

Projet de statistiques

Maxime PETERLIN - Gabriel VERMEULEN

ENSEIRB-MATMECA, Bordeaux

28, avril 2014

Table des matières

1	Autour des variables aléatoires gaussiennes	2
1.1	Variables aléatoires gaussiennes réelles	2
1.1.1	Densité de probabilité d'une variable aléatoire gaussienne de de moyenne μ et de variance σ^2	2
1.1.2	Histogramme de 100 réalisations de la loi $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(5, 1)$	3
1.1.3	Histogramme de 1000 réalisations de la loi $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(5, 1)$	3
1.2	Variables aléatoires gaussiennes vectorielles	3
1.2.1	Fonction caractéristique de la variable $t^T X$	3
1.2.2	Montrons que les X_1, \dots, X_n sont indépendantes	3
1.2.3	Densité de probabilité de la loi $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(0, I)$	3
1.2.4	Densité de probabilité de la loi $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(\mu, \Gamma)$	4
1.2.5	Montrons que les composantes d'un vecteur gaussien sont indépendantes si et seulement si sa matrice de covariance est diagonale	4
1.2.6	Tracé de la densité de la loi $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}(\mu, \Gamma)$	4
1.2.7	Histogramme de 1000 réalisations de la loi $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}(\mu, \Gamma)$. . .	4
1.2.8	Montrons que $X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^d}(0, I) \Rightarrow UX \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^d}(0, I), \forall U \in$ $\mathbb{O}_d(\mathbb{R})$	4
1.2.9	Histogramme de 1000 réalisations du vecteur UX	5
1.2.10	Démonstration et vérification expérimentale du caractère gaussien d'un vecteur donné	5
1.3	Variables aléatoires gaussiennes complexes	6
1.3.1	Variance et densité de probabilité de $Z \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\mu, \sigma^2)$. . .	6
1.3.2	Histogramme de 1000 réalisations de la loi $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$	6
1.4	Théorème de la limite centrale	6
1.4.1	Loi de W_n lorsque $X_k \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(\mu, \sigma^2)$	6
1.4.2	Histogramme de 1000 réalisations de la loi W_n lorsque $X_k \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(\mu, \sigma^2)$	7
1.4.3	Histogramme de 1000 réalisations de la loi W_n lorsque $X_k \sim \mathcal{U}([0, 1])$	7
1.4.4	Histogramme de 1000 réalisations de la loi W_n lorsque $X_k \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$	7
1.5	Loi du χ^2	7

1.5.1	Densité de probabilité d'une variable suivant une loi $\chi^2(n)$	7
1.5.2	Moyenne et variance de la loi $\chi^2(n)$	8
1.5.3	Tracé de la densité de probabilité de la loi $\chi^2(n)$	9
2	Estimation paramétrique	10
2.1	Estimation des paramètres d'une loi gaussienne	10
2.1.1	Démonstration de l'expression des composantes de $\hat{\theta}_n$	10
2.1.2	Matrice d'information de Fisher	11
2.1.3	Borne de Cramer-Rao	12
2.1.4	Loi de l'estimateur $\hat{\mu}_n$	12
2.1.5	Biais de l'estimateur $\hat{\mu}_n$	12
2.1.6	Risque quadratique de l'estimateur $\hat{\mu}_n$	12
2.1.7	Tracé de l'évolution du risque quadratique de l'estimateur $\hat{\mu}_n$	13
2.1.8	Loi de l'estimateur $\hat{\sigma}_n^2$	13
2.1.9	Biais de l'estimateur $\hat{\sigma}_n^2$	14
2.1.10	Risque quadratique de l'estimateur $\hat{\sigma}_n^2$	14
2.1.11	Tracé de l'évolution du risque quadratique de l'estimateur $\hat{\sigma}_n^2$	14

Chapitre 1

Autour des variables aléatoires gaussiennes

1.1 Variables aléatoires gaussiennes réelles

1.1.1 Densité de probabilité d'une variable aléatoire gaussienne de moyenne μ et de variance σ^2

La densité de probabilité d'une loi normale de moyenne 0 et de variance 1 est :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Pour obtenir la densité de probabilité d'une variable aléatoire gaussienne de moyenne μ et de variance σ^2 , on effectue le changement de variable $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$:

