Projet de statistiques

Maxime Peterlin - Gabriel Vermeulen

ENSEIRB-MATMECA, Bordeaux

28, avril 2014

Table des matières

Chapitre 1

Autour des variables aléatoires gaussiennes

1.1 Variables aléatoires gaussiennes réelles

1.1.1 Densité de probabilité d'une variable aléatoire gaussienne de de moyenne μ et de variance σ^2

La densité de probabilité d'une loi normale de moyenne 0 et de variance 1 est :

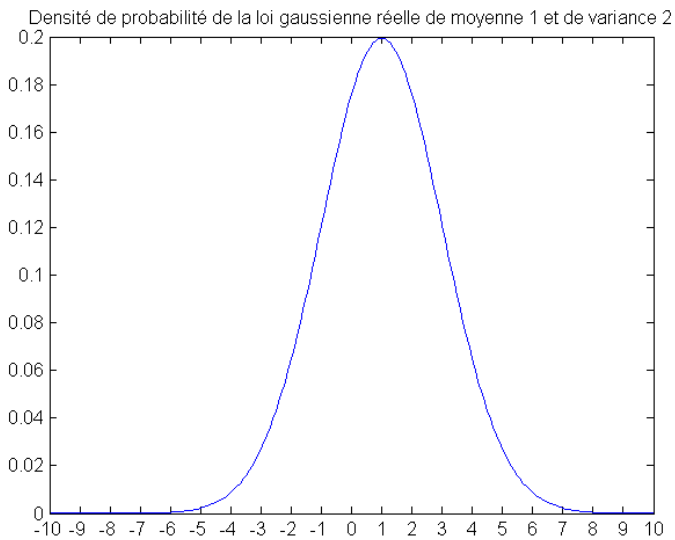
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot exp(-\frac{x^2}{2})$$

Pour obtenir la densité de probabilité d'une variable aléatoire gaussienne de de moyenne μ et de variance σ^2, on effectue le changement de variable $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$:

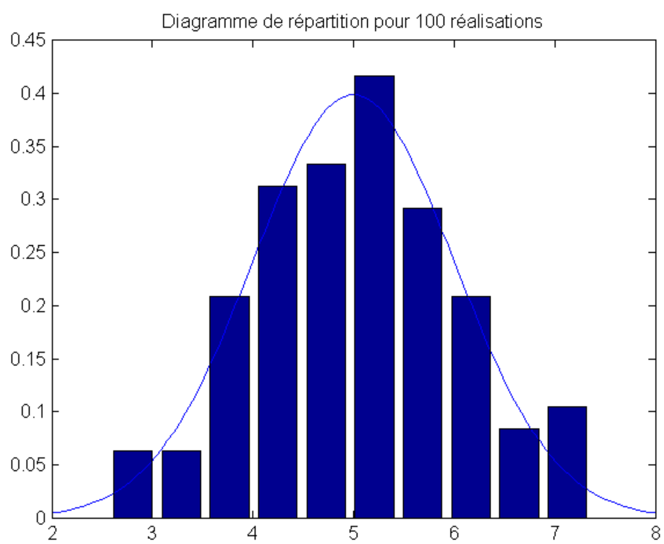
$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot exp(-\frac{x^2}{2})dx = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot exp(-\frac{(y-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2})\frac{dy}{\sigma} = \int f(y)dy$$

Ainsi, on a la densité de probabilité $f(y)$ recherchée :

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot exp(-\frac{(y-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2})$$

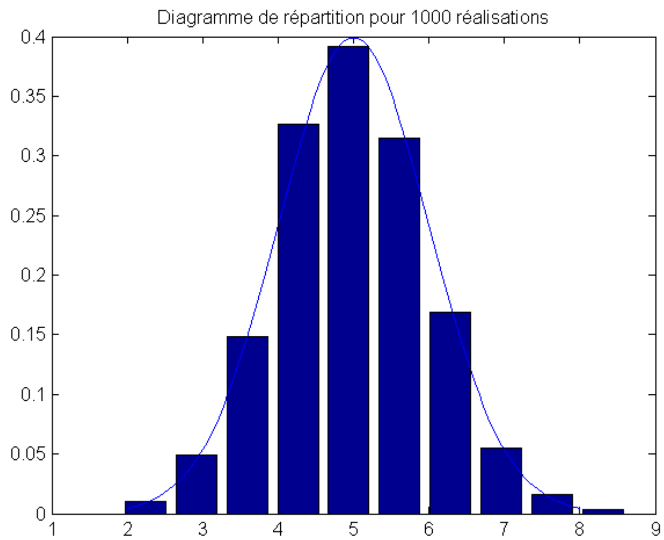


1.1.2 Histogramme de 100 réalisations de la loi $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(5, 1)$



La proportion empirique entre $[\mu - \sigma, \, \mu + \sigma]$ est égale à 63.
La proportion empirique entre $[\mu - 3\,\sigma, \, \mu + 3\,\sigma]$ est égale à 100.

1.1.3 Histogramme de 1000 réalisations de la loi $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(5,1)$



La proportion empirique entre $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ est égale à 713.
La proportion empirique entre $[\mu - 3\ \sigma, \mu + 3\ \sigma]$ est égale à 998.
On remarque que plus le nombre de réalisations est grand, moins ces valeurs empiriques sont aléatoires, et plus elles convergent vers les valeurs théoriques vues en cours.

1.2 Variables aléatoires gaussiennes vectorielles

1.2.1 Fonction caractéristique de la variable $t^T X$

On a

$$\Phi_{t^T X}(u) = \mathbb{E}[e^{iut^T X}] = \mathbb{E}[e^{iu\sum_{k=1}^{n} t_k X_k}]$$

1.2.2 Montrons que les $X_1, \ldots, X_n$ sont indépentantes

En se servant du lemme donné, si

$$\mathbb{E}[e^{i\sum_{k=1}^{n} t_k X_k}] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[e^{it_k X_k}]$$

alors les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ seront indépendantes. Soit $X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}(\mu, \sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}(O, I)$, on a la relation suivante entre X et Y :

$$X = m + \sigma Y$$

On en déduit que

$$\Phi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}] = \mathbb{E}[e^{iu(m+\sigma Y)}] = e^{ium}\mathbb{E}[e^{iu\sigma Y}] = e^{ium - \frac{\sigma^2 u^2}{2}}$$

Comme $X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}(O, I)$, alors $t^T X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}(O, \sum\limits_{k=1}^{n} t_k^2)$.

Ainsi $\Phi_{t^T X}(u) = e^{-\frac{u^2}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} t_k^2}$ et $\Phi_{t^T X}(1) = e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} t_k^2}$.

