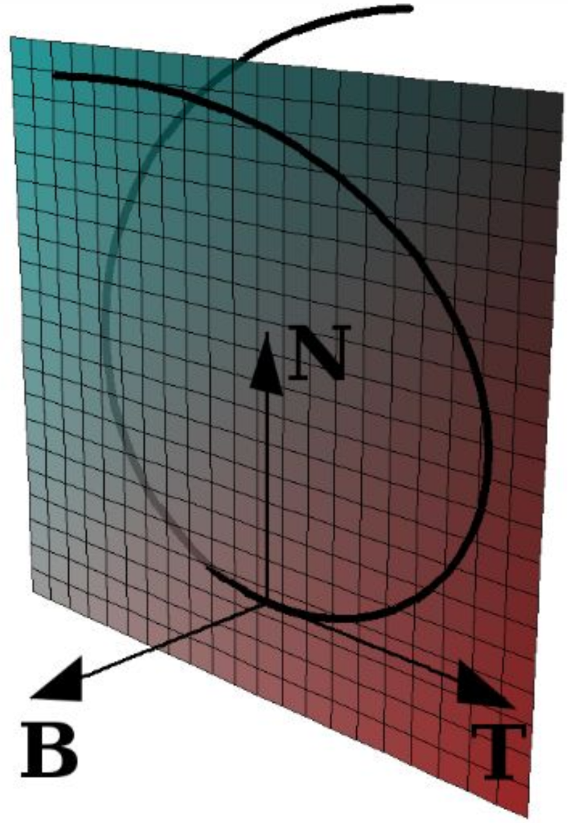


什么是曲率？什么又是挠率？

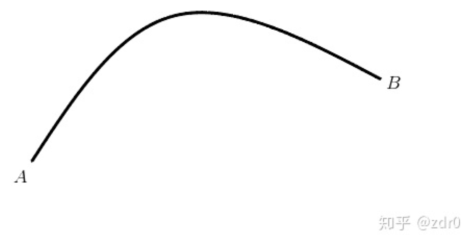
zdr0
数学话题下的优秀答主

> 大家好！今天是假期的第一天，总算有时间可以写一篇文章了。假期长达三个多月，但有将近两个月的时间都在考试，所以之后还是没啥时间写文章。最近想在youtube弄一个频道，记录自己的自习过程，后期欢迎大家来观摩啊哈哈哈～

> 本文只讨论曲线的曲率和挠率。

我们先从曲率说起……

观察如下图所示的一条曲线 AB ：



一条曲线。图片来源：自己画的。

不要小看了这样一条简单的曲线，里面蕴含着大学问。比如我们想知道曲线 AB 上任一点处的弯曲程度怎么办呢？这时就需要一个十分重要的概念——**曲率**了。下面我们来看一看维基百科上是如何介绍曲率的：

> 在数学中，**曲率**（curvature）是描述几何体弯曲程度的量，例如曲面偏离平面的程度，或者曲线偏离直线的程度。在不同的几何学领域中，曲率的具体定义不完全相同。曲率可分为外在曲率和内蕴曲率，二者有重要的区别。前者的定义需要把几何体嵌入到欧式空间中，后者则是直接定义在黎曼流形上。
> 曲线的曲率通常是标量，但也可以定义曲率向量。对于更复杂的对象（例如曲面，或者一般的n维空间），曲率要用更复杂的线性代数来描述，例如一般的黎曼曲率张量。

言简意赅的简介。本人有幸自学过一点微分几何（不过已经忘得差不多了，哈哈），才能来写这篇文章。毕竟非科班出身，如果表述不恰当的地方还请各位多多斧正！

曲率包含的知识点很多，我就尽我所能讲的明白一点。

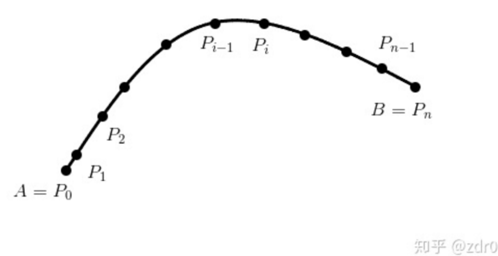
1. **弧长参数** s

弧长参数又称为**自然参数**，该参数的引入是意义非凡的。一个最为明显的意义在于，弧长作为参数就是将参数赋予了几何意义，这样在几何意义上，就可以将参数和曲线本身统一起来。那么现在就有一个问题了，**为什么弧长可以作为参数？**说明这个问题之前我们需要先知道如何求一条曲线的弧长。

