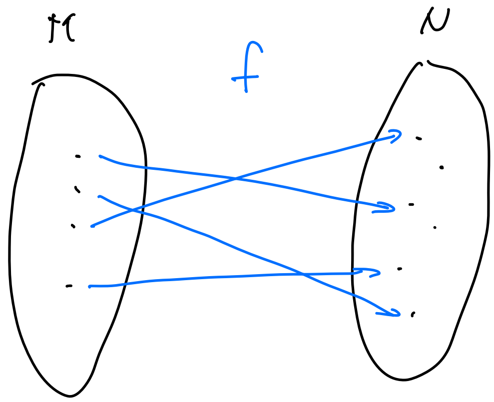
Vorlesung 9

F.132

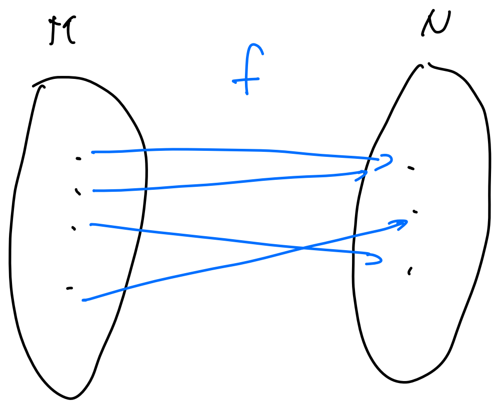
(1)



f ist injektiv

f ist nicht surjektiv

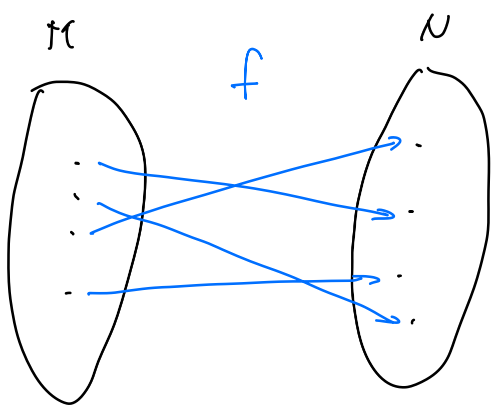
(2)



f ist nicht injektiv

f ist surjektiv

(3)



f ist bijektiv

Sei $f: M \to N$ eine Abb.

f injektiv $:\Longleftrightarrow$ f l.e.

$\Longleftrightarrow \forall \underbrace{(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f}_{f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2} : y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M: \underbrace{f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}_{\Longleftrightarrow\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$

f surjektiv $:\Longleftrightarrow$ f r.t.

$\Longleftrightarrow \forall y \in N\ \exists x \in M: \underbrace{(x, y) \in f}_{\Longleftrightarrow\ f(x) = y}$

$\Longleftrightarrow \forall y \in N\ \exists x \in M: f(x) = y$

$\Longleftrightarrow N \subseteq \mathrm{Bild}(f)$

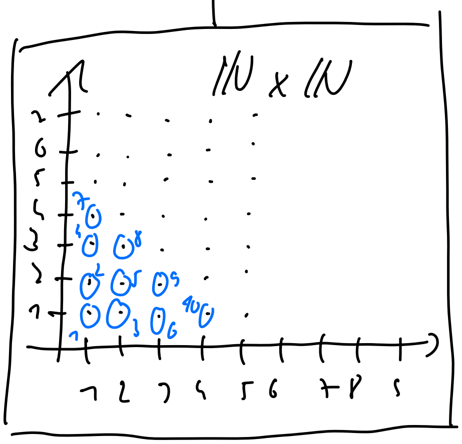
$(=)$

F. 176 $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$, da es eine Bijektion f zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gibt, nämlich:

$$f: \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & -1 \\ 2 & \mapsto & 1 \\ 3 & \mapsto & -2 \\ 4 & \mapsto & 2 \\ & \vdots & \end{array}$$

Es gilt:

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| \neq |\mathbb{R}|$$



$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\hat{=} \{ (p,q) \mid q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z} \}$$

$$= \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$$

Zu $|\mathbb{Q}| \neq |\mathbb{R}|$:

Ann.: $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{R}| \Rightarrow |\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$

$1 \hat{=} r_1 \quad \dots, r_{11}\, r_{12}\, r_{13} \dots$

$2 \hat{=} r_2 \quad \dots, r_{21}\, r_{22}\, r_{23} \dots$

$\vdots$

$\downarrow\ 0 \to 9,\ a \neq 9 \to a+1$

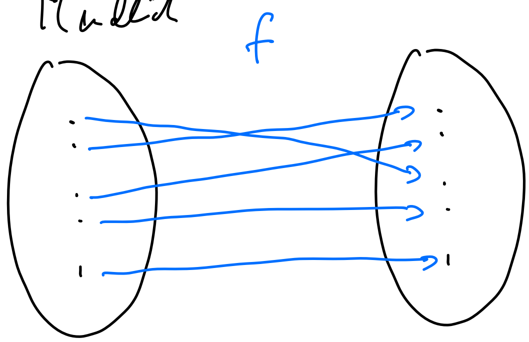
neue Zahl $x \hat{=} \dots, r_{11}+1\ \ r_{22}+1\ \ r_{33}+1 \dots$

