Vorlesung 10

F. 149

(3) nicht assoziativ

$$(4-3)-2 = 1-2 = -1 \neq 3 = 4-1 = 4-(3-2)$$

nicht kommutativ

$$4-3 = 1 \neq -1 = 3-4$$

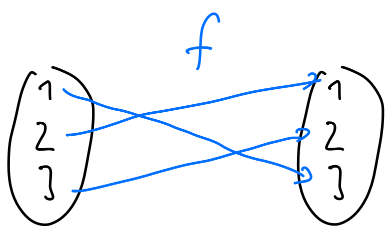
(4) nicht assoziativ

$$(18/6)/3 = 3/3 = 1 \neq 9 = 18/2 = 18/(6/3)$$

nicht kommutativ

$$18/6 = 3 \neq \frac{1}{3} = 6/18$$

F. 150



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

UR:

1 2 3

$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$

$$Id \circ Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = Id$$

$$\tau_{23} \circ \tau_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = Id$$

$$\tau_{23} \circ \tau_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \rho_1$$

F. 155

(1) $2 + x = 7 \iff x = 7 - 2 = 5$, da

$-: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ Abb

$2 + x = 1 \iff x = 1 - 2 = -1 \notin \mathbb{N}$

(3) $2 \cdot x = 1 \iff x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

(4) $2 \cdot x = 1 \iff x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

$0 \cdot x = 0$ besitzt unendlich viele Lösungen

F. 157 $M = \{a, b, c, d\}$

$\circ$	a	b	c	d
a	a	c	d	b
b	a	d	d	b
c	c	b	a	d
d	c	c	b	d

$a \circ \overset{a}{x} = a$ $\qquad$ $b \circ \overset{a}{x} = a$

$a \circ \overset{d}{x} = b$ $\qquad$ $b \circ \overset{d}{x} = b$

$a \circ \overset{b}{x} = c$ $\qquad$ $b \circ x = c$ keine Lsg.

$a \circ \overset{c}{x} = d$ $\qquad$ $b \circ \overset{b,c}{x} = d$ nicht eindeutig

$\overset{a,b}{x} \circ a = a$ nicht eindeutig

$x \circ a = b$ keine Lsg.

$\overset{c,d}{x} \circ a = c$ nicht eindeutig

$x \circ a = d$ keine Lsg.

F. 166 <u>Bew. Satz</u> $\oplus \subseteq (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m) \times \mathbb{Z}_m$

[7.7c. $\oplus : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m,\ ([a]_m, [b]_m) \mapsto [a+b]_m$

ist wohldefiniert, d.h. $\oplus$ ist r.e., d.h.:

$$\forall \left(\left([a]_m, [b]_m\right), [a+b]_m\right), \left(\left([a']_m, [b']_m\right), [a'+b']_m\right) \in \oplus :$$

$$\left([a]_m, [b]_m\right) = \left([a']_m, [b']_m\right) \Rightarrow [a+b]_m = [a'+b']_m \Big]$$

Seien $\left(\left([a]_m, [b]_m\right), [a+b]_m\right), \left(\left([a']_m, [b']_m\right), [a'+b']_m\right) \in \oplus$.

Es gelte: $\left([a]_m, [b]_m\right) = \left([a']_m, [b']_m\right)$.

[7.7c: $[a+b]_m = [a'+b']_m$, d.h.: $a+b \equiv_m a'+b'$, d.h.:

$m \mid a'+b' - (a+b) = a'-a + b'-b$, d.h.:

$\exists c \in \mathbb{Z} : \quad m \cdot c = a'-a + b'-b$]

Nach Vor. gilt: $[a]_m = [a']_m$ und $[b]_m = [b']_m$.

D.h. $a \equiv_m a'$ und $b \equiv_m b'$, d.h.:

$m \mid a'-a$ und $m \mid b'-b$, d.h.:

es ex. $c', c'' \in \mathbb{Z}$ mit

(I) $m \cdot c' = a' - a$ und (II) $m \cdot c'' = b' - b$. (4)

Addition der Gl. (I) und (II) liefert:

(III) $m \cdot (c' + c'') = m \cdot c' + m \cdot c'' = a' - a + b' - b$

Setze $c := c' + c'' \in \mathbb{Z}$. Es gilt mit (III):

$$m \cdot c = m \cdot (c' + c'') \underset{(III)}{=} a' - a + b' - b.$$

//