東雲正樹
数学等 2 个话题下的优秀答主

总之微积分的初学者会看到微分运算的用途还是很大的, 关于微积分你可以就按照我下面那些感性的理解先用着, 以后会学到严谨的极限定义的. 然而实际上再往后的生活中好像也没谁会去那么强调极限定义了, 知道是那么回事就行了.

> 下面的推导中我应该没有跳过任何哪怕是运算上的步骤, 如果你觉得这个内容仍然有一定的挑战性也是正常的, 毕竟我中学的时候应该完全看不懂这些; 如果你觉得这个推导过于细致了也是正常的, 因为这确实只是一些完全没有思维量的简单玩意儿.

对于一条曲线我们可以研究其曲率, 也即弯曲程度. 直观来想, 以一条连续光滑曲线上无限接近的两个点为端点的一段弧总应该可以看作是某圆上的一段弧. **这个圆的半径就被定义为曲线在这一点的曲率半径. 而曲率则被定义为曲率半径的倒数.**

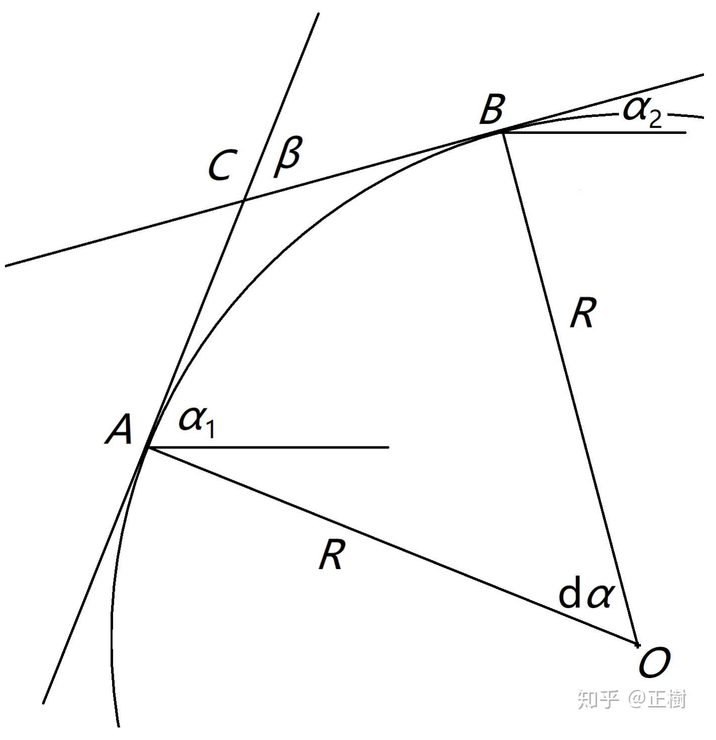
> 至于说为何总可以看作是某圆上的一段弧, 可以简单的认为是曲率半径在连续光滑曲线上不会发生突变, 所以在某点的无穷小领域内曲率半径可以看作是一个常量, 事实上这就是光滑的含义.

如何求曲率半径呢? 我们可以回想第一次接触弧度制时是怎么定义弧度的. 弧度是圆弧长与该圆半径的比值对吧? 既 $\alpha=\dfrac{S}{R}$, 显然当 $S=2\pi R$ 既整个圆周长时弧度为 2π.

那么显然曲率半径很自然的可以定义为 $R=\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha}$, 既无穷小的一段弧长与其相对应弧度的比值.

知道这些我们就可以计算出任意一条连续光滑曲线 $y=y(x)$ 在任意一点的曲率半径了.

为了能使用最简单的运算步骤, 我们要先研究一个几何关系:



如图, A,B 既光滑曲线上无限逼近的两点, 当然我们这里使用了夸张的表现手法. 其它量如图标示.

显然在四边形 $ACBO$ 中有俩直角, 所以 $\mathrm{d}\alpha$ 则与其对角互补. 所以其对角的补角 $\beta=\mathrm{d}\alpha$.

这下子就好办了, 一下子我们就有办法求出 $R=\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha}$ 中的 $\mathrm{d}\alpha$ 了.

求 dα :

怎么求呢? 还记得曲线的斜率是啥吗? 斜率就是其切线在这一点与水平线夹角的正切值, 那么图上曲线在 A,B 两点的斜率自然就分别是 $\tan\alpha_1$ 与 $\tan\alpha_2$ 了. 而我们想要的正是这俩倾斜角的差值即 $\beta=\alpha_2-\alpha_1=\mathrm{d}\alpha$ [1].

那太简单了, 已知 $\tan\alpha=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 我们对其求微分即得:

$$\mathrm{d}\tan\alpha=\frac{\mathrm{d}\tan\alpha}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}\alpha=\sec^2\alpha\mathrm{d}\alpha=\left(1+\tan^2\alpha\right)\mathrm{d}\alpha=\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}\alpha.$$

这样一来就有: $\mathrm{d}\alpha=\dfrac{\mathrm{d}\tan\alpha}{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=\dfrac{\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}.$

求 dS :

这个没什么说的, 就是对弧长进行微分, 被称之为弧微分. 硬要说一下的话就是用线段 AB 来代替弧 $\overset{\frown}{AB}$, 因为当这俩点无限趋近的时候, 它们基本上就没啥区别了, 也就是取一阶近似或者说线性近似的意思.

设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, 线段 AB 的长度很好算的, 勾股定理罢了:

$$\begin{aligned}|AB|=\mathrm{d}S&=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\\&=(x_2-x_1)\sqrt{1+\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}.$$

将 dα 与 dS 代入公式:

> 加一个绝对值, 因为呃... 反正曲率半径就是被定义是一个正数, 暂且没啥必要牵扯到负数.

$$R=\left|\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha}\right|=\frac{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{1}{\mathrm{d}x}\right|}=\frac{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|}=\frac{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|}.$$

而曲率就是曲率半径求一个倒数, 即 $\dfrac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}.$

参考

1. ^ 正负号不影响啥

编辑于 2022-03-08 20:22