浅析平面Voronoi图的构造及应用

新疆乌鲁木齐市第一中学　王栋

引言：

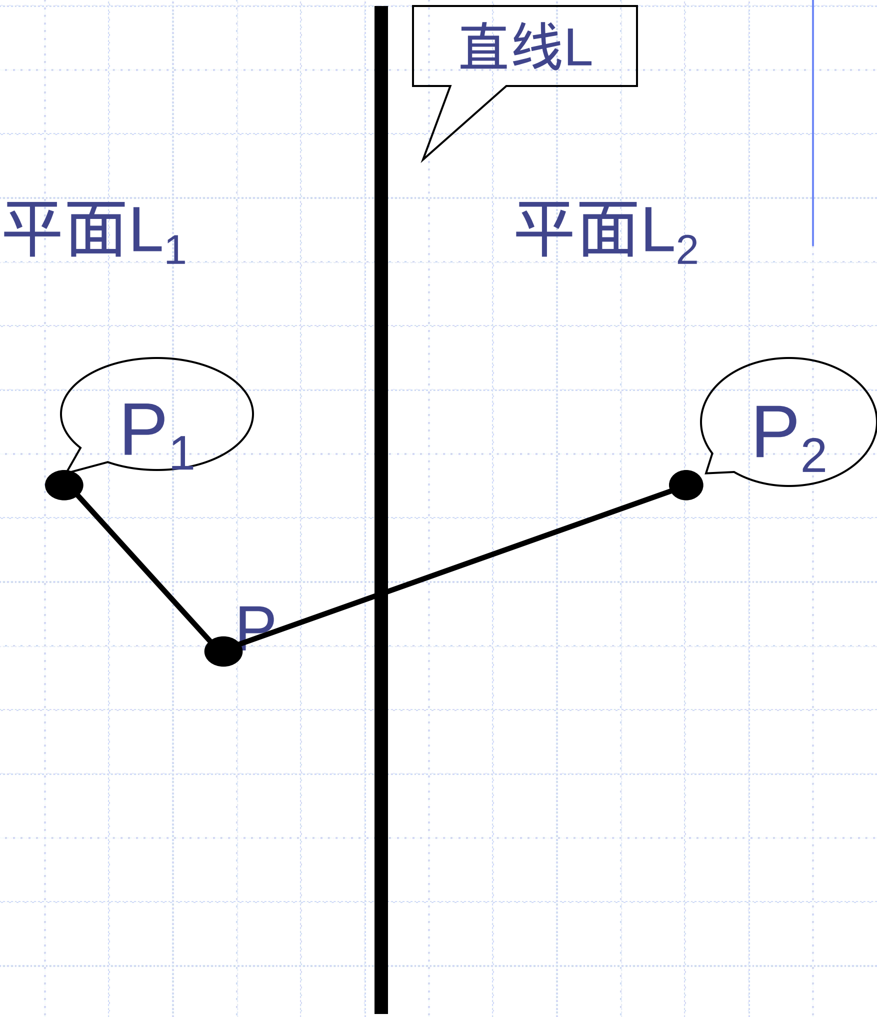
在计算几何这一领域中，Voronoi图是仅次于凸壳的一个重要的几何结构。这是由于Voronoi图在求解点集或其他几何对象与距离有关的问题时起重要作用。

