棋盘中的棋盘

——浅谈棋盘的分割思想

复旦大学附属中学 俞鑫

【摘要】现在的信息学竞赛题目，经常以某种数学模型作为出题媒介，使题目充满乐趣性和深厚的数学底蕴，而棋盘就是其中一种重要的数学模型。本文着重对棋盘的一种重要思想——棋盘的分割思想进行分析，并引入两道典型例题，说明棋盘分割应遵循的规律，使读者能对纷繁复杂的棋盘分割有一定的了解。

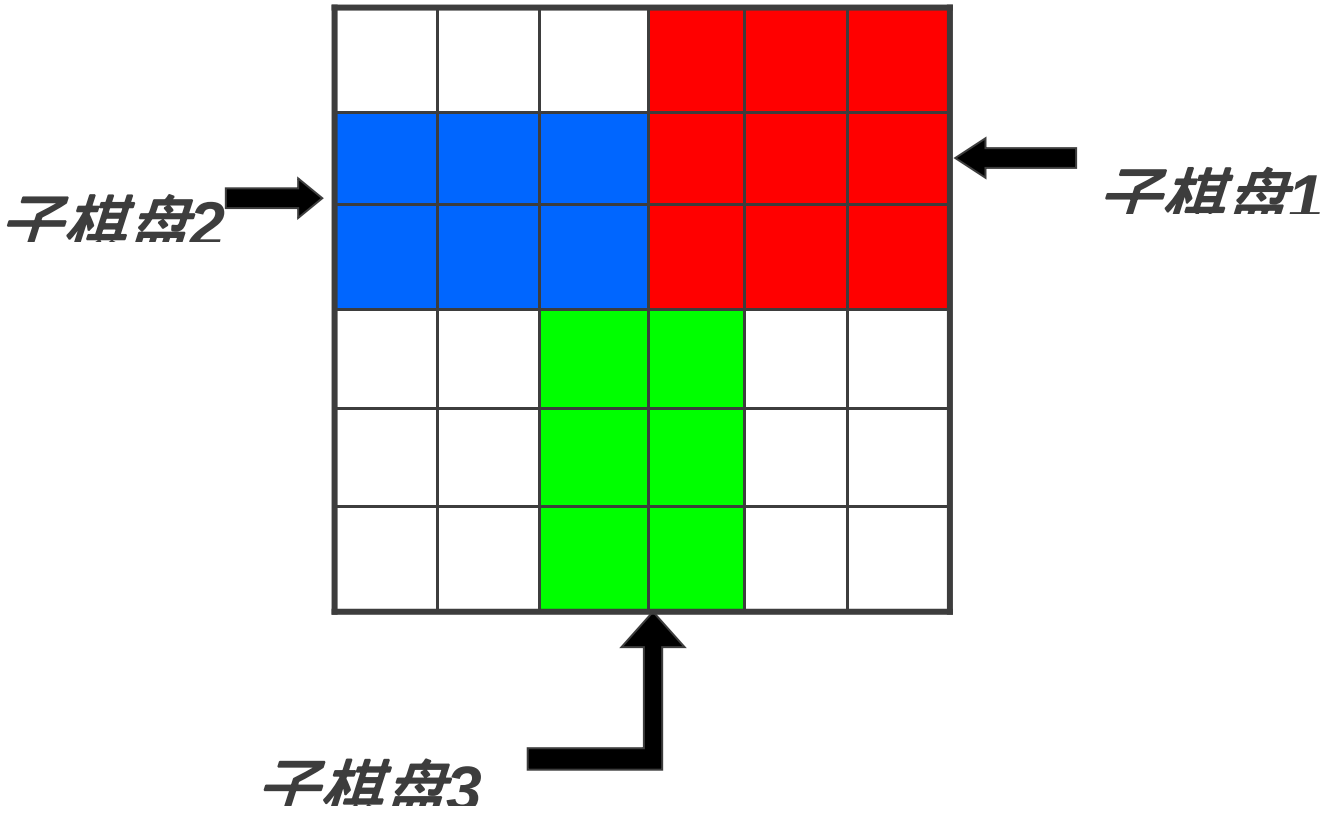
【关键词】数学模型　棋盘　算法思想

【正文】

引言

信息学是一门综合性的学科，也是一门充满乐趣的学科。棋盘，作为一个重要的数学模型，以其趣味性和复杂的数学特性经常受到出题者的青睐。因此，深入研究棋盘中蕴含的算法思想对于一名信息学爱好者而言是十分必要的。在此，我将着重说明棋盘中的一种重要思想——棋盘的分割思想。

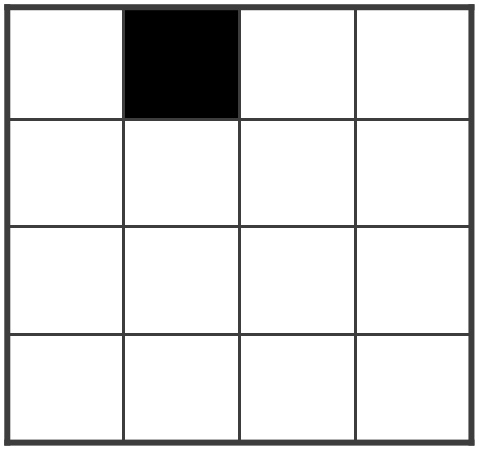
对于一个 m×n 的棋盘，它所含的子棋盘共有 $C_m \times C_n$ 个，而其分割方法更是不计其数。巧妙地对棋盘进行分割，可以解决许多种类的棋盘问题。



例一：棋盘覆盖（经典问题）

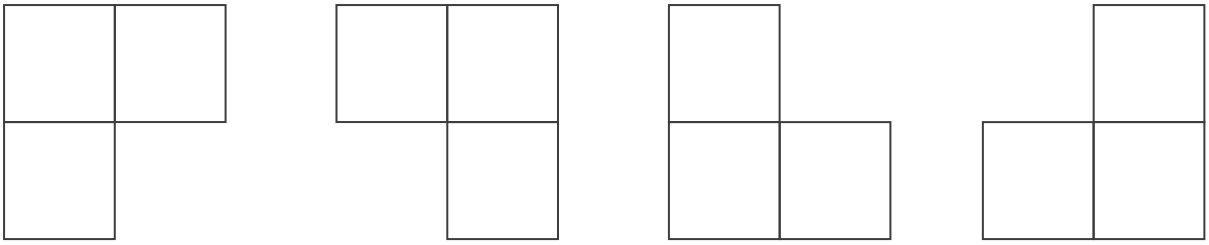
题目描述：

在一个 $2^k \times 2^k$ 方格组成的棋盘中，若恰有一个方格与其他方格不同，则称该方格为一特殊方格，且称该棋盘为一特殊棋盘。显然特殊方格在棋盘上出现的位置有 4^k 种情形。因而对任何 $k \geq 0$，有 4^k 种不同的特殊棋盘。图中的特殊棋盘是当 k=2 时 16 个特殊棋盘中的一个。



在棋盘覆盖问题中，我们要用以下 4 种不同形态的 L 型骨牌覆盖一个给定的特殊棋盘上除特殊方格以外的所有方格，且任何 2 个 L 型骨牌不得重叠覆盖。易知，在任何一个 $2^k \times 2^k$ 的棋盘覆盖中，用道的 L 型骨牌个数恰为$(4^k-1)/3$。

