k-连通图

程龚 (gcheng@nju.edu.cn)

上节课的要点回顾

- 割点
- 连通度 (κ)
- k-连通

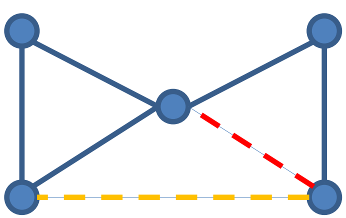
- 割边
- 边连通度 (κ')
- k-边连通

- $\kappa(G) \le \kappa'(G) \le \delta(G)$

为什么增加边能够提高连通度？

如何增加边能够提高连通度？

这些问题的根本原因是什么？



http://202.119.32.195/cache/7/04/njmetro.com.cn/9d50ab7d17e416469a807f5689a9f11b/map_new.jpg

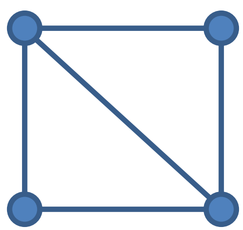
本节课的主要内容

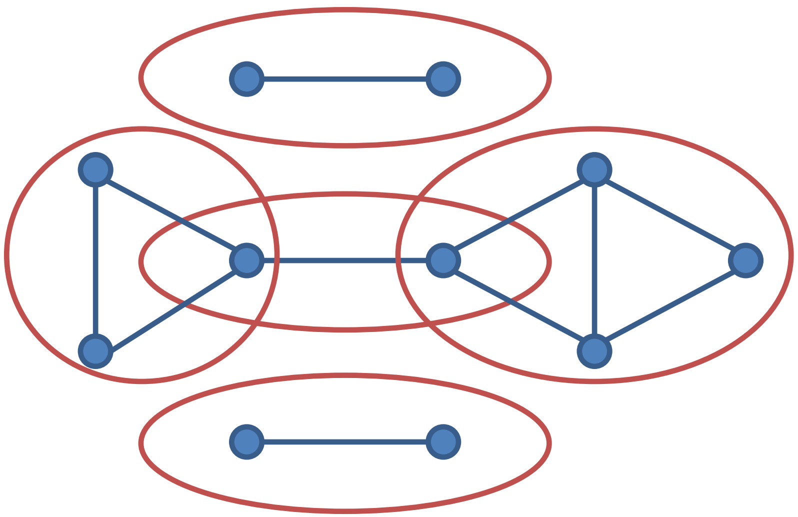
2.3 2-连通图的性质

2.4 Menger定理

块

- 块 (block)
  - G是块：G是无割点的连通图　　　　块=2-连通图？
  - H是G中的块：H是G中的极大无割点连通子图





这个图包含几个块？

块的等价定义

G是v≥3的连通图：

1. G是2-连通的（块）。
2. G的任二顶点共圈。
3. G的任一顶点与任一边共圈。
4. G的任二边共圈。
5. 对∀u, v∈V(G)及∀e∈E(G)，存在u-v路含有边e。
6. 对∀u, v, w∈V(G)，存在u-v路含有顶点w。
7. 对∀u, v, w∈V(G)，存在u-v路不含有顶点w。

块的等价定义 (续)

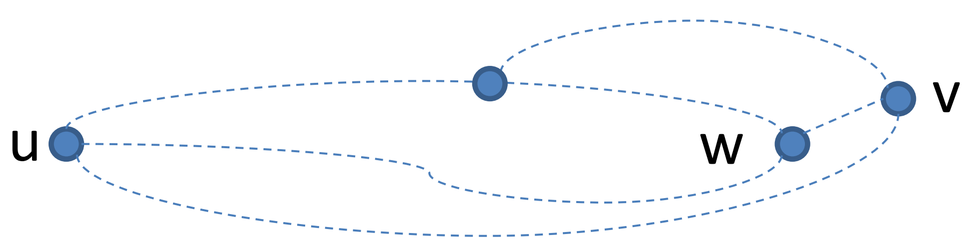
1. G是2-连通的（块）。
2. G的任二顶点共圈。

证明：

一种直接的思路：删去w，仍存在其它的u-v路，与包含w的u-v路组成圈。

这样证明存在什么问题?

有什么办法可以解决?