常见的问题包括谁离谁最近，谁离谁最远，等等。

现在，让我们大家首先来了解一下Voronoi图的定义！

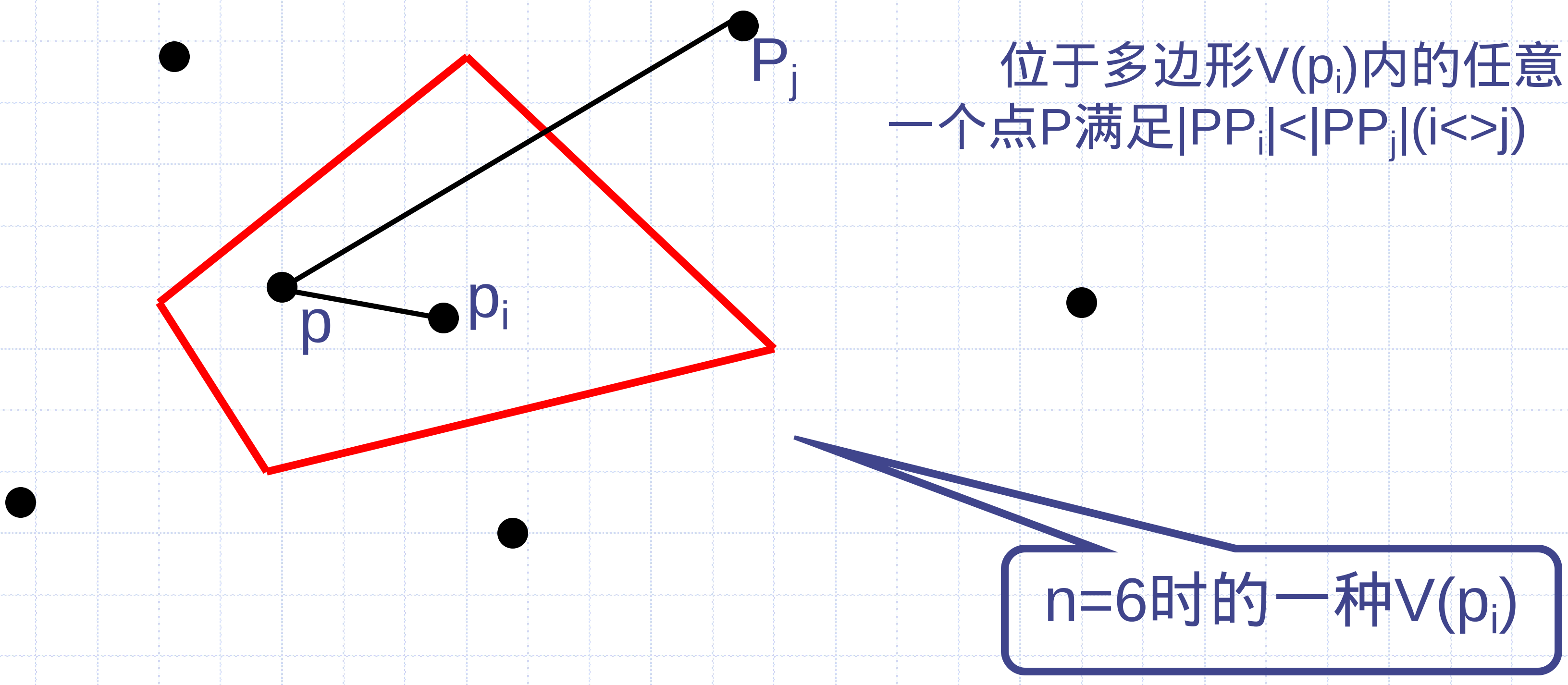
Voronoi图的定义

设P_1,P_2是平面上的两个点，L是的它们的中垂线，L将平面分成两部分半平面L_1和半平面L_2，在L_1内的点P具有特性$|PP_1|<|PP_2|$，即位于L_l内的点比平面中其他点更接近点P_1，我们记半平面$H(P_1, P_2)= L_1$，同理半平面$H(P_2, P_1)= L_2$。



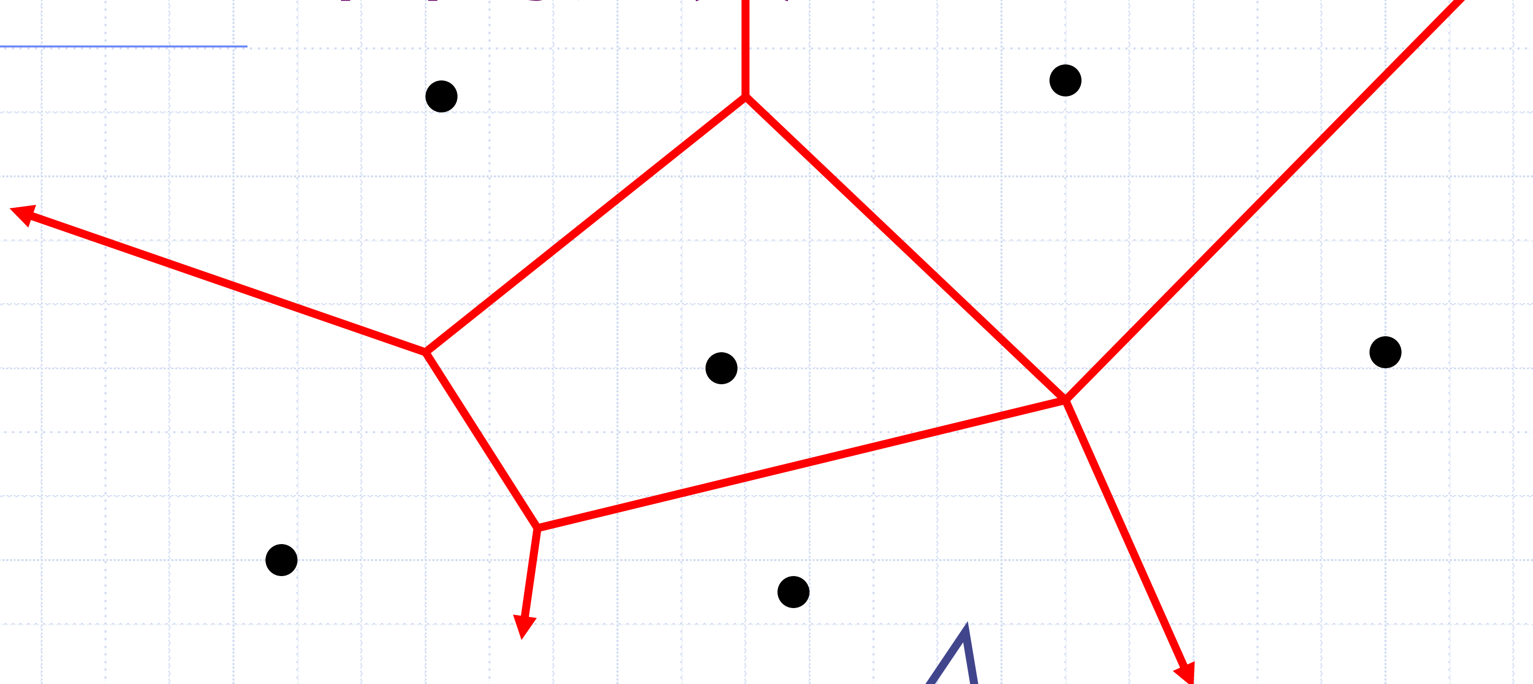
Voronoi图的定义

对于平面上n个点的点集S,定义$V(P_i)=\cap H(P_i,P_j)$，即$V(P_i)$表示比其他点更接近P_i的点的轨迹是n-1个半平面的交集，它是一个不多于n-1条边的凸多边形区域，称为关联于P_i的Voronoi多边形或关联于P_i的Voronoi多边形域。



位于多边形$V(p_i)$内的任意一个点P满足$|PP_i|<|PP_j|(i<>j)$

Voronoi图的定义



对于S中的每个点都可以 作一个Voronoi多边形，这样n个Voronoi多边形组成的图称为Voronoi图，记为Vor(S)。

n=6时的Vor(S)

