数学 几何学 高等数学 解析几何

曲率公式是怎么推导的?

東雲正樹
数学等 2 个话题下的优秀答主

总之微积分的初学者会看到微分运算的用途还是很大的, 关于微积分你可以就按照我下面那些感性的理解先用着, 以后会学到严谨的极限定义的. 然而实际上再往后的生活中好像也没谁会去那么强调极限定义了, 知道是那么回事就行了.

> 下面的推导中我应该没有跳过任何哪怕是运算上的步骤, 如果你觉得这个内容仍然有一定的挑战性也是正常的, 毕竟我中学的时候应该完全看不懂这些; 如果你觉得这个推导过于细致了也是正常的, 因为这确实只是一些完全没有思维量的简单玩意儿.

对于一条曲线我们可以研究其曲率, 也即弯曲程度. 直观来想, 以一条连续光滑曲线上无限接近的两个点为端点的一段弧总应该可以看作是某圆上的一段弧. **这个圆的半径就被定义为曲线在这一点的曲率半径. 而曲率则被定义为曲率半径的倒数.**

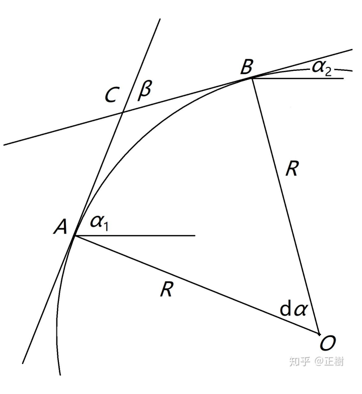
> 至于说为何总可以看作是某圆上的一段弧, 可以简单的认为是曲率半径在连续光滑曲线上不会发生突变, 所以在某点的无穷小领域内曲率半径可以看作是一个常量, 事实上这就是光滑的含义.

如何求曲率半径呢? 我们可以回想第一次接触弧度制时是怎么定义弧度的. 弧度是圆弧长与该圆半径的比值对吧? 既 $\alpha=\frac{S}{R}$, 显然当 $S=2\pi R$ 既整个圆周长时弧度为 2π.

那么显然曲率半径很自然的可以定义为 $R=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha}$, 既无穷小的一段弧长与其相对应弧度的比值.

知道这些我们就可以计算出任意一条连续光滑曲线 $y=y(x)$ 在任意一点的曲率半径了.

为了能使用最简单的运算步骤, 我们要先研究一个几何关系:



如图, A,B 既光滑曲线上无限逼近的两点, 当然我们这里使用了夸张的表现手法. 其它量如图标示.

显然在四边形 $ACBO$ 中有俩直角, 所以 $\mathrm{d}\alpha$ 则与其对角互补. 所以其对角的补角 $\beta=\mathrm{d}\alpha$.

这下子就好办了, 一下子我们就有办法求出 $R=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha}$ 中的 $\mathrm{d}\alpha$ 了.

求 dα :

怎么求呢? 还记得曲线的斜率是啥吗? 斜率就是其切线在这一点与水平线夹角的正切值, 那么图上曲线在 A,B 两点的斜率自然就分别是 $\tan\alpha_1$ 与 $\tan\alpha_2$ 了. 而我们想要的正是这俩倾斜角的差值即 $\beta=\alpha_2-\alpha_1=\mathrm{d}\alpha$ [1].

那太简单了, 已知 $\tan\alpha=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 我们对其求微分即得:

$$\mathrm{d}\tan\alpha=\frac{\mathrm{d}\tan\alpha}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}\alpha=\sec^2\alpha\mathrm{d}\alpha=\left(1+\tan^2\alpha\right)\mathrm{d}\alpha=\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}\alpha.$$

这样一来就有: $\mathrm{d}\alpha=\frac{\mathrm{d}\tan\alpha}{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=\frac{\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}.$

求 dS :

这个没什么说的, 就是对弧长进行微分, 被称之为弧微分. 硬要说一下的话就是用线段 AB 来代替弧 $\widehat{AB}$, 因为当这俩点无限趋近的时候, 它们基本上就没啥区别了, 也就是取一阶近似或者说线性近似的意思.

设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, 线段 AB 的长度很好算的, 勾股定理罢了:

$$\begin{aligned}|AB|=\mathrm{d}S&=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\\&=(x_2-x_1)\sqrt{1+\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x\end{aligned}.$$

将 dα 与 dS 代入公式:

> 加一个绝对值, 因为呃... 反正曲率半径就是被定义是一个正数, 暂且没啥必要牵扯到负数.

$$R=\left|\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha}\right|=\frac{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{1}{dx}\right|}=\frac{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|}=\frac{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|}.$$

而曲率就是曲率半径求一个倒数, 即 $\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}$.

