Vorlesung 5

F.75

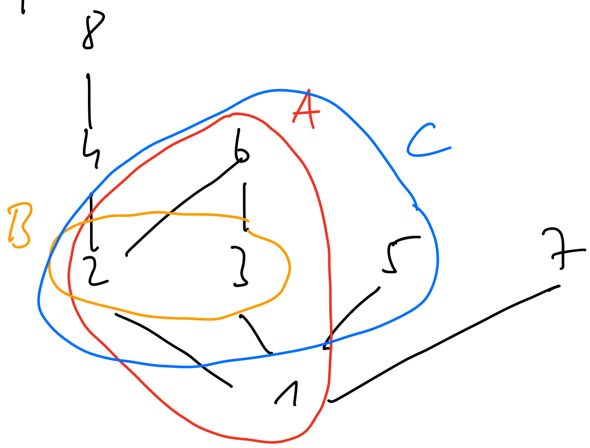
Ergänzung zur Bemerkung:

$$\neg(\exists x\in A: b \sqsubset x) \iff \forall x\in A: \underbrace{\neg(b\sqsubset x)}$$

$$\iff b \not\sqsubset x$$

$$\iff x \sqsubseteq b \lor$$ x, b nicht vergleichbar

F.76 M



F.77 **Bew Satz 1**

[z.z.: $\forall A\subseteq M: (A\neq\emptyset \land A$ endlich$)$

$$\implies$$

A besitzt ein max. El., d.h.:

$\forall n\in\mathbb{N}\ \forall A\subseteq M: |A|=n \implies A$ besitzt ein max. El.]

I.A.: $n=1$.

[z.z.: $\forall A \subseteq M: |A| = n \Rightarrow A$ besitzt ein max. El.]

Sei $A \subseteq M$. Es gelte: $|A| = n = 1$. Dann ex. ein $x \in M$ mit $A = \{x\}$. Insbesondere ist x ein max. El. von A.

I.S.: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte:

(I.V.) $\forall A \subseteq M: |A| = n \Rightarrow A$ besitzt ein max. El.

[z.z.: $\forall A \subseteq M: |A| = n+1 \Rightarrow A$ besitzt ein max. El.]

Sei $A \subseteq M$. Es gelte: $|A| = n+1$.

Wähle $x \in A$ und setze $A' := A \setminus \{x\}$.

Dann ist $A' \subseteq M$ und $|A'| = n$.

Nach (I.V.) besitzt A' ein max. El. b.

1. Fall: $b \sqsubseteq x$. Dann ist x ein max. El. von A.

2. Fall: $b \not\sqsubseteq x$, d.h. $x \sqsubset b$ oder b, x sind nicht vergleichbar. Dann ist b auch max. El. von A. //

② Sei M endlich.

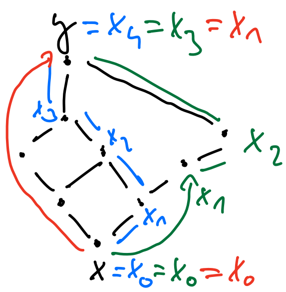
$[7.7.: \sqsubseteq \subseteq (\sqsubset^N)^*]$

Sei $(x,y) \in \sqsubseteq$ $(\Longleftrightarrow x \sqsubseteq y)$

1. Fall: $x=y$. Dann ist $(x,y)=(x,x) \in (\sqsubset^N)^*$, da $(\sqsubset^N)^*$ reflexiv ist.

2. Fall: $x \neq y$. Insbesondere ist $x \sqsubset y$.

$[7.7.: \exists m \in \mathbb{N} \; \exists x_1, \ldots, x_{m-1} \in M :$
$x \sqsubset^N x_1 \sqsubset^N x_2 \sqsubset^N \ldots \sqsubset^N x_{m-1} \sqsubset^N y]$



Def.: Eine Kette von x nach y ist eine Teilmenge $K = \{x_0, \ldots, x_n\} \subseteq M$ mit $x_0 = x$, $x_n = y$ und $x_0 \sqsubset x_1 \sqsubset x_2 \sqsubset \ldots \sqsubset x_{n-1} \sqsubset x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Setze $\mathcal{K} := \{ K \subseteq M \mid K \text{ ist Kette von } x \text{ nach } y \}$.

