《manhattan》设计报告

吴景岳

【题目背景】

本题由 UVA10319 Manhattan 一题改编而成。作为第一试的压轴题，它重在考察选手思考问题的深度。下面按照思考由浅入深的顺序，向大家展示本题的思维全过程。

【标准算法】

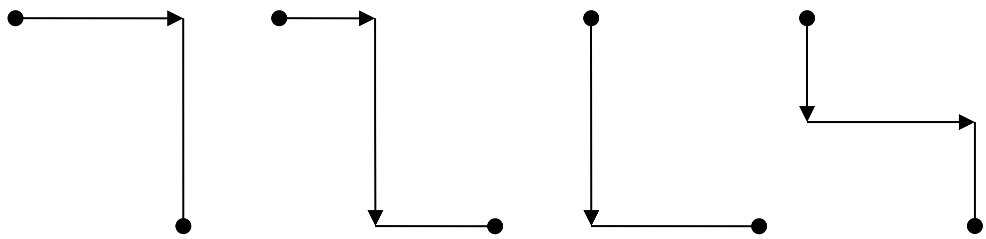
深度一：

题目中说 m≤10，n≤100，因此很容易想到应当在 m 上做文章。可以采用半枚举法，即只枚举每条横向街道的方向，这样做的目的是把二维问题变为一维问题。

深度二：

约定：从一个点到另一个点的一条路径，如果它的长度等于曼哈顿距离，则称之为*曼哈顿路径*。

从一个点到另一个点的曼哈顿路径有很多，但不管是哪条，都可以归结到下图所示的四种路径中，称它们为四种*基本路径*。



深度三：

经过半枚举，所有横向街道的方向都已确定。结合上述的四种基本路径，可以简化每条要求。

既然每条要求都可以写成从(x1,y1)到(x2,y2)的最短距离等于曼哈顿距离的形式，我们称 x2-x1 的符号为*该要求的 x 方向*，称 y2-y1 的符号为*该要求的 y 方向*（这里暂不考虑 x1=x2 或者 y1=y2 的情况）。

- 如果横向街道 x1 和 x2 的方向均与该要求的 x 方向一致，则编号在 y1 和 y2 之间的纵向街道，只要有一条的方向与该要求的 y 方向一致即可。（前三种路径）
- 如果横向街道 x1 的方向与该要求的 x 方向一致，而横向街道 x2 的方向与该要求的 x 方向不一致，则纵向街道 y2 的方向必须和该要求的 y 方向一致。（第一种路径）
- 如果横向街道 x2 的方向与该要求的 x 方向一致，而横向街道 x1 的方向与该要求的 x 方向不一致，则纵向街道 y1 的方向必须和该要求的 y 方向一致。（第三种路径）
- 如果横向街道 x1 和 x2 的方向都与该要求的 x 方向不一致，则纵向街道 y1 和 y2 的方向都必须和该要求的 y 方向一致，且编号在 x1 和 x2 之间的横向路径至少有一条与该要求的 x 方向一致。（第四种路径）

总而言之，在半枚举的基础上，每条要求都可以简化成：编号在一个区间范围内的纵向街道中，至少有一条街道的行驶方向与该要求的 y 方向一致。

进一步抽象化。如果把纵向街道的方向表示为 0 或者 1，这些街道的方向便可以看作是一串数。每条要求都可以写成：在某个区间内，这串数中至少有一个 0 或者至少有一个 1。如果是前者（至少有一个 0），这个区间被称作 *0 区间*；如果是后者（至少有一个 1），这个区间被称作 *1 区间*。剩下的任务就是选择纵向道路的方向，使得所有区间得到满足。

深度四：

将 0 区间和 1 区间分开考虑。

如果两个区间种类相同（都是 0 区间或者都是 1 区间），且存在包含关系，则可以忽略那个较长的区间。因为如果较短的区间被满足，较长的区间一定被满足。忽略掉所有这样的较长区间，再将剩下的 0 区间和 1 区间各自按照左端点从左到右的顺序排序，这两步是动态规划的前期准备工作。

深度五：

动态规划。

<u>状态(y,i0,i1)：</u>

- 设目前已经确定了编号从 1 到 y-1 的纵向街道的方向，并且这些方向满足了编号从 1 到 i0-1 的 0 区间和编号从 1 到 i1-1 的 1 区间，这时的最小总工作量表示为 opt(y,i0,i1)。

<u>状态的转移：</u>

- 设 cost(y,0)表示把纵向街道 y 的行驶方向改成 0 的费用，cost(y,1)表示把纵向街道 y 的行驶方向改成 1 的费用。
- 如果纵向街道 y 的方向为 0，(y,i0,i1)可以转移到(y+1,i0’,i1)，转移的费用为 cost(y,0)，其中 i0’表示第一个左端点大于 y 的 0 区间的编号。对于每个 y 的 i0’可以在预处理中求得。
- 如果纵向街道 y 的方向为 1，(y,i0,i1)可以转移到(y+1,i0,i1’)，转移的费用为 cost(y,1)，其中 i1’表示第一个左端点大于 y 的 1 区间的编号。同样，对于每个 y 的 i1’可以在预处理中求得。

该算法的空间复杂度为 $O(n*k^2)$，时间复杂度为 $O(2^m*n*k^2)$。对于本题的极限数据（m=10，n=100，k=100），这个时间复杂度似乎很可观，但是实际效果还是很好的。为什么呢？首先，如果选择了第四种路径，就会对其它横向路径的方向有所限制，这样很多不合法的横向道路方向在动态规划之前就被卡掉了。其次，只有当两条横向街道的方向都与该要求的 x 方向一致的时候，才可能得到长度大于 1 的区间，也就是说每次半枚举后，得到的大部分区间都是长度等于 1 的，所以，动态规划时用到的合法状态也是很有限的。

【其它算法】

- 完全搜索：
  - ✓ 枚举每条街道的行驶方向，判断是否满足所有要求，并记录最小的总工作量。
  - ✓ 时间复杂度：$O(2^{m+n})$

- ✓ 预计得分：20 分

➢ 经过优化的搜索：
- ✓ 由于该题的限制条件很多，剪枝的余地还是比较大的。可以从可行性和最优性两方面入手。
- ✓ 时间复杂度：很难估计
- ✓ 预计得分：40~70 分

➢ 差分约束系统：
- ✓ 该算法只能保证解的可行性，不能保证最优性。首先你的思路必须到达深度三。记 s(y)为编号从 1 到 y 的纵向街道的方向之和。若要满足一个范围从 y1 到 y2 的 0 区间，则必须有 s(y2)-s(y1-1)<y2-y1+1；若要满足一个范围从 y1 到 y2 的 1 区间，则必须有 s(y2)-s(y1-1)>0。另外因为每条街道的方向只能是 0 或者 1，所以还需满足 0<=s(y)-s(y-1)<=1。这就形成了一个标准的差分约束系统。
- ✓ 时间复杂度：$O(2^m*n*k)$
- ✓ 预计得分：40 分

【测试数据】

测试点编号	m	n	k
1	5	10	8
2	3	5	4
3	8	20	10
4	10	80	25
5	8	90	70
6	10	80	70
7	10	100	100
8	10	100	80
9	10	100	25
10	10	100	50