设： C^1 类曲线的参数方程为：

$$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))^{\mathrm{T}},\quad t\in[a,b] \qquad (1)$$

> **注：** C^1 类曲线是指光滑曲线。



曲线的划分。图片来源：自己画的。

我们按照上面的方式划分为 n 个小段，之后我们用直线将相邻的两个点连结起来，最后会得到一

条折线，这条折线的长度记为：

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i} \tag{2}$$

取 $\lambda_n=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\{t_i-t_{i-1}\}$ ，并使 $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda_n=0$,此时， σ_n 趋于一个与分点无关的确定的极限 σ ，这个极限我们就定义为曲线 P_0P_n 的长度，即：

$$\lim_{n\to+\infty}\sigma_n=\int_{t=a}^{t=b}|\vec{r}'(t)|\,\mathrm{d}t:=\sigma \tag{3}$$

由于篇幅原因（主要是懒），证明这里我就不再写了。

细心的同学一定发现了，这里的弧长是一个常数呀，这可怎么作为参数呢？为了解决这个问题，我们不妨通过定义一个变上限积分来表示曲线从起点 $\vec{r}(a)$ 到曲线上任一点 $\vec{r}(t)$ 的弧长，即：

$$\sigma(t):=\int_a^t|\vec{r}'(t)|\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

这样我们就会发现，弧长变成了一个变化的量，而且（第三种情况不会存在，只是为了分类完全）：

$$\sigma(t)\begin{cases}>0, & t>a\\ =0, & t=a\\ <0, & t<a\end{cases} \tag{5}$$

这样我们就可以定义一个新的函数了：

$$s(t):=\begin{cases}\sigma(t), & t>a\\ 0, & t=a\\ -\sigma(t), & t<a\end{cases} \tag{6}$$

由于参数 t 的取值和 $\sigma(t)$ 肯定一直是非负值（因为其表示的是弧长），**由于 $s(t)$ 具有一般参数的基本特征（即可正可负），所以， s 可以作为曲线的参数，这就是 s 可以作为参数的原因。** 所以，所得到的 $s(t)$ 的值可能为负值， $s(t)$ 可以等价定义为：

$$s(t):=\begin{cases}\int_a^t|\vec{r}'(t)|\,\mathrm{d}t, & t\geqslant a\\ \int_t^a|\vec{r}'(t)|\,\mathrm{d}t, & t<a\end{cases} \tag{7}$$

所以，易知：

$$s'(t)=|\vec{r}'(t)|>0 \tag{8}$$

> 注：我们只考虑 $\vec{r}'(t)\neq 0$ ，即曲线的正则点。若 $\vec{r}'(t)\equiv 0$ 则说明 $\vec{r}(t)$ 是一个常矢量，即空间的中的一点，此时曲线收缩为这一点。

式 (8) 说明了 $s(t)$ 是关于 t 的严格单调递增函数，所以， $s(t)$ 具有反函数，并将反函数设为 $t:=t(s)$ ，将其带入到曲线方程中可以得到以 s 为参数的参数方程：

$$\vec{r}=\vec{r}(s) \tag{9}$$

有式 (8) 我们可以得到：

$$\mathrm{d}s=|\vec{r}'(t)|\,\mathrm{d}t \tag{10}$$

即：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s &= |\vec{r}'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= |\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}|\,\mathrm{d}t \\
&= |\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}|\,\mathrm{d}t \\
&= |\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}|\,\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{11}
$$

即：

$$
|\vec{r}'(s)| = |\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}| = 1 \tag{12}
$$