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) \frac{dy}{\sigma} = \int f(y)dy$$

Ainsi, on a la densité de probabilité $f(y)$ recherchée :

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right)$$

1.1.2 Histogramme de 100 réalisations de la loi $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(5, 1)$

1.1.3 Histogramme de 1000 réalisations de la loi $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(5, 1)$

1.2 Variables aléatoires gaussiennes vectorielles

1.2.1 Fonction caractéristique de la variable $t^T X$

On a

$$\Phi_{t^T X}(u) = \mathbb{E}[e^{iut^T X}] = \mathbb{E}[e^{iu \sum_{k=1}^n t_k X_k}]$$

1.2.2 Montrons que les X_1, \dots, X_n sont indépendantes

En se servant du lemme donné, si

$$\mathbb{E}[e^{i \sum_{k=1}^n t_k X_k}] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[e^{it_k X_k}]$$

alors les variables aléatoires X_1, \dots, X_n seront indépendantes. Soit $X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(\mu, \sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(O, I)$, on a la relation suivante entre X et Y :

$$X = m + \sigma Y$$

On en déduit que

$$\Phi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}] = \mathbb{E}[e^{iu(m+\sigma Y)}] = e^{ium} \mathbb{E}[e^{iu\sigma Y}] = e^{ium - \frac{\sigma^2 u^2}{2}}$$

Comme $X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(O, I)$, alors $t^T X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(O, \sum_{k=1}^n t_k^2)$.

Ainsi $\Phi_{t^T X}(u) = e^{-\frac{u^2}{2} \sum_{k=1}^n t_k^2}$ et $\Phi_{t^T X}(1) = e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n t_k^2}$.

De plus, $\Phi_{X_k}(t_k) = e^{-\frac{t_k^2}{2}} = \mathbb{E}[e^{it_k X_k}]$, donc $\prod_{k=1}^n \Phi_{X_k}(t_k) = \Phi_{t^T X}(1) = \mathbb{E}[e^{i \sum_{k=1}^n t_k X_k}]$.

On a bien montré que

$$\mathbb{E}[e^{i \sum_{k=1}^n t_k X_k}] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[e^{it_k X_k}]$$

Donc les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont indépendantes.

1.2.3 Densité de probabilité de la loi $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(0, I)$

On a $\forall k, X_k \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$ indépendantes, ainsi

$$f(X) = f(X_1, \dots, X_n) = \prod_{k=1}^n f_k(X_k) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n x_k^2}$$

1.2.4 Densité de probabilité de la loi $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(\mu, \Gamma)$

1.2.5 Montrons que les composantes d'un vecteur gaussien sont indépendantes si et seulement si sa matrice de covariance est diagonale

Si les composantes d'un vecteur gaussien sont indépendantes, alors $\forall i \neq j$ on a $COV(X_i, X_j) = 0$, ainsi, la matrice de covariance a tous ses éléments non diagonaux qui sont nuls. Cette dernière est donc diagonale.

Réciproquement, si la matrice de covariance est diagonale, alors :

$$f_k(X_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - \mu_k)^2}{\sigma_k^2}}$$

et

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \prod_{k=1}^n \sigma_k} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}^{-1} (x-\mu)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \prod_{k=1}^n \sigma_k} e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - \mu_k)^2}{\sigma_k^2}}$$

On a bien $\prod f_k(X_k) = f(X)$, les variables sont donc indépendantes.

1.2.6 Tracé de la densité de la loi $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}(\mu, \Gamma)$

1.2.7 Histogramme de 1000 réalisations de la loi $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}(\mu, \Gamma)$

1.2.8 Montrons que $X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^d}(0, I) \Rightarrow UX \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^d}(0, I), \forall U \in \mathbb{O}_d(\mathbb{R})$

On a $UX = [a_1, \dots, a_d]$, avec $\forall k, a_k = \sum_{i=1}^d u_{ki} X_i$.