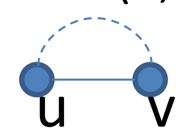
块的等价定义 (续)

1. G是2-连通的（块）。
2. G的任二顶点共圈。

证明：

对二顶点间的距离用数学归纳法证明。

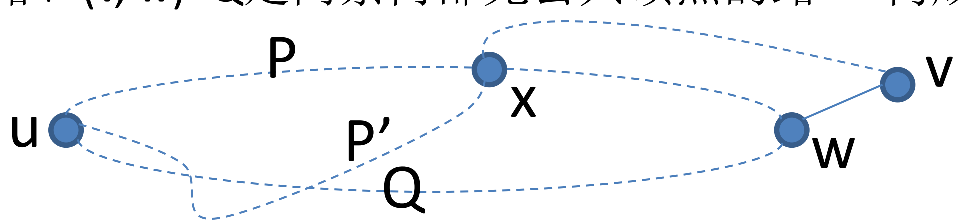
1. d(u, v)=1时：G是2-连通的 $\Rightarrow$ $\kappa' \geq \kappa \geq 2$ $\Rightarrow$ (u, v)不是割边$\Rightarrow$ G-(u, v)中有u-v路 $\Rightarrow$ 该路和(u, v)构成圈



d=1时怎么证？

2. 假设d(u, v)=k-1时成立，则d(u, v)=k时：
   1. 存在长为k的u-v路u-…-w-v $\Rightarrow$ d(u, w)=k-1 $\Rightarrow$ u和w共圈 $\Rightarrow$ 存在无公共内部顶点的u-w路P和Q（且设v不在P、Q上，否则证毕）
   2. G是2-连通的 $\Rightarrow$ G-w是连通的 $\Rightarrow$ G-w中有u-v路P’
   3. x是P’上最后一个与P或Q的公共顶点（假设在P上） $\Rightarrow$ P上的u-x路+P’上的x-v路、(v, w)+Q是两条内部无公共顶点的路 $\Rightarrow$ 构成圈

好像已经看到圈了，你会描述它吗？

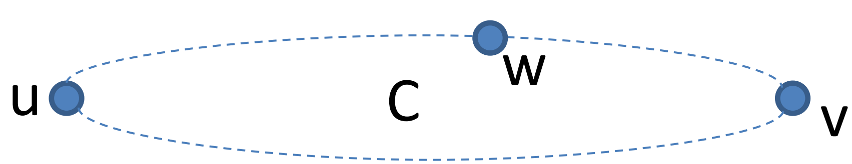


块的等价定义 (续)

1. G是2-连通的（块）。
2. G的任二顶点共圈。

证明：你能自己证明吗？

1. 显然$\forall w\in V(G)$都不是割点（为什么？），得证
2. $\forall u, v\in V(G-w)$：u和v在G中共圈C $\Rightarrow$
   - w不在C上 $\Rightarrow$ u和v在G-w中共圈C $\Rightarrow$ G-w中有u-v路
   - w在C上 $\Rightarrow$ G-w中有u-v路

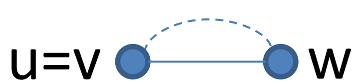


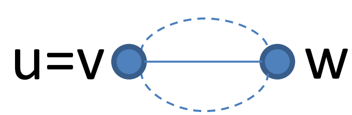
块的等价定义 (续)

2. G的任二顶点共圈。
3. G的任一顶点与任一边共圈。

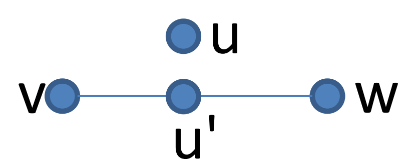
证明：

1. ∀u∈V(G), ∀(v, w)∈E(G)，接下来分几种情况讨论？
2. 讨论u与(v, w)：
   - 如果u恰是(v, w)的一个端点，要证明(v, w)在某个圈中，怎么证？





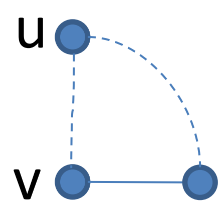
   - 否则，怎么办？
   - 可在2连通的G中的(v, w)上插入顶点u’成为G’，再证明G’仍2连通 ⇒ u和u’在G’中共圈 ⇒ 该圈必过(v, w)
     - v和w不是G’的割点：因为u’可通过v和w两种方式到达其它点
     - u’不是G’的割点：因为κ’≥κ≥2 ⇒ (v, w)不是G的割边
     - 其它点均不是割点（与u’的加入无关）



块的等价定义 (续)

2. G的任二顶点共圈。
3. G的任一顶点与任一边共圈。

证明：你能自己证明吗？



块的等价定义 (续)

3. G的任一顶点与任一边共圈。
4. G的任二边共圈。

证明：

1. $\forall(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in E(G)$ 你能自己证明吗？
2. 在(u_1, u_2)上插入顶点u成为G’，可证明G’仍2连通
   $\Rightarrow$ u和(v_1, v_2)在G’中共圈 $\Rightarrow$ (u_1, u_2)和(v_1, v_2)在G中共圈
   - u_1和u_2不是G’的割点：u可通过u_1和u_2两种方式到达其它点
   - u不是G’的割点：$\kappa' \geq \kappa \geq 2 \Rightarrow (u_1, u_2)$不是G的割边
   - 其它点均不是割点（与u的加入无关）

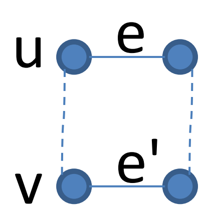
块的等价定义 (续)