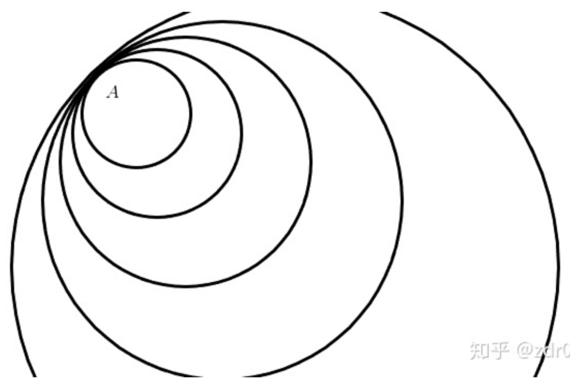
也就是说，引入了自然参数之后，曲线的切向量 $\vec{r}(s)$ 是单位向量。

> 注：以 t 为参数的曲线的切向量的模为 $|\vec{r}'(t)|$ 在不同的点处的值一般是不一样的，但是，引入了自然参数之后以 s 为参数的曲线的切向量的模 $|\vec{r}(s)|$ 在任一点处的值都是 1 。

为了区别 t 参数和自然参数 s ，我们记曲线关于自然参数的微商为：

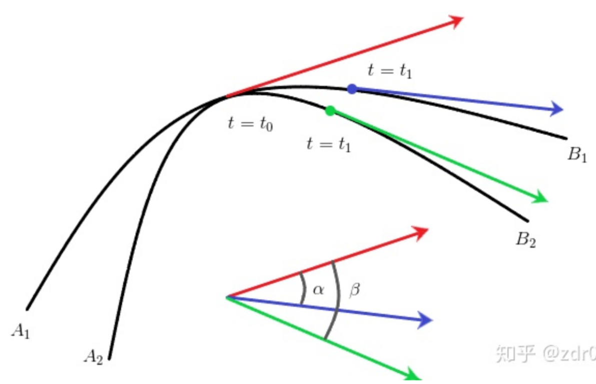
$$
\dot{\vec{r}} := \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}, \quad \ddot{\vec{r}} := \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}s^2} \tag{13}
$$

2. **空间曲线的曲率**



半径不同的圆的弯曲程度的比较。图片来源：自己画的。

我们从上图中可已看出，在 A 点相切的半径不同的圆的弯曲程度不同，且半径越小，弯曲程度越大（即半径越小曲率越大），曲率可以精确的刻画曲线上任意一点的弯曲程度。



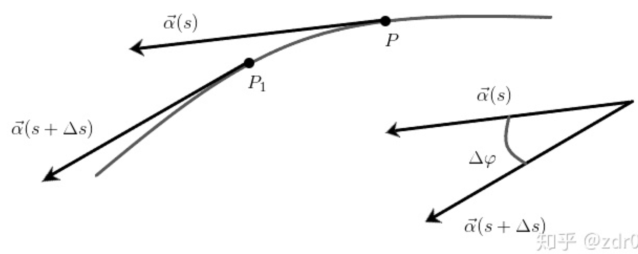
弯曲程度不同的曲线的切向量的扭转速度。图片来源：自己画的。

从上图中我们可以看出，曲线 A_2B_2 的弯曲程度要大于曲线 A_1B_1 的弯曲程度，所以在参数 t 由 t_0 变到 t_1 的时候，曲线 A_2B_2 在点 t_1 处的切向量相对于在 t_0 处的切向量的方向的变化速度相较于曲线 A_1B_1 在点 t_1 处的切向量相对于在 t_0 处的切向量的方向的变化速度要快（即 $\beta > \alpha$ ）。这说明了曲线的弯曲程度越大，从点到点变动时，其切向量的方向改变的越快。**所以，作为曲线在已知一曲线段 PQ 的平均弯曲程度可取为曲线在 P, Q 间切向量关于弧长的平均旋转角。**

设空间中 C^3 类曲线的方程为：

$$\vec{r} = \vec{r}(z) \tag{14}$$

该曲线上一点 P ，设其自然参数为 s ，另一邻近点 P_1 ,其自然参数为 $s + \Delta s$ 。在 P, P_1 两点各做曲线的切向量 $\vec{\alpha}(s), \vec{\alpha}(s + \Delta s)$ ，并设两个切向量之间的夹角为 $\Delta\varphi$ ，如下图所示：



