Z检验统计量

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

(3) 对给定的α，查表求临界点

对双边检验，查表求标准正态分布的上分位点$z_{\alpha/2}$；对右边检验，查表求标准正态分布的上分位点z_{α}；对左边检验，查表求$-z_{\alpha}$.

(4) 根据样本观察值计算 z 的值

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

(5) 做出判断

对双边检验，当 $|z| \geq z_{\alpha/2}$ 时，拒绝 H_0，反之接受 H_0；对右边检验，当 $z \geq z_\alpha$ 时，拒绝 H_0，反之接受 H_0；对左边检验，当 $z \leq -z_\alpha$ 时，拒绝 H_0，反之接受 H_0.

例 根据长期的经验和资料分析，某砖瓦厂生产的砖的“抗断强度”X服从正态分布，方差$\sigma^2=1.21$，今从该厂生产的一批砖中，随机抽取 6 块，测得抗断强度(kg/cm^2)为：32.56, 29.66, 31.64, 30.00, 31.87, 31.03，问可否认为这批砖的平均抗断强度为 32.50 kg/cm^2?

解：$H_0: \mu = \mu_0 = 32.50$，$H_1: \mu \neq \mu_0$

取$\alpha = 0.05$，则临界点$z_{\alpha/2} = 1.96$，且

$$\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right| = \left|\frac{31.13 - 32.5}{1.1 / \sqrt{6}}\right| = 3.05 > z_{\alpha/2} = 1.96$$

所以，拒绝假设H_0，即认为这批砖的平均抗断强度不是$32.50 kg / cm^2$.

2. t检验法(适用于σ^2未知)

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，其中方差 σ^2 未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自X的一个样本, 现对均值μ提出假设.

t检验法的原理和检验步骤与Z检验法大体相同，不同之处在于此时正态总体的方差σ^2未知，因而要用σ^2的无偏估计S^2代替，从而检验统计量服从的分布与Z检验统计量服从的分布不同，而且拒绝域的临界点也不一样.

对提出的假设检验

$$H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

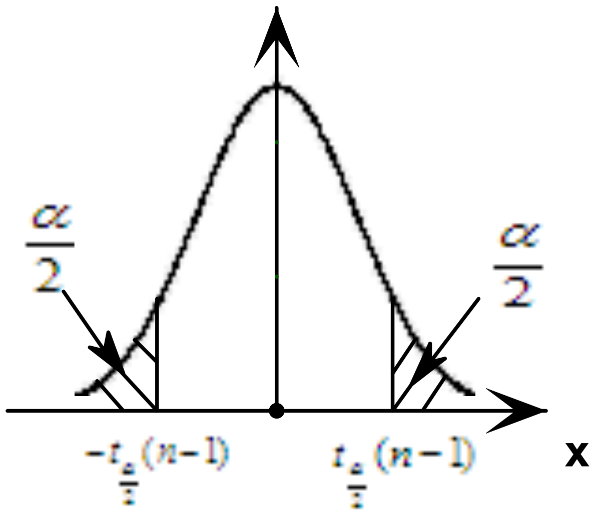
当H_0为真时，差值$\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|$应该较小；反之，当$H_1$成立时，差值表现为较大．由于

$$t = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

因此，可选取t分布的上分位点$t_{\alpha/2}(n-1)$，

当$\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$时，拒绝假设$H_0$；

反之，接受假设H_0.



t检验法的检验步骤如下：

(1) 提出如下假设之一

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$H_0 : \mu \leq \mu_0, \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$H_0 : \mu \geq \mu_0, \quad H_1 : \mu < \mu_0$$

(2) 选取t检验统计量

$$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

(3) 对给定的α，查表求临界点

- ✓ 对双边检验，查表求 t 分布的上分位点$t_{\alpha/2}$；
- ✓ 对右边检验， 查表求 t 分布的上分位点t_{α}；
- ✓ 对左边检验， 查表求$-t_{\alpha}$.

(4) 根据样本观察值计算t的值

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

(5) 做出判断

- 对双边检验， 当$|t| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$时， 拒绝$H_0$，反之接受$H_0$；
- 对右边检验， 当$t \geq t_{\alpha}(n-1)$时， 拒绝H_0，反之接受H_0；
- 对左边检验， 当$t \leq -t_{\alpha}(n-1)$时， 拒绝H_0，反之接受H_0.

例 1 如果一个矩形的宽度 w 与长度 l 的比 $w/l=(\sqrt{5}-1)/2\approx 0.618$，这样的矩形称为黄金矩形．这种尺寸的矩形使人们看上去有良好的感觉．现代的建筑构件、工艺品、商业信用卡等常常采用黄金矩形，现从某工艺品厂生产的某种矩形形状的工艺品中随机抽取20件，测得矩形的宽度与长度的比值为：0.963 0.749 0.654 0.670 0.662 0.672 0.615 0.606 0.690 0.628 0.668 0.611 0.606 0.609 0.601 0.553 0.570 0.844 0.576 0.993．设该厂生产的这种工艺品的宽度与长度的比值服从正态分布，均值为 μ，试检验该批工艺品的宽度与长度的比值是否符合

解　本题需检验假设

$$H_0: \mu = \mu_0 = 0.618,\ \ H_1: \mu \neq \mu_0$$

检验的拒绝域为

$$|t| = \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$$

查表得$t_{\alpha/2} = t_{0.05/2}(20-1) = 2.0930$，又

$$t = \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}\right| = \left|\frac{0.677 - 0.618}{0.1222 / \sqrt{20}}\right| = 2.1592 > t_{0.025}(19) = 2.0930$$

故拒绝H_0，即认为该批工艺品的宽度与长度的比值不符合黄金矩形的标准.

例 2 从某种含铜溶液的四次测定值算得溶液含铜量的平均值为 8.30(%)，标准差 $s=0.03$ (%)．若测定值总体服从正态分布，试在 $\alpha=0.05$ 条件下检验溶液含铜量是否显著性低于 8.32%?

解 提出假设

$$H_0: \mu \geq \mu_0 = 8.32,\ \ H_1: \mu < \mu_0$$

检验的拒绝域为

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \leq -t_\alpha(n-1)$$

查表得$t_\alpha(n-1) = t_{0.05}(3) = 2.3534$，又

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = -1.33 > -t_\alpha(n-1) = -2.3534$$

故接受H_0. 即认为溶液含铜量没有显著性低于8.32%.