Voronoi图的构造

传统的构造方法

编写麻烦

难于理解

分治法构造Delaunay三角剖分法

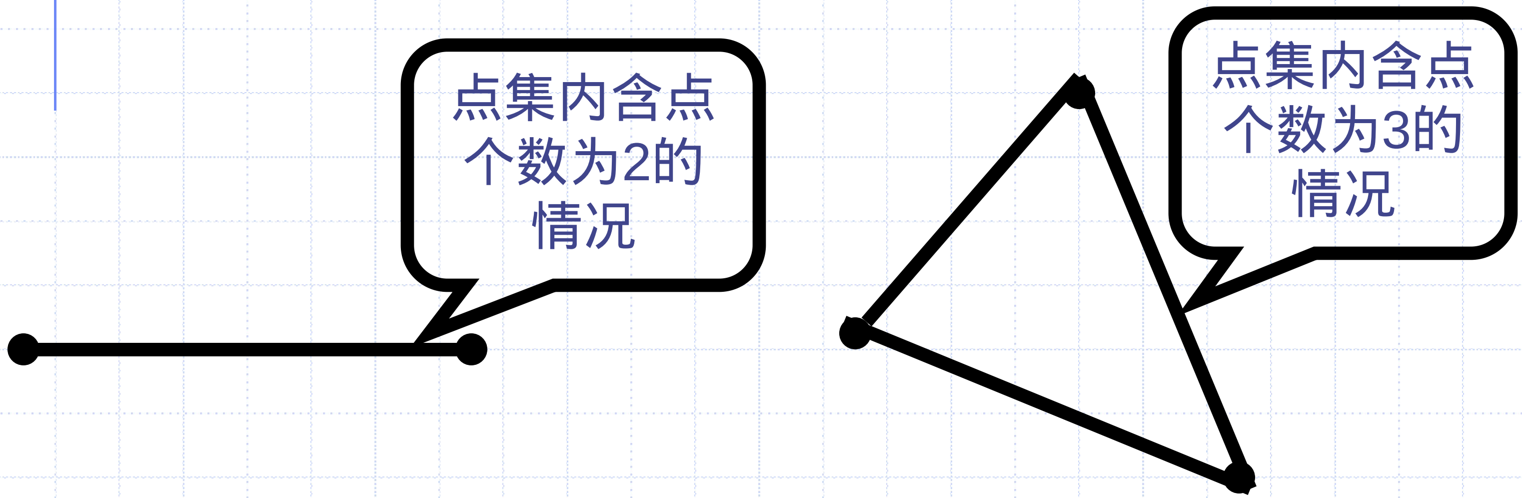
编写容易

易于理解

O(N log N)

Voronoi图的构造

用分治法构造角最优三角剖分，首先要对点集依照X坐标排序。如果点集内点的个数小于等于三，那么可以直接构造，否则将点集拆分成为两个含点数目近似的点集进行构造，最后合并这两个点集。

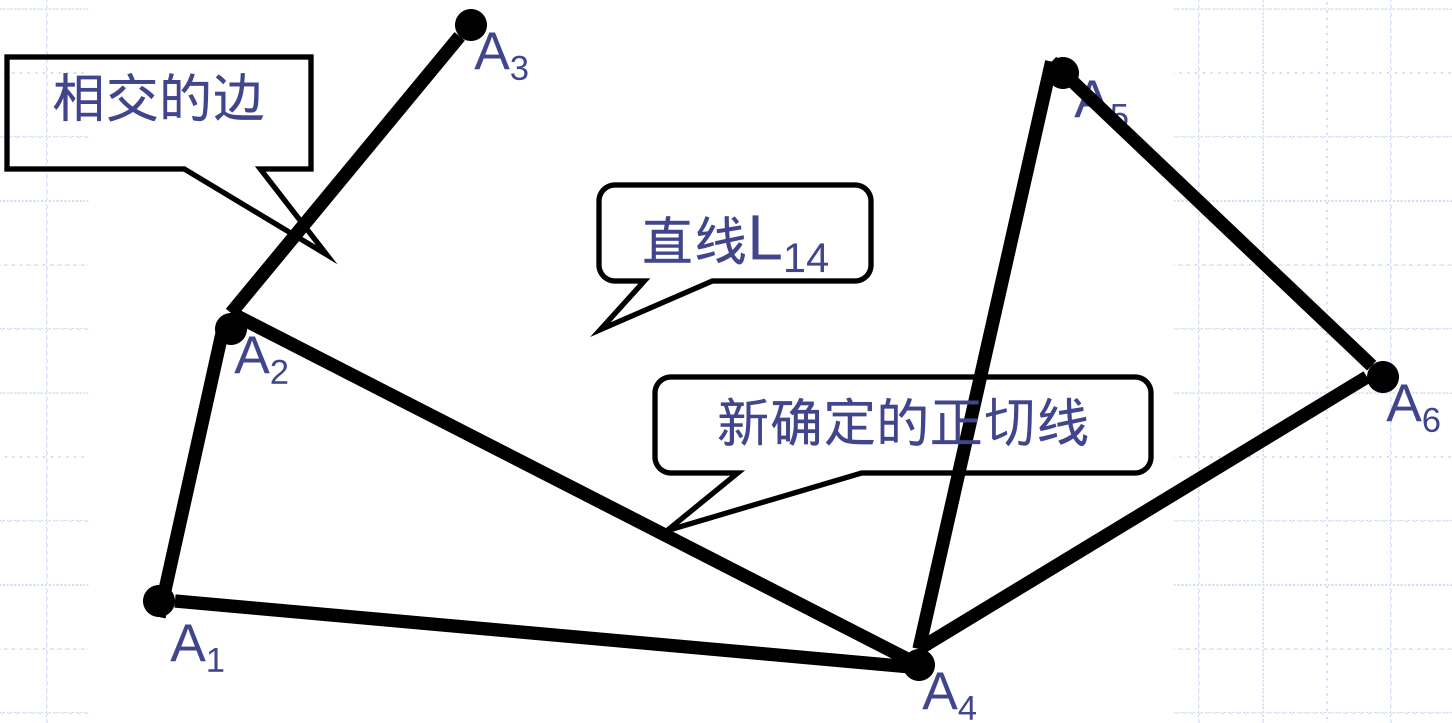


如何合并呢？

合并两个子点集的角最优三角剖分

[illegible]