曲率计算图。图片来源：自己画的。

我们可以利用空间曲线在点 P 处的切向量对弧长的旋转速度来定义曲线在点 P 的曲率。

> 如何通俗的理解这个定义呢？可以想象你在开车时路过一个弯道，当你通过弯道时，方向盘打得越死，就说明这个弯道越急，即这个弯道的曲率越大。

Definition 2.1 :

空间曲线在 P 点的**曲率**为：

$$\kappa(s) := \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right| \tag{15}$$

其中， Δs 是点 P, P_1 之间的弧长。所以从定义我们可以看出，曲率的几何意义是**曲线的切向量对弧长的旋转速度。**当曲线在一点处的弯曲程度越大，则切向量对弧长的旋转速度就越大。但我们如何理解这里的对弧长的旋转速度呢？为了理解这个定义，我们现在需要回到定义自然参数之前。

Theorem 2.1 :

单位长度的空间曲线 $\vec{r}(t)$ 关于参数 t 的旋转速度等于其导数的模 $|\vec{r}'(t)|$ 。

也就是说：

$$\left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right| = |\vec{r}'(t)| \tag{17}$$

而我们由方程 (12) 知道， $|\vec{r}(s)| = 1$ ，说明 $\vec{r}(s) := \vec{\alpha}$ 是一个单位长度的空间曲线，所以，我们要将上面的 **Theorem 2.1** 里面参数修改一下，改为自然参数，所以：

$$|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}| = |\dot{\vec{\alpha}}| = |\ddot{\vec{r}}(s)| \tag{18}$$

所以，将式 (18) 与式 (15) 进行比较得到空间曲线的曲率表达式为：

$$\boxed{\kappa(s) = \dot{\vec{\alpha}} = |\ddot{\vec{r}}(s)|} \tag{19}$$

其中 $\vec{\alpha}$ 为空间曲线上任一点的**单位切向量**。 $\vec{\alpha}$ 为 $Frenet$ 标架中的三个量之一，剩下的两个量我们会在后面介绍。

当然，我们也可以将自然参数换回 t 参数，为了得到 t 参数下的曲率表达式。我们不妨来推导一下：

设： $\vec{r} = \vec{r}(t)$,则有：

$$\vec{r}'(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}''(t) &= (\dot{\vec{r}}(s))' \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dot{\vec{r}}(s) \cdot \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \\ &= \frac{\mathrm{d}\dot{\vec{r}}(s)}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dot{\vec{r}}(s) \cdot \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \\ &= \ddot{\vec{r}}(s)(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t})^2 + \dot{\vec{r}}(s) \cdot \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \end{aligned} \tag{21}$$

所以：

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} \cdot (\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t})^3 \tag{22}$$

即：

$$|\vec{r}' \times \vec{r}''| = |\dot{\vec{r}}| \cdot |\ddot{\vec{r}}| \cdot (\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t})^3 \cdot \sin\theta \tag{23}$$

在式 (23) 中：

$$|\dot{\vec{r}}| = 1, \quad \dot{\vec{r}} \perp \ddot{\vec{r}}, \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = |\vec{r}'| \tag{24}$$

> 注： $|\dot{\vec{r}}| = 1$ 有式 (12) 可以知道；而 $\dot{\vec{r}} \perp \ddot{\vec{r}}$ 是因为曲线是可求长的且 $\theta = \frac{\pi}{2}$ ；
> $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = |\vec{r}'|$ 是因为在 $\mathrm{d}t$ 充分小的前提下， $|\mathrm{d}s| = |\mathrm{d}\vec{r}|$ 。

则联立式 $(19), (23), (24)$ 可得：

$$|\vec{r}' \times \vec{r}''| = \kappa \cdot |\vec{r}'|^3 \tag{25}$$

所以，得到 κ 的 t 参数表达式为：

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}} \tag{26}$$

对于空间中的 C^3 类曲线，我们可以设其方程为： $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^{\mathrm{T}}$,从而，利用式 (26) 可以得到：