4. G的任二边共圈。
5. 对∀u, v∈V(G)及∀e∈E(G)，存在u-v路含有边e。

证明：分几种情况讨论？

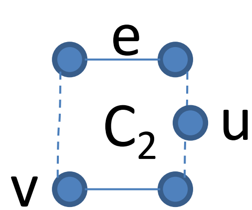
- (u, v)=e：显然成立。

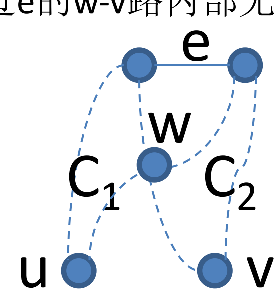
- u（或v）是e的端点，怎么证？



- u和v都不是e的端点：G是连通的 ⇒ u和v分别有关联的边和e共圈C_1和C_2 ⇒
  - u在C_2上（或v在C_1上）⇒ C_2（或C_1）上有u-v路含有边e
  - u不在C_2上且v不在C_1上，你能清晰描述出一条经过e的u-v路吗？

w是u沿C_1到C_2的第一个公共顶点 ⇒ C_1上的u-w路和C_2上经过e的w-v路内部无公共顶点 ⇒ 拼接得到

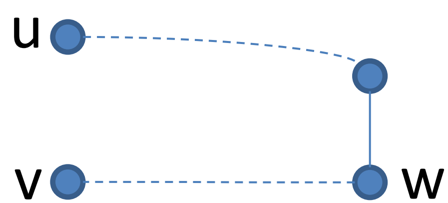




块的等价定义 (续)

5. 对∀u, v∈V(G)及∀e∈E(G)，存在u-v路含有边e。
6. 对∀u, v, w∈V(G)，存在u-v路含有顶点w。

证明：你能自己证明吗？



块的等价定义 (续)

6. 对$\forall u, v, w \in V(G)$，存在u-v路含有顶点w。
7. 对$\forall u, v, w \in V(G)$，存在u-v路不含有顶点w。

证明：你能自己证明吗？（脑筋急转弯！）

存在u-w路含有v $\Rightarrow$ 该路上的u-v段不含有w

块的等价定义 (续)

7. 对$\forall u, v, w \in V(G)$，存在u-v路不含有顶点w。
1. G是2-连通的（块）。

证明：你能自己证明吗？

$\forall w \in V(G)$都不是割点，因为$\forall u, v \in V(G)$，存在u-v路不含w

块的等价定义 (续)

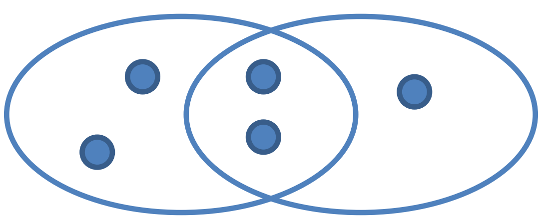
G是ν≥3的连通图：

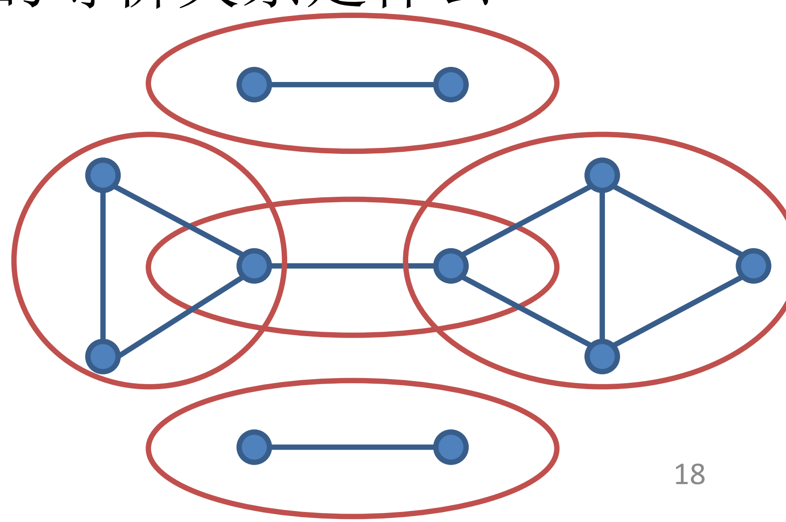
1. G是2-连通的（块）。
2. G的任二顶点共圈。
3. G的任一顶点与任一边共圈。
4. G的任二边共圈。
5. 对∀u, v∈V(G)及∀e∈E(G)，存在u-v路含有边e。
6. 对∀u, v, w∈V(G)，存在u-v路含有顶点w。
7. 对∀u, v, w∈V(G)，存在u-v路不含有顶点w。

