In manchen Aufgaben steht eine ID-Angabe der Form “(ID: nnnn)". Das ist nur eine Identifikationsnummer und hat keine weitere Bedeutung.
Hinweis: Die ersten Aufgaben schließen sich auch an die im Aufgabenblatt 0 genannten Videos an. Einige Aufgaben sollten basierend auf Ihrem Vorwissen lösbar sein. (Sie können auch das Dokumente „Grundlagen 1“ im Moodle-Kurs konsultieren.)

Aufgabe 1

Geben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Darstellung an (d.h. Nennung der Mengenelemente, z.B. $\{e_1, e_2, e_3\}$ für eine Menge mit den Elementen e_1, e_2, e_3):

a) $M_1 = \{ \frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N} \text{ } und \text{ } \frac{1}{k} \in \mathbb{N} \}$

b) $M_2 = \{ \frac{1}{3k} \mid k \in \mathbb{Z} \text{ } und \text{ } \frac{2}{k} \in \mathbb{Z} \}$

c) $M_3 = \{ 6k+3 \mid k \in \mathbb{Z} \text{ } und \text{ } -3 \leqslant k \leqslant 3 \}$

Aufgabe 2

Vereinfachen Sie die folgenden Terme (*binomische Formeln* beachten):

a) $\frac{16x^2+24xy+9y^2}{16x+12y} =$

b) $\frac{4a^2-b^2}{8a^2+8ab+2b^2} =$

c) $\frac{3x+y}{18x^3-6x^2y-4xy^2} =$

Aufgabe 3

Vereinfachen Sie die folgenden Terme (*binomische Formeln* beachten):

a) $\frac{xy^2}{x+1} \cdot \frac{2x+2}{y^2} \cdot \frac{16}{2xy} =$

b) $\frac{3b^2}{3y+1} : \frac{6b^2}{12a+4} =$

c) $\frac{35xy^2}{8x-4y} : \frac{70x^2y}{4x-2y} =$

Aufgabe 4

Berechnen Sie die folgenden Terme, wobei Sie auch jeweils angeben, welche Bedingungen an $a, b \in \mathbb{R}$ zu stellen sind.

a) $1 - \frac{1}{1-a\frac{1}{1-\frac{b}{a}}}$

b) $\frac{\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}}$

Aufgabe 5

Gegeben seien die folgenden Ausdrücke ($n,k \in \mathbb{N}$): $a_n = \frac{2^{3-n} \cdot e^{3n}}{5n}$ und $b_k = \frac{(1/k)^{3-k} \cdot (k-1)(k+1)}{6(k^2-1)}$.

Bestimmen Sie:

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

b) $\frac{b_{k+1}}{b_k}$

Aufgabe 6

Beweise per vollständiger Induktion:

(ID: 66) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Aufgabe 7

Bestimme Minimum, Maximum, Supremum und Infimum der folgenden Menge.

(ID: 1266) $G = ([0,10] \setminus \mathbb{N}) \cap \mathbb{Q}$

Aufgabe 8

Bestimme Minimum, Maximum, Supremum und Infimum der folgenden Menge.

(ID: 1268) $I = \left\{ \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n | n \in \mathbb{N} \right\}$

Benutze dabei, dass die Menge

$$M = \{ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n | n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \}$$

das Supremum e^x besitzt und für die Mengenelemente die Beziehung

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Summenzeichen: Das Summenzeichen und den Umgang damit sollten Sie aus der Schule bzw. aus dem Vorkurs kennen.

Aufgabe 9

Fasse die beiden Summen zusammen.

(ID: 187) $\sum_{k=1}^{3}(2k-1)+\sum_{k=0}^{2}(2k+1)$

Aufgabe 10

Schreibe die Summe so um, dass der Index bei k=0 beginnt.

(ID: 183) $\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{(-2)^k}{3^{k+1}}\right)$

Aufgabe 11

Spalte jeweils das erste und letzte Glied ab.

(ID: 178) $\sum_{k=2}^{n}\left(k+\frac{1}{k}\right)$

Aufgabe 12

Fasse folgende Summe mit Hilfe des Summenzeichens zusammen:

(ID: 172) $2+4+6+8+10+12$

Aufgabe 13

Bestimmen Sie die Menge L der reellen Zahlen, die die folgenden Ungleichungen erfüllen:

a) $x-2>2x-1$

b) $\frac{x-1}{2}\geqslant\frac{1-x}{3}$

c) $x^2-7x+12\geqslant 0$

d) $\frac{x+2}{x-5}\leqslant 5$