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{(z''(t)y'(t) - y''(t)z'(t))^2 + (x''(t)z'(t) - z''(t)x'(t))^2 + (y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t))^2}}{{}^{3}} \tag{27}$$

$$(x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t))^{\frac{3}{2}}$$

而对于平面曲线，我们可以设其方程为：$\vec{r}(t)=(x(t),y(t))^{\mathrm{T}}$,从而，利用式 (26) 可以得到：

$$\boxed{\kappa(t)=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{(x'^2(t)+y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}} \tag{28}$$

对于一元函数 $y=f(x)$ 的曲率我们也有如下公式：

$$\boxed{\kappa=\frac{|f''(x)|}{(1+f'^2(x))^{\frac{3}{2}}}} \tag{29}$$

我们不妨来计算一下平面圆的曲率：

Example 2.1 :

设一半径为 R 圆的参数方程为：$r(t)=(R\cos(t),R\sin(t))^{\mathrm{T}}$,试求其上任一点的曲率大小。

Solution :

由圆的参数方程可知：

$$x(t)=R\cos(t)\Rightarrow x'(t)=-R\sin(t),\quad x''(t)=-R\cos(t) \tag{30}$$

$$y(t)=R\sin(t)\Rightarrow y'(t)=R\cos(t),\quad y''(t)=-R\sin(t) \tag{31}$$

联立方程 $(28),(29),(30)$ 可得：

$$\kappa(t)=\frac{|R^2\sin^2(t)+R^2\cos^2(t)|}{(R^2\sin^2(t)+R^2cos^2(t))^{\frac{3}{2}}}=\frac{R^2}{R^3}=\frac{1}{R} \tag{32}$$

式 (31) 说明了半径为 R 的圆上各点的曲率相同，都等于半径 R 的倒数，说明圆上各个点处的弯曲程度一致。其实这个结果具有必然性，即便是我们不知道曲率的计算公式，但如果我们知道半径越小的圆弯曲的越厉害的话，我们自然可以想到用半径的倒数来描述一个圆的弯曲程度。

有了曲率的概念之后我们可以进一步定义曲率半径为：

$$\boxed{\rho=\frac{1}{\kappa}} \tag{33}$$

有了曲率半径之后我们就可以定义相应的**曲率圆**了，但曲率圆的定义需要引入一个新的量：空间曲线的**主法向量** $\vec{\beta}$ ，这也是 $Frenet$ 标架中的另一个量。

对于可求长的曲线来说，有：

$$\dot{\vec{\alpha}}\perp\vec{\alpha} \tag{34}$$

> 注：我们不妨来证明一下这个命题（使用 t 参数证明）
> **Proof :**
> 由于曲线是可求长的，所以我们有：
> $$\vec{r}^2(t)=|\vec{r}(t)|^2=\text{const} \tag{35}$$
> 对 $\vec{r}^2(t)$ 求导得到：
> $$2\vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t)=0\Leftrightarrow\vec{r}(t)\perp\vec{r}'(t) \tag{36}$$
> **Q. E. D**
> 而由 (12) 式我们知道 $|\vec{\alpha}|$ 的长度为 1 ，说明 $\vec{\alpha}$ 是可求长的向量函数，所以有式 (33) 。

式 (33) 说明了，单位切向量的导数垂直于自身，所以有：

Definition 2.2 :

空间曲线的主法向量 $\vec{\beta}$ 为 $\dot{\vec{\alpha}}$ 方向上的单位向量，即：

$$\vec{\beta} := \frac{\dot{\vec{\alpha}}}{|\dot{\vec{\alpha}}|} \tag{37}$$

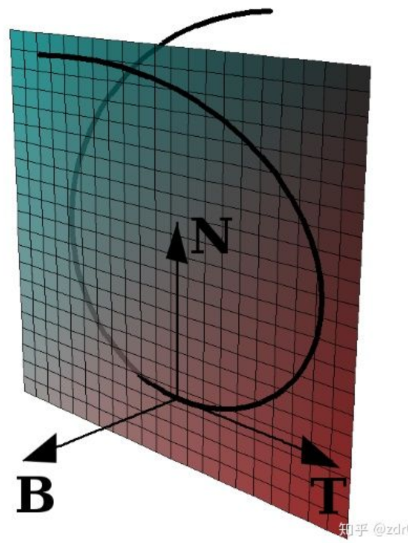
有了单位切向量和主法向量我们可以定义空间曲线的**密切平面：**

Definition 2.3 :