块的其它一些性质*

- 两个块最多只有一个公共顶点，为什么？
  - 否则 ⇒ 两个块的并没有割点 ⇒ 形成一个新的更大的块 ⇒ 原先的两个块不是极大的 ⇒ 矛盾

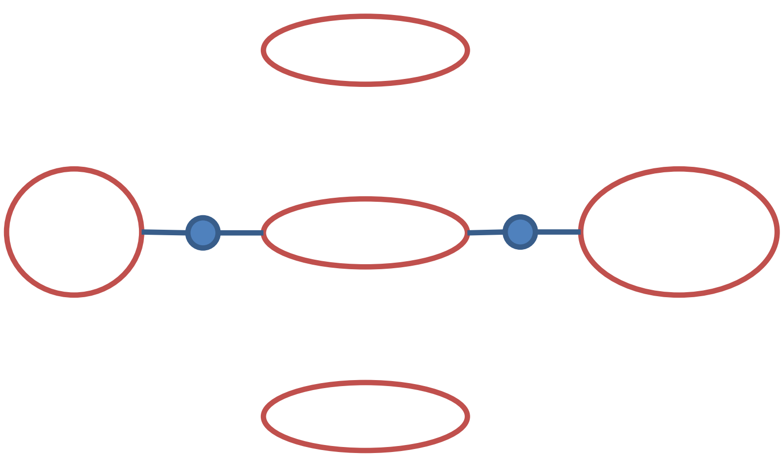
- 两个块没有公共边，为什么？
  - 上述性质的自然推论
- 块是对边集的一种划分，它对应的等价关系是什么？
  - 共圈

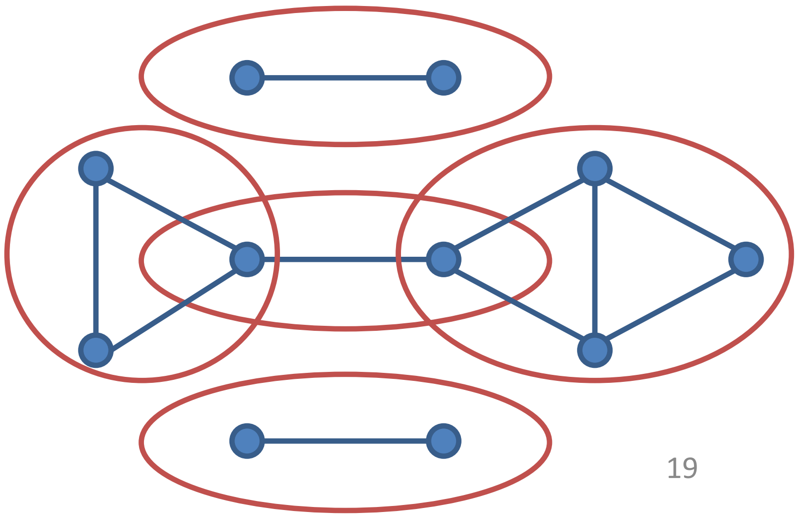




块的其它一些性质*

- 割点 ⇔ 块的交点（作业）
- 块-割点图
  - 这个图中存在圈吗？





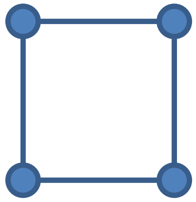
计算块的算法*

- John Hopcroft和Robert Tarjan提出的经典算法
  - 思想：基于一次DFS
  - 时间复杂度：线性

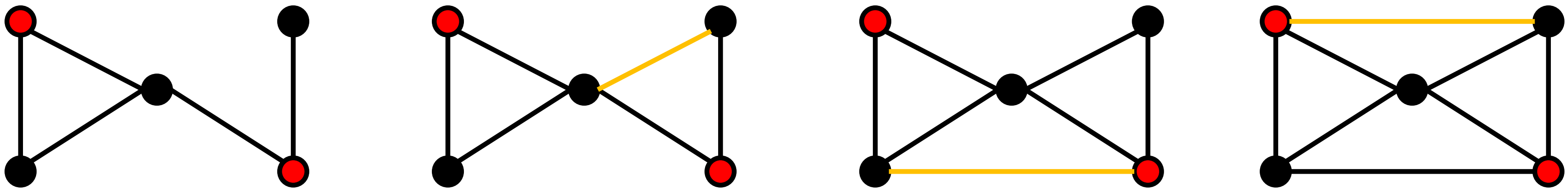
（参见《算法导论》）

我们接近问题的本质了

- 为什么用一个点不能割断一个圈/块？
  - 对∀u, v, w∈V(G)，存在u-v路不含有顶点w。



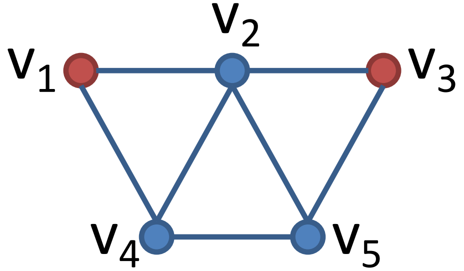
- 增加一条边，一定能使割断两个点的难度提高吗？



分离集

- x-y分离集 (x-y cut)
  - $S \subseteq V(G) \setminus \{x, y\}$: G-S中没有x-y路
- 最小x-y分离集 (minimum x-y cut)
  - 势最小的x-y分离集
- x-y分离数
  - s(x, y): 最小x-y分离集的势