现求一种覆盖方法。



4种不同形态的L型骨牌

输入：第一行为 k (棋盘的尺寸)，第二行为 x,y (1 ≤ x,y ≤ 2^k) ，分别表示特殊方格所在行与列。

输出：共 2^k 行，每行 2^k 个数，分别表示覆盖该格的 L 型的编号 (特殊格用 0 表示)。

样例：

输入：

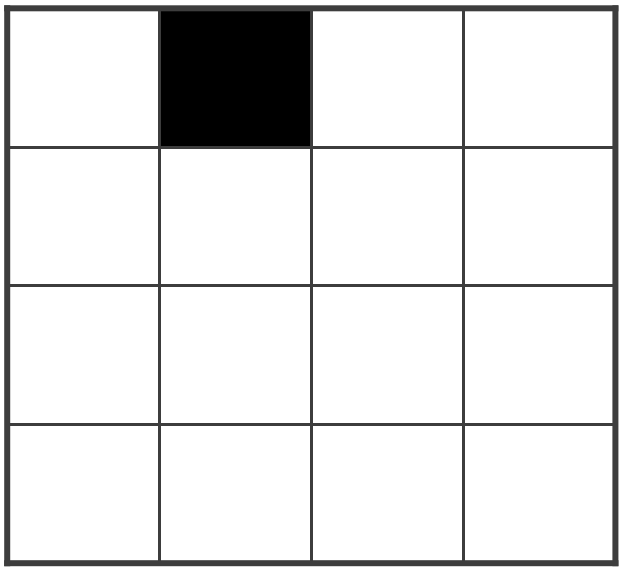
2

1 2

输出：

1 0 2 2

1 1 3 2

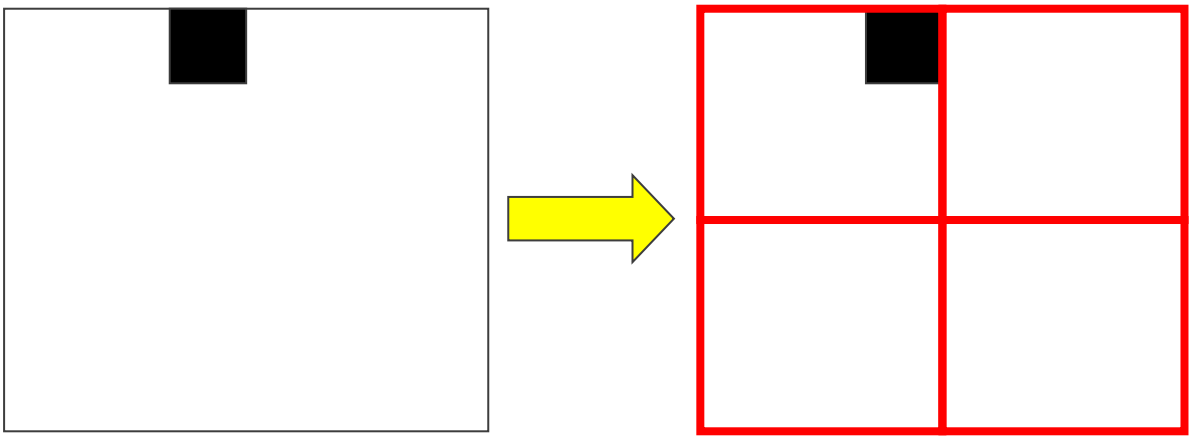


4 3 3 5

4 4 5 5

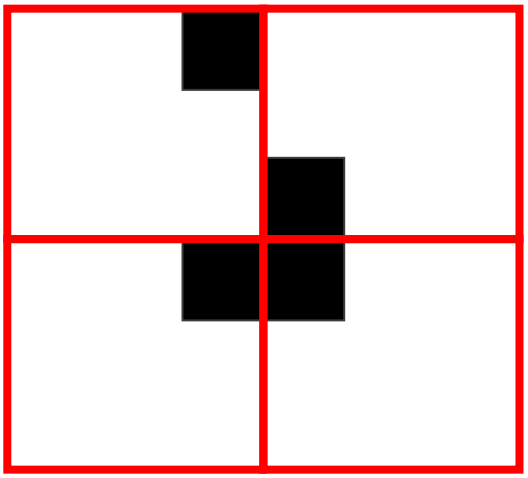
算法分析

由棋盘尺寸为 $2^k \times 2^k$ ，我们可以想到将其分割成四个尺寸为 $2^{k-1} \times 2^{k-1}$ 的子棋盘



可是，由于含特殊方格的子棋盘与其它子棋盘不同，问题还是没有解决。

只要稍作思考，我们就可以发现，只要将 L 型如图放置在棋盘的中央，就可以使四个子棋盘都变成特殊棋盘。此时问题也变成了四个相同的子问题，只需运用简单的递归就可以解决这道问题了。



二位数组 num：覆盖该格的 L 型的编号，下文所说的

对方格赋值即对其对应的 num 赋值。

x1,y1：当前棋盘左上角方格的行号与列号

x2,y2：当前棋盘右下角方格的行号与列号

x3,y3：当前棋盘中特殊格的行号与列号

ck：当前棋盘的尺寸（ $2^{ck}\times 2^{ck}$ ）

cnum：当前 L 型骨牌的编号

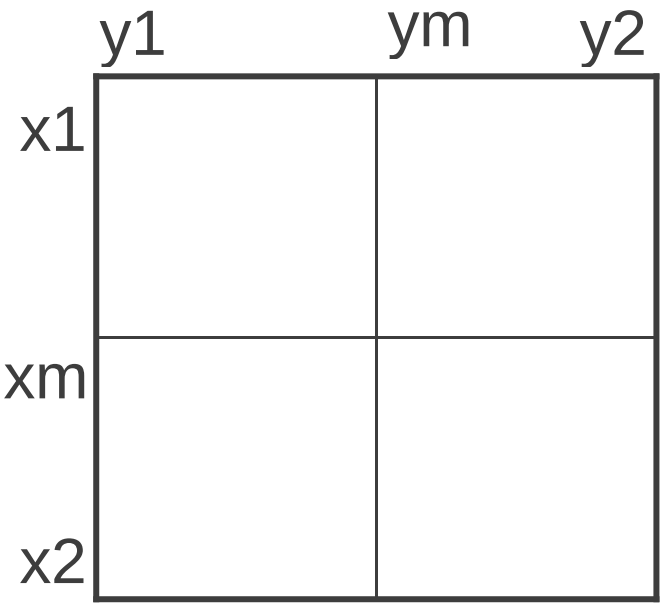
初始值：

x1	y1	x2	y2	x3	y3	ck	cnum
1	1	2^k	2^k	x	y	k	1

开始时，将 num[x,y]设为 0

当 ck=0 时：棋盘尺寸为 1×1，该格为已赋值的特殊格，不进行任何操作。

当 ck>0 时：设 xm 为(x1+x2+1)/2，ym 为(y1+y2+1)/2，比较 x3 与 xm，y3 与 ym 的大小就能知道特殊格所在子棋盘的位置，将另外三个子棋盘中靠近棋盘中央的三个方格赋值为 cnum，



并分别作为这三个子棋盘的特殊格。随后 cnum 增加 1。再对这四个棋盘分别进行递归处理。

复杂度分析

时间复杂度：$O(4^k)$

空间复杂度：$O(4^k)$

由于覆盖一个 $2^k \times 2^k$ 棋盘所需的 L 型骨牌个数为 $(4^k-1)/3$，故该算法是一个在渐进意义下最优的算法。

参考程序

GAMERS.PAS

小结

将棋盘分割成子棋盘，要遵循以下两点：

1.分割出的棋盘要与原棋盘尽可能相像。

2.将原棋盘分割后尽量不要留下剩余部分。

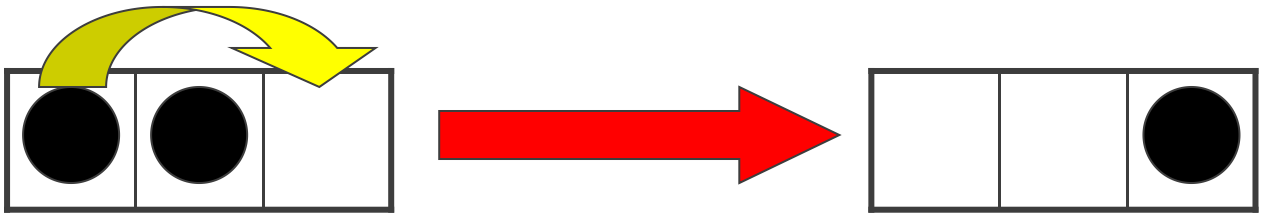
但如果分割后必定留下剩余部分又该如何呢？

下面这道例题就是用来解答这个问题的。

例二：孔明棋问题（URAL1051）

题目描述：

在一个无限大的棋盘的节点上有一些棋子，这些棋子构成一个 m×n 的矩形(m 为高度，n 为宽度且 1≤m,n≤1000)。你可以用一个棋子跳过另一个相邻的棋子，被跳过的棋子将被移去，请你求出最少能剩下几个棋子。