De plus, $\Phi_{X_k}(t_k) = e^{-\frac{t_k^2}{2}} = \mathbb{E}[e^{it_k X_k}]$, donc $\prod\limits_{k=1}^{n} \Phi_{X_k}(t_k) = \Phi_{t^T X}(1) = \mathbb{E}[e^{i\sum\limits_{k=1}^{n} t_k X_k}]$.

On a bien montré que

$$\mathbb{E}[e^{i\sum\limits_{k=1}^{n} t_k X_k}] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[e^{it_k X_k}]$$

Donc les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes.

1.2.3 Densité de probabilité de la loi $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(0, I)$

On a $\forall k,\ X_k \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$ indépendantes, ainsi

$$f(X) = f(X_1, \ldots X_n) = \prod_{k=1}^{n} f_k(X_k) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$$

1.2.4 Densité de probabilité de la loi $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(\mu, \Gamma)$

Pour toutes fonctions ϕ bornée, on a On sait que la densité de probabilité de $X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(0, I) est$

$$f(X) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2} = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}$$

On a

$$\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(\mathbf{x}) dx_1 \ldots dx_n = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n e^{-\frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2} d\mathbf{x}$$

On effectue le changement de variable $\mathbf{y} = \Gamma^{\frac{1}{2}}\mathbf{x} + \mu \Leftrightarrow \mathbf{x} = \Gamma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{y} - \mu)$, $d\mathbf{x} = |\Gamma|^{-\frac{1}{2}}$, avec Γ la matrice de covariance de x et μ son espérance.
Ce changement de variable peut s'expliquer par le fait qu'on effectue un changement de variable de la forme $x = \sigma y + \mu$ pour chaque composante du vecteur $\mathbf{x}$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{1}{2}\|\Gamma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{y}-\mu)\|^2} |\Gamma|^{-\frac{1}{2}} d\mathbf{y} &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n |\Gamma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\|\Gamma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{y}-\mu)\|^2} d\mathbf{y} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n |\Gamma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mu)^T (\Gamma^{-\frac{1}{2}})^T \Gamma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{y}-\mu)} d\mathbf{y} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n |\Gamma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mu)^T \Gamma^{-1}(\mathbf{y}-\mu)} d\mathbf{y}
\end{aligned}$$

Ainsi, la densité de probabilité de la loi $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(\mu, \Gamma)$ est

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n |\Gamma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mu)^T \Gamma^{-1} (\mathbf{y}-\mu)}$$

1.2.5 Montrons que les composantes d'un vecteur gaussien sont indépendantes si et seulement si sa matrice de covariance est diagonale

Si les composantes d'un vecteur gaussien sont indépendantes, alors $\forall i \neq j$ on a $COV(X_i, X_j) = 0$, ainsi, la matrice de covariance a tous ses éléments non diagonaux qui sont nuls. Cette dernière est donc diagonale.
Réciproquement, si la matrice de covariance est diagonale, alors :

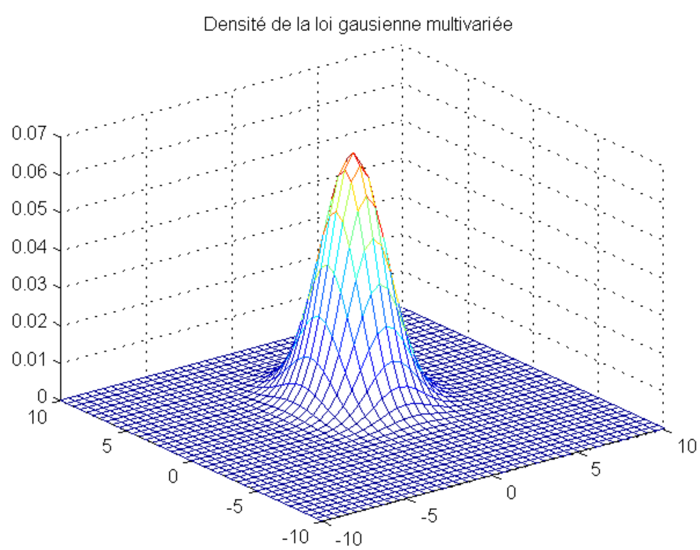
$$f_k(X_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_k^2}}$$

et

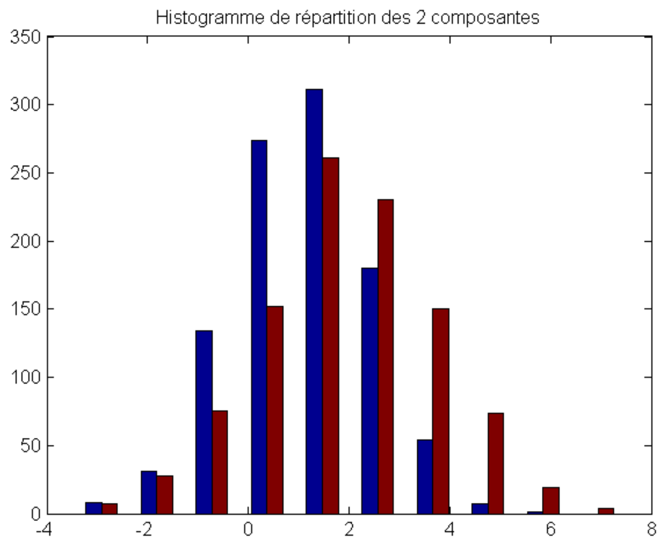
$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \prod_{k=1}^{n} \sigma_k} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}^{-1} (x-\mu)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \prod_{k=1}^{n} \sigma_k} e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k-\mu_k)}{\sigma_k^2}}$$

On a bien $\prod f_k(X_k) = f(X)$, les variables sont donc indépendantes.

1.2.6 Tracé de la densité de la loi $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}(\mu, \Gamma)$



1.2.7 Histogramme de 1000 réalisations de la loi $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}(\mu, \Gamma)$



1.2.8 Montrons que $X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^d}(0, I) \Rightarrow UX \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^d}(0, I), \forall U \in \mathbb{O}_d(\mathbb{R})$

On a $UX = [a_1, \ldots, a_d]$, avec $\forall k, a_k = \sum_{i=1}^{d} u_{ki} X_i$.
Calculons l'espérance de ce vecteur :

$$\mathbb{E}[UX] = \mathbb{E}\left[[\sum_{i=1}^{d} u_{1i} X_i, \ldots, \sum_{i=1}^{d} u_{di} X_i]\right] = \left[\sum_{i=1}^{d} u_{1i} \mathbb{E}[X_i], \ldots, \sum_{i=1}^{d} u_{di} \mathbb{E}[X_i]\right] = 0$$

car $\forall i, \mathbb{E}[X_i] = 0$.

