

2001 年全国青少年信息学（计算机）奥林匹克分区联赛复赛试题
(初中组 竞赛用时：3 小时)

题一：数的计数 (20 分)

[问题描述]

我们要求找出具有下列性质数的个数(包含输入的自然数 n):

先输入一个自然数 $n(n \leq 1000)$ ，然后对此自然数按照如下方法进行处理

1. 不作任何处理;

2. 若它的左边加上一个自然数，但该自然数不能超过原数的一半;

3. 加上数后，继续按此规则进行处理，直到不能再而 自然数为止。

[样例] 输入：6

满足条件的数为 6 (此部分不必输出)

6

26

126

36

136

输出：6

题二：最大公约数与最小公倍数问题 (20 分)

[问题描述]

输入二个正整数 $x_0, y_0 (2 \leq x_0 \leq 100000, 2 \leq y_0 \leq 1000000)$ ，求出满足下列条件的 $P、Q$ 的个数。

条件: 1. $P、Q$ 是正整数

2. 要求 $P、Q$ 以 x_0 为最大公约数，以 y_0 为最小公倍数。

试求，满足条件的所有可能的两个正整数的个数。

[样例]

输入： $x_0=3 \quad y_0=60$

输出：4

说明：(不用输出)此时的 $P \quad Q$ 分别为，

3 60

15 12

12 15

60 3

所以，满足条件的所有可能的两个正整数的个数共 4 种。

题三：求先序排列 (30 分)

[问题描述]

给出一棵二叉树的中序与后序排列。求出它的先序排列。(约定树结点用不同的大写字母表示，长度 ≤ 8)。

[样例]

输入：BADC BDCA

输出：ABCD

题四：装箱问题 (30 分)

[问题描述]

有一个箱子容量为 v (正整数, $0 \leq v \leq 20000$), 同时有 n 个物品 ($0 \leq n \leq 30$), 每个物品有一个体积 (正整数)。要求从 n 个物品中, 任取若干个装入箱内, 使箱子的剩余空间为最小。

[样例]

输入：

24 一个整数，表示箱子容量

6 一个整数，表示有 n 个物品

8 接下来 n 行，分别表示这 n 个物品的各自体积。

3

12

7

9

7

输出：

0 一个整数，表示箱子剩余空间。

第七届全国青少年信息学奥林匹克竞赛分区联赛复赛普及组试题分析(袁豪)

[问题 1]

1. 这题可以递归枚举，看看程序吧。
2. 记忆化搜索形式的动态规划
3. 动态规划
4. 效果更好的动态规划

[问题 2]

对于的一个素因子 p , 显然 p 的所有幂要么都在 a 中, 要么都在 b 中。假设有 K 个互不相同的素因子, 那么由乘法原理知答案为。

[问题 3]

这是一道很经典的题目(UsacoGate 1.3 上面是 American Heritage), 方法是构造法:

设三种遍历的序列是: $preorder[1..n]$, $inorder[1..n]$, $postorder[1..n]$

中序遍历的一大特点是: 第一个元素 $post[n]$ 就是树的根

所以在 $inorder[n]$ 中找出 $postorder[n]$ 的位置 j 就能得到左子树 $inorder[1..j-1]$ 和右子树 $inorder[j+1..n]$, 这个时候, 输出 $postorder[n]$, 然后再递归输出 $inorder[1..j-1]$ 和 $postorder[1..j-1]$ 决定的先序, $inorder[j+1..n]$ 和 $postorder[j..n-1]$ 的先序即可。

Sample 中给出的树是这样的:

A

/ \

B C

/

D

[问题 4]

这题的 n 比较大, 搜索不好写, 但是由于给出了 V 的规模, 所以可以动态规划。这题的规划方程是很经典的 (母函数相乘): 设 $h[i, k]$ 为前 i 个物品能否装满容量 k 的空间, 那么 $h[i, k] = h[i-1, k - volume[i]] \text{ or } h[i-1, k]; (*)$

这种方法的时间复杂度为 $O(NV)$ ，空间复杂度为 $O(NV)$ ，空间复杂度较大，TP 下写起来比较麻烦（除非用位压缩的方法）。观察(*)式，我们发现 $h[i, 0..V]$ 只依赖于 $h[i-1, 0..V]$ ，所以我们可以只保存 $h1, h2$ ，每次从 $h1$ 推出 $h2$ ，然后再令 $h1:=h2$ ，也就是利用两个数组进行滚筒操作。再仔细的观察(*)式，我们发现： $h[i,k]$ 的值只依赖于上 $h[i-1]$ 的[k]以前的东西，换句话说，我们 for 循环的时候倒过来做就可以了，空间复杂度降为 $O(V)$ ，请参考程序。

附测试数据：<http://www.shzx.net.cn/cms/oi/shiti/2001fspdata.rar>

附源程序：<http://www.shzx.net.cn/cms/oi/shiti/2001cppcode.rar>