- 两两内部无公共顶点的x-y路的最大条数记作r(x, y)
- s(x, y)和r(x, y)有关吗？



Menger定理

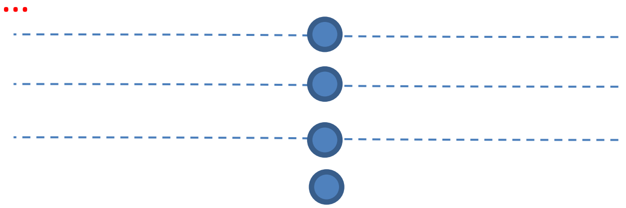
- 设x, y是图G中两个不相邻的顶点，则$s(x, y)=r(x, y)$。

证明：（分情况讨论=做假设=造条件）

还记得怎么证明等式吗？

- 你能自己证明$s(x, y)\ge r(x, y)$吗？（取一个，找一个）
  - S是最小x-y分离集 ⇒ 对任意一个两两内部无公共顶点的x-y路集合，S必与其中每条路有公共顶点 ⇒ $|S|=s(x, y)\ge r(x, y)$
- 对$v(G)$用数学归纳法证明$s(x, y)\le r(x, y)$。
  1. $v(G)=2$时：x和y不相邻 ⇒ $s(x, y)=r(x, y)=0$，成立。 
  2. 假设$v(G)<n$时成立，则$v(G)=n$时，设法构造$s(x, y)$条两两内部无公共顶点的x-y路即可。（又是“取一个，找一个”）

     用$N(x)$表示与x相邻的点，分两种情况讨论（后面会明白为什么这么分）：
     - G有不同于$N(x)$和$N(y)$的最小x-y分离集S：…
     - G的最小x-y分离集只有$N(x)$或$N(y)$：…



$s(x, y)$: 最小x-y分离集的势 $r(x, y)$: 两两内部无公共顶点的x-y路的最大条数

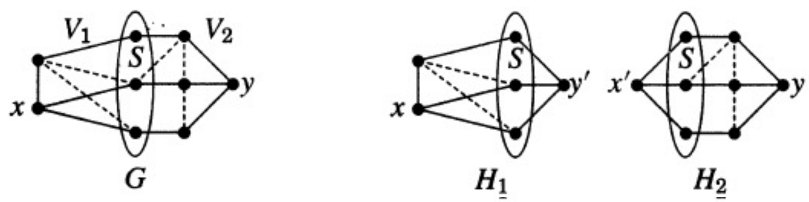
Menger定理 (续)

- 设x, y是图G中两个不相邻的顶点，则s(x, y)=r(x, y)。

证明：当G有不同于N(x)和N(y)的最小x-y分离集S时：

基本思路（倒推）：

1. 如果x到S有|S|条两两无公共顶点（x除外）的路，S到y有|S|条两两无公共顶点（y除外）的路，并且这两侧除S外没有别的公共顶点了，那么一一对应拼接即可。
2. S到y的两两无公共顶点（y除外）的路，即H_2中x’到y的两两无内部公共顶点的路。
3. 这些路可以借助归纳假设得到，但需要证明$v(H_2)<n$。



具体步骤：

1. 定义x-S路：起点是x、终点在S中、中间顶点不在{x}∪S中的路。
2. 罗列所有的x-S路和S-y路，其中的所有顶点分别记作V_1和V_2。为什么$S\subseteq V_1$且$S\subseteq V_2$？
   - 否则存在比S更小的x-y分离集，矛盾。
3. 在$G[V_1]$中加入顶点y’并关联到S中的所有顶点构成H_1，同理构造H_2。
4. G中每条x-y路都止于一条H_2中的S-y路 ⇒ H_2的每个x’-y分离集也都是G的x-y分离集 ⇒ $s_{H2}(x', y)\geq s(x, y)=|S|$
5. 若$v(H_2)<n$，则由归纳假设可得$r_{H2}(x', y)=s_{H2}(x', y)\geq|S|$。这至少|S|条两两内部无公共顶点的路每条恰过S中的一个顶点。
6. 而$v(H_2)<n$成立是因为x必有一个邻点不在H_2中（这就是之前分情况讨论的原因）
   - x必有一个邻点不在S中（否则N(x)=S）
   - 这样的邻点一定也不在V_2中（留给你去想一想）
7. 最后还要证明“左右两侧除S外没有别的公共顶点”，即$S=(V_1\cap V_2)$：
   - 上述已证$S\subseteq V_1$且$S\subseteq V_2$，即$S\subseteq(V_1\cap V_2)$。只要再证$(V_1\cap V_2)\subseteq S$。如果$\exists v\in(V_1\cap V_2)\setminus S$，会出什么问题？
   - 假设$\exists v\in(V_1\cap V_2)\setminus S$ ⇒ 有不经过S的x-v路和y-v路 ⇒ 有不经过S的x-v-y路 ⇒ S不是x-y分离集 ⇒ 矛盾 ⇒ $(V_1\cap V_2)\setminus S=\emptyset$ ⇒ $(V_1\cap V_2)\subseteq S$