Calculons à présent sa variance

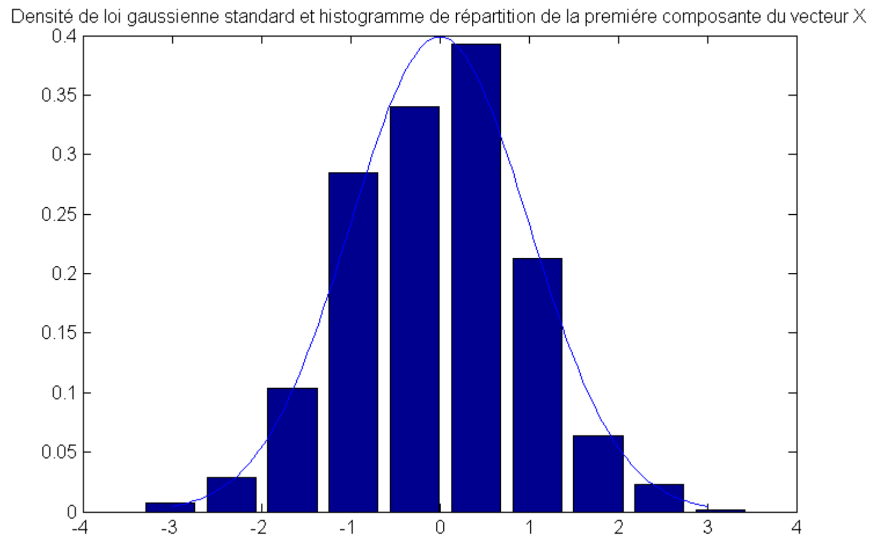
$$Var[UX] = \mathbb{E}[(UX)(UX)^T] = \mathbb{E}[UXX^T U^T] = U\mathbb{E}[XX^T]U^T$$

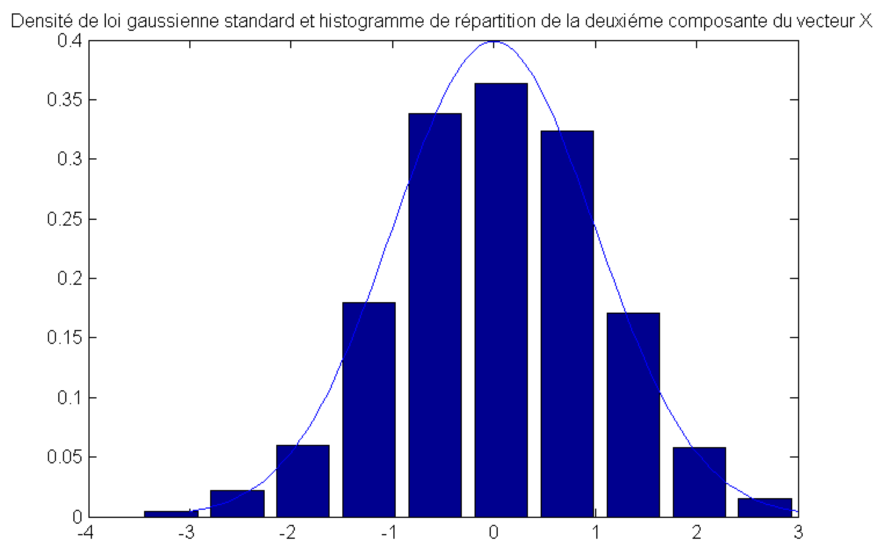
Nous savons également que

$$Var[X] = \mathbb{E}[XX^T] - \mathbb{E}^2[X] = \mathbb{E}[XX^T] = I$$

Ainsi, $Var[X] = UU^T = I$, car $U \in \mathbb{O}_d(\mathbb{R})$.
Nous avons donc montré que $X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^d}(0, I) \Rightarrow UX \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^d}(0, I), \forall U \in \mathbb{O}_d(\mathbb{R})$.

1.2.9 Histogramme de 1000 réalisations du vecteur UX





1.2.10 Démonstration et vérification expérimentale du caractère gaussien d'un vecteur donné

On a $X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$.
On pose $\mathbf{X} = [X_1, X_2]^T$, avec $X_1 = X et X_2 = ZX$. Z est une variable aléatoire

indépendante de X de loi uniforme sur l'intervalle $\{-1, 1\}$

On veut montrer que X_1 et X_2 suivent des lois gaussiennes.
Il est évident que c'est le cas pour X_1, montrons le pour X_2. La densité de probabilité que suit Z est

$$f_Z(x) = \frac{1}{2}\delta(x+1) + \frac{1}{2}\delta(x-1)$$

La densité de probabilité que suit X est

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{x^2}{2})$$

La densité de probabilité que suit ZX est la convolution de leur densité respective.

$$f_{ZX}(x) = (f_X * f_Z)(x) = [f * (\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1)](x) = \frac{1}{2}f(x+1) + \frac{1}{2}f(x-1)$$

La fonction caractéristique d'une variable $X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)$ est

$$\Phi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}] = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\Phi_{ZX}(u) = \mathbb{E}[e^{iuZX}] &= \int_{\mathbb{R}} f_{ZX}(y)e^{ity}dy = \int_{\mathbb{R}} (\frac{1}{2}f_X(x+1) + \frac{1}{2}f_X(x-1))e^{ity}dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}f(x+1)e^{ity}dy + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}f(x-1)e^{ity}dy \\
&= \frac{1}{2}e^{-\frac{u^2}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{u^2}{2}} = e^{-\frac{u^2}{2}}
\end{aligned}$$

car f_X suit une loi $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)$.
Nous avons donc prouvé que $X_2 \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)$.
A présent, nous allons voir si le vecteur $\mathbf{X}$ est gaussien ou non.
Si le vecteur $\mathbf{X}$ était gaussien, il aurait la fonction caractéristique suivante :

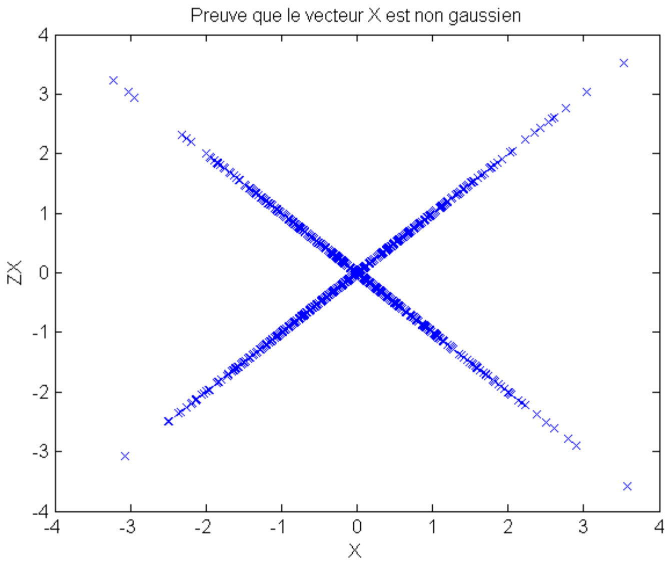
$$\Phi_{\mathbf{X}}(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

Calculons sa fonction caractéristique.

$$\Phi_{\mathbf{X}}(u) = \mathbb{E}(e^{i<u,X>}) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f_{\mathbf{X}}(x,z)e^{iu_1x+iu_2xz}dxdz$$

X et ZX n'étant pas indépendant, on ne peut retrouver la bonne fonction caractéristique.

