Vorlesung 8

T. 118 Bew. Satz 2

[z.z.: R_1, R_2 l.e. $\Longrightarrow$ R_1R_2 l.e.]

Es gelte: R_1 und R_2 l.e.

[z.z.: R_1R_2 l.e.,

d.h.: $\forall\ (x_1,z_1),(x_2,z_2) \in R_1R_2:\ z_1 = z_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$]

Seien $(x_1,z_1),(x_2,z_2) \in R_1R_2$. Es gelte: $z_1 = z_2$.

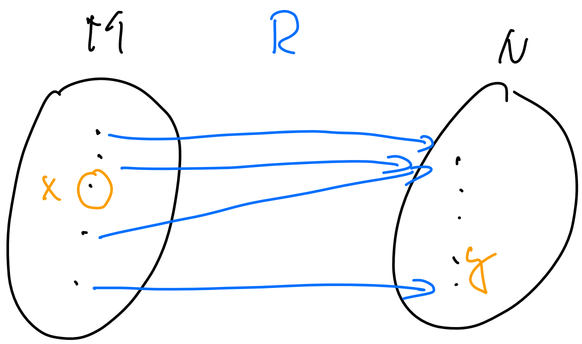
Nach Def. „$\circ$" ex. $y_1, y_2 \in N$ mit

$(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in R_1$ und $(y_1,z_1),(y_2,z_2) \in R_2$.

Da R_2 l.e. ist und $z_1 = z_2$ gilt, ist $y_1 = y_2$.

Da R_1 l.e. ist und $y_1 = y_2$ gilt, ist $x_1 = x_2$. //

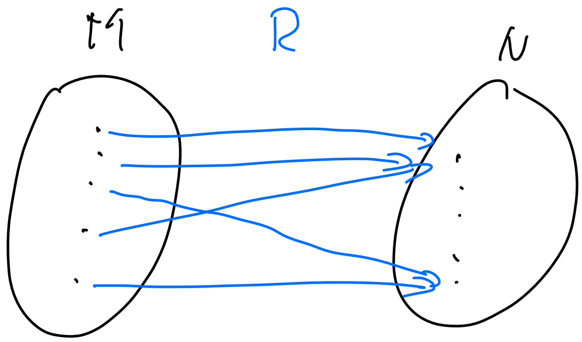
T. 119



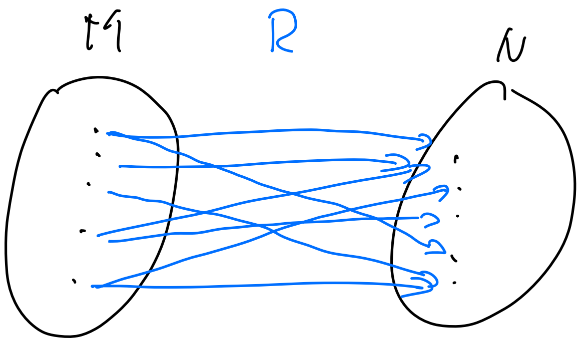
nicht l.e., r.e

nicht l.t., da x mit keinem $y \in N$ in Relation steht.

nicht r.t., da y mit keinem $x \in M$ in Relation steht



l.t.
nicht r.t.
nicht l.e.
r.e



l.t.
r.t.
nicht l.e.
nicht r.e.

<u>F.120</u> <u>Bew. Satz 1</u>

[z.z.: R l.t. $\Longleftrightarrow$ R^{-1} r.t.] $\quad R^{-1} \subseteq N \times M$

"$\Longrightarrow$": Es gelte: R l.t.

[z.z.: R^{-1} r.t.,
d.h.: $\forall x \in M \; \exists y \in N : (y,x) \in R^{-1}$]

Sei $x \in M$. Da R l.t. ist, ex. ein $y' \in N$ mit $(x,y') \in R$.

Setze $y := y' \in N$. Es gilt mit Def. "$(\cdot)^{-1}$": $(y,x) = (y',x) \in R^{-1}$.

„⇐": Es gilt: R^{-1} r.t.

