Vorlesung 3

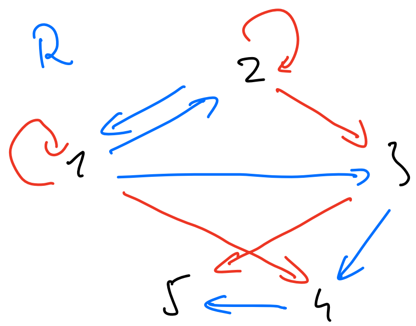
F. 44 $\quad M := \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$R := \{(1,2), (1,3), (2,1), (3,4), (4,5)\}$

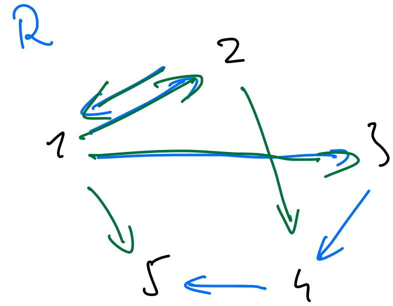
$R^0 = Id_M = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$

$R^1 = R^{1-1} R = R^0 R = Id_M R = R$

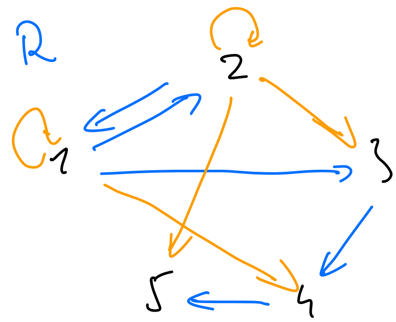
$R^2 = R^1 R = RR = \{(1,1), (2,2), (1,4), (3,5), (2,3)\}$



$R^3 = R^2 R = \{(1,2), (1,3), (1,5), (2,1), (2,4)\}$

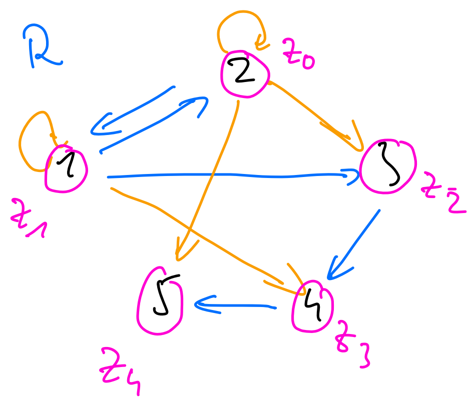


$R^4 = \{(1,1), (2,5), (2,2), (1,4), (2,3)\}$



Bsp. zur Bemerkung:

Warum ist $(2,5) \in R^4$?



Bew. Satz:

① [7.7.: R transitiv $\Longleftrightarrow$ $R = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n$]

„$\Rightarrow$": Es gelte: R ist transitiv

„$\subseteq$": [7.7.: $R \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n$]

Es gilt:

$$R \subseteq R \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} R^n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n .$$ (3)

„$\supseteq$": [z.z.: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n \subseteq R$, d.h. es reicht

z.z.: $\forall n\in\mathbb{N}: R^n \subseteq R$]

(Vollständige Induktion)

I.A.: $n=1$. Es gilt:

$$R^n = R^1 = R \subseteq R.$$

I.S.: Sei $n\in\mathbb{N}$. Es gelte: $R^n \subseteq R$. (I.V.)

[z.z.: $R^{n+1} \subseteq R$]

Es gilt mit Aufgabe vom F.2G A3.:

$$R^{n+1} = R^n R \underset{(I.V.)}{\subseteq} RR \underset{\boxed{R \text{ transitiv}}}{\subseteq} R.$$

„$\Leftarrow$": Es gelte: $R = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n$.

