Vorlesung 4

1

F.54

$$\leq \; \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$< \; \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

	$\leq$	$<$	
reflexiv	✓	–	
irreflexiv	–	✓	folgt aus Asymmetrie
symmetrisch	–	–	
asymmetrisch	–	✓	
antisymmetrisch	✓	✓	folgt aus Asymmetrie
transitiv	✓	✓	

F.57 (2) $X := \{1,2\}$

$$M := \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, X\}$$

$\emptyset \subseteq \emptyset$ $\qquad \{1\} \subseteq \{1\}$

$\emptyset \subseteq \{1\}$ $\qquad \{2\} \subseteq \{2\}$

$\emptyset \subseteq \{2\}$ $\qquad \{1\} \subseteq X$

$\emptyset \subseteq X$ $\qquad \{2\} \subseteq X$

$\qquad X \subseteq X$

$$\subseteq \; = \{(\emptyset,\emptyset), (\emptyset,\{1\}), \ldots, (X,X)\}$$

3 $\quad 2 \mid 4$, da $2 \cdot \underbrace{2}_{c} = 4$

$7 \mid 21$, da $7 \cdot \underbrace{3}_{c} = 21$

$8 \nmid 21$, da $8 \cdot c \neq 21 \quad | : 8$

$\iff c \neq \frac{21}{8} \notin \mathbb{N}_0$ f.a. $c \in \mathbb{N}_0$

[z.z.: $\mid$ ist OR, d.h.:

(i) $\forall a \in \mathbb{N}_0 : a \mid a$ (reflexiv)

(ii) $\forall a, b \in \mathbb{N}_0 : a \mid b \wedge b \mid a \Rightarrow a = b$ (antisymmetrisch)

(iii) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0 : a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$ (transitiv)]

(i) Sei $a \in \mathbb{N}_0$.

[z.z.: $a \mid a$, d.h.: $\exists c \in \mathbb{N}_0 : a \cdot c = a$]

Setze $c := 1 \in \mathbb{N}_0$. Es gilt:

$a \cdot c = a \cdot 1 = a$.

(ii) Seien $a, b \in \mathbb{N}_0$. Es gelte: $a \mid b$ und $b \mid a$.

1. Fall: $a = 0$ und $b = 0$.

Offensichtlich gilt: $a = 0 = b$.

2. Fall: $a \neq 0$ oder $b \neq 0$.

O.B.d.A. (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) sei $a \neq 0$.

Nach Vor. ex. $c_1, c_2 \in \mathbb{N}_0$ mit

(I) $a \cdot c_1 = b$ und (II) $b \cdot c_2 = a$.

Einsetzen der Gl. (I) in (II) liefert:

$a \cdot c_1 \cdot c_2 = a$. Da $a \neq 0$ ist, gilt:

$c_1 \cdot c_2 = 1$. Da $c_1, c_2 \in \mathbb{N}_0$ sind,

müssen $c_1 = 1 = c_2$ sein

Also ergibt sich aus (I):

$b = a \cdot c_1 = a \cdot 1 = a$.

(iii) Seien $a, b, c \in \mathbb{N}_0$. Es gelte: $a | b$ und $b | c$.

Nach Vor. ex. $c_1, c_2 \in \mathbb{N}_0$ mit

(I) $a \cdot c_1 = b$ und (II) $b \cdot c_2 = c$

[z.z.: $a | c$, d.h.: $\exists c_3 \in \mathbb{N}_0 : a \cdot c_3 = c$]

Einsetzen der Gl. (I) in (II) liefert:

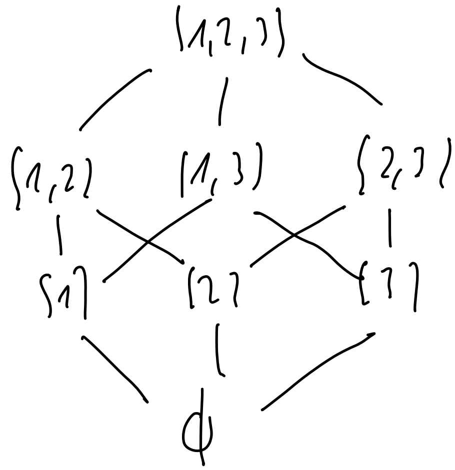
(III) $a \cdot c_1 \cdot c_2 = c$.

Setze $c_3 := c_1 \cdot c_2 \in \mathbb{N}_0$, da $c_1, c_2 \in \mathbb{N}_0$.

Es gilt mit (III):

$$a \cdot c_3 = a \cdot c_1 \cdot c_2 = c. \quad //$$

F.61(6)



F.65 Bew. Satz:

(1) [z.z.: $(\sqsubseteq^N)^* \subseteq \sqsubseteq$]

Nach Def. „$\sqsubseteq^N$" ist $\sqsubseteq^N \subseteq \sqsubseteq$.

Da $\sqsubseteq$ transitiv und reflexiv ist, gilt mit Satz Teil 2 von F.47:

$$(\sqsubseteq^N)^* \subseteq \sqsubseteq.$$

② Sei M endlich.

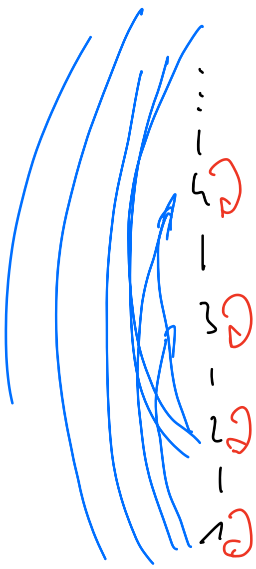
[Z.z.: $(\sqsubseteq^N)^* \subseteq \sqsubseteq$]

Folgt mit ①.

[Z.z.: $\sqsubseteq \subseteq (\sqsubseteq^N)^*$]

Später nach F.77.

F.66 $(\mathbb{N}, \leq^N)$



$$\leq^N = \{(n,n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

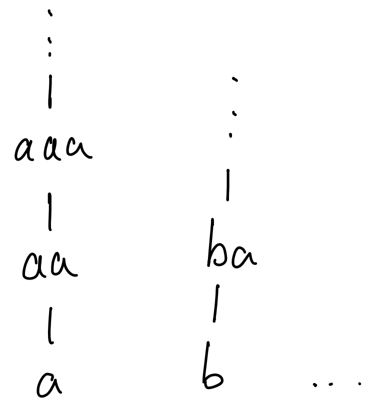
$$(\leq^N)^* = \leq$$

F.67/68 Gegenbsp. für $\sqsubseteq \subseteq (\sqsubseteq^N)^*$

F.67 $\leq_{\mathbb{R}}^N = \emptyset$

$$(\leq_{\mathbb{R}}^N)^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} (\leq_{\mathbb{R}}^N)^n = Id_{\mathbb{R}} \neq \leq_{\mathbb{R}}$$

F. 68



$a \sqsubseteq ab$

lässt sich nicht

aus $\sqsubseteq^N$ rekonstruieren