[7.7.1 R l.t., d.h. $\forall x \in M \; \exists y \in N : (x,y) \in R$]

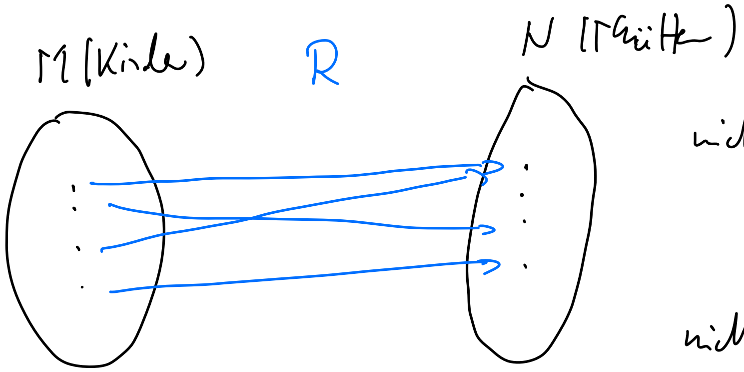
Sei $x \in M$. Da R^{-1} r.t. ist, ex. ein $y' \in N$ mit $(y', x) \in R^{-1}$. Setze $y := y' \in N$.

Es gilt mit Def. „$(-)^{-1}$":

$(x,y) = (x,y') \in R$. //

7.121

(1)



nicht l.e.

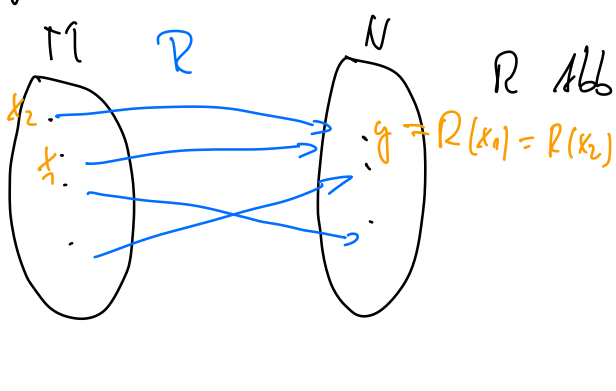
r.e.

l.t.

nicht r.t.

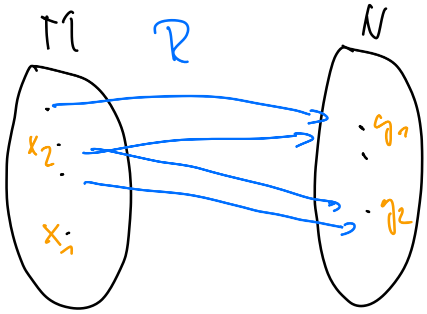
7.124 Bsp.:

(1)



R Abb.

(2)



R ist keine Abb., da x_1 nicht in Beziehung steht oder da $(x_2,y_1),(x_2,y_2)\in R$.

(3) $Id_M = \{(x,x) \mid x\in M\}$ ist eine Abb.

$Id_M : M \to M,\ x \mapsto x$

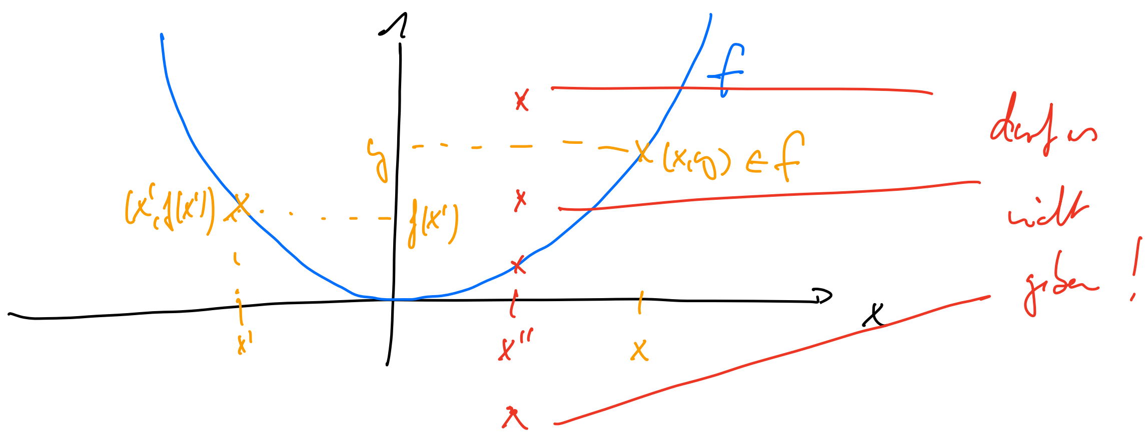
$Id_M(x) = x$

(4) Die Relation (1) von F.121 ist eine Abb.

