Vorlesung 2

7.23 Bew. Satz:

① [z.z.: $(R_1 R_2)^{-1} = R_2^{-1} R_1^{-1}$]

„$\subseteq$": [z.z.: $(R_1 R_2)^{-1} \subseteq R_2^{-1} R_1^{-1}$]

Sei $(x_3, x_1) \in (R_1 R_2)^{-1} \subseteq M_3 \times M_1$.

Nach Def. „$(\cdot)^{-1}$" gilt: $(x_1, x_3) \in R_1 R_2$.

Nach Def. „$\circ$" ex. ein $x_2 \in M_2$ mit

$(x_1, x_2) \in R_1$ und $(x_2, x_3) \in R_2$.

Nach Def. „$(\cdot)^{-1}$" gilt:

$(x_2, x_1) \in R_1^{-1}$ und $(x_3, x_2) \in R_2^{-1}$.

Nach Def. „$\circ$" gilt: $(x_3, x_1) \in R_2^{-1} R_1^{-1}$.

„$\supseteq$": Aufgabe in moodle.

② [z.z.: $(R^{-1})^{-1} = R$]

Sei $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$. Es gilt:

$$(x_1, x_2) \in (R^{-1})^{-1} \underset{\text{Def. } (\cdot)^{-1}}{\Longleftrightarrow} (x_2, x_1) \in R^{-1} \underset{\text{Def. } (\cdot)^{-1}}{\Longleftrightarrow} (x_1, x_2) \in R \; .//$$

F. 28 $\quad M := \{1,2,3\}$

$Id_M = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

$R \subseteq M \times M$

1. reflexiv: $R := \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\}$

2. irreflexiv: $R := \{(1,2),(2,3)\}$

3. symmetrisch: $R := \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(1,1)\}$

$\cup|$

$R^{-1} = \{(2,1),(1,2),(3,2),(2,3),(1,1)\}$

4. asymmetrisch: $R := \{(1,2),(2,3)\}$

$R^{-1} = \{(2,1),(3,2)\}$

$R \cap R^{-1} = \emptyset$

5. antisymmetrisch: $R := \{(1,2),(2,3),(2,2)\}$

$R^{-1} = \{(2,1),(3,2),(2,2)\}$

$R \cap R^{-1} = \{(2,2)\} \subseteq Id_M$

$$((x,y) \in R \land (y,x) \in R) \Rightarrow x = y$$

$$\Leftrightarrow \quad \neg((x,y) \in R \land (y,x) \in R) \lor x = y$$

$$\Leftrightarrow \quad \neg((x,y) \in R) \lor \neg((y,x) \in R) \lor x = y$$

$$\Leftrightarrow \quad (x,y) \notin R \lor (y,x) \notin R \lor x = y$$

$$\Leftrightarrow \quad (x,y) \notin R \lor x = y \lor (y,x) \notin R$$

$$\Leftrightarrow \quad \neg((x,y) \in R \land x \neq y) \lor (y,x) \notin R$$

$$\Leftrightarrow \quad ((x,y) \in R \land x \neq y) \Rightarrow (y,x) \notin R$$

$$\Leftrightarrow \quad \neg((x,y) \in R) \lor ((y,x) \notin R \lor x = y)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x,y) \in R \Rightarrow ((y,x) \notin R \lor x = y)$$

6. transitiv: (1) $R := \{(1,2), (1,3)\}$

Bew (a): $RR = \emptyset \subseteq R$

Bew (b):

		x	y	z	
3	2	1	1	1	✓
3	2	1	1	2	✓
3	2	1	1	3	✓
3	2	1	2	1	✓
3	2	1	2	2	✓
3	2	1	2	3	✓
3	2	1	3	1	✓
3	2	1	3	2	✓
3	2	1	3	3	✓

Implikation prüfen !

(2) $R := \{(1,2), (2,3)\}$

nicht transitiv, da $(1,3) \notin R$

F.31 $M := \{1, 2, 3\}$

Id_M:

$M \setminus M$	1	2	3
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1

F.32 R reflexiv $\Longleftrightarrow$ $(M \times M) \setminus R$ irreflexiv

Symmetrische Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A \neq A^T$$

A nicht symmetrisch

$$A^T := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & \pi \end{pmatrix} = B^T \quad \Rightarrow \quad B \text{ ist symmetrisch}$$

Bsp. symmetrische Relation:

M \ M	1	2	3
1	0	1	0
2	1	1	1
3	0	1	0

F.34 $$(x,x) \in R \implies (x,x) \notin R$$

$$\iff (x,x) \notin R \lor (x,x) \notin R$$

$$\iff (x,x) \notin R$$

F.37 Bew. 3, 4

3 ergibt sich mit Kontraposition aus 4.

Seien $M \neq \emptyset$ und $R \subseteq M \times M$.

4 [z.z.: R reflexiv $\implies$ R nicht irreflexiv]

Es gelte: R reflexiv. Da $M \neq \emptyset$, finden wir ein $x \in M$ mit $(x,x) \in R$. Also ist $(x,x) \in Id_M \cap R \neq \emptyset$. Damit ist R nicht irreflexiv. //