空间曲线的密切平面方程为：

$$[\vec{R} - \vec{r},\ \vec{\alpha},\ \vec{\beta}] = 0 \tag{38}$$

如何理解这个密切平面呢？我个人的理解是在空间曲线上一点 P 处的诸多切平面中，有一个与这条曲线最为贴近的切平面，这个切平面就是该曲线在 P 点处的密切平面了。



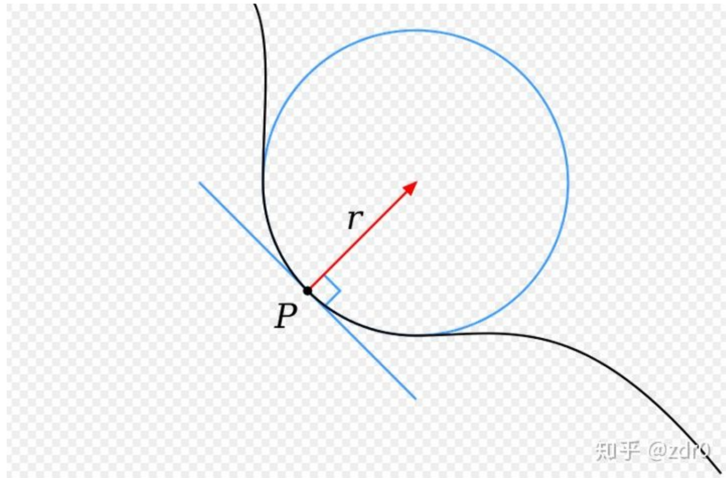
由主法向量N和切向量T所张成的密切平面。B为副法向量。图片来源：维基百科。

观察上图，感受一下这个平面是不是与这条空间曲线是最贴近的呢？这就是密切平面了，显然，密切平面是由单位切向量和主法向量所张成的一张平面。

现在我们可以定义曲率圆了。

Definition 2.4 :

空间曲线在一点处的密切圆（曲率圆）是过曲线上一点 $P(s)$ 的主法线的正侧曲线段 PC ，使其长度为 $\frac{1}{\kappa}$ 。以 C 为圆心， $\frac{1}{\kappa}$ 为半径在**密切平面**上所确定的一个圆。其中点 C 称为**曲率中心**， $\frac{1}{\kappa}$ 称为**曲率半径。**



曲率圆。图片来源：维基百科。

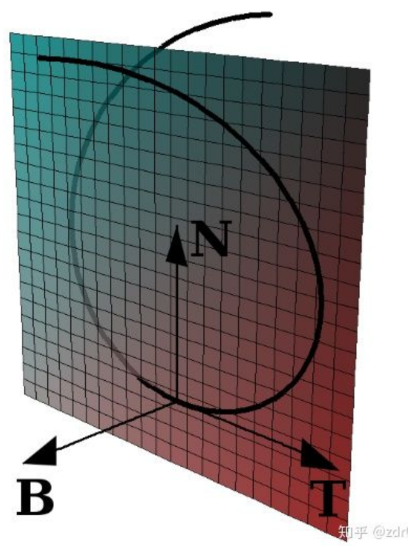
到目前为止我们已经基本认识了曲线的曲率了，现在我们先停一下，再继续开始之前，我们顺便将 $Frenet$ 标架中的最后一量也介绍了。

Definition 2.5 :

空间曲线的**副法向量** $\vec{\gamma}$ 为单位切向量 $\vec{\alpha}$ 和主法向量 $\vec{\beta}$ 的矢积，即：

$$\vec{\gamma} := \vec{\alpha} \times \vec{\beta} \tag{39}$$

$Frenet$ **标架**包含了空间曲线的单位切向量 $\vec{\alpha}$ 、主法向量 $\vec{\beta}$ 和副法向量 $\vec{\gamma}$ ，三者两两正交，且构成右手系。而利用空间曲线的曲率和挠率可以将这三者联系起来，这个关系成为 $Frenet$ **公式。**