[illegible]最小的点所关联边。

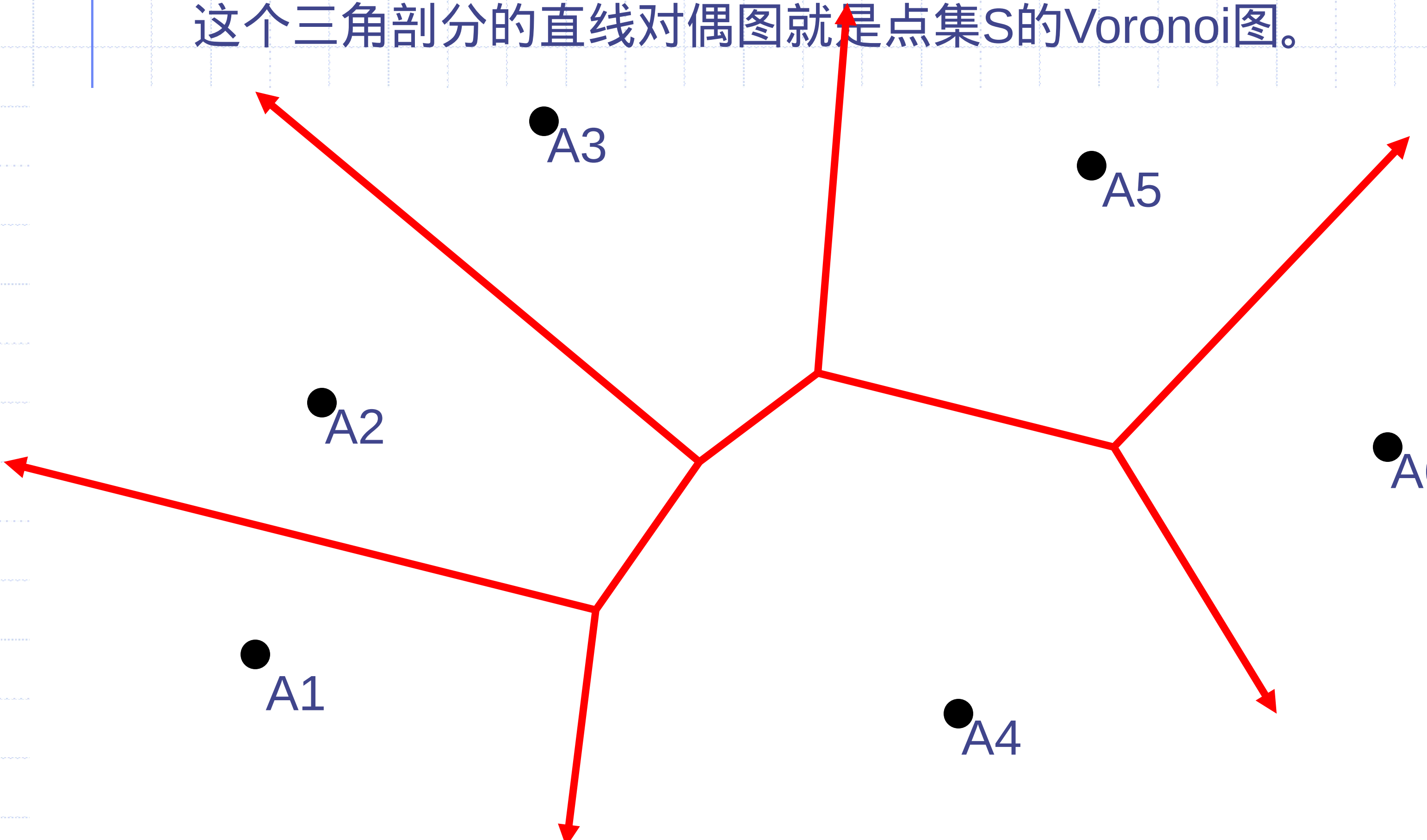


Voronoi图的构造

重复上述步骤，我们就能合并两个点集的角最优三角剖分。

这样，依照该方案，我们就能构造出来点集S的角最优三角剖分了。

这个三角剖分的直线对偶图就是点集S的Voronoi图。



Voronoi图的构造

O(NlogN)