一种移动方法

输入：m,n

输出：最少能剩下的棋子数

样例：

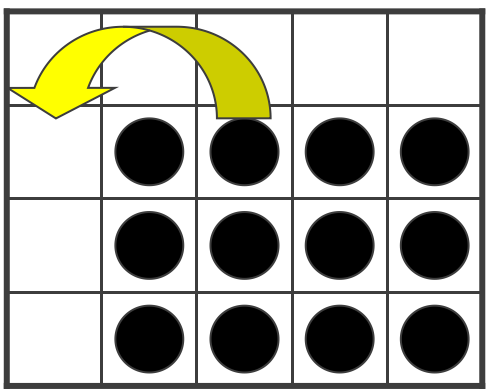
输入：

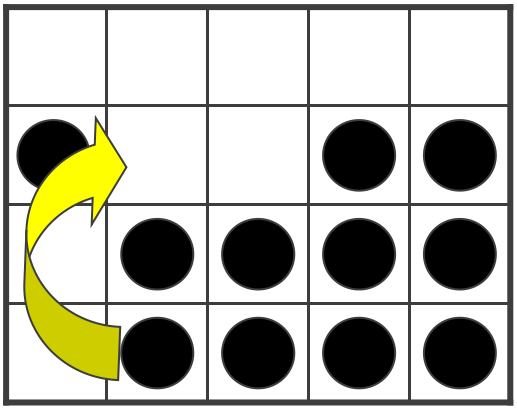
3 4

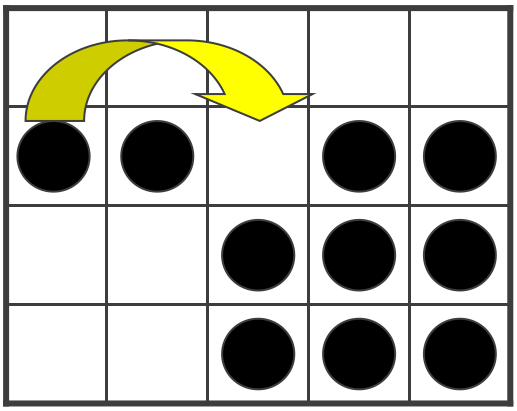
输出：

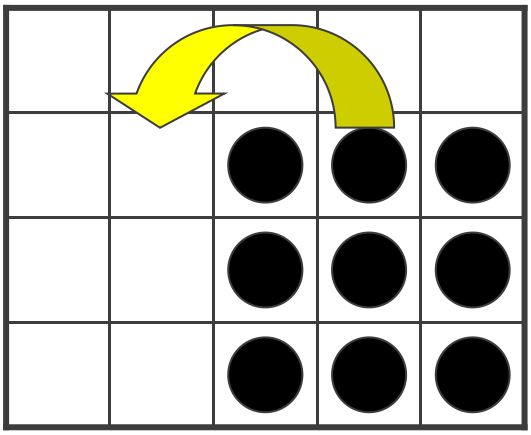
2

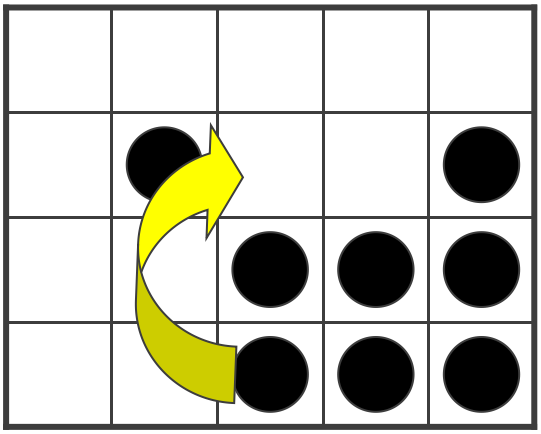
下面是一种走法：

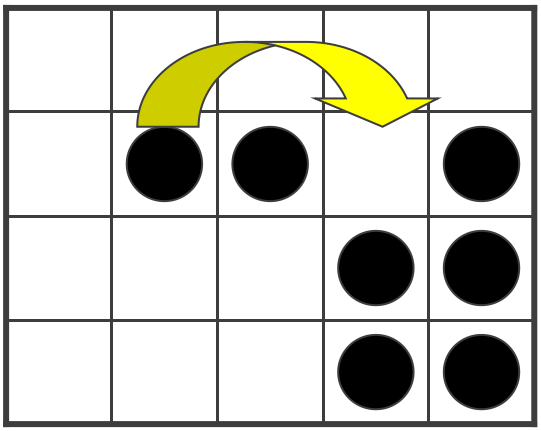


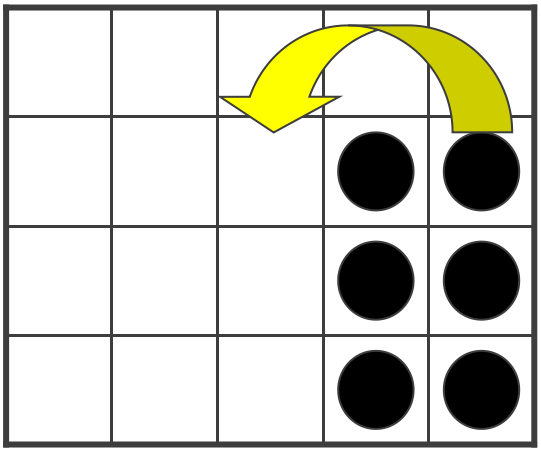


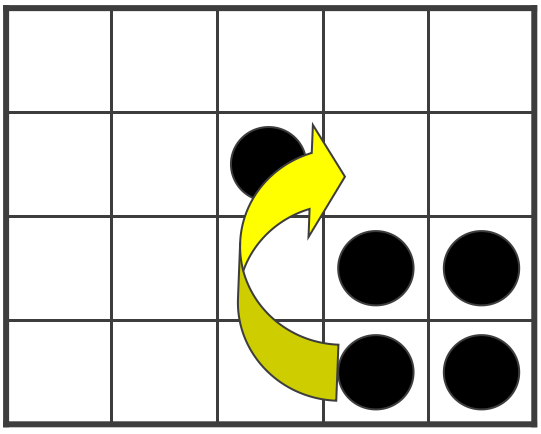


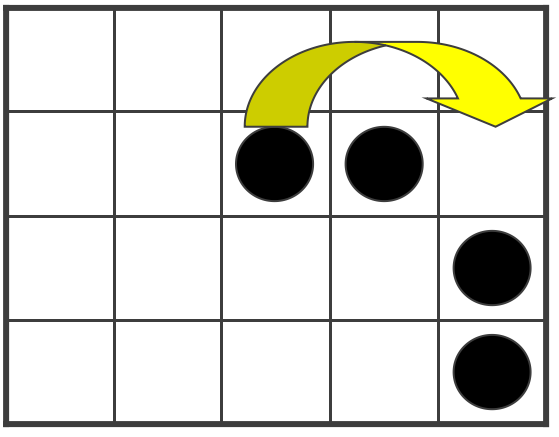


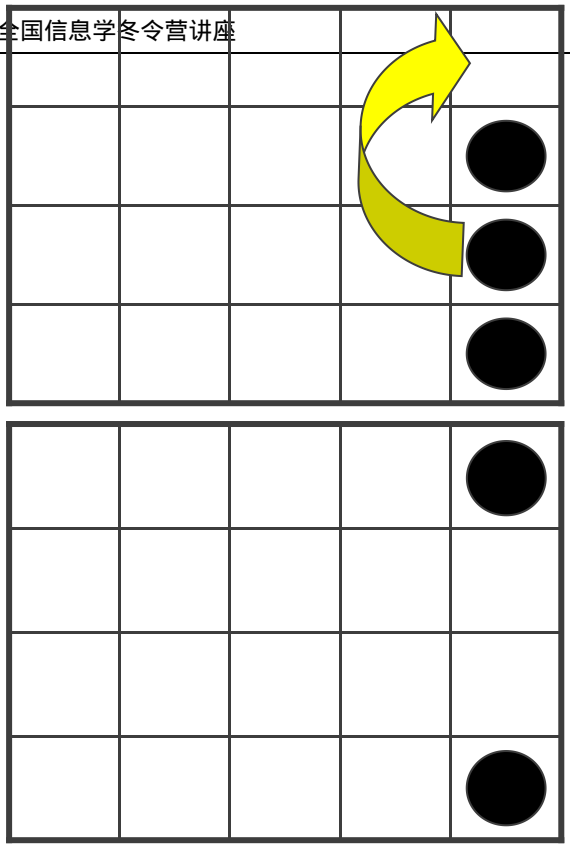