Le vecteur **X** n'est donc pas gaussien.



1.3 Variables aléatoires gaussiennes complexes

1.3.1 Variance et densité de probabilité de $Z \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\mu, \sigma^2)$

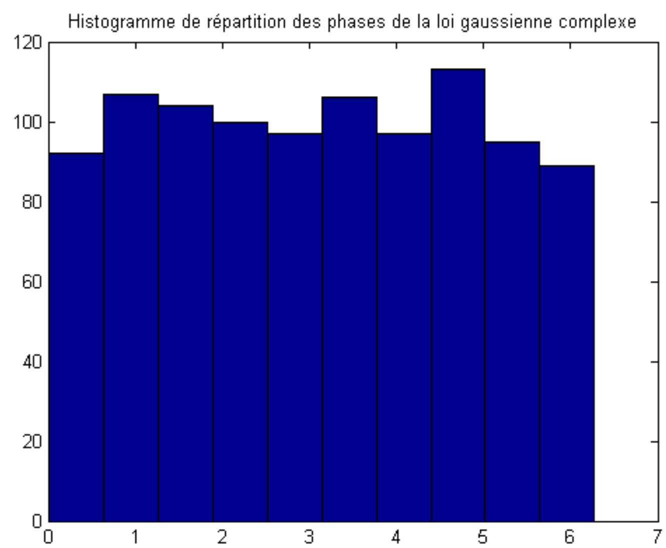
Calculons la variance de la variable aléatoire $Z = X + iY$.

$$\begin{aligned}
V[Z] = \mathbb{E}\left[|Z - \mathbb{E}[Z]|^2\right] &= \mathbb{E}\left[|Z|^2 + |\mathbb{E}[Z]|^2 - 2\Re(Z\overline{\mathbb{E}[Z]})\right] \\
&= \mathbb{E}[|Z|^2] - |\mathbb{E}[Z]|^2 = \mathbb{E}[|X + iY|^2] - |\mathbb{E}[X + iY]|^2 \\
&= \mathbb{E}[X^2 + Y^2] - (\mathbb{E}^2[X] + \mathbb{E}^2[Y]) = Var[X] + Var[Y] = \sigma^2
\end{aligned}$$

Calculons à présent la densité de probabilité de Z.
On sait que X et Y sont indépendantes, ainsi

$$\begin{aligned}
f_{XY}(X, Y) = f_X(X)f_Y(Y)& \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} exp(-\frac{1}{2}\frac{(x - \Re(\mu))^2}{\frac{\sigma^2}{2}}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} exp(-\frac{1}{2}\frac{(y - \Im(\mu))^2}{\frac{\sigma^2}{2}}) \\
&= \frac{1}{\sigma^2\pi} e^{-\frac{|z-\mu|^2}{\sigma^2}}
\end{aligned}$$

1.3.2 Histogramme de 1000 réalisations de la loi $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$



On remarque ici que la loi suivie est une loi uniforme entre 0 et 2π.
Ceci ce justifie par le fait que

$$Arg[f_\theta(x)] = Arg[\frac{1}{\sigma^2\pi}e^{-\frac{|z-\mu|^2}{\sigma^2}}] \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

1.4 Théorème de la limite centrale

1.4.1 Loi de W_n lorsque $X_k \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(\mu, \sigma^2)$

On sait que $\forall k, X_k \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$, de plus, on a

$$W_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - \mu}{\sigma}$$

Nous cherchons la loi de W_n en sachant que $\forall k, X_k$ suit une loi normale.
Posons

$$Y_k = \frac{X_k - \mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

Commençons par calculer l'espérance de Y_k

$$\mathbb{E}[Y_k] = \mathbb{E}\left[\frac{X_k - \mu}{\sqrt{n}\sigma}\right] = \frac{\mathbb{E}[X_k] - \mu}{\sqrt{n}\sigma} = 0$$

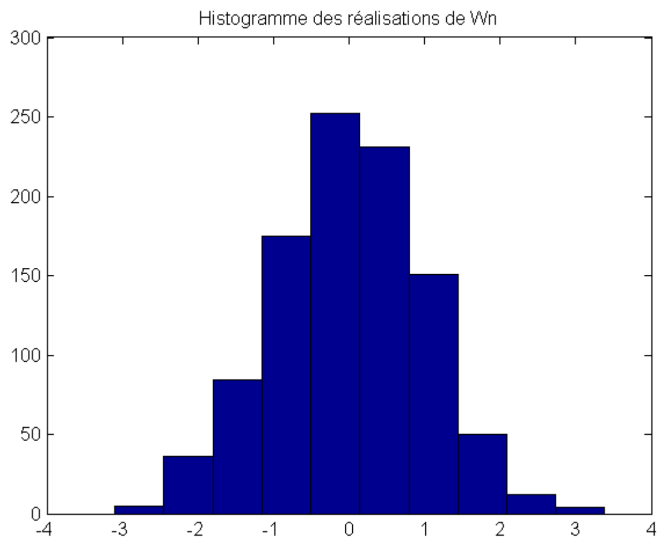
Calculons à présent la variance de Y_k

$$Var[Y_k] = Var\left[\frac{X_k - \mu}{\sqrt{n}\sigma}\right] = \frac{1}{n\sigma^2}Var[X_k - \mu] = \frac{1}{n\sigma^2}\sigma^2 = \frac{1}{n}$$

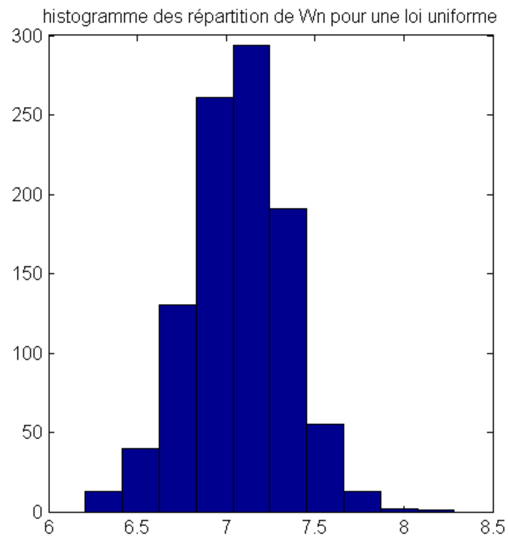
Nous avons donc $Y_k \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, \frac{1}{n})$ Ainsi

$$W_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}} = 1)$$

1.4.2 Histogramme de 1000 réalisations de la loi W_n lorsque $X_k \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(\mu, \sigma^2)$