Sei M_x Mutter von $x \in M$.

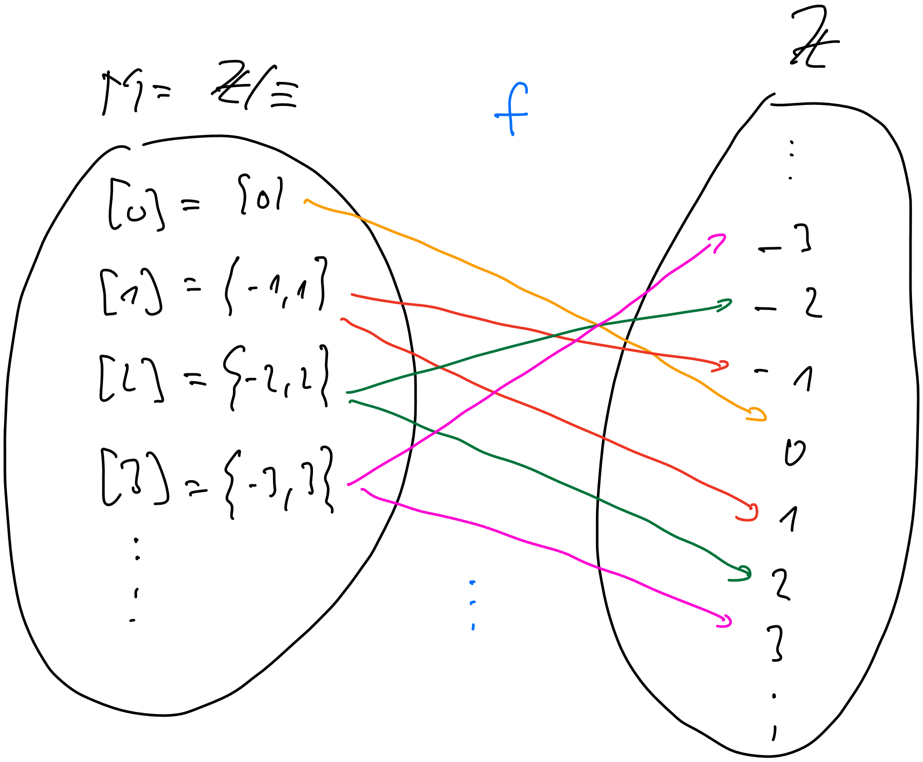
$R : M \to M,\ x \mapsto M_x$.

(5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist eine Abb.



F.125 Lösung

zu f:



[z.z.: f ist keine Abb.,

d.h.: f ist nicht l.t. oder f ist nicht r.e.]