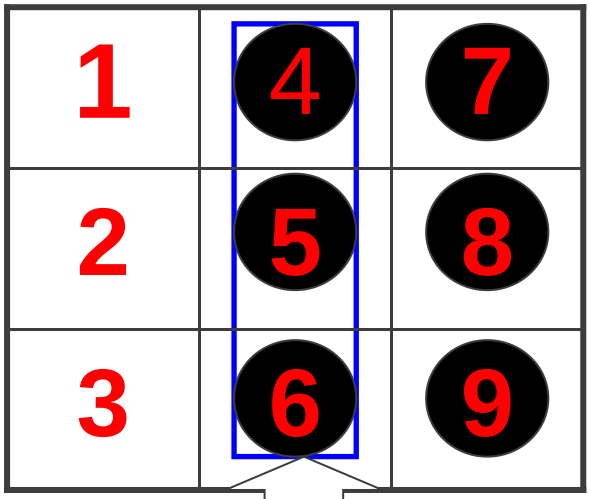




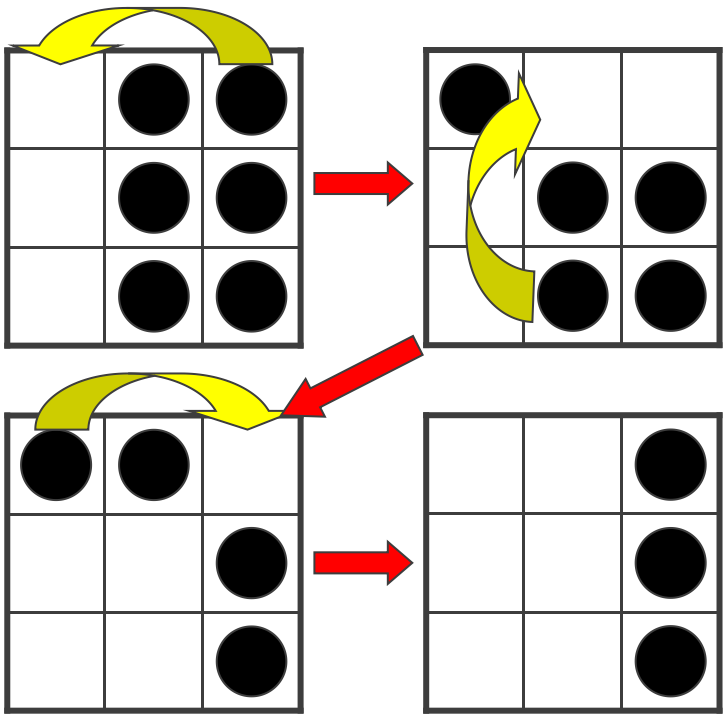


算法分析

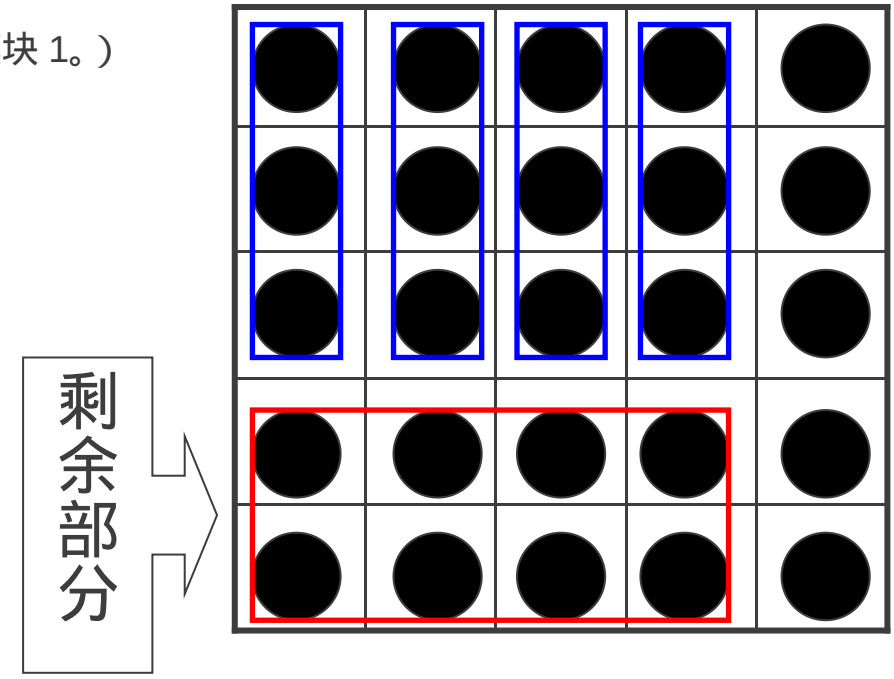
由于 m=1 或 n=1 的情况比较特殊，我们先处理 m,n≥2 的情况。为了叙述方便，我们称由棋子所在格子组成的棋盘为“真棋盘”。通过样例，我们可以发现，对于图(a)中位于 4、5、6 格的连续三个棋子，若第 1、2、3 格上无棋子而第 7、8、9 格上均有棋子的话，则可以通过图(b)的操作将这三个棋子移去。我们称 4、5、6 三颗棋子为模块 1。



图(a)

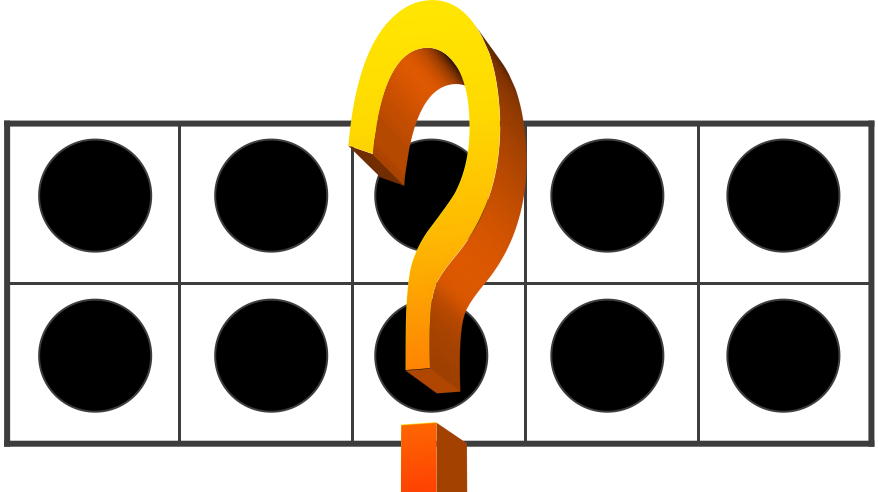


但是经过一些尝试后，我们发现只使用模块 1 对 m×n 的真棋盘进行分割效果并不理想。原因在于模块 1 每次对连续 3 行同时进行处理，当 m 不是 3 的倍数时，分割后总会留下剩余部分。（必须注意的是，图中用蓝框框起来的部分，必须等到其左边的棋子被去除后，才能成为模块 1。）