$\Rightarrow r_i \neq x$ ↯

F. 137 Bew. Skizze:

[z.z.: M endlich $\Longleftrightarrow$ ($\forall f: M \to M$: f inj. $\Longleftrightarrow$ f surj. $\Longleftrightarrow$ f bij)]

„$\Longrightarrow$": M endlich



„$\Longleftarrow$" Kontraposition:

[z.z.: M unendlich $\Longrightarrow$ $\exists f: M \to M$: f inj. $\wedge$ f nicht surj.]

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n+1$ inj. und nicht surj. //

F. 139

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0,\ n \mapsto n^2$

$g: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n-1$

$g \circ f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit

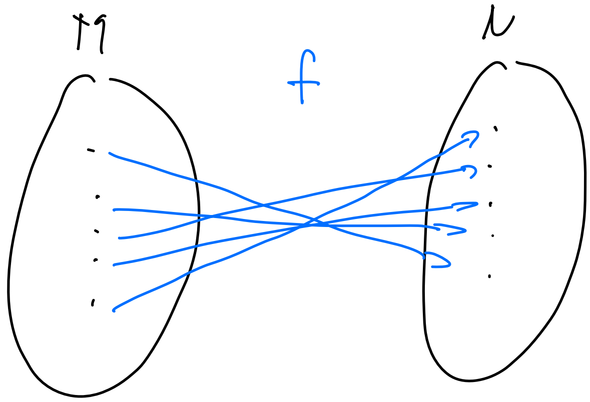
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \left\{ \begin{matrix} g(x^2) \\ f(x) - 1 \end{matrix} \right\} = x^2 - 1 \text{ f.a. } x \in \mathbb{Z}$$

$f \circ g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ mit

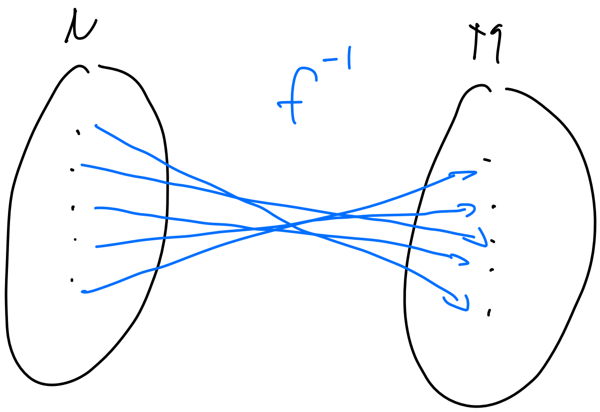
$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = \left\{ \begin{matrix} f(y-1) \\ (g(y))^2 \end{matrix} \right\} = (y-1)^2 \quad \text{f.a. } y \in \mathbb{N}_0$$

__Bem:__ $\quad f \circ g \neq g \circ f$

__F. 1.4.1__



f bij.



f^{-1} Abb.

F.141 $\quad f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0,\ n \mapsto n-1$ ist bij.

$f^{-1}: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N},\ m \mapsto m+1$

$$(f^{-1} \circ f)(n) = f^{-1}(f(n)) = f^{-1}(n-1) = (n-1)+1 = n = Id_{\mathbb{N}}(n)$$

f.a. $n \in \mathbb{N}$ und

$$(f \circ f^{-1})(m) = f(f^{-1}(m)) = f(m+1) = (m+1)-1 = m = Id_{\mathbb{N}_0}(m)$$

f.a. $m \in \mathbb{N}_0$.

Bew. Satz 2

Übung. //

F.142 $\quad f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ n \mapsto \frac{n}{2}$ ist inj.

$f^{-1} = ?$: $\quad y = f(x) = \frac{x}{2}$

$\iff x = 2y$

Setze: $g: \text{Bild}(f) \to \mathbb{N},\ y \mapsto 2y$

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g\left(\tfrac{n}{2}\right) = 2 \cdot \tfrac{n}{2} = n = Id_{\mathbb{N}}(n) \quad \text{f.a. } n \in \mathbb{N}$$

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(2y) = \frac{2y}{2} = y = Id_{\text{Bild}(f)}(y)$$

f.a. $y \in \text{Bild}(f)$.

$\underset{\text{Satz F.142}}{\Longrightarrow} g = f^{-1}$