Dann ist $\mathcal{K} \subseteq (\mathcal{P}(M), \subseteq)$ endlich, da M endlich. Außerdem ist $\mathcal{K} \neq \emptyset$, da $\{x,y\} \in \mathcal{K}$. Damit besitzt $\mathcal{K}$ nach

Satz 1 von F.77 ein max. El.

$K_{max} = \{x_0, \dots, x_n\}$ von $\mathcal{K}$ bzgl. der

Teilmengen-Ordnung „$\subseteq$" auf $P(M)$.

Für K_{max} gilt sogar

$$(*) \quad x = x_0 \subset^N x_1 \subset^N x_2 \subset^N \dots \subset^N x_{n-1} \subset^N x_n = y.$$

<u>Ann.:</u> $(*)$ gilt nicht. Dann ex. ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $x_{i-1} \not\subset^N x_i$. Nach Def. „$\subset^N$" ex. ein $z \in M$ mit $x_{i-1} \subset z \subset x_i$.

Dann ist

$$K_{max} \subsetneq \{x_0, \dots, x_{i-1}, z, x_i, \dots, x_n\} \in \mathcal{K} \text{ W}$$

zur Maximalität von K_{max}.

Da $(\subseteq^N)^*$ transitiv ist, ist $(x,y) \in (\subseteq^N)^*$. //

<u>Bew. Satz 2:</u>

① Z.z.: $\forall\, b, b' \in M$:

$[b$ größtes El. von $A \wedge b'$ größtes El. von $A] \Rightarrow b = b']$

Seien $b, b' \in M$. Es gelte: b, b' sind größte El. von A.

(5)

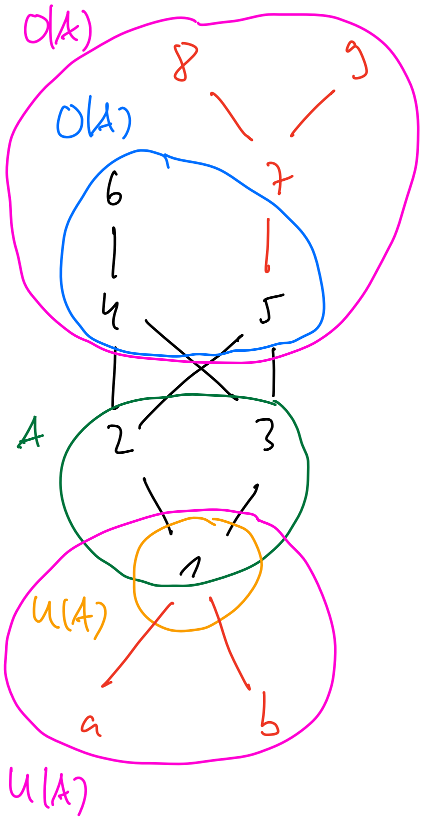
Da b größtes El. von A ist, gilt:
$x \sqsubseteq b$ f.a. $x \in A$. Da b' größtes El. von A ist, ist $b' \in A$. Also gilt: $b' \sqsubseteq b$.
Analog gilt: $b \sqsubseteq b'$. Da $\sqsubseteq$ antisymmetrisch ist, gilt: $b = b'$.

(2) [z.z.: $\forall b \in M$: b größtes El. von $A \Rightarrow b$ max. El. von A]
Sei $b \in M$. Es gelte: b ist größtes El. von A.
[z.z.: b max. El. von A, d.h.:
(i) $b \in A$ (ii) $\forall x \in A : b \sqsubseteq x \Rightarrow x = b$]

(i) Da b größtes El. von A ist, gilt: $b \in A$.
(ii) Sei $x \in A$. Es gelte: $b \sqsubseteq x$.
Da b größtes El. von A ist, gilt:
$$x' \sqsubseteq b \text{ f.a. } x' \in A.$$
Insbesondere ist $x \sqsubseteq b$. Da $\sqsubseteq$ antisymmetrisch ist, gilt: $x = b$.

F.83 $M := \{1,2,3,4,5,6\} \cup \{a,b,7,8,9\}$

$A := \{1,2,3\}$



obere Schranken von A (O(A)):

4,5,6 | 4,5,6,7,8,9

untere Schranken von A (U(A)):

1 | 1, a, b

obere Grenzen von A

4,5 | 4,5

untere Grenzen von A

1 | 1

Supremum von A

ex. nicht | ex. nicht

Infimum von A

1 | 1