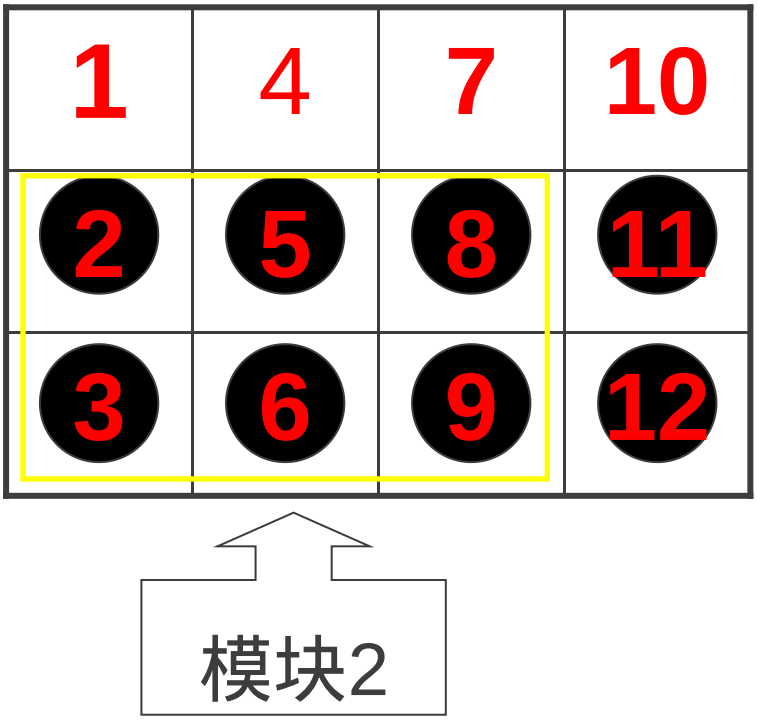


因此，我们需要对剩余部分进行处理。

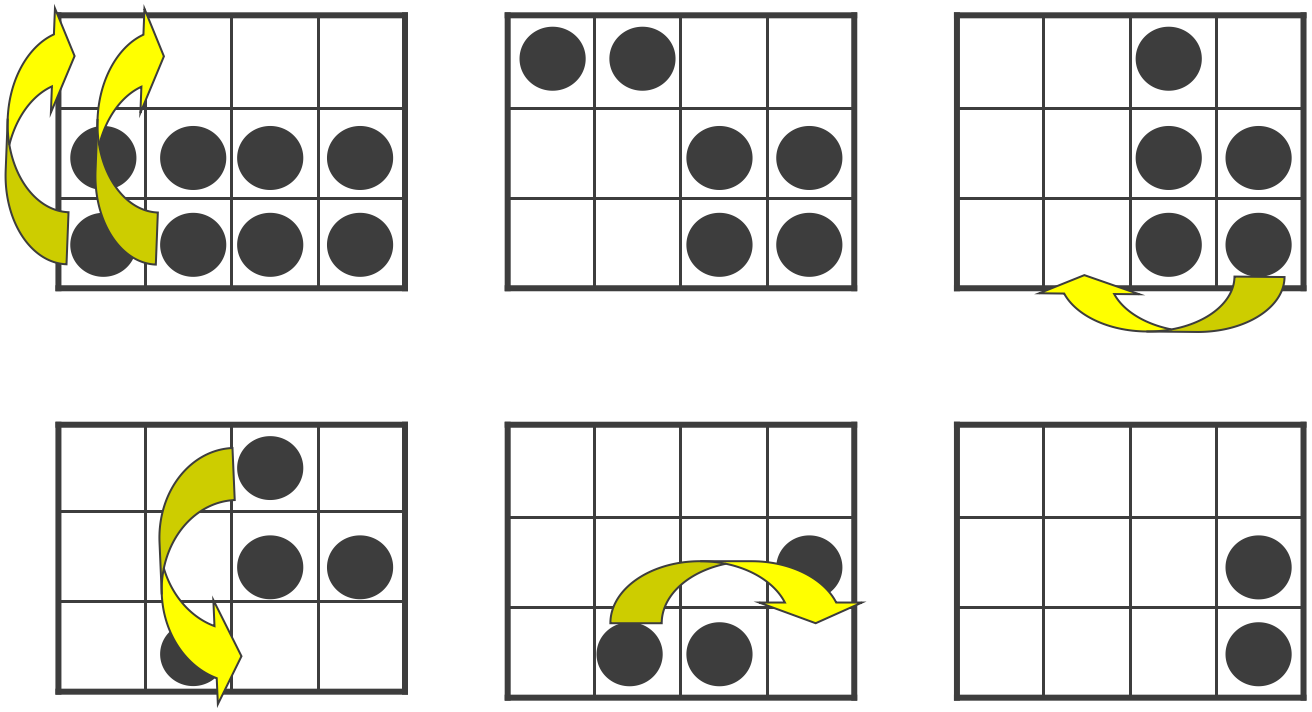
我们发现，当 m 不为 3 的倍数时，总是留下 1 行或 2 行剩余部分。由于 1 行棋子很难去除，当只留下 1 行时，因为 m≥2，且 m 模 3 余 1，故 m 至少为 4。于是我们就将最上方 4 行都作为剩余部分，对于剩下的 m-4 行，由于 m-4 是 3 的倍数，这 m-4 行可以用模块 1 进行分割。而 4 行棋子又可分为两部分，每部分都是 2 行棋子。因此，处理 2 行棋子的情况就成了关键问题。



经过尝试，我们发现对于图中第 2、3、5、6、8、9 格上的六个棋子，若第 1、4、7 格无棋子且第 11、12 格上有棋子的话，则可通过一系列的操作将这六颗棋子去除。我们称这六颗棋子为模块 2。



具体操作如下：



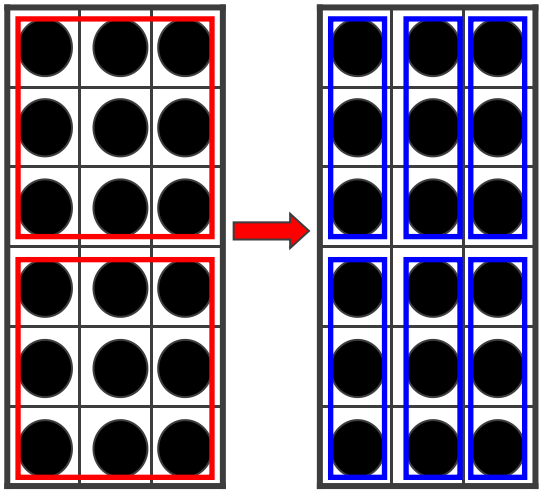
有了模块 1 和模块 2 这两样工具，对 m×n 真棋盘的分割就得心应手了。对任意的 m×n 的真棋盘，当 n≥5 时，对于棋盘中最左边的 3 列棋子形成的 m×3 的棋盘，我们通过下面的操作将其去除。

1、当 m 是 3 的倍数时

首先将左边 3 列分成 m/3 个 3×3 的子棋盘。

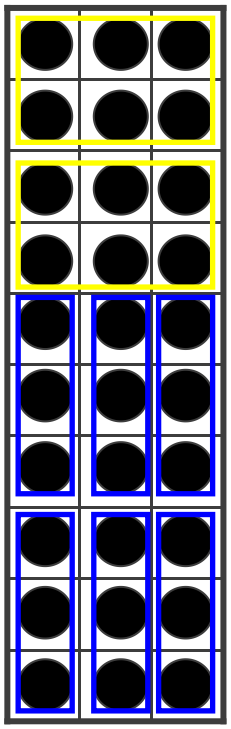
再将每个 3×3 的子棋盘分成 3 个 3×1 的子棋盘。

每次对最上方最左边的 3×1 棋盘进行操作，由于其左方无棋子，



可以保证它是模块 1，将其去除。

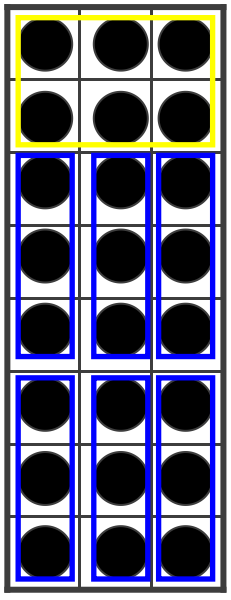
2、当 m 模 3 余 1 时



由于 m≥2，故 m 至少是 4，m×3 棋盘最上方的 2×3 子棋盘是一个模块 2，将其去除。

(m-2)×3 棋盘最上方的 2×3 子棋盘也是一个模块 2，将其去除。对于剩下的(m-4)×3 棋盘，由于 m-4 是 3 的倍数，同 1 进行操作，将其去除。