Menger定理 (续)

- 设x, y是图G中两个不相邻的顶点，则$s(x, y)=r(x, y)$。

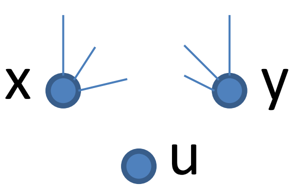
证明：当G的最小x-y分离集只有N(x)或N(y)时：

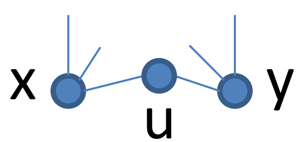
分三种情况讨论：（关键是如何用上归纳假设）

- $\exists u\in V(G)\backslash(\{x\}\cup N(x)\cup\{y\}\cup N(y))$：
  1. G的最小x-y分离集只有N(x)或N(y) $\Rightarrow$ u不在任意一个最小x-y分离集中 $\Rightarrow s_{G-u}(x, y)=s(x, y)$
  2. $v(G-u)<n \Rightarrow s_{G-u}(x, y)=r_{G-u}(x, y)$

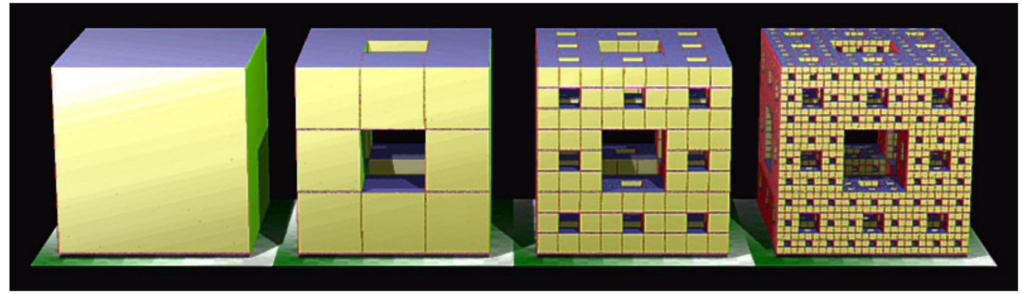
  $\Rightarrow r_{G-u}(x, y)=s(x, y) \Rightarrow$ G-u中有$s(x, y)$条 $\Rightarrow$ G中至少有$s(x, y)$条
- $\exists u\in(N(x)\cap N(y))$：如何利用归纳假设？
  1. u出现在每个x-y分离集中 $\Rightarrow s_{G-u}(x, y)=s(x, y)-1$
  2. $v(G-u)<n \Rightarrow s_{G-u}(x, y)=r_{G-u}(x, y)$

  $\Rightarrow r_{G-u}(x, y)=s(x, y)-1 \Rightarrow$ G-u中有$s(x, y)-1$条 $\Rightarrow$ G中有$s(x, y)-1$条，以及x-u-y路
- N(x)和N(y)构成$V(G)\backslash\{x, y\}$的划分（留给你去想一想）。

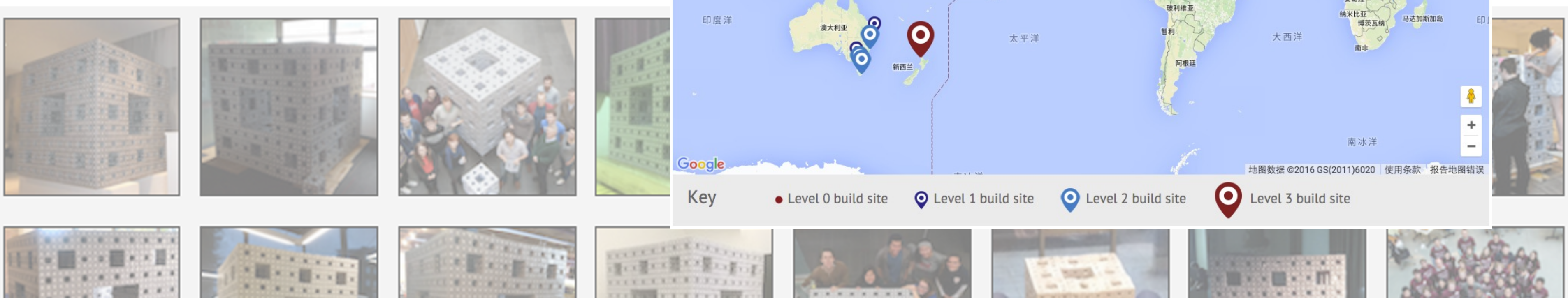




Karl Menger, 奥地利, 1902--1985



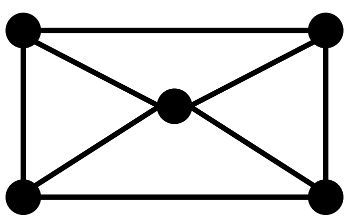
Menger sponge (门格海绵)



