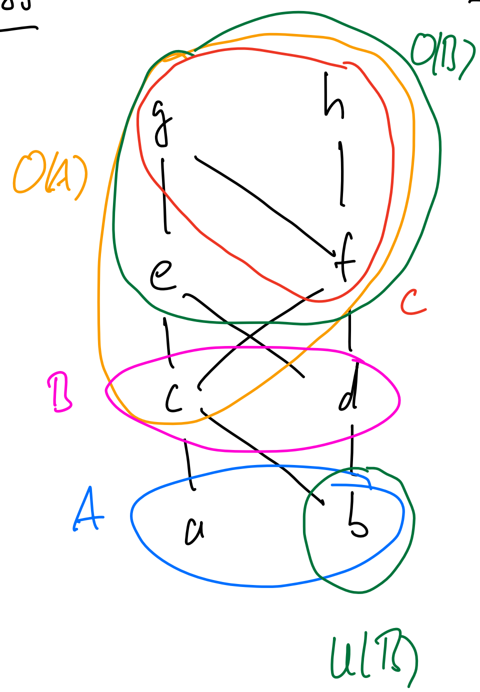
# Vorlesung 6

F. 85




| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| o. S. | c, e, f, g, h | e, f, g, h | – |
| ob. G. | c | e, f | – |
| Sup | c | – | – |
| max. El. | a, b | c, d | g, h |
| gr. El | – | – | – |
| u. S. | – | b | a, b, c, d, f |
| u. G. | – | b | f |
| inf | – | b | f |
| min. El. | a, b | c, d | f |
| kl. El | – | – | f |

F. 87 Bew. Satz 1:

Sei $A \subseteq M$ endlich.

Es sei $x$ einziges max. El. von $A$.

Definiere die Menge $A' \subseteq A$ als die Menge aller El., die nicht mit $x$ vergleichbar sind. Da $A$ endlich ist, ist $A'$ endlich.

[z.zz. $A' = \emptyset$]

Ann.: $A' \neq \emptyset$. Nach Satz 1 von 7.77 (2)

besitzt $A'$ ein max. El. $y \in A'$.

Es ist $y \neq x$, da sonst $y = x$

mit $x$ vergleichbar wäre.

[7.7.6 $y$ ist max. El. von $A$]

Ann.: $y$ ist kein max. El. von $A$.

Dann ex. ein $a \in A$ mit

$y \sqsubset a$. Da $y$ max. El.

von $A'$ ist, ist $a \notin A'$.

Also ist $a$ mit $x$ vergleichbar

und somit $a \sqsubseteq x$. Mit der

Transitivität von $\sqsubseteq$ gilt also

$y \sqsubset x$. Dann ist $y$ mit $x$

vergleichbar Wid zu $y \in A'$!

Also ist $y$ max. El. von $A$. Da $x \neq y$

ist, ist dies Wid zu $A$ besitzt nur

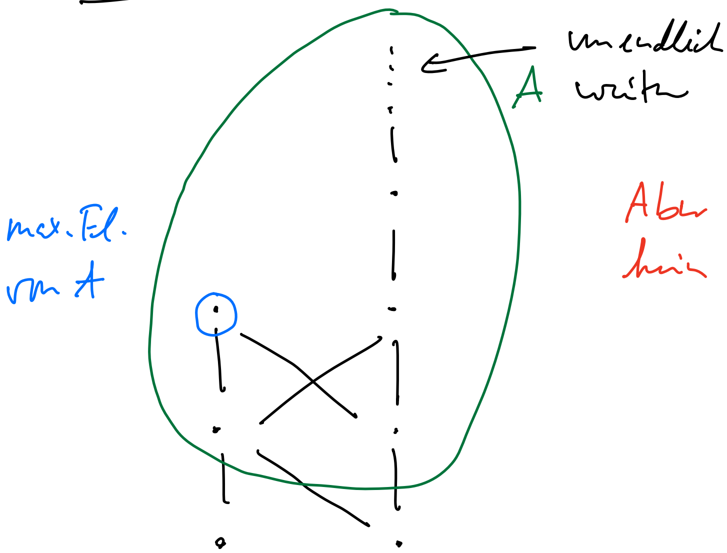
ein max. El.