Calculons l'espérance de ce vecteur :

$$\mathbb{E}[UX] = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^d u_{1i} X_i, \dots, \sum_{i=1}^d u_{di} X_i \right] = \left[\sum_{i=1}^d u_{1i} \mathbb{E}[X_i], \dots, \sum_{i=1}^d u_{di} \mathbb{E}[X_i] \right] = 0$$

car $\forall i, \mathbb{E}[X_i] = 0$.

Calculons à présent sa variance

$$Var[UX] = \mathbb{E}[(UX)(UX)^T] = \mathbb{E}[UXX^T U^T] = U \mathbb{E}[XX^T] U^T$$

Nous savons également que

$$Var[X] = \mathbb{E}[XX^T] - \mathbb{E}^2[X] = \mathbb{E}[XX^T] = I$$

Ainsi, $Var[X] = UU^T = I$, car $U \in \mathbb{O}_d(\mathbb{R})$.

Nous avons donc montré que $X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^d}(0, I) \Rightarrow UX \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^d}(0, I), \forall U \in \mathbb{O}_d(\mathbb{R})$.

1.2.9 Histogramme de 1000 réalisations du vecteur UX

1.2.10 Démonstration et vérification expérimentale du caractère gaussien d'un vecteur donné

On a $X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$.

On pose $\mathbf{X} = [X_1, X_2]^T$, avec $X_1 = X$ et $X_2 = ZX$. Z est une variable aléatoire indépendante de X de loi uniforme sur l'intervalle $\{-1, 1\}$

On veut montrer que X_1 et X_2 suivent des lois gaussiennes.

Il est évident que c'est le cas pour X_1 , montrons le pour X_2 . La densité de probabilité que suit Z est

$$f_Z(x) = \frac{1}{2}\delta(x+1) + \frac{1}{2}\delta(x-1)$$

La densité de probabilité que suit X est

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

La densité de probabilité que suit ZX est la convolution de leur densité respective.

$$f_{ZX}(x) = (f_X * f_Z)(x) = [f * (\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1)](x) = \frac{1}{2}f(x+1) + \frac{1}{2}f(x-1)$$

La fonction caractéristique d'une variable $X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$ est

$$\Phi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}] = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \Phi_{ZX}(u) &= \mathbb{E}[e^{iuZX}] = \int_{\mathbb{R}} f_{ZX}(y) e^{ity} dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}f_X(x+1) + \frac{1}{2}f_X(x-1)\right) e^{ity} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}f(x+1) e^{ity} dy + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}f(x-1) e^{ity} dy \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{u^2}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{u^2}{2}} = e^{-\frac{u^2}{2}} \end{aligned}$$

car f_X suit une loi $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$.

Nous avons donc prouvé que $X_2 \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$.

A présent, nous allons voir si le vecteur \mathbf{X} est gaussien ou non.

Si le vecteur \mathbf{X} était gaussien, il aurait la fonction caractéristique suivante :

$$\Phi_{\mathbf{X}}(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

Calculons sa fonction caractéristique.

$$\Phi_{\mathbf{X}}(u) = \mathbb{E}(e^{i\langle u, \mathbf{X} \rangle}) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_{\mathbf{X}}(x, z) e^{iu_1x + iu_2xz} dx dz$$

X et ZX n'étant pas indépendant, on ne peut retrouver la bonne fonction caractéristique.

Le vecteur \mathbf{X} n'est donc pas gaussien.

1.3 Variables aléatoires gaussiennes complexes

1.3.1 Variance et densité de probabilité de $Z \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\mu, \sigma^2)$

Calculons la variance de la variable aléatoire $Z = X + iY$.

$$\begin{aligned} V[Z] &= \mathbb{E}[|Z - \mathbb{E}[Z]|^2] = \mathbb{E}[|Z|^2 + |\mathbb{E}[Z]|^2 - 2\Re(Z\overline{\mathbb{E}[Z]})] \\ &= \mathbb{E}[|Z|^2] - |\mathbb{E}[Z]|^2 = \mathbb{E}[|X + iY|^2] - |\mathbb{E}[X + iY]|^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2 + Y^2] - (\mathbb{E}^2[X] + \mathbb{E}^2[Y]) = Var[X] + Var[Y] = \sigma^2 \end{aligned}$$

Calculons à présent la densité de probabilité de Z .