$$T(N)=2T(N/2)+O(N)$$

求解含有n个点的点集的角最优三角剖分

求解含有n/2个点的点集的角最优三角剖分

合并两个点集的角最优三角剖分

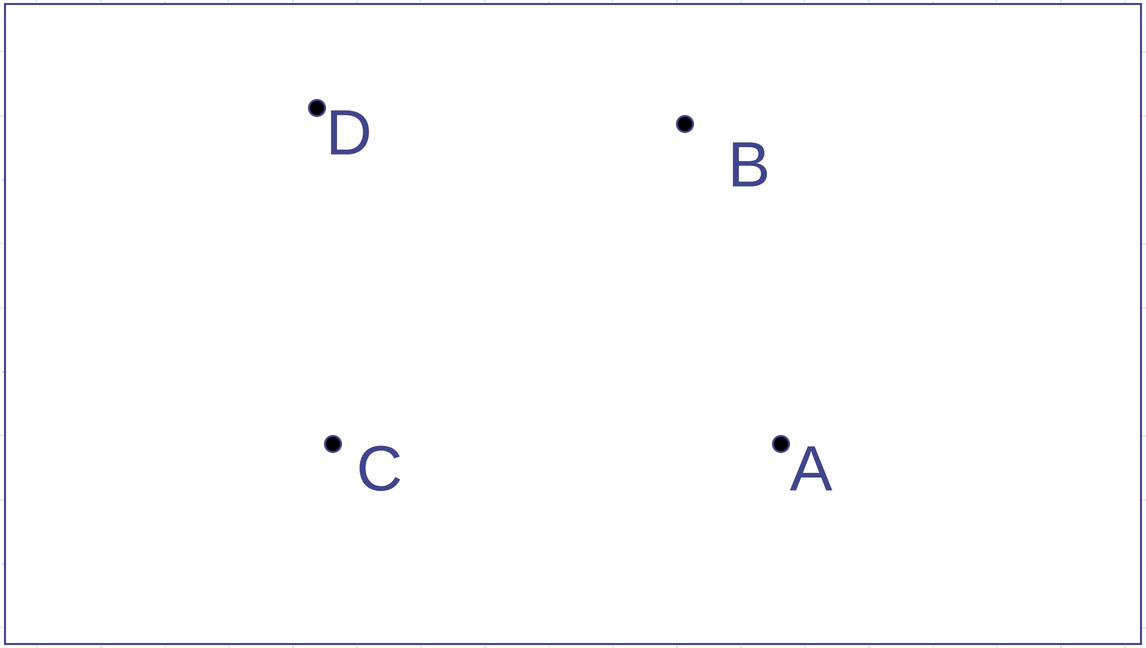
Voronoi图的在信息学中的应用

- 例1.Run Away
- 例2.Voronoi图与平面MST问题
- 例3.Fat Man

Voronoi图的在信息学中的应用

例1.Run Away

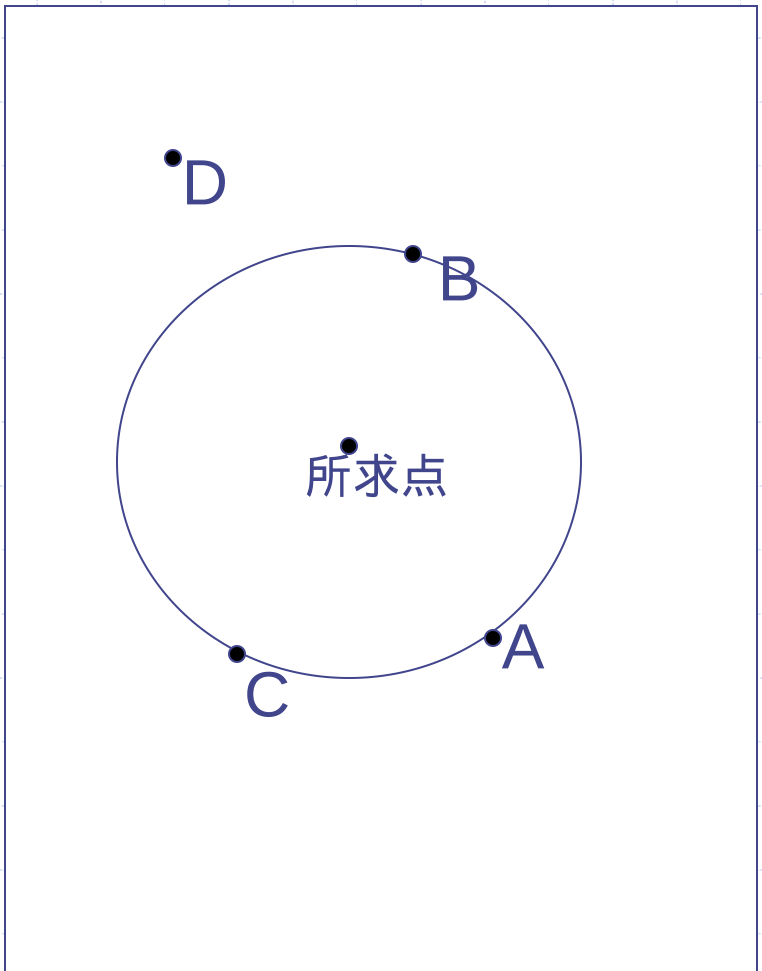
平面上有一个矩形，在矩形内有一些点，请你求得矩形内另一个点，该点离与它最近的已知点最远（点的个数<=1000）。