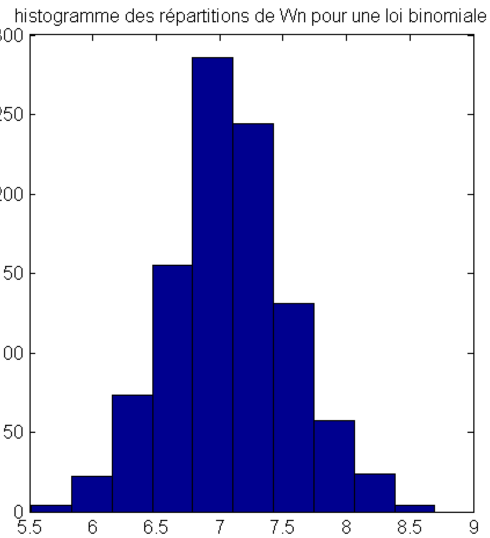
1.4.3 Histogramme de 1000 réalisations de la loi W_n lorsque $X_k \sim \mathcal{U}([0,1])$



Calcul de l'espérance et de la variance de $X_k, \forall k$

$$\mathbb{E}[X_k] = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$
$$Var[X_k] = \mathbb{E}[X_k^2] - \mathbb{E}^2[X_k] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

1.4.4 Histogramme de 1000 réalisations de la loi W_n lorsque $X_k \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$



Calcul de l'espérance et de la variance de $X_k, \forall k$

$$\mathbb{E}[X_k] = p = \frac{1}{2}$$
$$Var[X_k] = p(1-p) = \frac{1}{2}$$

1.5 Loi du χ^2

1.5.1 Densité de probabilité d'une variable suivant une loi $\chi^2(n)$

Montrons par récurrence que la densité de probabilité de $Y \sim \chi^2(n)$ est

$$f_n(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

Tout d'abord, montrons le pour $n = 1$. On a $Y = X^2$.
Pour toutes fonctions ϕ bornée, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi(y)] = \mathbb{E}[\phi(x^2)] &= \int_{\mathbb{R}} \phi(x^2) f_X(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \phi(x^2) f_X(x) dx + \int_{0}^{\infty} \phi(x^2) f_X(x) dx \\
&= \int_{0}^{\infty} \phi(x^2) f_X(-x) dx + \int_{0}^{\infty} \phi(x^2) f_X(x) dx
\end{aligned}$$

Posons le changement de variable $x = \sqrt{u}$, $dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi(y)] &= \int_{0}^{\infty} \phi(u) f_X(-\sqrt{u}) \frac{du}{2\sqrt{u}} + \int_{0}^{\infty} \phi(u) f_X(\sqrt{u}) \frac{du}{2\sqrt{u}} \\
&= \int_{0}^{\infty} \phi(u) [f_X(-\sqrt{u}) + f_X(\sqrt{u})] \frac{du}{2\sqrt{u}}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $Y = X^2$, la densité de probabilité s'exprime de la façon suivante :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(-\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y})] \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

On en déduit donc que

$$f_1(x) = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2\pi}} [e^{-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}] \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) = \frac{x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

Supposons que la propriété soit vraie au rang n et montrons le au rang $n + 1$:

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) = f_n(x) * f_1(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_n(t) f_1(x - t) dt \\
&= \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} e^{-\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \int_{0}^{x} t^{\frac{n}{2}-1} (x - t)^{-\frac{1}{2}} dt
\end{aligned}$$

Posons le changement de variable $t = xu$, $dt = xdu$.

$$
\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} e^{-\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \int\limits_0^1 (xu)^{\frac{n}{2}-1}(x-xu)^{-\frac{1}{2}} du \\
&= \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} e^{-\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \int\limits_0^1 (xu)^{\frac{n}{2}-1}(x-xu)^{-\frac{1}{2}} x du \\
&= \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n+1}{2}-1} \beta(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \\
&= \frac{x^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)
\end{aligned}
$$

1.5.2 Moyenne et variance de la loi $\chi^2(n)$

Calculons l'espérance de Y

$$
\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\sum_{k=1}^n X_k^2] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k^2] = \sum_{k=1}^n Var[X_k] + \mathbb{E}^2[X_k] = n
$$

Calculons à présent la variance de X^2

$$
Var[X^2] = \mathbb{E}[X_k^4] - \mathbb{E}^2[X_k^2]
$$

Déterminons l'expression de $\mathbb{E}[X_k^4]$

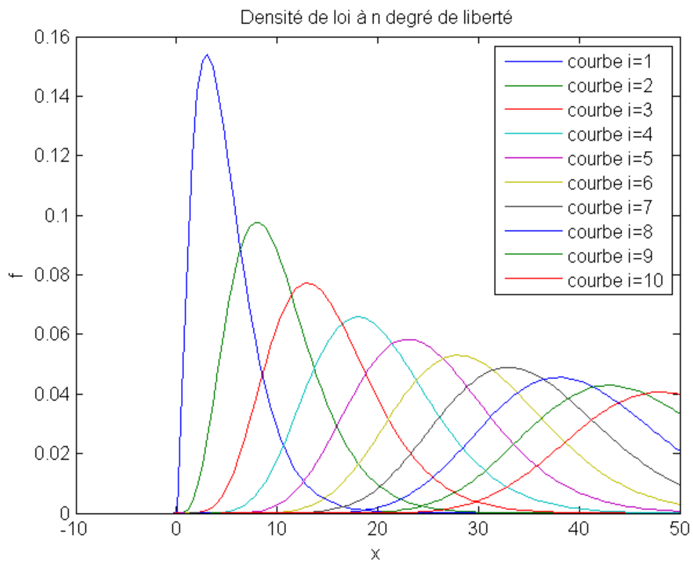
$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_k^4] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^3 \cdot x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [-x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}]_{\mathbb{R}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} 3x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x \cdot x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{3}{\sqrt{2\pi}} [-x e^{-\frac{x^2}{2}}]_{\mathbb{R}} + \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= 3 \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 3
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_k^4] &= 3 \\
Var[X_k^2] &= \mathbb{E}[X_k^4] - \mathbb{E}^2[X_k^2] = 3 - 1 = 2
\end{aligned}
$$

On a donc $Var[Y^2] = \sum\limits_{k=1}^n Var[X_k^2] = 2n$, car les variables sont indépendantes.