[z.z.: f ist nicht r.e.,

d.h.: $\neg\Big(\forall\ ([x_1], y_1), ([x_2], y_2) \in f:$

$$[x_1] = [x_2] \Longrightarrow y_1 = y_2 \Big)$$

d.h.: $\exists\ ([x_1], y_1), ([x_2], y_2) \in f:$

$$[x_1] = [x_2] \wedge y \neq y_2\ ]$$

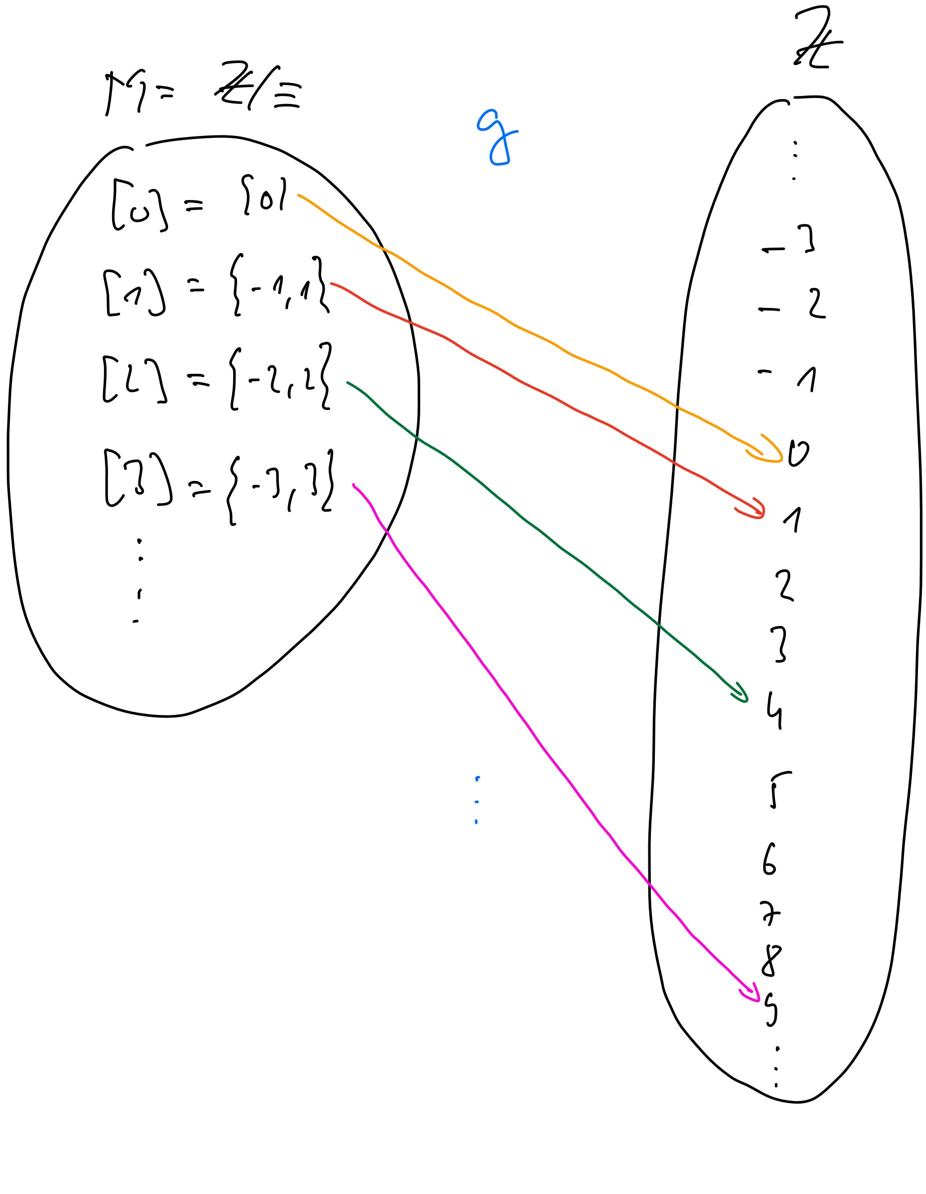
Setze $([x_1], y_1) := (\overbrace{\{-3,3\}}^{[3]}, 3) \in f$ und

$$([x_2], y_2) := (\underbrace{\{-3,3\}}_{[-3]}, -3) \in f.$$

Es gilt: $[x_1] = \{-3,3\} = [x_2]$ und

$$y_1 = 3 \neq -3 = y_2.$$

<u>Zu f</u>: $M = \mathbb{Z}/\equiv$



[z.z.: g ist eine Abb.

d.h.: (i) g ist l.t. und (ii) g ist r.e.]

(i) [z.z.: $\forall [x] \in M \ \exists y \in \mathbb{Z} : ([x], y) \in g$]

Sei $[x] \in M$. Setze $y := x^2 \in \mathbb{Z}$.

Es gilt: $([x], y) = ([x], x^2) \in g$.

(ii) [z.z.: $\forall ([x_1], y_1), ([x_2], y_2) \in g$:

$$[x_1] = [x_2] \Rightarrow y_1 = y_2$$]

Seien $([x_1], y_1), ([x_2], y_2) \in g$.

Dann sind $y_1 = x_1^2$ und $y_2 = x_2^2$.