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/95/Karl_Menger_1970_Shimer_College_Wiki.jpg
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/de/Menger_sponge_%28Level_0-3%29.jpg
http://www.megamenger.com/

从2-连通到k-连通

- G是2-连通的 ⇔ G中任二顶点共圈 ⇔ G中任二顶点至少被2条两两内部无公共顶点的路相连
- G是k-连通的 ⇔ G中任二顶点至少被k条两两内部无公共顶点的路所连？



Menger定理的推论

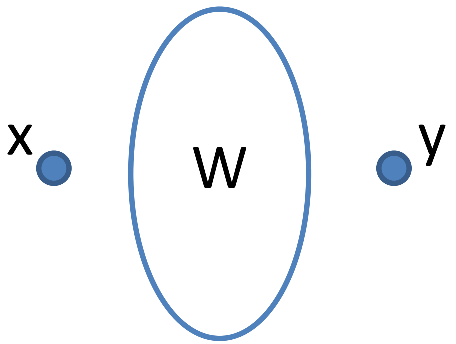
- $v \geq k+1$的图G是k-连通图当且仅当G中任二顶点至少被k条两两内部无公共顶点的路所连。

证明：$\Leftarrow$

假设G不是k-连通图，你能发现矛盾之处吗？（Menger定理）

1. W是G的最小点割集 $\Rightarrow$ $|W|<k$
2. x和y是G-W的不同连通分支中的顶点 $\Rightarrow$
   - W是x-y分离集 $\Rightarrow$ $s(x, y) \leq |W| < k$
   - $s(x, y) = r(x, y) \geq k$

   $\Rightarrow$ 矛盾



Menger定理的推论 (续)

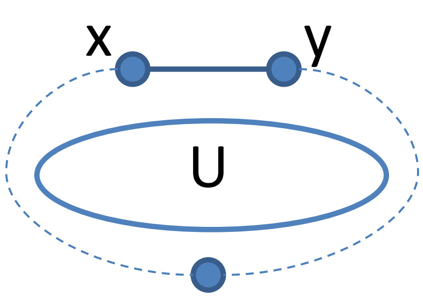
- $v \geq k+1$的图G是k-连通图当且仅当G中任二顶点至少被k条两两内部无公共顶点的路所连。

证明：⇒：反证法

假设$x, y \in V(G)$之间两两内部无公共顶点的路只有$m<k$条：

- 如果$(x, y) \notin E(G)$：$\kappa(G) \leq s(x, y) = r(x, y) = m < k$ ⇒ G不是k-连通的 ⇒ 矛盾
- 如果$(x, y) \in E(G)$：$H=G-(x, y)$中两两内部无公共顶点的x-y路有$m-1<k-1$条 ⇒ $\kappa(H) \leq s_H(x, y) = m-1 < k-1$ ⇒ 有$U \subseteq V(H)$满足$|U| \leq k-2$且H-U不连通 ⇒ $G-(U \cup \{x\})$和$G-(U \cup \{y\})$至少有一个不连通
  - 如果$x \in U$（或$y \in U$）：$G-(U \cup \{x\}) = G-U = H-U$不连通
  - 如果$x, y \notin U$：
    - 假设$G-(U \cup \{x\})$连通：$G-U-\{x, y\}$中的点有到y的不经过(x, y)的路
    - 且$G-(U \cup \{y\})$连通：$G-U-\{x, y\}$中的点有到x的不经过(x, y)的路

    ⇒ H-U连通 ⇒ 矛盾



⇒ $(U \cup \{x\})$或$(U \cup \{y\})$是G的点割集 ⇒ $\kappa(G) \leq k-1$ ⇒ G不是k-连通的 ⇒ 矛盾

边分离集

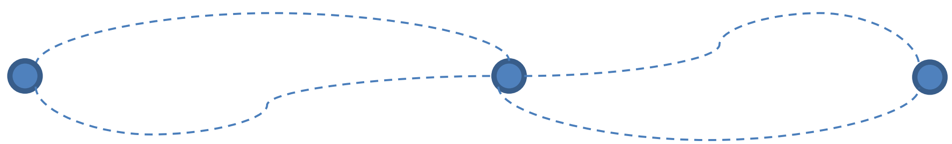
- x-y边分离集
- 最小x-y边分离集
- x-y边分离数
- 边形式Menger定理及其推论

