

1999 年全国青少年信息学（计算机）奥林匹克分区联赛复赛试题
(初中组 竞赛用时：3 小时)

第一题 Cantor 表 (30 分)

现代数学的著名证明之一是 Georg Cantor 证明了有理数是可枚举的。他是用下面这一张表来证明这一命题的：

1/1 1/2 1/3 1/4 1/5 ...
2/1 2/2 2/3 2/4 ...
3/1 3/2 3/3 ...
4/1 4/2 ...
5/1

我们以 z 字型给上表的每一项编号。第 1 项是 1/1，然后是 1/2，2/1，3/1，2/2...

输入:整数 $n(1 \leq n \leq 10)$

输出:表中的第 N 项

样例:

input: $n=7$

output: 1/4

第二题 回文数 (30 分)

若一个数（首位不为零）从左向右读与从右向左读都是一样，我们就将其称之为回文数。例如：给定一个 10 进制数 56，将 56 加 65（即把 56 从右向左读），得到 121 是一个回文数。又如，对于 10 进制数 87，

STEP1: $87 + 78 = 165$ STEP2: $165 + 561 = 726$

STEP3: $726 + 627 = 1353$ STEP4: $1353 + 3531 = 4884$

在这里的一步是指进行了一次 N 进制的加法，上例最少用了 4 步得到回文数 4884。

写一个程序，给定一个 N ($2 < n \leq 10$, $N=16$) 进制数 M。求最少经过几步可以得到回文数。如果在 30 步以内（包含 30 步）不可能得到回文数，则输出“Inpossible”

样例：

INPUT

$N = 9$ $M = 87$

Output

STEP=6

第三题 旅行家的预算 (40 分)

一个旅行家想驾驶汽车以最少的费用从一个城市到另一个城市（假设出发时油箱是空的）。给定两个城市之间的距离 $D1$ 、汽车油箱的容量 C （以升为单位），每升汽油能行驶的距离 $D2$ 、出发点每升汽油价格 P 和沿途油站数 N （ N 可以为零），油站 i 离出发点的距离 D_i 、每升汽油价格 P_i ($i = 1, 2, \dots, N$)。

计算结果四舍五入至小数点后两位。

如果无法到达目的地，则输出“No solution”。

样例：

INPUT

$D1 = 275.6$ $C = 11.9$ $D2 = 27.4$ $P = 2.8$ $N = 2$

油站号 i 离出发点的距离 D_i 每升汽油价格 P_i

1	102.0	29
2	220.0	2.2

OUTPUT

26.95 (该数据表示最小费用)

NOI 分区联赛 - 1999 年第五届普及组 试题解析

注意：解析和源程序均为 OIBH 站长刘汝佳所写，疏漏在所难免，但至少程序均通过了比赛时使用的测试数据，所以还是可以一看。

第一题 Cantor 表 (30 分)

现代数学的著名证明之一是 Georg Cantor 证明了有理数是可枚举的。他是用下面这一张

表来证明这一命题的：

1/1 1/2 1/3 1/4 1/5 ...

2/1 2/2 2/3 2/4 ...

3/1 3/2 3/3 ...

4/1 4/2 ...

5/1

我们以 z 字型给上表的每一项编号。第 1 项是 1/1，然后是 1/2，2/1，3/1，2/2...

输入: 整数 $n(1 \leq n \leq 10)$

输出: 表中的第 N 项

样例:

input: $n=7$

output: 1/4

[分析]

题目很简单，规律也不难找到。这类题目其实是数学游戏，在编码之前应该先算一算。

用模拟填表的方法也可以，但数学方法更有意思，求解能力也更强。

不难看出，第 K 个斜行（"/"方向）上每个分数的分子分母之和为 K+1，而表的填充顺序正是

依次填写每个斜行，因此先算出第 N 项所在的斜行 K。

显然 K 是满足

$N \leq 1+2+3+\dots+K$ (1)

的最小数。

显然当 K 为奇数时，分母为 $N-(1+2+3+\dots+K-1)$ ，K 为偶数时分子为 $N-(1+2+3+\dots+K-1)$ 。

找K显然可以递推，但是没有意思，我们应该锻炼自己的数学能力，解出不等式(1)。

不等式同解变形为:

$$(K+1)*K \geq N*2$$

$$K^2+K-N*2 \geq 0$$

解不等式，取正数区间，得 $K \geq (-1+\sqrt{1+8*N})/2$ 。

例如 N=7 时

$$K \geq (-1+\sqrt{1+7*8})/2=3.275$$

故 K=4,分子分母之和为 K+1=5,因为 K 是偶数，分子为 N-(1+2+3)=1,故分母为 5-1=4

注意：题目没有要求时，分区联赛不需要做出错处理。

程序见附件：

第二题 回文数 (30分)