1.5.3 Tracé de la densité de probabilité de la loi $\chi^2(n)$



Lorsque n est grand, la densité est beaucoup plus étandue, car on augmente la variance qui est égale à $2n$.
De plus, la densité est décalée en n (car $\mathbb{E}[X] = n$).

1.5.4 Loi du vecteur $U^T X$

On a

$$U^T X = \sum_{i=1}^{k} < u_i, X > u_i = \begin{bmatrix} u_1^T X \\ \vdots \\ u_k^T X \end{bmatrix}$$

Ainsi,

$$\forall i, u_i^T X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(u_i^T \cdot \mathbf{0}, u_i^T \sigma^2 \mathbb{I} u_i) \Leftrightarrow \forall i, u_i^T X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, \sigma^2)$$

On remarque également que les composantes du vecteur $U^T X$ sont dépendantes.

Chapitre 2

Estimation paramétrique

2.1 Estimation des paramètres d'une loi gaussienne

2.1.1 Démonstration de l'expression des composantes de $\hat{\theta}_n$

On cherche $\hat{\theta}_n$ tel que

$$\hat{\theta}_n = \arg\max_{\theta \in \Theta} f_\theta(X_1, \ldots, X_n) = \{\theta / \forall \theta', f_{\theta'}(\mathbf{X}) \leq f_\theta(\mathbf{X})\}$$

On a

$$\begin{aligned} f_\theta(X_1, \ldots, X_n) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mu)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma^n} e^{-\frac{1}{2} \frac{\sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)^2}{\sigma^2}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_\theta}{\partial \mu}|_{\theta = \hat{\theta}_n} = 0 = \sum_{k=1}^{n} (X_k - \hat{\mu}_n) \Leftrightarrow \hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Dans l'expression précédente de f_θ on pose $y = \hat{\sigma}_n^2$, ainsi

$$\frac{\partial f_\theta}{\partial y}|_{\theta=\hat{\theta}_n} = 0$$

$$= \frac{-\frac{n}{2}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} y^{\frac{n}{2}+1}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k-\hat{\mu}_n)^2}{\sigma^2}} + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} y^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{1}{2} \frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k-\hat{\mu}_n)^2}{y^2} \right) e^{-\frac{1}{2}\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k-\hat{\mu}_n)^2}{\sigma^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{2y} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k-\hat{\mu}_n)^2}{y^2}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\hat{\mu}_n)^2$$

2.1.2 Matrice d'information de Fisher

Commençons par calculer $logf_\theta$

$$logf_\theta(X_1,\ldots,X_n) = log\left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}log\left[(2\pi)^n\sigma^{2n}\right] - \frac{1}{2}\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2}{\sigma^2}$$

$$= -\frac{n}{2}log(2\pi) - nlog(\sigma) - \frac{1}{2}\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial logf_\theta}{\partial \mu} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2 logf_\theta}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2 logf_\theta}{\partial \mu \partial \sigma^2} = -\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu}{\sigma^4}$$

Posons $y = \sigma^2$

$$logf_\theta(X_1, \dots, X_n) = -\frac{n}{2}log(2\pi) - nlog(\sqrt{y}) - \frac{1}{2}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - \mu)^2}{y}$$

$$\frac{\partial logf_\theta}{\partial y} = -\frac{n}{2y} + \frac{1}{2}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - \mu)^2}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 logf_\theta}{\partial y^2} = -\frac{n}{2^2 y} - \frac{2\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - \mu)^2}{2y^3}$$

On obtient alors la matrice de Fisher suivante :

$$\begin{bmatrix} -\mathbb{E}[\frac{\partial^2 logf_\theta}{\partial \mu^2}] & -\mathbb{E}[\frac{\partial^2 logf_\theta}{\partial \mu \partial \sigma^2}] \\ -\mathbb{E}[\frac{\partial^2 logf_\theta}{\partial \mu \partial \sigma^2}] & -\mathbb{E}[\frac{\partial^2 logf_\theta}{\partial \sigma^4}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\sigma^4} \end{bmatrix}$$

2.1.3 Borne de Cramer-Rao

On déduit directement de la matrice d'information de Fisher la borne de Cramer-Rao

$$I_\theta^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n} \end{bmatrix}$$

2.1.4 Loi de l'estimateur $\hat{\mu}_n$

On a

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}_n] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu = \mu$$

$$Var[\hat{\mu}_n] = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Ainsi $\hat{\mu}_n \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

2.1.5 Biais de l'estimateur $\hat{\mu}_n$

On a

$$\|\mu - \mathbb{E}[\hat{\mu}_n]\|^2 = \|\mu - \mu\|^2 = 0$$

2.1.6 Risque quadratique de l'estimateur $\hat{\mu}_n$

On a

$$\mathbb{E}[\|\mu - \hat{\mu}_n\|^2] = \int_{\mathbb{R}} f(t)(\mu - t)dt = \int_{\mathbb{R}} (\mu - t)^2 \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-\mu)^2 n}{\sigma^2}} dt$$

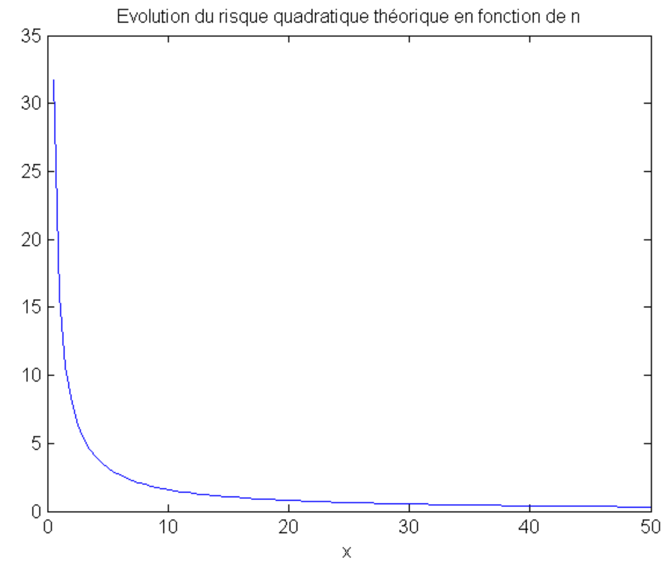
On effectue le changement de variable $u = \frac{t-\mu}{\sqrt{2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, $du = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}\sigma}dt$