[z.z.: R ist transitiv, d.h.: $RR \subseteq R$]

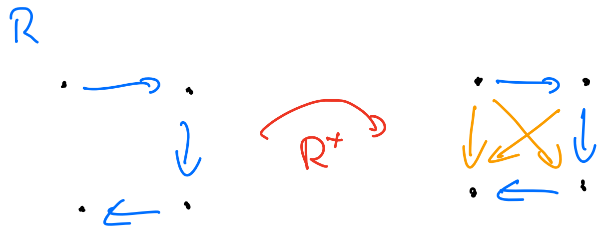
Es gilt:

$$RR = R^1 R = R^2 \subseteq \underbrace{R^2 \cup R^1 \cup \bigcup_{n=3}^{\infty} R^n}_{=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n} \underset{\boxed{\text{Vor.}}}{=} R.$$

//

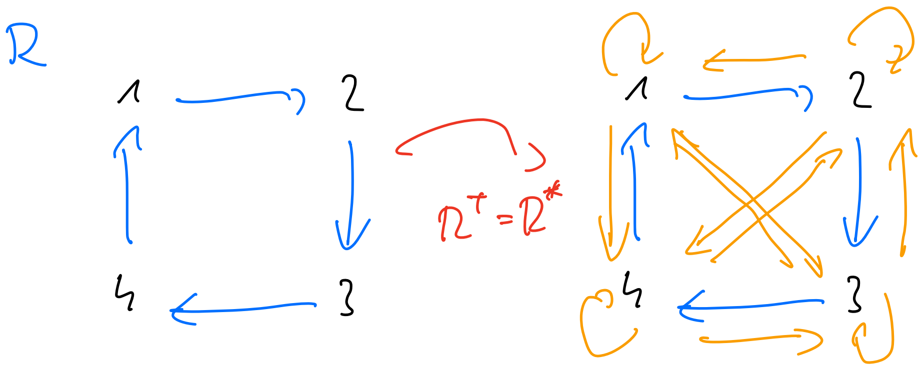
F.45

(1)



(2) $M := \{1, 2, 3, 4\}$

$R := \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)\}$



F.47 Bew. Satz: Erinnerung: $R^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} R^n$

(1) [z.z.: R^* ist transitiv, reflexiv und $R \subseteq R^*$]

R^* transitiv:

[$\forall x, y, z \in M: (x,y) \in R^* \wedge (y,z) \in R^* \Rightarrow (x,z) \in R^*$]

Seien $x, y, z \in M$. Es gilt:

$(x,y) \in R^*$ und $(y,z) \in R^*$.

Nach Vor. ex. $k, l \in \mathbb{N}_0$ mit

$(x,y) \in R^k$ und $(y,z) \in R^l$. Nach

Def. „$\circ$" gilt:

$$(x,z) \in R^k R^l = R^{k+l} \underset{\boxed{k+l \in \mathbb{N}_0}}{\subseteq} R^*.$$

R^* reflexiv: [7.7.: $Id_M \subseteq R^*$]

Es gilt: $Id_M = R^0 \subseteq R^0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} R^n = R^*$.

$R \subseteq R^*$:

Es gilt: $R \subseteq R^1 \cup R^0 \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} R^n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} R^n = R^*$.

② [7.7.: $\forall S \subseteq M \times M$: ($S$ transitiv $\wedge$ S reflexiv $\wedge$ $R \subseteq S$)

$\Longrightarrow$

$R^* \subseteq S$]

Sei $S \subseteq M \times M$. Es gelte:

S ist transitiv, reflexiv und $R \subseteq S$.

(6)

[z.z.: $R^* \subseteq S$, dazu zeige ich zunächst:

$\forall n \in \mathbb{N}_0: R^n \subseteq S^n$]

I.A.: $n=0$. Es gilt:

$$R^n = R^0 = Id_M \subseteq Id_M = S^0 = S^n.$$

I.S.: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Es gelte: $R^n \subseteq S^n$. (I.V.)

[z.z.: $R^{n+1} \subseteq S^{n+1}$]

Es gilt:

$$R^{n+1} = R^n R \underset{\text{(I.V.), Aufgabe}}{\subseteq} S^n R \underset{\text{Aufgabe}}{\subseteq} S^n S = S^{n+1}.$$

Da S transitiv und reflexiv nach Vor. ist, gilt: $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} S^n$.

Also gilt: $R^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} R^n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} S^n = S$. //