On sait que X et Y sont indépendantes, ainsi

$$\begin{aligned} f_{XY}(X, Y) &= f_X(X)f_Y(Y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x - \Re(\mu))^2}{\frac{\sigma^2}{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y - \Im(\mu))^2}{\frac{\sigma^2}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2\pi} e^{-\frac{|z-\mu|^2}{\sigma^2}} \end{aligned}$$

1.3.2 Histogramme de 1000 réalisations de la loi $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$

1.4 Théorème de la limite centrale

1.4.1 Loi de W_n lorsque $X_k \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(\mu, \sigma^2)$

On sait que $\forall k, X_k \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$, de plus, on a

$$W_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{X_k - \mu}{\sigma}$$

Nous cherchons la loi de W_n en sachant que $\forall k, X_k$ suit une loi normale.

Posons

$$Y_k = \frac{X_k - \mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

Commençons par calculer l'espérance de Y_k

$$\mathbb{E}[Y_k] = \mathbb{E}\left[\frac{X_k - \mu}{\sqrt{n}\sigma}\right] = \frac{\mathbb{E}[X_k] - \mu}{\sqrt{n}\sigma} = 0$$

Calculons à présent la variance de Y_k

$$Var[Y_k] = Var\left[\frac{X_k - \mu}{\sqrt{n}\sigma}\right] = \frac{1}{n\sigma^2} Var[X_k - \mu] = \frac{1}{n\sigma^2} \sigma^2 = \frac{1}{n}$$

Nous avons donc $Y_k \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, \frac{1}{n})$ Ainsi

$$W_n = \sum_{k=1}^n Y_k \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}\left(0, \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{n}} = 1\right)$$

1.4.2 Histogramme de 1000 réalisations de la loi W_n lorsque $X_k \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(\mu, \sigma^2)$

1.4.3 Histogramme de 1000 réalisations de la loi W_n lorsque $X_k \sim \mathcal{U}([0, 1])$

Calcul de l'espérance et de la variance de $X_k, \forall k$

$$\mathbb{E}[X_k] = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$\text{Var}[X_k] = \mathbb{E}[X_k^2] - \mathbb{E}^2[X_k] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

1.4.4 Histogramme de 1000 réalisations de la loi W_n lorsque $X_k \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$

Calcul de l'espérance et de la variance de $X_k, \forall k$

$$\mathbb{E}[X_k] = p = \frac{1}{2}$$

$$\text{Var}[X_k] = p(1 - p) = \frac{1}{4}$$

1.5 Loi du χ^2

1.5.1 Densité de probabilité d'une variable suivant une loi $\chi^2(n)$

Montrons par récurrence que la densité de probabilité de $Y \sim \chi^2(n)$ est

$$f_n(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

Tout d'abord, montrons le pour $n = 1$. On a $Y = X^2$.
Pour toutes fonctions ϕ bornée, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi(y)] &= \mathbb{E}[\phi(x^2)] = \int_{\mathbb{R}} \phi(x^2) f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \phi(x^2) f_X(x) dx + \int_0^{\infty} \phi(x^2) f_X(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \phi(x^2) f_X(-x) dx + \int_0^{\infty} \phi(x^2) f_X(x) dx \end{aligned}$$

Posons le changement de variable $x = \sqrt{u}$, $dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi(y)] &= \int_0^\infty \phi(u) f_X(-\sqrt{u}) \frac{du}{2\sqrt{u}} + \int_0^\infty \phi(u) f_X(\sqrt{u}) \frac{du}{2\sqrt{u}} \\ &= \int_0^\infty \phi(u) [f_X(-\sqrt{u}) + f_X(\sqrt{u})] \frac{du}{2\sqrt{u}}\end{aligned}$$

Ainsi, pour $Y = X^2$, la densité de probabilité s'exprime de la façon suivante :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(-\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y})] \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

On en déduit donc que

$$f_1(x) = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2\pi}} [e^{-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}] \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) = \frac{x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

Supposons que la propriété soit vraie au rang n et montrons le au rang $n+1$:

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x) &= f_n(x) * f_1(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n(t) f_1(x-t) dt \\ &= \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} e^{-\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \int_0^x t^{\frac{n}{2}-1} (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt\end{aligned}$$

Posons le changement de variable $t = xu$, $dt = xdu$.