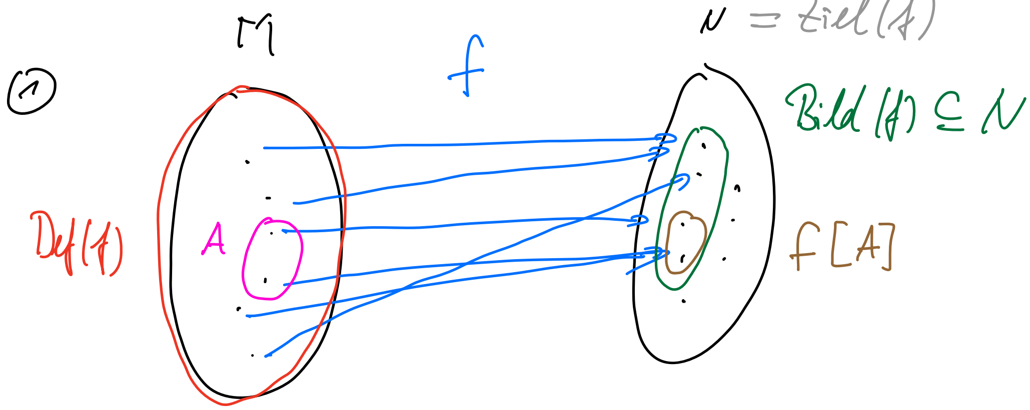
Es gelte: $[x_1] = [x_2]$. Nach Vor. gilt:

$x_1 \equiv x_2$, d.h.: $|x_1| = |x_2|$, d.h.:

$$y_1 = x_1^2 = |x_1|^2 = |x_2|^2 = x_2^2 = y_2. \quad //$$

F. 129

(1)



(2) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$

$\mathrm{Def}(f) = \mathbb{Z}, \quad \mathrm{Ziel}(f) = \mathbb{Z}$

$\mathrm{Bild}(f) = \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}_0\} = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$

$f[\{2, 8, 10\}] = \{4, 64, 100\}$

F. 130

$f = g$

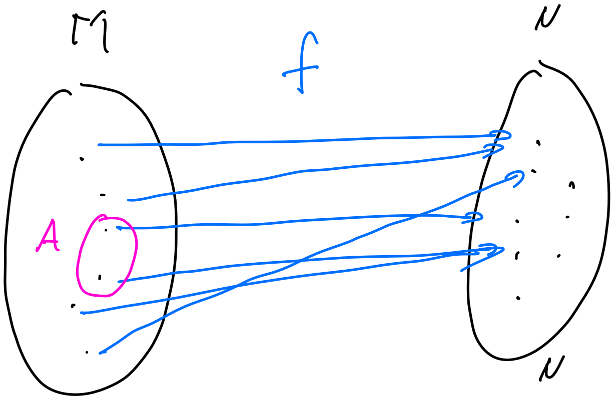
$\iff M = K \wedge N = L \wedge$

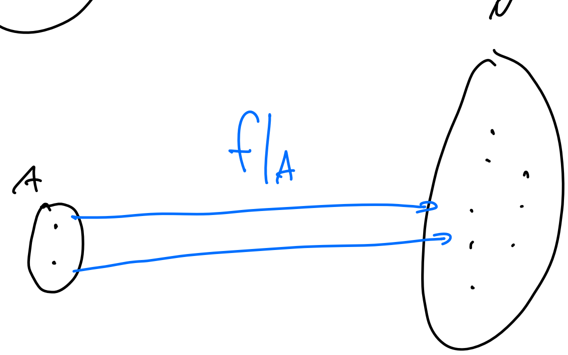
$\forall (x,y) \in M \times N: \underbrace{(x,y) \in f}_{\iff f(x) = y} \iff \underbrace{(x,y) \in g}_{\iff g(x) = y}$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\iff f(x) = g(x)}$

F.131

(1)

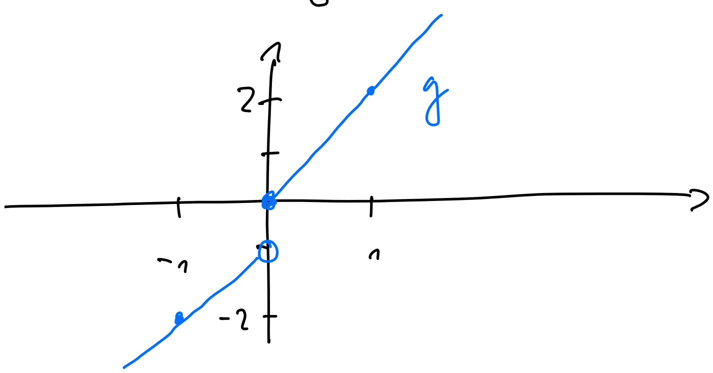




(2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$

$f|_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^2$

(3) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$



$g|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto 2x$