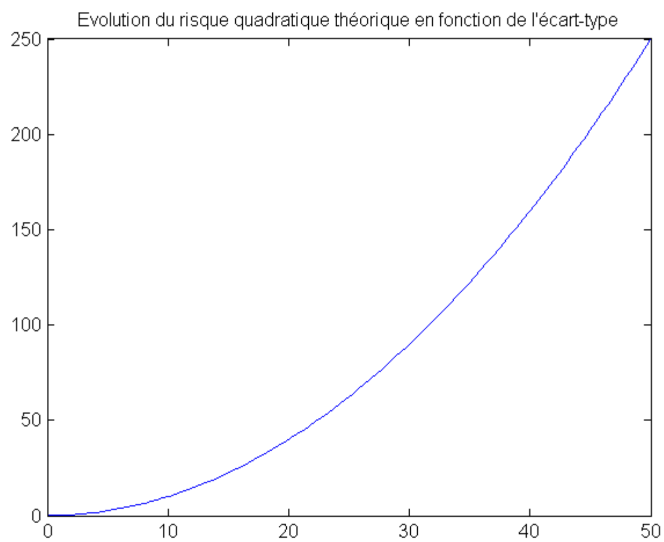
$$\mathbb{E}[\|\mu - \hat{\mu}_n\|^2] = \frac{2\sigma^2}{n\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} u^2 e^{-u^2} du$$

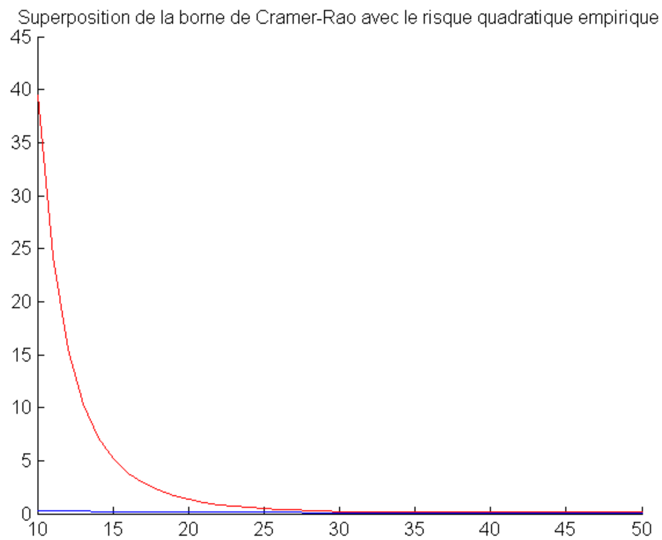
On effectue à présent le changement de variable $u = \sqrt{y}$, $du = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$

$$\mathbb{E}[\|\mu - \hat{\mu}_n\|^2] = \frac{\sigma^2}{n\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-y} dy = \frac{\sigma^2}{n\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

2.1.7 Tracé de l'évolution du risque quadratique de l'estimateur $\hat{\mu}_n$







2.1.8 Loi de l'estimateur $\hat{\sigma}_n^2$

On a

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\|(\mathbb{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T)X\| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}X_l)^2 = \|MX\|^2$$

Avec

$$M = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix} 1-\frac{1}{n} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1-\frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

On a $MX = [M_1, \ldots, M_n]^T$ et

$$\forall k, M_k = \frac{1}{\sqrt{n}}[(1-\frac{1}{n})X_k - \frac{1}{n}\sum_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{n}X_l]$$

On en déduit l'espérance et la variance de $\hat{\sigma}_n^2$

$$\forall k, \mathbb{E}[M_k] = \frac{1}{\sqrt{n}}[(1 - \frac{1}{n})\mu - \frac{1}{n}\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{n}\mu] = \frac{1}{\sqrt{n}}[\mu - \frac{1}{n}\mu - \mu + \frac{1}{n}\mu] = 0$$

$$\forall k, VarE[M_k] = \frac{1}{\sqrt{n}}[(1 - \frac{1}{n})\sigma^2 - \frac{1}{n}\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{n}\sigma^2] = \frac{\sigma^2}{n}(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2})$$

Comme $\sigma^2 = \|M\|^2 = \sum_{k=1}^{n} M_k^2$, alors
$\sigma^2 \sim \chi^2(n)$, avec $\forall k, X_k \sim \mathcal{N}_R(0, \frac{\sigma^2}{n}(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}))$
On pose $v^2 = \frac{\sigma^2}{n}(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2})$
On sait que $\mathbb{E}[\sum_{k=1}^{n} Y_i^2] = n$, donc $\mathbb{E}[\hat{\sigma}_n^2] = \mathbb{E}[\sum_{k=1}^{n}(vY_i)^2] = v^2 n$
De même, $Var[\sum_{k=1}^{n} Y_i^2] = 2n$, donc $Var[\hat{\sigma}_n^2] = Var[\sum_{k=1}^{n}(vY_i)^2] = 2v^2 n$

2.1.9 Biais de l'estimateur $\hat{\sigma}_n^2$

On a

$$\|\sigma^2 - \mathbb{E}[\hat{\sigma}_n^2]\|^2 = \|\sigma^2 - v^2 n\|^2 = (\sigma^2 - v^2 n)^2 = \frac{\sigma^4}{n^2}(3 - \frac{2}{n})$$

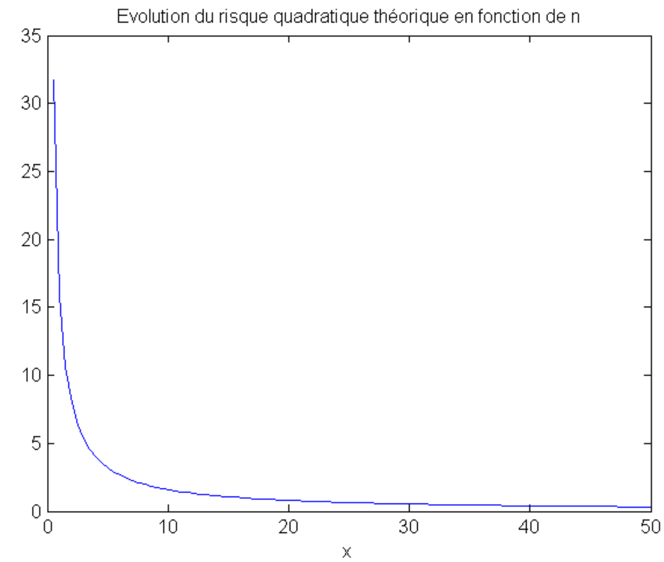
Si l'on veut réduire le biais, il suffit de prendre un très grand nombre d'échantillons.

