

《hut》设计报告

贝小辉

【题目背景】

本题是第二试的第二题，着重考察选手的基本功和对动态规划算法的优化能力。

【题目分析】

由于题目中包含了很明显的最优子结构的性质，所以应该不难想到要用动态规划来解决这个问题。

我们用 $f[l][m][n]$ 表示长度为 l （这里省略单位 Hil ，下同），北墙有 m 块草坪，南墙有 n 块草坪时的最优解。如果北墙的最后一块草坪长度为 x （这里的长度就是指草坪在东西方向上的跨度），并且和这块草坪对应的南墙有 k 块草坪，那么就有 $f[l][m][n] = f[l-x][m-1][n-k] + \text{area}[x][k]$ ，其中 $\text{area}[x][k]$ 表示北墙的一块长度为 x 的草坪并且和这块草坪对应的南墙有 k 块草坪时的最小面积，由于北墙的一块长度为 x 的草坪面积为 $k_1 * x^2$ ，南墙的一块长度为 x 的草坪面积为 $k_2 * x^2$ ，根据均值不等式不难得出

$$\text{area}[x][k] = (x \bmod k) * k_2 * \left\lceil \frac{x}{k} + 1 \right\rceil^2 + (k - x \bmod k) * k_2 * \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor^2 + k_1 * x^2。 \text{ 而最后要求的}$$

的就是 $f[100][m][n]$ 。

至此，我们已经得到了一个很简单的动态规划算法，但是经过分析，算法的时间复杂度为 $O(l^2mn^2)$ ，这对于题目中的要求 $l=100$ ， m, n 最大也为 100 显然是无法承受的。我们还需对算法进行一些优化。

观察 area 数组的计算方式，不难发现它的关键就是均分。事实上，这也是解决整个题目的核心思想，我们求最小面积的过程，实际上就是将草坪的长度尽量均分的过程。如果我们把北墙的每块草坪和与之对应的南墙的草坪看作一个整体的话，我们发现它们的顺序是可以任意调整的，这样我们按照北墙的草坪长度由小到大的顺序将它们排序，对于北墙长度相等的情况，将它们按照南

墙的草坪个数由小到大排序，不难证明，排序后的北墙的草坪长度是逐渐递增的，每块北墙草坪所对应的南墙草坪的块数也是逐渐递增的。

在计算 $f[l][m][n]$ 的时候，我们首先由小到大枚举北墙最后一块草坪的长度，对于每一个确定的草坪长度，按从小到大枚举这块北墙草坪所对应的南墙草坪的块数。如果最优解所对应的块数为 x ，那么我们从 1 枚举到 x 的过程，实际上就是解趋向平均的过程，从 x 在向上枚举，就又是解趋向不平均的过程。这样在枚举的时候就一定会出现首先解逐渐变小，直到达到最优值，然后又逐渐增大，这样我们只要找到 x 使得当块数为 $x-1$ 和 $x+1$ 时的解都大于 x 时的解，这个 x 就是当北墙的草坪长度确定是的最优解。

确定了 x 之后，我们要令北墙的最后一块草坪长度加 1，然后再重新枚举这块草坪所对应的南墙草坪的块数，但是由于这时北墙的最后一块草坪长度增加了，为了使草坪的长度尽量平均，这块草坪所对应的南墙草坪块数一定不会少于 x ，这样我们便只需从 x 开始枚举，直到找到最优解。

这样，我们逐渐递增枚举北墙最后一块草坪的过程中，这块草坪所对应的南墙草坪的块数也是逐渐递增的，于是每次状态转移的时间复杂度就变成了 $O(1)$ 而不是原来的 $O(\ln)$ ，总的时间复杂度就是 $O(l^2mn)$ ，已经可以在时限内解决所有的测试数据了。

【测试数据】

测试点编号	m	N
1	5	5
2	6	10
3	11	16
4	10	19
5	30	31
6	34	51
7	7	60
8	71	77
9	70	89

10	66	100
----	----	-----