Also ist $A' = \emptyset$. Damit sind alle El. von

$A$ mit $x$ vergleichbar. Also ist $x$ größtes

El. von $A$. //

Gegenbsp. zu Satz 1, wenn $A$ unendlich ist:




Aber $A$ besitzt kein größtes El.!

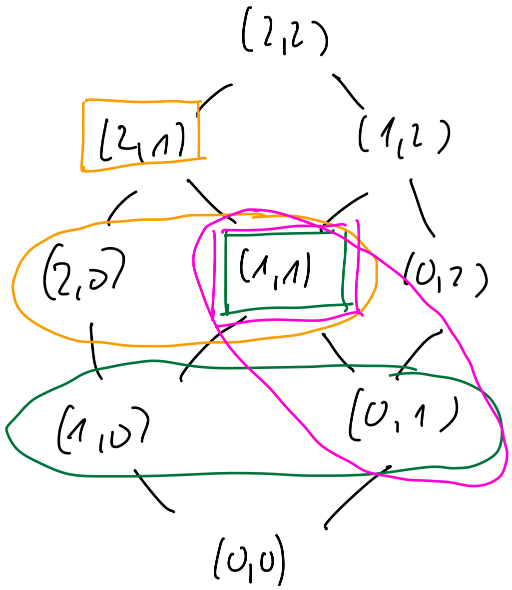
Bew. Satz 2

Sei $A \subseteq M$.

1. Fall: $M$ endlich. Dann ist die Menge der oberen Schranken $O(A) \subseteq M$ endlich. Nach Vor. besitzt $A$ nur eine obere Grenze, d.h. $O(A)$ besitzt nur ein min. El.
Nach Satz 1 F.P7 ist dieses El. kl. El. von $O(A)$. Also insbesondere Sup. von $A$.

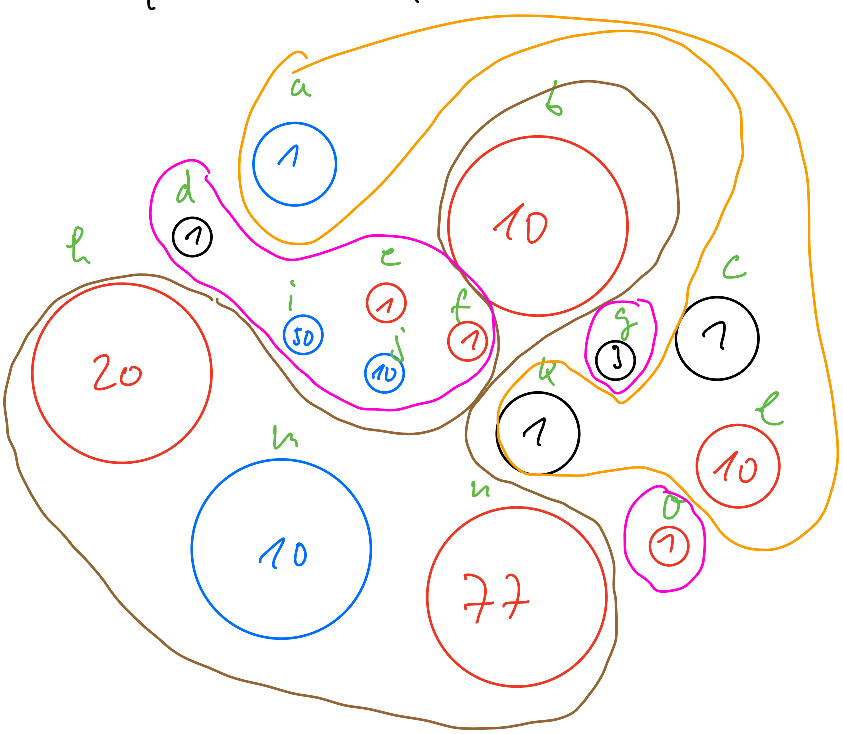
2. Fall: $M$ unendlich.
Folgt mit dem Zorn'schen Lemma. //