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x) &= \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} e^{-\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \int_0^1 (xu)^{\frac{n}{2}-1} (x-xu)^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} e^{-\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \int_0^1 (xu)^{\frac{n}{2}-1} (x-xu)^{-\frac{1}{2}} x du \\ &= \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n+1}{2}-1} \beta\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \\ &= \frac{x^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(\frac{n+1}{2})} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\end{aligned}$$

1.5.2 Moyenne et variance de la loi $\chi^2(n)$

Calculons l'espérance de Y

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n X_k^2\right] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k^2] = \sum_{k=1}^n \text{Var}[X_k] + \mathbb{E}^2[X_k] = n$$

Calculons à présent la variance de X^2

$$Var[X^2] = \mathbb{E}[X_k^4] - \mathbb{E}^2[X_k^2]$$

Déterminons l'expression de $\mathbb{E}[X_k^4]$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_k^4] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^3 \cdot x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [-x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}]_{\mathbb{R}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} 3x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x \cdot x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{3}{\sqrt{2\pi}} [-x e^{-\frac{x^2}{2}}]_{\mathbb{R}} + \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= 3 \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 3\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_k^4] &= 3 \\ Var[X_k^2] &= \mathbb{E}[X_k^4] - \mathbb{E}^2[X_k^2] = 3 - 1 = 2\end{aligned}$$

On a donc $Var[Y^2] = \sum_{k=1}^n Var[X_k^2] = 2n$, car les variables sont indépendantes.

1.5.3 Tracé de la densité de probabilité de la loi $\chi^2(n)$

Chapitre 2

Estimation paramétrique

2.1 Estimation des paramètres d'une loi gaussienne

2.1.1 Démonstration de l'expression des composantes de $\hat{\theta}_n$

On cherche $\hat{\theta}_n$ tel que

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta \in \Theta} f_{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \{\theta / \forall \theta', f_{\theta'}(\mathbf{X}) \leq f_{\theta}(\mathbf{X})\}$$

On a

$$\begin{aligned} f_{\theta}(X_1, \dots, X_n) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma^n} e^{-\frac{1}{2} \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \mu)^2}{\sigma^2}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_{\theta}}{\partial \mu} \Big|_{\theta=\hat{\theta}_n} = 0 = \sum_{k=1}^n (X_k - \hat{\mu}_n) \Leftrightarrow \hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

Dans l'expression précédente de f_θ on pose $y = \hat{\sigma}_n^2$, ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_\theta}{\partial y} \Big|_{\theta=\hat{\theta}_n} &= 0 \\
&= \frac{-\frac{n}{2}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} y^{\frac{n}{2}+1}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \hat{\mu}_n)^2}{\sigma^2}} + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} y^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{1}{2} \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \hat{\mu}_n)^2}{y^2} \right) e^{-\frac{1}{2} \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \hat{\mu}_n)^2}{\sigma^2}} \\
&\Leftrightarrow \frac{n}{2y} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \hat{\mu}_n)^2}{y^2} \\
&\Leftrightarrow \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \hat{\mu}_n)^2
\end{aligned}$$

2.1.2 Matrice d'information de Fisher

Commençons par calculer $\log f_\theta$

$$\begin{aligned}
\log f_\theta(X_1, \dots, X_n) &= \log \left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mu)} \right] \\
&= -\frac{1}{2} \log [(2\pi)^n \sigma^{2n}] - \frac{1}{2} \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \mu)^2}{\sigma^2} \\
&= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - n \log(\sigma) - \frac{1}{2} \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \mu)^2}{\sigma^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log f_\theta}{\partial \mu} &= \frac{\sum_{k=1}^n X_k - \mu}{\sigma^2} \\
\frac{\partial^2 \log f_\theta}{\partial \mu^2} &= -\frac{n}{\sigma^2} \\
\frac{\partial^2 \log f_\theta}{\partial \mu \partial \sigma^2} &= -\frac{\sum_{k=1}^n X_k - \mu}{\sigma^4}
\end{aligned}$$

