关于两种正定修正的补充说明

问题：已知A为对称不充分正定矩阵，对A做适当的修正使修正后的矩阵$\tilde{A}$充分正定。这里充分正定要求A的最小特征值$\lambda_{\min}$满足$\lambda_{\min} \geq \delta > 0$，$\delta > 0$是一个显著大于机器精度的正数。

基于特征分解的修正

对A做谱分解：

$$A = Q \Lambda Q^T,$$

其中Q是正交阵，Λ是对角阵，且对角元$\lambda_i, i = 1, 2, \cdots, n$,是$A$全部特征值。由于$A$不充分正定，故存在$\lambda_i < \delta$，现令

$$\tau_i = \begin{cases} 0, & \lambda_i \geq \delta, \\ \delta - \lambda_i, & \lambda_i < \delta. \end{cases}$$

- 若令

$$\Delta A = Q \mathrm{diag}(\tau_i) Q^T,$$

则ΔA是使$\tilde{A} = A + \Delta A$满足$\lambda_{\min} \geq \delta$的Frobenius范数最小的修正项；

- 若令$\tau = \max(0, \delta - \lambda_{\min}(A))$，则

$$\Delta A = \tau I$$

则ΔA是使$\tilde{A} = A + \Delta A$满足$\lambda_{\min} \geq \delta$的Euclidean范数（欧氏范数、2范数）最小的修正项.

基于谱分解的修正的优点是$\tilde{A}$的特征分解（特征值、特征向量）和A很接近。但$\tilde{A}$和A形式上并不接近。

基于Cholesky分解的修正

对A做LDL^T型Cholesky分解，则对比MM^T型分解，有

$$M = LD^{\frac{1}{2}}.$$

现令$\delta, \beta > 0$，则算法（Matlab伪）：

```
for j = 1:n
    C(j,j) = A(j,j)-sum(d(1:j-1)'.*L(j,1:j-1).^2);
    theta = 0;
    for i = j+1:n
        C(i,j) = A(i,j)-sum(d(1:j-1)'.*L(i,1:j-1).*L(j,1:j-1));
        if theta < abs(C(i,j))
            theta = abs(C(i,j));
        end
    end
    d(j) = max([abs(C(j,j)), (theta/beta)^2, \delta]);
    for i = j+1:n
        L(i,j) = C(i,j)/d(j);
    end
    L(j,j) = 1.0;
```

```
end
D=diag(d);
```

满足

$\tilde{A} = LDL^T$正定，且有

$$d_j \geq \delta, |m_{ij}| \leq \beta, j = 1, 2, \cdots, n, i = j+1, \cdots, n.$$

这种修正的特点是$\tilde{A}$形式上和A接近，但二者特征分解相去甚远。