F. 88




$$\sup\{(1,0),(0,1)\} = (1,1) = (\sup\{1,0\}, \sup\{0,1\})$$

F. 92 $M := \{a, b, \dots, o\}$



$$R_{Größe} = \{ (b,h), (m,n), (i,j), (e,f), (b,m), (k,l), (h,b), (b,b), (b,n), \dots \}$$

$$(b,l) \notin R_{Größe}$$

$$(b,l) \in R_{Farbe} = \{ (b,b), (i,i), \dots, (g,k), (k,g), (b,l), \dots \}$$

7.55 $[b]_{Größe} = \{b, h, m, n\}$, $[b]_{Farbe} = \{b, h, e, f, l, p, o\}$

$[a]_{Größe} = \{a, c, l, k\}$, $[a]_{Farbe} = \{a, i, j, m\}$

$[d]_{Größe} = \{d, i, e, j, f, g, o\}$, $[d]_{Farbe} = \{d, k, g, c\}$

$$[m]_{Größe} = [b]_{Größe}$$

$$M/R_{Größe} = M/\equiv_{Größe} = \{ [b]_{Größe}, [a]_{Größe}, [d]_{Größe} \}$$

$$= \{ \{b, h, m, n\}, \{a, c, l, k\}, \{d, i, e, j, f, g, o\} \}$$

F.97 **Bew. Satz**

[z.z.: ① ⟺ ② ⟺ ③ ⟺ ①, es reicht z.z.:
① ⟹ ② ⟹ ③ ⟹ ① ]

**① ⟹ ②**: Es gelte: $y \equiv x$. Nach Def. ÄK gilt:
$y \in [x]$.

**② ⟹ ③**: Es gelte: $y \in [x]$.

„$\subseteq$": Sei $z \in [y]$. Nach Bem. ③ von F.97 gilt mit Vor.:
$z \in [x]$.

„$\supseteq$": Sei $z \in [x]$. Nach Bem. ② von F.97 gilt mit Vor.: $x \in [y]$. Nach Bem. ③ von F.97 gilt: $z \in [y]$.

**③ ⟹ ①**: Es gelte: $[y] = [x]$.
Nach Bem. ① von F.97 gilt:
$y \in [y] = [x]$. Nach Def. ÄK gilt:
$y \equiv x$. //

F. 101 <u>Bew. Satz</u>:

① [z.z.: $\bigcup_{x \in M} [x] = M$ ]

„$\subseteq$": Sei $y \in \bigcup_{x \in M} [x]$. Also ex. ein $z \in M$

mit $y \in [z] = \{x \in M \mid x \equiv z\} \subseteq M$.

„$\supseteq$": Sei $y \in M$. Nach Bem. ① von F. 97 gilt:

$y \in [y] \subseteq [y] \cup \bigcup_{x \in M \setminus \{y\}} [x] = \bigcup_{x \in M} [x]$.

② [z.z.: $\forall x, y \in M : [x] \cap [y] = \emptyset \vee [x] = [y]$,

d.h. $\forall x, y \in M : [x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow [x] = [y]$ ]

Seien $x, y \in M$. Es gelte: $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.

Wähle $z \in [x] \cap [y]$. Nach Def. „$\cap$" gilt:

$z \in [x]$ und $z \in [y]$. Nach Satz von F. 97 gilt:

$[z] = [x]$ und $[z] = [y]$. Also gilt:

$[x] = [z] = [y]$. //