单位切向量T，主法向量N和副法向量B共同构成了空间曲线的Frenet标架，且三者两两正交并构成右手系。图片来源：维基百科。

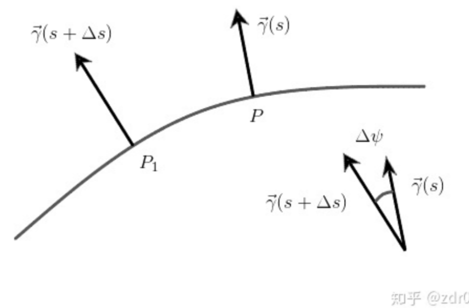
3. **空间曲线的挠率和 $Frenet$ 公式**

空间曲线由于具有第三个坐标分量所以它不仅可以弯曲，还可以扭转，而挠率就是用来描述扭转程度的，也可以理解为空间曲线离开密切平面的程度，当空间曲线扭转时，副法向量（或者密切平面）的位置会发生改变，所以类比曲率中利用单位切向量的变化速度来描述曲线的弯曲程度，我们**利用副法向量的转动速度来描述空间曲线的扭转程度。**

设空间中 C^3 类曲线的方程为：

$$\vec{r} = \vec{r}(z) \tag{40}$$

该曲线上一点 P ，设其自然参数为 s ，另一邻近点 P_1 ,其自然参数为 $s + \Delta s$ 。在 P, P_1 两点各做曲线的副法向量 $\vec{\gamma}(s), \vec{\gamma}(s+\Delta s)$ ，并设两个切向量之间的夹角为 $\Delta\psi$ ，如图所示：



挠率计算图。图片来源：自己画的。

将 **Theorem 2.1** 用在这里可以定义：

$$|\vec{\gamma}| := \lim_{\Delta s \to 0} |\frac{\Delta\psi}{\Delta s}| \tag{41}$$

该式的几何意义是副法向量（或密切平面）对于弧长的旋转速度，当曲线在一点的扭转程度越大，副法向量对弧长的旋转速度就越大，因此，我们可以用它来刻画曲线的扭转程度。

> 注：为何副法向量的旋转速度和密切平面的旋转速度都可以刻画空间曲线的求转程度呢？我认为是因为两者正交。

当然， $|\vec{\gamma}|$ 还不足以成为挠率，我们继续往下看，由曲率的定义：

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|} = \frac{\vec{\alpha}}{\kappa(s)} \tag{42}$$

即：

$$\vec{\alpha} = \kappa(s)\vec{\beta} \tag{43}$$

所以：

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} &= \dot{(\vec{\alpha} \times \vec{\beta})} = \vec{\alpha} \times \vec{\beta} + \vec{\alpha} \times \vec{\beta} \\ &= \kappa(s)\vec{\beta} \times \vec{\beta} + \vec{\alpha} \times \vec{\beta} \\ &= \vec{\alpha} \times \vec{\beta} \end{aligned} \tag{44}$$

所以：

$$\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha} \tag{45}$$

又因为 $\vec{\gamma}$ 是单位向量，所以：

$$\vec{\dot{\gamma}} \perp \vec{\ddot{\gamma}} \tag{46}$$

且由式 $(45), (46)$ 可以推得：

[公式]

这样我们就可以给出挠率的定义了：

Definition 3.1 :

空间曲线在点 P 处的挠率为：

$$\tau(s) := \begin{cases} +|\vec{\dot{\gamma}}|, & \vec{\dot{\gamma}} \,||\, -\vec{\beta} \\ -|\vec{\dot{\gamma}}|, & \vec{\dot{\gamma}} \,||\, +\vec{\beta} \end{cases} \tag{48}$$

> 注： $\vec{\dot{\gamma}} \,||\, -\vec{\beta}$ 是指 $\vec{\dot{\gamma}}$ 与 $\vec{\beta}$ 反向，反之同向。