计算连通度的算法*

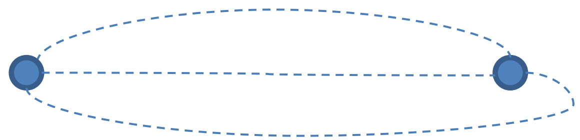
- 基于网络流

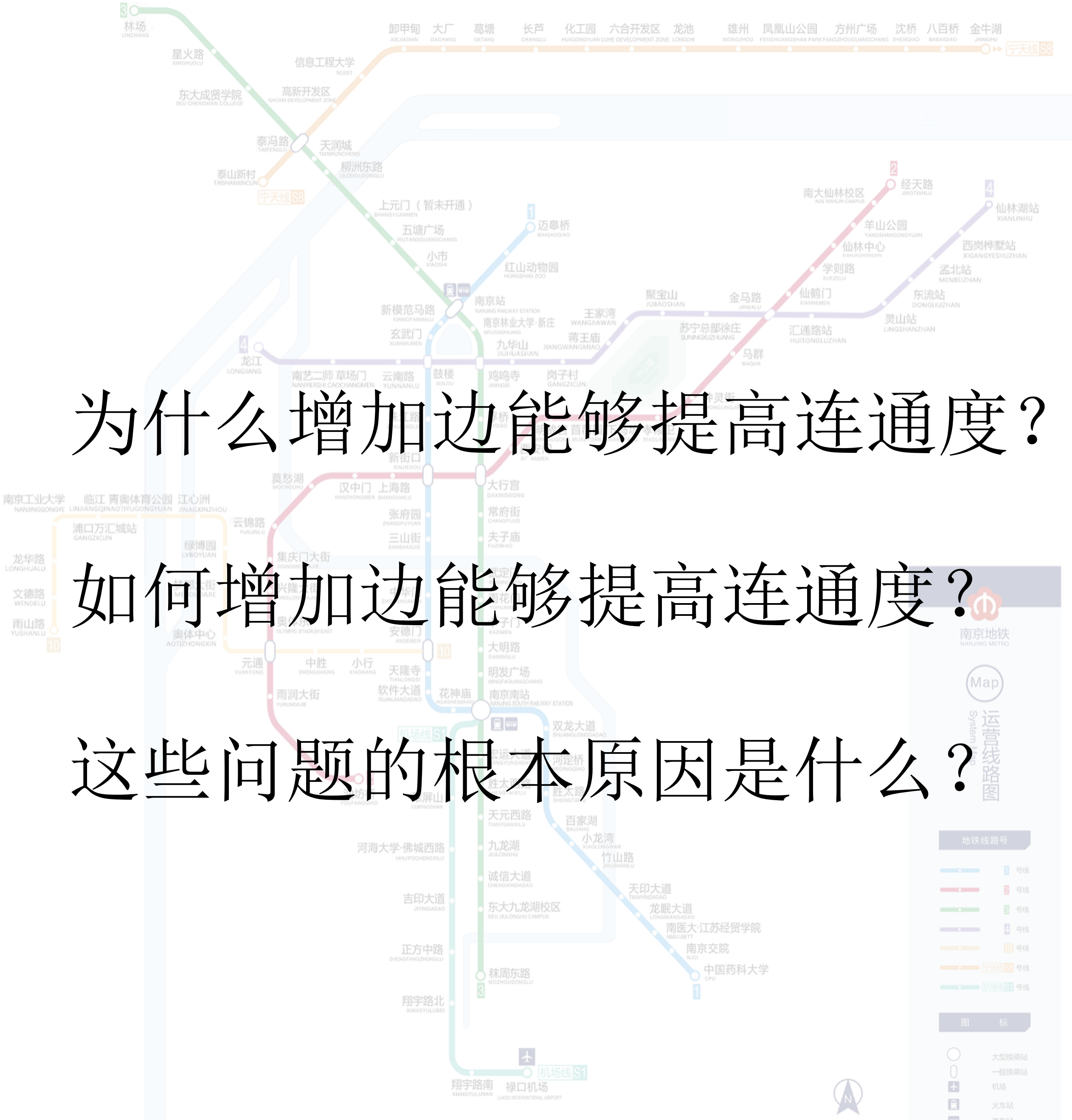
连通的本质

- 连通：有路
- 2-连通（块）：有2条不交路（圈）
  - 割点：块的分界点（交点）



- k-连通：有k条不交路





为什么增加边能够提高连通度？

如何增加边能够提高连通度？

这些问题的根本原因是什么？

http://202.119.32.195/cache/7/04/njmetro.com.cn/9d50ab7d17e416469a807f5689a9f11b/map_new.jpg

作业

- 2.2 //块
- 2.43 //Menger定理