3、当 m 模 3 余 2 时



m×3 棋盘最上方的 2×3 子棋盘是一个模块 2，将其去除。

对于剩下的(m-2)×3 棋盘，由于 m-2 是 3 的倍数，同 1 进行操作，将其去除。

设 m 与 p 关于 3 同余，n 与 q 关于 3 同余(2≤p,q≤4) ，对于任意的 m×n 的真棋盘，当 n ≥5 时，不断通过上述操作除去最左边 3 行，真棋盘规模将发生如下变化：

m×n→m×(n-3)→m×(n-6)→…→m×q

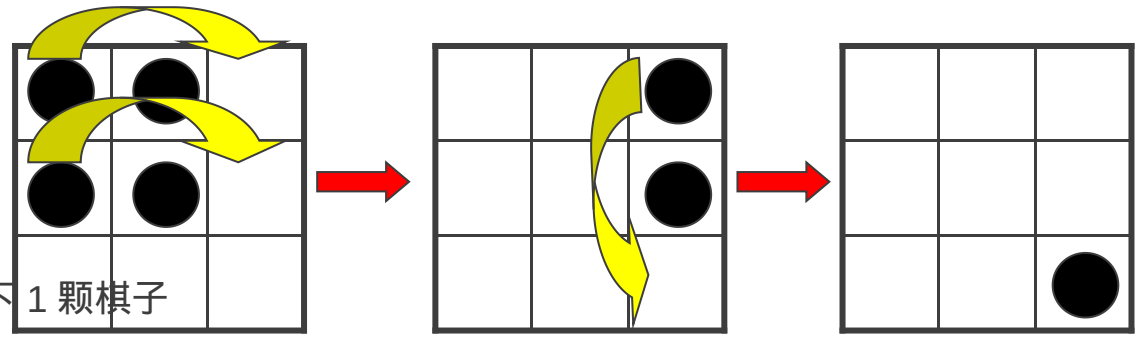
再将棋盘顺时针旋转 90 度，真棋盘规模变为 q×m，继续进行上述操作：

q×m→q×(m-3)→q×(m-6)→…→q×p

再将棋盘顺时针旋转 90 度，真棋盘规模变为 p×q。

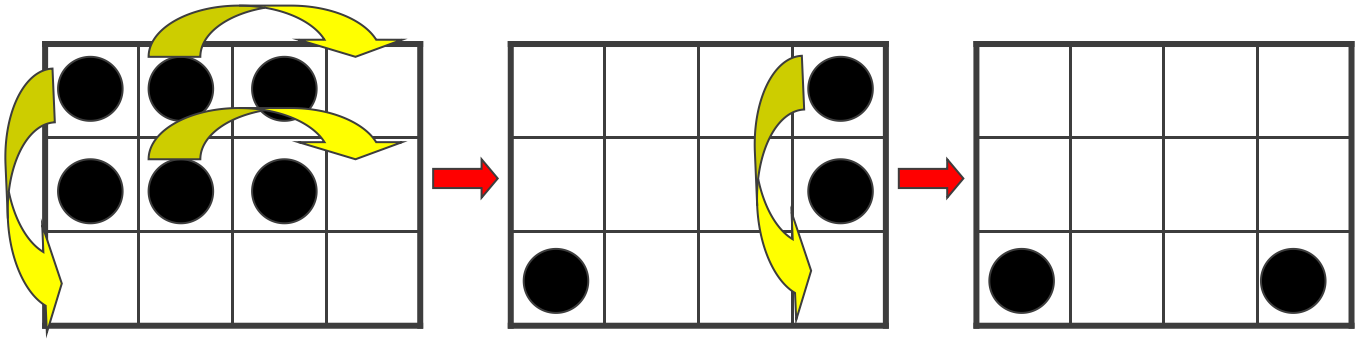
现在，我们只要对 p×q 的真棋盘进行操作，便可得到 m×n 的真棋盘经过操作最少能得到的棋子数的上界。下面是对 p、q 各种可能情况的讨论：