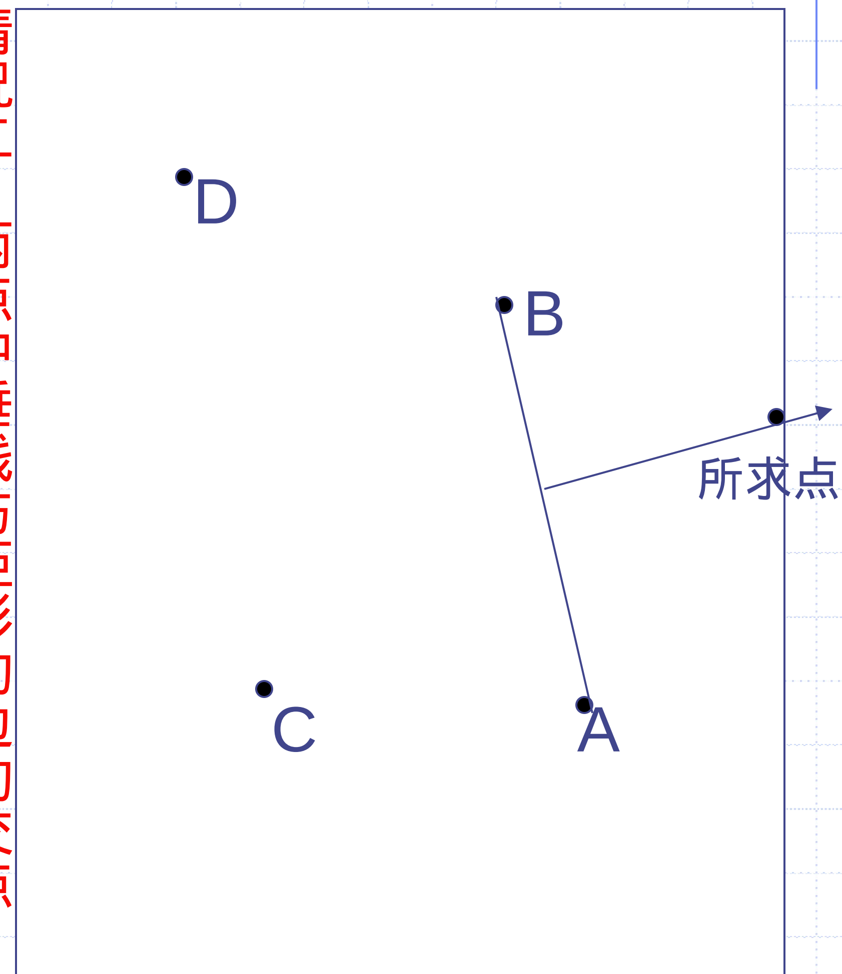
Voronoi图的在信息学中的应用

思路一：大家可能很容易想到用枚举法

情况一：过三点的圆的圆心



情况二：两点中垂线与矩形的边的交点



Voronoi图的在信息学中的应用

根据刚才分析的两种情况，我们可以构造两种方案。第一种方案针对所求点为过三个点的圆的圆心的状态，我们枚举三个点，求出它们组成的三角形的外心和半径，然后枚举其它的点，看它们是不是在这个圆中。第二种方案是枚举两个点的中垂线，求出中垂线与矩形的交点，然后根据这三个点来计算最远位置，进行判断。

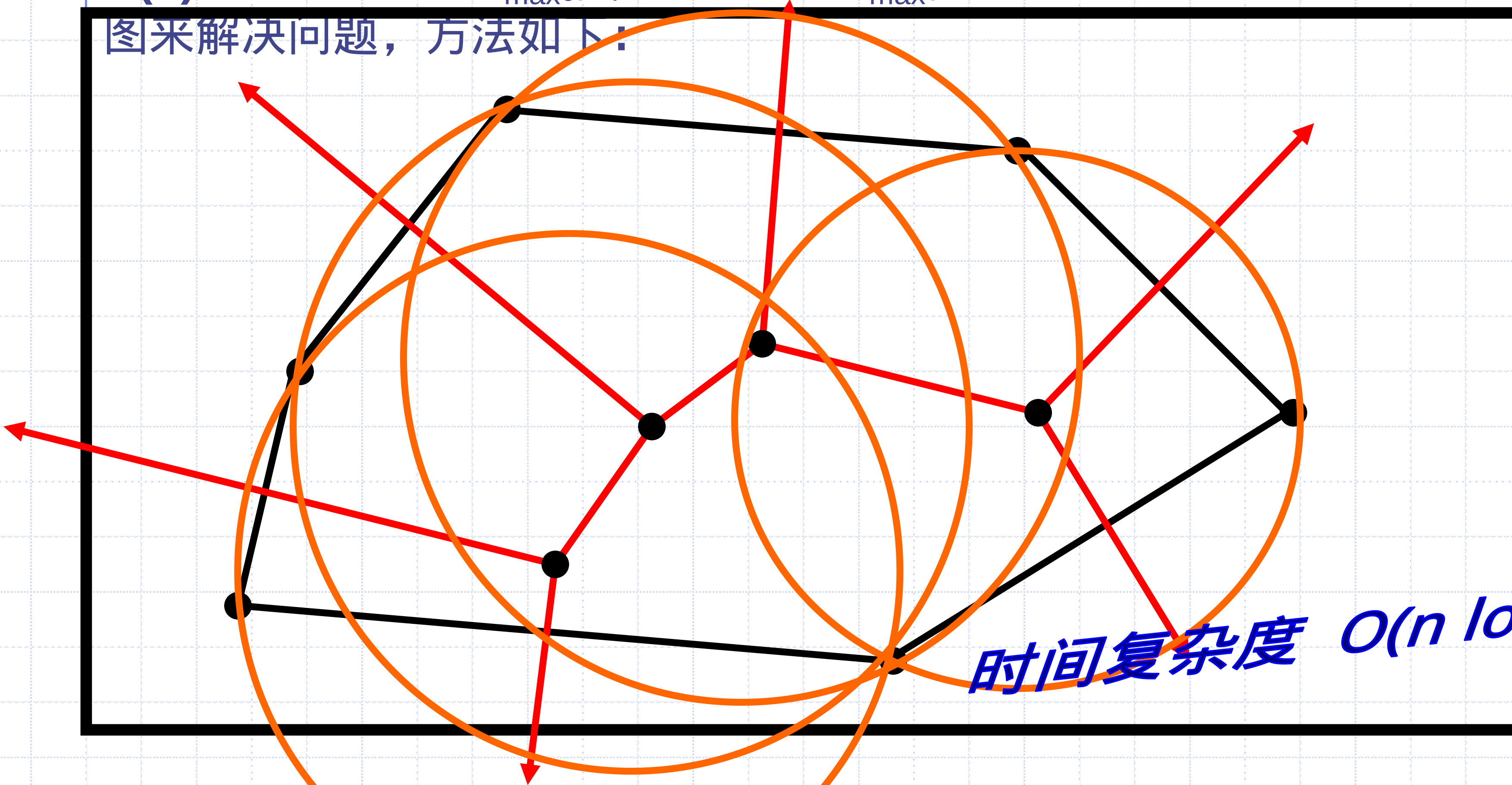
它的时间复杂度：**$O(n^4)$**

太高了

Voronoi图的在信息学中的应用

思路二：Voronoi图

……我们很容易想到用Voronoi图来解决问题，方法如下：



时间复杂度 O(n log n)