若一个数（首位不为零）从左向右读与从右向左读都是一样，我们就将其称之为回

文数。例如：给定一个 10 进制数 56，将 56 加 65（即把 56 从右向左读），得到 121 是

一个回文数。又如，对于 10 进制数 87，

$$\text{STEP1: } 87 + 78 = 165 \quad \text{STEP2: } 165 + 561 = 726$$

$$\text{STEP3: } 726 + 627 = 1353 \quad \text{STEP4: } 1353 + 3531 = 4884$$

在这里的一步是指进行了一次 N 进制的加法，上例最少用了 4 步得到回文数 4884。

写一个程序，给定一个 N ($2 < n \leq 10$, $N=16$) 进制数 M。求最少经过几步可以得到

文数。如果在 30 步以内（包含 30 步）不可能得到回文数，则输出“Impossible”

样例：

INPUT

N = 9 M = 87

Output

STEP=6

[分析]

本题也很简单，只是考查了一些基本编程能力，没有什么难度可言。只要细心，本题的分是可以

轻松拿到手的。

这里数采用字符串表示（其他方法当然也可以），因为处理方便。

N 进制的加法是本题的重头戏，处理如下：

1)字符->数字，可以用数组来简化程序,即 digit 和 chars 数组

2)做加法，保留各位数字和进位，就想做高精度加法一样。g 是进位

程序见附件：

第三题 旅行家的预算（40 分）

一个旅行家想驾驶汽车以最少的费用从一个城市到另一个城市（假设出发时油箱是

空的）。给定两个城市之间的距离 $D1$ 、汽车油箱的容量 C （以升为单位），每升汽油能行

驶的距离 $D2$ 、出发点每升汽油价格 P 和沿途油站数 N （ N 可以为零），油站 i 离出发点的距

离 D_i 、每升汽油价格 P_i ($i=1, 2, \dots, N$)。

计算结果四舍五入至小数点后两位。

如果无法到达目的地，则输出“No solution”。

样例：

INPUT

$D1 = 275.6$ $C = 11.9$ $D2 = 27.4$ $P = 2.8$ $N = 2$

油站号 i 离出发点的距离 D_i 每升汽油价格 P_i

1	102.0	2.9
---	-------	-----

2	220.0	2.2
---	-------	-----

OUTPUT

26.95（该数据表示最小费用）

[分析]

看到题目后，很容易想到递推，但是又不知道具体怎样做。我们可以先分析一下题目，用手工算

几个数据，看能不能受到启发（注意：这是一个很重要的思路!!）

例如可以先分析样例数据（这是理解题意必须，因为样例不会错）

算了一下吗？好了，我问你，如果你是司机，你会怎么办呢？

尽量买便宜的，贵的就买“刚刚可以到下一站”？对不对呢？

举出反例很容易，但是我们不能轻易放弃这个思路，可以接着想下去。

不能保证全局最优，我们就试着改进我们的方法。

事实上，要用的油是确定的（ $D1/D2$ ），价钱最便宜的油的站 Q 的油显然应该多买，至少：

到达 Q 这个油站时汽车剩油不为 0 的方案一定不是最优的。

这是因为，如果剩下 P 升油，显然不如当初少买 P 升，改在 Q 这里买 P 升划算！（ Q 最便宜嘛！）

哈哈，有一点思路了吧！就是把较优解改进为最优解啦！

算法如下：

每次都假装装满油，用的时候先用便宜的，因为把贵的留在后面“反悔”(被替换成更便宜的油)不是更爽吗？！

这样计算费用时只考虑真正使用的，假装装满时就不要再算一次了。你看看程序中是不是只有两处修改了 `cost`？

我很懒，因此就默认油站是按离起点由近及远给出的。

输入后面是先把油费由贵到便宜排序,第 i 贵的站是 `place[i]`，以便选择。

下面的程序中主要部分是那个循环，它做了以下事情：

1)假装装满油：`gas[i]=c-nowp`; `nowp` 是现在有的油，`gas[i]`是车上第 i 站的油的体积。

2)替换：现有的油如果有比当前站（第 i 站）贵的，改为 i 号油：`gas[i]=gas[i]+gas[j]`; `gas[j]=0`;

3)行驶：依次选择最便宜的油行驶路程 `distance`,就是个循环 `for j:=n downto 0`

经过这样分析,程序是不难写出来了，程序长一点，是为了写得更易懂。

基础较好的同学也可以用优先队列（例如用堆来实现）来进行替换和使用油，这里只用了最简单的方法模拟，效率并不高。

程序见附件。

所有测试数据见附件。

Copyright OIBH <http://oibh.yeah.net>

附测试数据：<http://www.shzx.net.cn/cms/oi/shiti/1999fspdata.rar>

附源程序：<http://www.shzx.net.cn/cms/oi/shiti/1999cppcode.rar>