① p=2,q=2



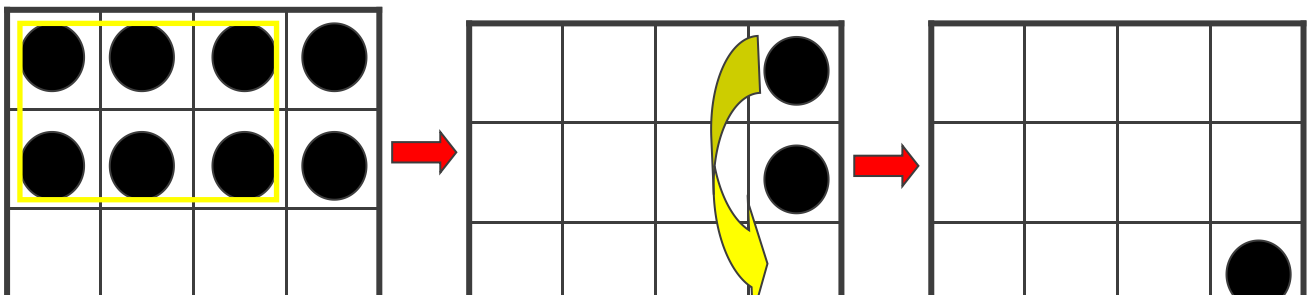
剩下 1 颗棋子

② p=2,q=3



剩下 2 颗棋子

③ p=2,q=4



黄框中的 6 颗棋子构成

模块 2，将其一起去除。

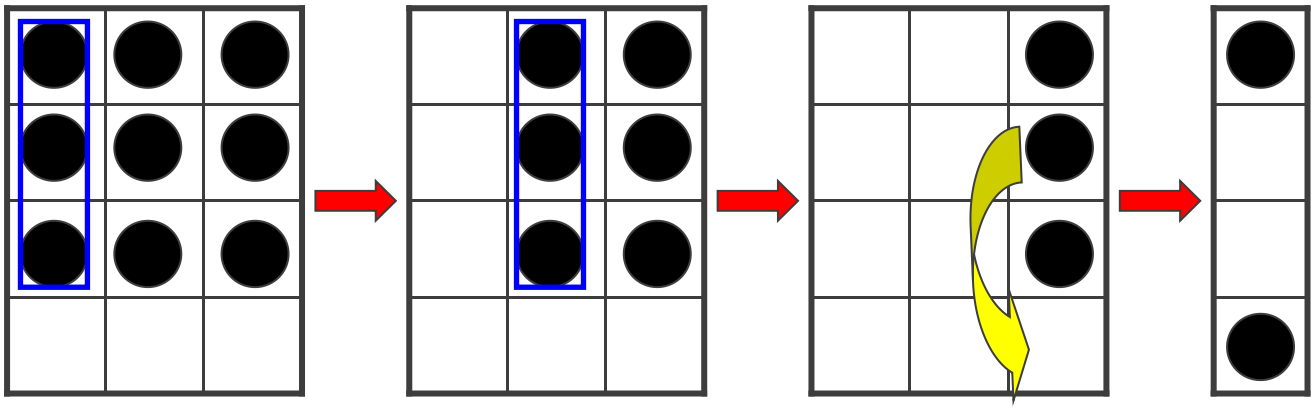
剩下 1 颗棋子

④ p=3,q=2

将棋盘顺时针旋转 90 度后，与 p=2,q=3 的情况相同。

剩下 2 颗棋子

⑤ p=3,q=3



蓝框中的 3 颗棋子构成

模块 1，将其一起去除。

剩下 2 颗棋子

⑥ p=3,q=4

由样例的操作知，剩下 2 颗棋子。

⑦ p=4,q=2

将棋盘顺时针旋转 90 度后，与 p=2,q=4 的情况相同。

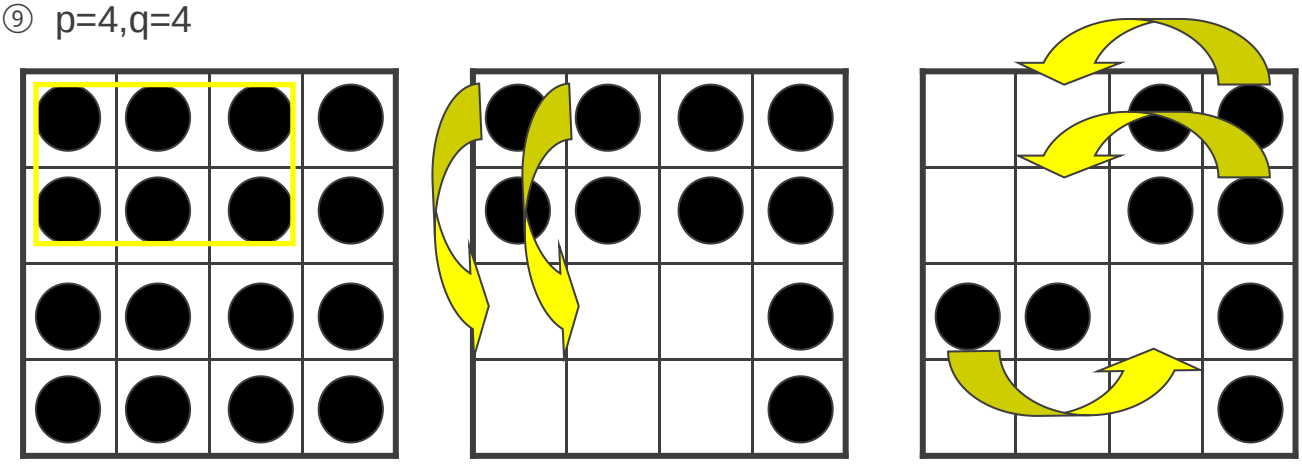
剩下 1 颗棋子

⑧ p=4,q=3

将棋盘顺时针旋转 90 度后，与 p=3,q=4 的情况相同。

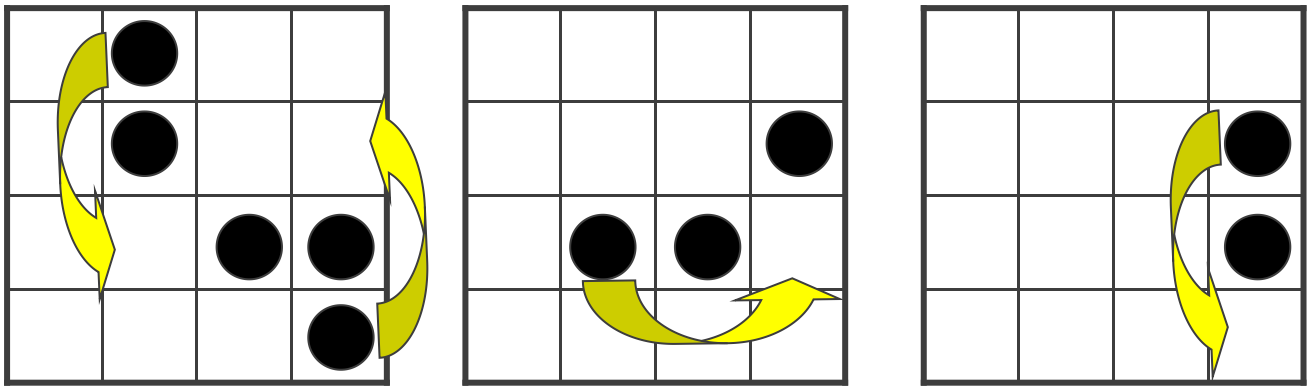
剩下 2 颗棋子

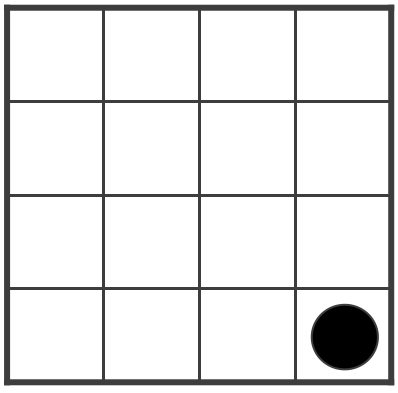
⑨ p=4,q=4



黄框中的 6 颗棋子构成

模块 2，将其一起去除。





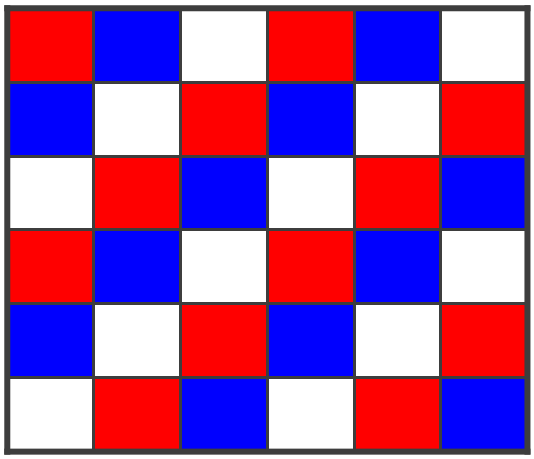
剩下 1 颗棋子

由于当 m 模 3 余 0、1、2 时，p 分别为 3、4、2。而当 n 模 3 余 0、1、2 时，q 分别为 3、4、2。我们可以列出下面这张表格来表示对各种情况的 m、n，m×n 的真棋盘经过操作最少能得到的棋子数的上界。

m mod 3 / n mod 3	0	1	2
0	2	2	2
1	2	1	1
2	2	1	1

为了叙述方便，我们设 m×n 的真棋盘经过操作最少剩下 s 颗棋子。经过观察可以发现，当 m、n 中有 1 个数是 3 的倍数时，s 的上界为 2，否则为 1。现在，我们只需要证明，这个上界就是答案。(1) 对任意的正整数 m、n，显然，s≥0。若 s=0，由于每次操作恰减少一颗棋子，所以最后一次操作前恰好剩余 1 颗棋子，但对于 1 颗棋子无论如何都不可能进行操作，矛盾。所以 s≥1。

⑵ 当 m、n 中有一个数是 3 的倍数时，不妨设 m 是 3 的倍数（否则将棋盘顺时针旋转 90 度，即为 m 是 3 的倍数的情况），下面我们证明 s≥2。



首先，我们对无限大的棋盘进行三色间隔染色。其中，无论横排还是竖排的任意 3 个连续方格，必为一红、一蓝、一白。对于 m×n 的真棋盘中的任何一列，都是一个 m×1 的子棋盘，而每一个 m×1 的子棋盘又可以分成 m/3 个 3×1 的子棋盘。

于是， m×n 的真棋盘可以分为若干个 3×1 的子棋盘，而每个 3×1 的子棋盘中都有红、白、蓝方格各一个，所以，真棋盘中红、白、蓝方格的数目相同。设在红、白、蓝格上的棋子数分别为 a、b、c，开始时 a=b=c。

对于每一次操作，都可以看作连续 3 个格中，两个格中的棋子被拿去，而另一格上多了一颗棋子，于是 a、b、c 中有两个数减 1，另一个数加 1，奇偶性都发生了变化，所以 a、b、c 始终同奇同偶。若 s=1，由于操作完成之后，s=a+b+c，故 a、b、c 中两个为 0，一个为 1，奇偶性不同，矛盾。又因为 s≥1，所以 s≥2。