参考

1. ^ 正负号不影响啥

TravorLZH
数学话题下的优秀答主

曲率被定义为 $\kappa\triangleq\frac{1}{R}$ ，其中R为曲率半径，其中曲率半径被定义为：

$$R\triangleq\lim_{\Delta\theta\to0}\left|\frac{\Delta\ell}{\Delta\theta}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\theta}\right|$$

现在考虑二维情况，即 $\vec{r}(t)\triangleq x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}$ ，则有：

$$\mathrm{d}\ell=\|\mathrm{d}r\|=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

根据 $\tan\theta=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 有 $\theta=\arctan\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\arctan\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)$ ，于是：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\theta&=\frac{1}{1+[y'(t)/x'(t)]^2}\cdot\frac{y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t)}{[x'(t)']^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

为了方便后续的书写，定义 $\dot{x}\triangleq x'(t),\dot{y}\triangleq y'(t)$ 则有：

$$R=\left|\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}\right|$$

再根据曲率的定义，可得：

$$\kappa=\left|\frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}\right|$$

然而以上的公式仅仅适用于二维情况。因此我们需要找到一个更通用的曲率公式。现在设 $\boldsymbol{r}(t)$ 为某参数曲线，定义其单位切向量 $\boldsymbol{T}\triangleq\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\|\dot{\boldsymbol{r}}\|}$ ，则根据几何直觉，有 $\|\Delta\boldsymbol{T}\|=\left|2\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)\right|$

代回曲率半径的定义式，得：

$$\begin{aligned}R&\triangleq\lim_{\Delta\theta\to0}\left|\frac{\Delta\ell}{\Delta\theta}\right|\\&=\lim_{\Delta\theta\to0}\frac{\|\Delta\boldsymbol{r}\|}{|\Delta\theta|}\cdot\frac{\|\Delta\boldsymbol{T}\|}{\|\Delta\boldsymbol{T}\|}\\&=\lim_{\Delta\theta\to0}\left\|\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta\boldsymbol{T}}\right\|\underbrace{\lim_{\Delta\theta\to0}\left|\frac{\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{\frac{\Delta\theta}{2}}\right|}_{1}\\&=\left\|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}\right\|\end{aligned}$$

因此我们也得到了曲率的另一种定义 $\kappa=\left\|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}\right\|=\left\|\frac{\dot{\boldsymbol{T}}}{\dot{\boldsymbol{r}}}\right\|$ 。有了这个定义，我们就可以开始用线性代数的技巧来得到更具体的曲率公式：

根据 $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}=\|\boldsymbol{T}\|^2=1$ ，有 $2\boldsymbol{T}\cdot\dot{\boldsymbol{T}}=0$ 。这意味着单位切向量和它的导向量正交。因此两者的叉积为 $\|\boldsymbol{T}\times\dot{\boldsymbol{T}}\|=\|\dot{\boldsymbol{T}}\|$ 。根据 $\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{T}\|\dot{\boldsymbol{r}}\|$ 有 $\ddot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{T}}\|\dot{\boldsymbol{r}}\|+\boldsymbol{T}\|\ddot{\boldsymbol{r}}\|$ ，因此：

$$\begin{aligned}\|\dot{\boldsymbol{T}}\|&=\frac{\|\boldsymbol{T}\times(\boldsymbol{T}\|\ddot{\boldsymbol{r}}\|+\dot{\boldsymbol{T}}\|\dot{\boldsymbol{r}}\|)\|}{\|\dot{\boldsymbol{r}}\|}\\&=\frac{\|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\|}{\|\dot{\boldsymbol{r}}\|^2}\end{aligned}$$

代入回曲率的定义式，得 $\kappa=\frac{\|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\|}{\|\dot{\boldsymbol{r}}\|^3}$

尾花夏樹
夢遊病者は此岸にて

Axiomatically, a parameterized smooth curve is delineated by an arc coordinate ，“s”of “t” as follows:

$\mathbf{Definition\quad I}$: $s(t)=:\int_{t_0}^{t}\left|\vec{r}'(t)\right|dt$, in which $\vec{r}(t)$ acts as a ritually defined position vector of any specific point on the curve, naturally t_0 is a constant for gauging the arc coordinate.

Then $s'(t)=\left|\vec{r}'(t)\right|$

The pertinent propositions about curvature of interest can be viscerally obtained via vector calculus, which I think is the best way to give a curvature at any given point non-singular and of course, not reposing on the boundaris.

$\mathbf{Definition\quad II}$: The curvature $\kappa(t)=:\left|\frac{d\vec{\tau}(t)}{ds}\right|$, in which $\vec{\tau}(t)$ represents the unit vector tangent to the curve at the point t.