Voronoi图与平面MST问题

例2.平面MST问题

给定平面上的点集S，求出连接S中所有点的最小长度的树，并且要求最小生成树的结点恰好是S中的点。

Voronoi图与平面MST问题

传统的求最小生成树的方法是贪心法，要是纯粹使用贪心法求平面最小生成树，我们所作的程序时间复杂度至少为：O(n^2)

有没有更快的方法呢？

当然有!用Voronoi图。

Voronoi图与平面MST问题

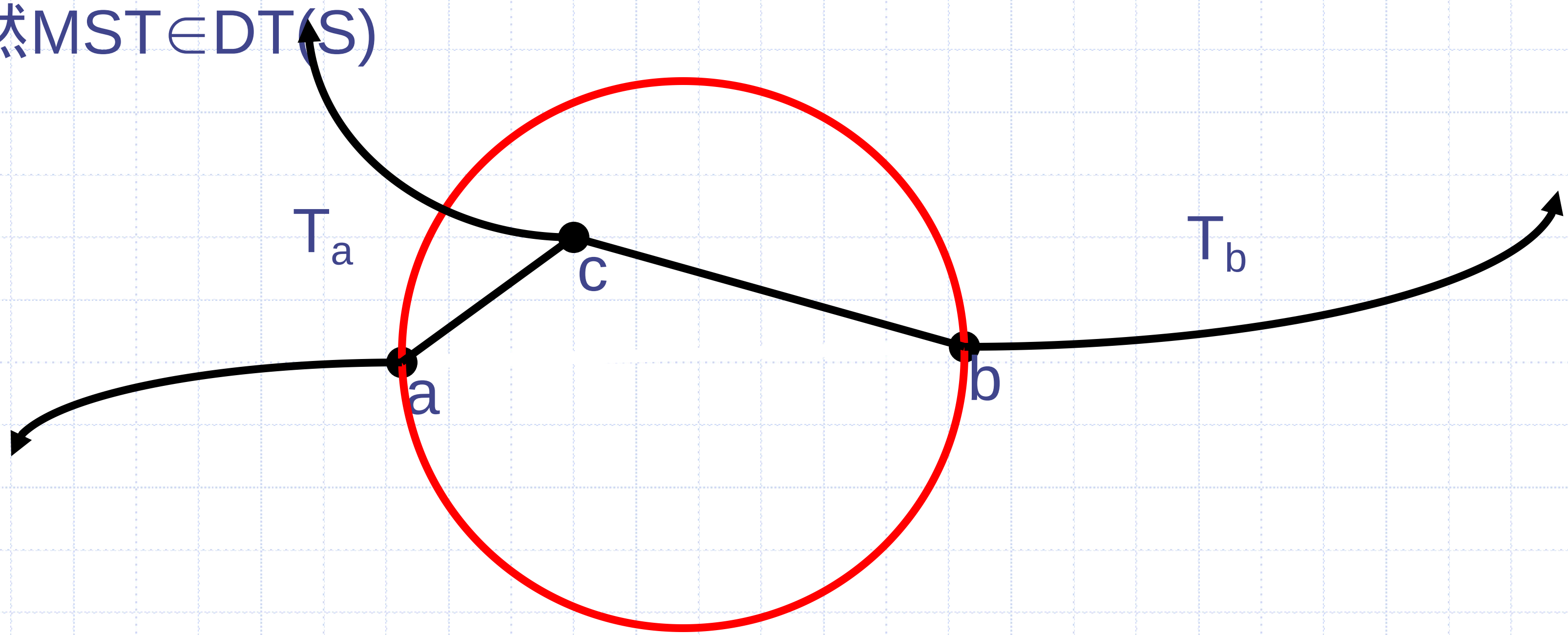
我们都知道Voronoi图的对偶图是点集的角最优三角剖分，我们把这个三角剖分中的边组成的集合叫做DT(S).

那么，我们可以得出这样一个定理：

最小生成树MST是角最优三角剖分DT(S)的一个子集

关于定理的证明

证明也就是说，具有直径ab的圆周上或圆内必有S中的点，假设c在圆周上或者圆内，那么|ac|<|ab|并且|bc|<|ab|。那么如果我们删除ab，把树分成两部分T_a和T_b，那么可以通过增加边ac或cb，可以合并成新的树，并且的总长度小于T，因此包含ab的树长度不可能是最小的。所以必然MST∈DT(S)



Voronoi图与平面MST问题

根据这个条件，我们可以得到一个新的方案，构造角最优三角剖分，然后计算最小生成树，总的时间复杂度是O(n log n)。

可能大家会问这样一个问题：

除了距离问题,Voronoi图还有什么用呢?