即由式 $(47), (48)$ 可得关系式：

$$\vec{\dot{\gamma}} = -\tau(s)\vec{\beta} \tag{50}$$

在式 $(43), (50)$ 中，我们已经得到了 $\vec{\dot{\alpha}}$ 和 $\vec{\beta}$ 的关系式和 $\vec{\dot{\gamma}}$ 和 $\vec{\beta}$ 的关系式，现在我们只要再找出最后一组的关系式就可以得到 $Frenet$ 公式了，这个关系为：

$$\begin{aligned} \vec{\dot{\beta}} &= (\vec{\gamma} \dot{\times} \vec{\alpha}) = \vec{\dot{\gamma}} \times \vec{\alpha} + \vec{\gamma} \times \vec{\dot{\alpha}} \\ &= -\kappa(s)\vec{\alpha} + \tau(s)\vec{\gamma} \end{aligned} \tag{51}$$

则由式 $(43), (50), (51)$ 可以得到著名的 $Frenet$ 公式为：

$$\begin{pmatrix} \vec{\dot{\alpha}} \\ \vec{\dot{\beta}} \\ \vec{\dot{\gamma}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \\ \vec{\gamma} \end{pmatrix} \tag{52}$$

可见其系数矩阵是反对称矩阵。

这里我直接给出空间挠率的 t 参数计算公式：

$$\boxed{\tau(t) = \frac{[\vec{r}'(t),\ \vec{r}''(t),\ \vec{r}'''(t)]}{(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t))^2}} \tag{53}$$

写为分量形式为：

$$\boxed{\tau(t) = \frac{x'''(t)(y'(t)z''(t) - y''(t)z'(t)) + y'''(t)(x''(t)z'(t) - x'(t)z''(t)) + z'''(t)(x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t))}{(y'(t)z''(t) - y''(t)z'(t))^2 + (x''(t)z'(t) - x'(t)z''(t))^2 + (x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t))^2}} \tag{54}$$

下面，我们就来求解一下空间圆柱螺线的曲率和挠率。

Example 3.1 :

求空间圆柱螺线：

$$\vec{r}(t) = (a\cos(t),\ a\sin(t),\ bt)^{\mathrm{T}} \tag{55}$$

的曲率和挠率。

Solution :

由式（54）可知：

$$\vec{r}'(t) = (-a\sin(t),\, a\cos(t),\, b)^{\mathrm{T}} \tag{56}$$

$$\vec{r}''(t) = (-a\cos(t),\, -a\sin(t),\, 0)^{\mathrm{T}} \tag{57}$$

$$\vec{r}'''(t) = (a\sin(t),\, -a\cos(t),\, 0)^{\mathrm{T}} \tag{58}$$

于是有：

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{a^2+b^2} \tag{59}$$

$$\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t) = (ab\sin(t),\, -ab\cos(t),\, a^2) \tag{60}$$

$$|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)| = a\sqrt{a^2+b^2} \tag{61}$$

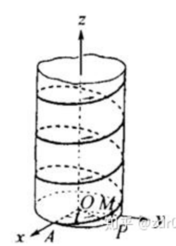
所以，空间圆柱螺线的曲率和挠率分别为：

$$\kappa(t) = \frac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3} = \frac{a}{a^2+b^2} = \mathrm{const} \tag{62}$$

$$\tau(t) = \tau(t) = \frac{[\vec{r}'(t),\ \ \vec{r}''(t),\ \ \vec{r}'''(t)]}{(\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t))^2} = \frac{b}{a^2+b^2} = \mathrm{const} \tag{63}$$

可见圆柱螺线的去率和挠率都是常数。

> 注：即使我们不通过计算我们也能知道圆柱螺线的曲率和挠率都是常数，曲率是常数是因为圆柱螺线的水平投影是圆，而圆的曲率是常数，挠率是常数是因为 z 方向上升的速度是匀速的。



圆柱螺线。图片来源：google图片搜索。

编辑于 2019-07-20 19:53

「真诚赞赏，手留余香」

赞赏

还没有人赞赏，快来当第一个赞赏的人吧！

数学 微分几何 科普

文章被以下专栏收录

数学及自然科学
这么好的专栏你确定不来看看?