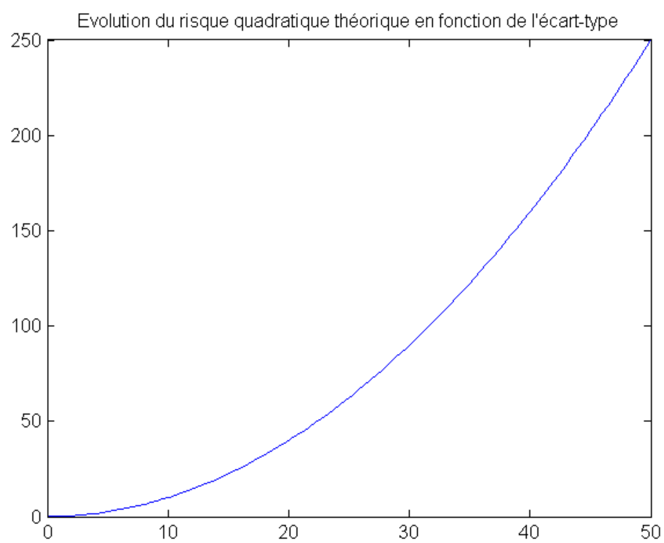
2.1.10 Risque quadratique de l'estimateur $\hat{\sigma}_n^2$

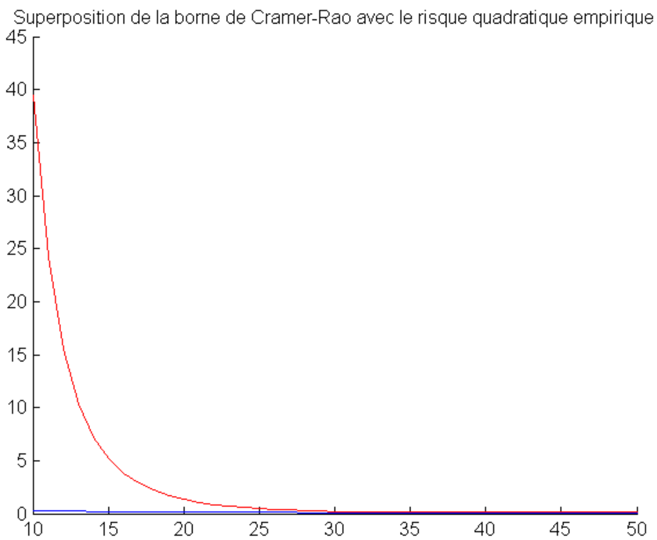
On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\|\sigma^2 - \hat{\sigma}_n^2\|^2] &= \mathbb{E}[\sigma^4 - 2\sigma^2\hat{\sigma}_n^2 + \hat{\sigma}_n^4] \\
&= \sigma^4 - 2\sigma^2 v^2 n + Var[\hat{\sigma}_n^2] + \mathbb{E}^2[\hat{\sigma}_n^2] \\
&= \sigma^4 - 2\sigma^2 v^2 n + 2v^4 n + v^4 n^2 \\
&= \sigma^4 - 2\sigma^4(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2})^2 + 2\frac{\sigma^4}{n}(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2})^4 + \sigma^4(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2})^4
\end{aligned}$$

2.1.11 Tracé de l'évolution du risque quadratique de l'estimateur $\hat{\sigma}_n^2$







2.1.12 Montrons que les estimateurs $\hat{\mu}_n$ et $\hat{\sigma}_n^2$ sont consistants

D'après l'inégalité de Markov, on a

$$\forall \epsilon > 0, P(\|\hat{\mu}_n - \mu\|^2 \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[\|\hat{\mu}_n - \mu\|^2]}{\epsilon} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon} \xrightarrow{\text{n}\rightarrow\infty} 0$$

$$\forall \epsilon > 0, P(\|\sigma\mu_n - \sigma\|^2 \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^4 - 2\sigma^4(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2})^2 + 2\frac{\sigma^4}{n}(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2})^4 + \sigma^4(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2})^4}{\epsilon} \xrightarrow{\text{n}\rightarrow\infty} 0$$

Les estimateurs sont donc consistants.

Chapitre 3

Introduction à la statistique descriptive

3.1 Principe de l'ACP

3.1.1 Montrons que le vecteur maximisant l'énergie de projection est donné par u_1

$\forall v \in \mathbb{C}^d$, tel que $\|v\| = 1$ on a

$$\mathbb{E}[(v^T X_k)^2] = \mathbb{E}[< v^T X_k, v^T X_k >] = \mathbb{E}[v^T X_k X_k^T v] = v^T \mathbb{E}[X_k X_k^T] v \quad = v^t R v$$

R étant diagonalisable, on peut l'écrire sous la forme $R = PDP^{-1}$.
$P = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$, de plus, comme P est une matrice orthonormée, on a $P^{-1} = P^T$.
Ainsi,

$$\mathbb{E}[(v^T X_k)^2] = v^T PDP^T v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k < v, u_k >^2$$

$$\mathbb{E}[(v^T X_k)^2] \leq \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} < v, u_k >^2$$

$\forall v \in \mathbb{C}^d$, tel que $\|v\| = 1$, on a égalité dans l'inégalité large précédente, lorsque $v = u_1$.
Ainsi, c'est bien le vecteur u_1 qui maximise l'énergie de projection et cette dernière vaut $\mathbb{E}[(v^T X_k)^2] = \lambda_1 \|u_1\| = \lambda_1$.

3.1.2 Montrons que le vecteur orthogonal à u_1 maximisant l'énergie de projection est donné par u_2

On se base sur la relation trouvée précédemment

$$\mathbb{E}[(v^T X_k)^2] = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k < v, u_k >^2$$

On cherche un vecteur $v \in \mathbb{C}^d$, avec $\|v\| = 1$ et $< v, u_1 >= 0$.
Ainsi,

$$\mathbb{E}[(v^T X_k)^2] = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k < v, u_k >^2 \leq \lambda_2 \sum_{k=2}^{n} < v, u_k >^2$$

On a égalité lorsque $v = u_2$, donc le vecteur orthogonal à u_1 maximisant l'énergie de projection est bien donné par u_2 et l'énergie de projection vaut, avec le même raisonnement que précédemment, λ_2.

3.1.3 Montrons que le vecteur orthogonal à $u_1, \cdots, u_{l-1}$ maximisant l'énergie de projection est donné par u_l

On cherche un vecteur $v \in \mathbb{C}^d$, avec $\|v\| = 1$
et $< v, u_1 >= \ldots =< v, u_{l-1} >= 0$.
Ainsi,

$$\mathbb{E}[(v^T X_k)^2] = \sum_{k=l}^{n} \lambda_k < v, u_k >^2 \leq \lambda_l \sum_{k=l}^{n} < v, u_k >^2$$

On a égalité lorsque $v = u_l$, donc le vecteur orthogonal à $u_1, \cdots, u_{l-1}$ maximisant l'énergie de projection est bien donné par u_l et l'énergie de projection vaut, toujours avec le même raisonnement que précédemment, λ_l

3.2 ACP et classification d'échantillons gaussiens

3.3 ACP et compression d'images