我想告诉大家！Voronoi图不仅能快速解决距离问题

Voronoi图还可以扩宽我们的解题思路

Voronoi图拓宽解题思路

例3.Fat Man

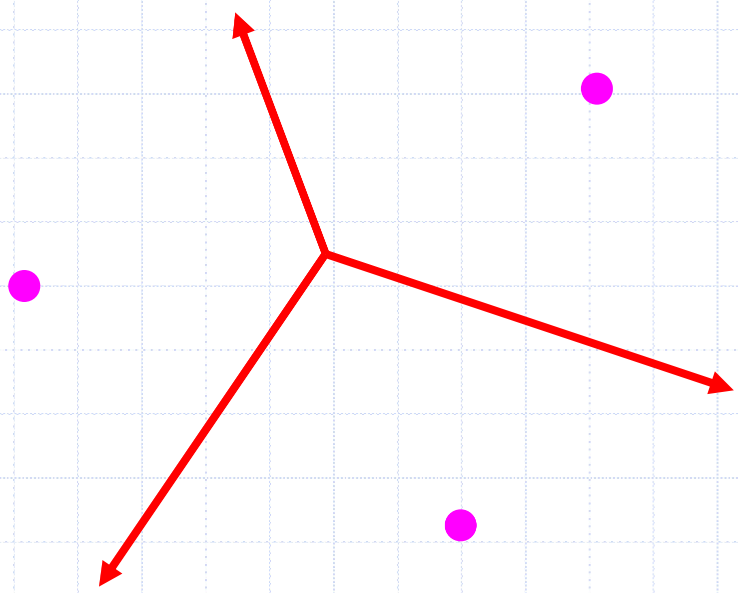
在超市走廊上两边都是墙，中间有一些障碍物，这些障碍物都是一些很小的半径可以忽略的点，你是一个胖子，可以将你的抽象成一个圆柱。现在你要从走廊的一头走到另一头。请问你最大的直径是多少？（走廊长L,宽W）

问题分析：

刚开始拿到题目可能会手足无措，如果只是知道平面上的一些点，我们很难确定从走廊一头到另一头的路线，也很难运用枚举等方法来解决问题。但是，当你学了Voronoi图，情况就不一样了！

Voronoi图拓宽解题思路

首先我们建立Voronoi图，显然一个人如果想穿过这些障碍物，那么走Voronoi边才是最佳的，因为如果不走Voronoi边，必然会使你的圆心进入一个Voronoi多边形内，这将使人更靠近一个障碍物，因而会减少人的半径。所以最佳路线必定由一些Voronoi边组成。

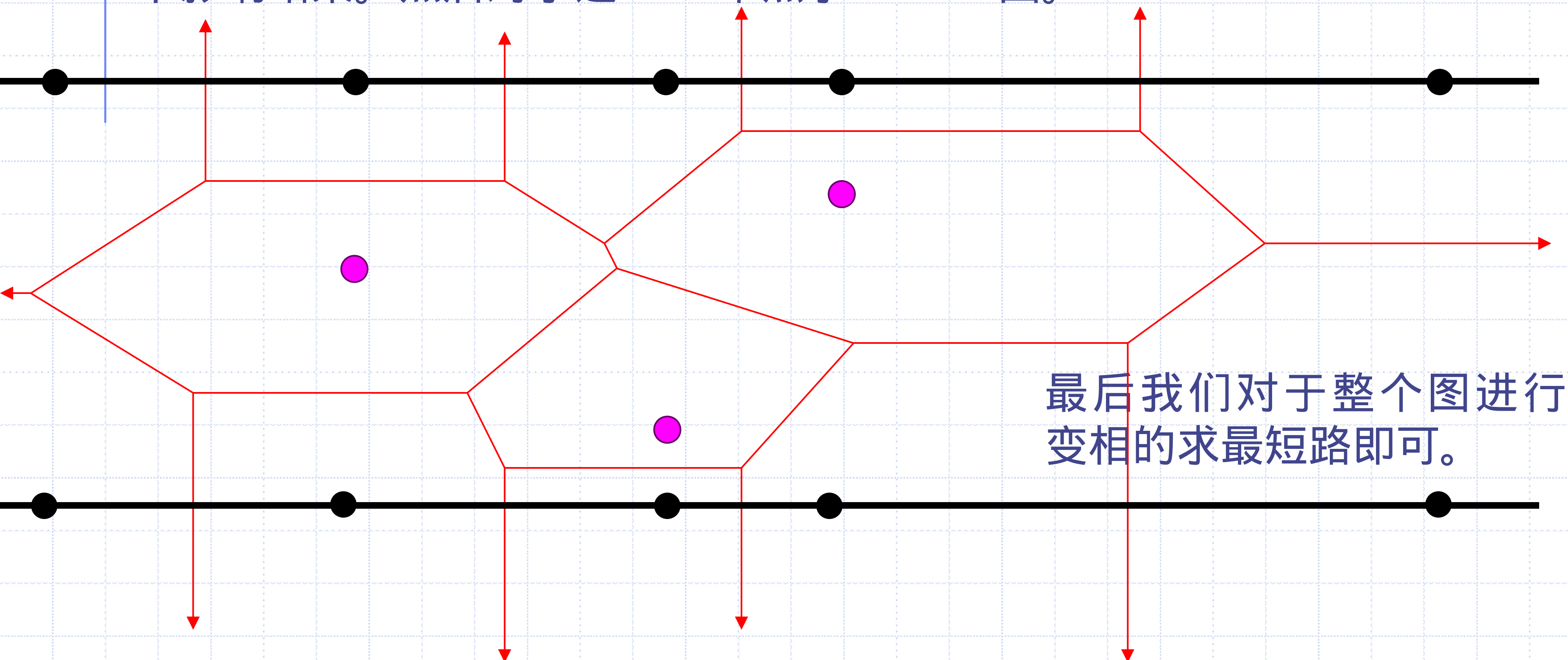


Voronoi图拓宽解题思路

● 新增点

● 原来障碍点

接下来，由于人还可以从走廊边与障碍物之间通过，那么对于每一个障碍点(x,y)我们可以在走廊壁上增加障碍点(x,0),(x,W),一共增加2n个障碍点。另外在走廊开始和尽头增加四个障碍点（-W,0），（-W,W），（L+W,0），（L+W,W）这四个点与其它点之间距离不小与W，这样就不影响结果。然后对于这3n+4个点求Voronoi图。



最后我们对于整个图进行变相的求最短路即可。

总结

化繁为简

距离问题 运用Voronoi图 减少冗余计算

$O(n^4)$ $O(n^2)$

$O(n \log n)$ $O(n \log n)$

特殊几何问题 运用Voronoi图 带来新思路

没思路 从无到有 有思路

扩展思路

总结II

巧用算法

勇于实践

谢谢大家！