通过上面的证明，我们得出了 s 的下界，它与先前的上界完全相同。于是，当 m,n≥2 时，若 m、n 中有一个数是 3 的倍数，则 s=2；否则，s=1。对于 m=1 的情况，我们同样先通过一个例子给出上界。

由于当 m=1 时，n 颗棋子排成一行，于是可以将它们从左向右分别标号为 1、2、3……n。

设 k=[n/2]，因为 2×k≤n，我们对这 n 颗棋子进行 k 次操作。第 i 次操作(1≤i≤k)为将标号为 2×i 的棋子跳过标号为 2×i-1 的棋子。由于在第 i 次操作之前，在标号为 2×i-1 的棋子左边的棋子不是被去除，就是向左移动，而其它棋子并未移动，于是标号为 2×i-1 的棋子的左边一格上无棋子，所以操作是合理的。

经过 k 次操作，棋盘上剩余 n-[n/2]颗棋子，这就是最少剩余棋子数的上界。下面只需证明 n-[n/2]是最少剩余棋子数的下界即可。

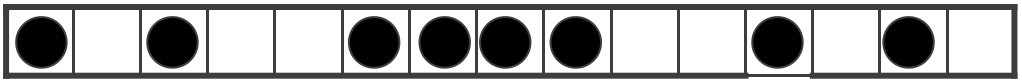
首先，一旦在某次操作后，不再有未经操作的棋子，则在以后的操作中也不会再次出现未经操作的棋子，若存在这样的操作，我们就称这次操作为关键操作。于是，有未经操作棋子的阶段为从开始到关键操作或无法操作前。

为了证明原问题，我们必须证明两个引理

① 未经操作的棋子总是排成连续一行。

② 在未经操作棋子左边的任两颗已操作棋子不相邻，且未经操作棋子中最左边一颗棋子的左边两格为空格。

③ 在未经操作棋子右边的任两颗已操作棋子不相邻，且未经操作棋子中最右边一颗棋子的右边两格为空格。



引理 1：

若一个棋盘中棋子的分布同时满足条件① ② ③，则下一步进行操作的两颗棋子必然是两颗未经操作的棋子。引理 1 的证明：

若一个棋盘满足这三个条件，则对于在未经操作棋子左边的任何一颗已操作棋子 m，它的两侧不是在未经操作棋子左边的已操作棋子，就是未经操作的棋子中最左边的一颗棋子，而根据条件②，它们所在格子与棋子 m 所在格子间至少有一个空格，于是对 m 无法进行操作。同理，对于在未经操作棋子右边的任何一颗已操作棋子 n 也无法进行操作。于是，下一步进行操作的两颗棋子必然是两颗未经操作的棋子。引理 1 得证。引理 2：当棋盘中有未经操作的棋子时，棋子的分布总是同时满足条件① ② ③。引理 2 的证明：由于开始时，条件① ② ③同时成立，若在某次操作后， 存在未经操作的棋子，并且棋子的分布不同时满足这三个条件，那么我们就找出第一次出现这种情况的操作。则在此次操作前，棋子的分布同时满足这三个条件，根据引理 1，此次操作的两颗棋子必然是两颗未经操作的棋子。

由于未经操作棋子排成一排，只有左数第二颗棋子跳过左数第一颗棋子和右数第二颗棋子跳过右数第一颗棋子这两种操作，由于两种操作是对称的，我们只考虑左数第二颗棋子跳过左数第一颗棋子这种情况。我们设左数第一颗棋子为 a，第二颗棋子为 b。由于右侧无变化，条件③成立。而进行这次操作后，原来一排未被操作棋子中只有最左边两颗不再是未被操作棋子，剩余的仍然排成一排，条件①成立。

右因为经操作之后，a 被移去，b 位于原来 a 所在格子的左边一个空格，又因为原来 a 所在格子的左边两个都是空格，于是 b 与其它在未经操作棋子左边的已操作棋子不向邻，又因为现在未经操作棋子中最左边的一颗棋子的左边两格为 a 与 b 原来所处的格子，所以它的左边两格均为空格，条件②成立。所以操作后三个条件同时成立，矛盾。引理 2 得证。

结合引理 1 和引理 2，我们还可以得到推论 1。

推论 1：当棋盘中有未经操作的棋子时，下一步进行操作的两颗棋子必然是两颗未经操作的棋子。

我们用反证法对原问题进行证明，若 n-[n/2]不是最少剩余棋子数的下界，则可以通过一系列操作，使棋子数少于 n-[n/2]，由于每次操作后恰减少一颗棋子，于是至少要进行[n/2]+1 次操作。由于每次操作至多减少两颗未经操作的棋子，所以对于前[n/2]次操作中任何一次操作，操作前至多减少([n/2]-1)×2 颗棋子，由于([n/2]-1)×2<(n/2-1)×2<n，所以至少剩余一颗未经操作的棋子，由推论 1，进行操作的两颗棋子必然是两颗未经操作的棋子。当 n 为奇数时，由于[n/2]=(n-1)/2，所以前(n-1)/2 次操作都是对两个未经操作的棋子进行操作。经过这(n-1)/2 次操作后，恰剩余一颗未经操作棋子，但根据推论 1，下一步一定是对两颗未经操作的棋子进行操作，所以无法进行操作，操作次数少于[n/2]+1，矛盾。当 n 为偶数时，由于[n/2]=n/2，所以前 n/2 次操作都是对两个未经操作的棋子进行操作。经过前 n/2-1 次操作后，恰剩余两颗未经操作棋子，根据推论 1，下一步一定是对

这两颗棋子进行操作。根据引理 2，这两颗棋子必然相邻。设左边一颗为 a’，右边一颗为 b’，由于 a’跳过 b’与 b’跳过 a’对称，我们只考虑 a’跳过 b’。根据引理 2，这两颗棋子左边的棋子互不相邻，而它们右边的棋子也互不相邻。所以，第 n/2+1 次操作必然要对 a’进行操作，第 n/2 次操作后，a’处于 b’右边的一个空格。但根据引理 2，b’右边两格均为空格，所以 a’右边一格为空格，而 a’左边一格为 b’原来所在的方格，b’被去除后也是空格，于是 a’左边一格也为空格，a’无法进行操作，矛盾。所以 n-[n/2]是最少剩余棋子数的下界。所以当 m=1 时，m×n 的真棋盘经过操作最少剩下 n-[n/2]颗棋子。当 n=1 时，将 m×1 的真棋盘顺时针旋转 90 度后，变为 1×m 的真棋盘，同理可得 m×n 的真棋盘经过操作最少剩下 m-[m/2]颗棋子。

于是，最少剩下的棋子数 s 为：

$$s = \begin{cases} n-[n/2], & \text{当} m=1 \text{时} \\ m-[m/2], & \text{当} n=1 \text{时} \\ 2, & \text{当} m,n \geq 2 \text{且} m、n \text{中有一个数是3的倍数时} \\ 1, & \text{当} m,n \geq 2 \text{且} m、n \text{中无3的倍数时} \end{cases}$$

参考程序

JUMP.PAS

小结

在这道题中，将棋盘分割成模块 1 的想法遇到了障碍，其主要原因在于分割后总是留下剩余部分。为了处理留下的剩余部分，我们发现了模块 2。其实，从本质上讲，模块 2 只不过是针对剩余部分的一些有规律的步骤。所以，当棋盘的分割出现困难，必须留下剩余部分时，可以采用以下两个办法：

1.对剩余部分进行单独处理，可以用较少的特殊步骤（如最后对小棋盘的处理），或一些有规律的步骤（如模块 2）。2.如果剩余部分实在难以处理，我们必须放弃原来的分割方案，另起炉灶。

总结

作为处理棋盘的一种重要思想，棋盘的分割方法其实远不只如此。棋盘的分割思想从本质上说是一种递归的思想，但又不尽相同，它比纯粹的递归更加复杂，更加难以捉摸。只有平时多留心，多思考，才能掌握其中众多的奥妙，在实战中做到

博观而约取，厚积而薄发。

【参考文献】

计算机算法设计与分析（第 2 版）　　王晓东　编著

电子工业出版社

Ural State University Problem Set Archive