Posons $y = \sigma^2$

$$\begin{aligned} \log f_{\theta}(X_1, \dots, X_n) &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - n \log(\sqrt{y}) - \frac{1}{2} \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \mu)^2}{y} \\ \frac{\partial \log f_{\theta}}{\partial y} &= -\frac{n}{2y} + \frac{1}{2} \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \mu)^2}{y^2} \\ \frac{\partial^2 \log f_{\theta}}{\partial y^2} &= -\frac{n}{2^2 y} - \frac{2 \sum_{k=1}^n (X_k - \mu)^2}{2y^3} \end{aligned}$$

On obtient alors la matrice de Fisher suivante :

$$\begin{bmatrix} -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \log f_{\theta}}{\partial \mu^2}\right] & -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \log f_{\theta}}{\partial \mu \partial \sigma^2}\right] \\ -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \log f_{\theta}}{\partial \mu \partial \sigma^2}\right] & -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \log f_{\theta}}{\partial \sigma^4}\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\sigma^4} \end{bmatrix}$$

2.1.3 Borne de Cramer-Rao

On déduit directement de la matrice d'information de Fisher la borne de Cramer-Rao

$$I_{\theta}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n} \end{bmatrix}$$

2.1.4 Loi de l'estimateur $\hat{\mu}_n$

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{\mu}_n] &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu = \mu \\ \text{Var}[\hat{\mu}_n] &= \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Ainsi $\hat{\mu}_n \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

2.1.5 Biais de l'estimateur $\hat{\mu}_n$

On a

$$\|\mu - \mathbb{E}[\hat{\mu}_n]\|^2 = \|\mu - \mu\|^2 = 0$$

2.1.6 Risque quadratique de l'estimateur $\hat{\mu}_n$

On a

$$\mathbb{E}[\|\mu - \hat{\mu}_n\|^2] = \int_{\mathbb{R}} f(t)(\mu - t) dt = \int_{\mathbb{R}} (\mu - t)^2 \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(t-\mu)^2 n}{\sigma^2}} dt$$

On effectue le changement de variable $u = \frac{t-\mu}{\sqrt{2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, $du = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}\sigma} dt$

$$\mathbb{E}[\|\mu - \hat{\mu}_n\|^2] = \frac{2\sigma^2}{n\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} u^2 e^{-u^2} du$$

On effectue à présent le changement de variable $u = \sqrt{y}$, $du = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$

$$\mathbb{E}[\|\mu - \hat{\mu}_n\|^2] = \frac{\sigma^2}{n\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-y} dy = \frac{\sigma^2}{n\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

2.1.7 Tracé de l'évolution du risque quadratique de l'estimateur $\hat{\mu}_n$

2.1.8 Loi de l'estimateur $\hat{\sigma}_n^2$

On a

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \left\| \left(\mathbb{I} - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^T \right) X \right\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(X_k - \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n X_l \right)^2 = \|MX\|^2$$

Avec

$$M = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{n} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 - \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

On a $MX = [M_1, \dots, M_n]^T$ et

$$\forall k, M_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\left(1 - \frac{1}{n} \right) X_k - \frac{1}{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n X_l \right]$$

On en déduit l'espérance et la variance de $\hat{\sigma}_n^2$

$$\forall k, \mathbb{E}[M_k] = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\left(1 - \frac{1}{n} \right) \mu - \frac{1}{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \mu \right] = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\mu - \frac{1}{n} \mu - \mu + \frac{1}{n} \mu \right] = 0$$

$$\forall k, \text{Var} E[M_k] = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\left(1 - \frac{1}{n} \right) \sigma^2 - \frac{1}{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \sigma^2 \right] = \frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} \right)$$

Comme $\sigma^2 = \|M\|^2 = \sum_{k=1}^n M_k^2$, alors

$\sigma^2 \sim \chi^2(n)$, avec $\forall k, X_k \sim \mathcal{N}_R(0, \frac{\sigma^2}{n} (1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}))$

- 2.1.9 Biais de l'estimateur $\hat{\sigma}_n^2$
- 2.1.10 Risque quadratique de l'estimateur $\hat{\sigma}_n^2$
- 2.1.11 Tracé de l'évolution du risque quadratique de l'estimateur $\hat{\sigma}_n^2$