It happens to come in line with the “ubiquitous” definitions in general textbooks as $\left|\frac{d\theta}{ds}\right|$.

Now just sit and watch some slick gimmicks manipulating Def 1 and 2.

Obviously, $\kappa(t)=\frac{|d\vec{\tau}(t)|}{ds}=\frac{\frac{|d\vec{\tau}(t)|}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$, in which $\frac{ds}{dt}=s'(t)=\left|\vec{r}'(t)\right|$, and $\vec{r}'(t)=\left|\vec{r}'(t)\right|\vec{\tau}(t)$ holds for nothing seductive.

Now we can easily derive something useful.

$\mathbf{Lemma\quad I}$: We have $\vec{\tau}(t)\cdot\vec{\tau}'(t)=0$.

$\mathbf{Proof}$: We have $\vec{\tau}(t)\cdot\vec{\tau}(t)=|\vec{\tau}(t)|^2=1$, as $\vec{\tau}(t)$ is a unit vector.

Then we take the derivative from both sides, there exists $2\vec{\tau}(t)\cdot\vec{\tau}'(t)=0$.

Lemma 1 predicates $\vec{\tau}(t)$ is perpendicular to $\vec{\tau}'(t)$.

$\mathbf{Lemma\ II\ \&Proof}$: We can obtain $\vec{r}''(t)=\frac{d}{dt}\left[\left|\vec{r}'(t)\right|\vec{\tau}(t)\right]=\frac{d\left|\vec{r}'(t)\right|}{dt}\vec{\tau}(t)+\left|\vec{r}'(t)\right|\vec{\tau}'(t)$, now take the cross product using the vector $\vec{r}'(t)$ from both sides , we have $\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)=\left|\vec{r}'(t)\right|^2\vec{\tau}(t)\times\vec{\tau}'(t)$,

now take the magnitude from both sides and note that the unit vector $\vec{\tau}(t)$ is perpendicular to $\vec{\tau}'(t)$, obtaining a compact gadget, $\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right|=\left|\vec{r}'(t)\right|^2\left|\frac{d\vec{\tau}(t)}{dt}\right|$.

Now let's flit back to the original problem. We shall instantaneously give

$\mathbf{Proposition\ \&Proof}$: $\kappa(t)=\frac{|d\vec{\tau}(t)|}{ds}=\frac{\frac{|d\vec{\tau}(t)|}{dt}}{\frac{ds}{dt}}=\frac{\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right|}{\left|\vec{r}'(t)\right|^3}$,

which is **exactly** what we are seeking for.

From ***Prop*** we can derive all forms of curvature from a hodgepodge of cumbersome derivation methods.

Tentatively, for simplicity I will show how some “domestic” conclusions stand using some results descended from ***Prop***, and show you the impeccability and potency of the method.

We single out x for parameterizing the curve $y=f(x)$

Here exists $\vec{r}(x)=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{r}'(x)=\begin{pmatrix}1\\y'\end{pmatrix}$, $\vec{r}''(x)=\begin{pmatrix}0\\y''\end{pmatrix}$

plug them all in ***Prop***, we have

$$\left|\begin{pmatrix}1\\y'\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\y''\end{pmatrix}\right|=|y''|\ ,\ \left|\vec{r}'(x)\right|^3=\left(\sqrt{1+y'^2}\right)^3$$

yielding $\kappa(x)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\vec{r}=\vec{r}(\theta)=\begin{pmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{pmatrix}\ ,\ \vec{r}'(\theta)=\begin{pmatrix}r'\cos\theta-r\sin\theta\\r'\sin\theta+r\cos\theta\end{pmatrix}\ ,$$
$$\vec{r}''(\theta)=\begin{pmatrix}r''\cos\theta-2r'\sin\theta-r\cos\theta\\r''\sin\theta+2r'\cos\theta-r\sin\theta\end{pmatrix}\ .$$

$$\left|\begin{pmatrix}r'\cos\theta-r\sin\theta\\r'\sin\theta+r\cos\theta\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}r''\cos\theta-2r'\sin\theta-r\cos\theta\\r''\sin\theta+2r'\cos\theta-r\sin\theta\end{pmatrix}\right|=\left|\vec{r}'(\theta)\times\vec{r}''(\theta)\right|=\left|r^2+2r'^2-rr''\right|$$

$$\left|\vec{r}'(\theta)\right|^3=\left(\sqrt{(r'\cos\theta-r\sin\theta)^2+(r'\sin\theta+r\cos\theta)^2}\right)^3=\left(r^2+r'^2\right)^{\frac{3}{2}}\ ,$$

yielding $\kappa(\theta)=\frac{\left|r^2+2r'^2-rr''\right|}{\left(r^2+r'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.