

Physikalisches Anfängerpraktikum

Sommersemester 2023

Versuch 22

Tutor: David Philipp Kuhn

Bestimmung der Elementarladung nach Millikan

1 Einleitung

1.1 Ziel des Versuchs

In diesem Experiments werden wir die Elementarladung durch Messung der Sink- bzw. Steiggeschwindigkeit von elektrisch geladenen Öltröpfchen im Plattenkondensator bestimmen. Außerdem wird geprüft, ob die getragenen Ladungen der Öltröpfchen nährungsweise einem ganzzahligen Vielfachen der Elementarladung entspricht. Wir tragen die jeweils 4 Werte für jedes gemessene Tröpfchen (Fallweg und Fallzeit, Steigweg und Steigzeit) in die Tabelle des Excel-Programms zur Auswertung ein.

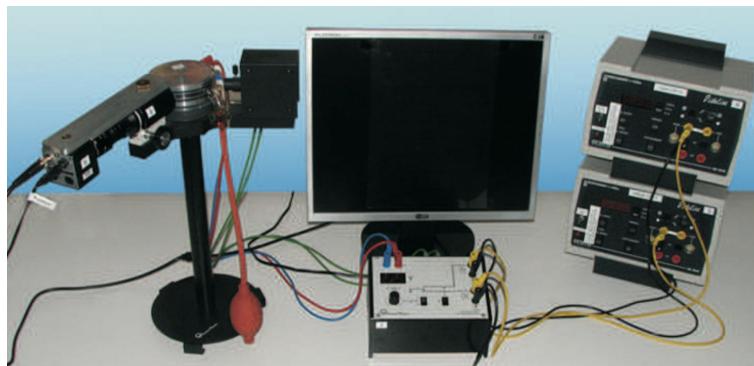


Abbildung 1: Aufbau des Versuchs Elementarladung Bestimmung

1.2 Physikalische Grundlagen

1.2.1 Versuchsaufbau

Im Jahre 1913 veröffentlichte der Physiker Robert A. Millikan eine Methode zur Bestimmung der Elementarladung, welche die Ladung eines Elektrons, eines Protons oder im Prinzip jedes einfach geladenen Teilchens beschreibt.

Der hier im Praktikum aufgebaute Versuch beruht im wesentlichen auf der Originalapparatur von Millikan. Grundprinzip des Millikan-Experiments ist die Tatsache, dass auf ein im homogenen Feld eines Plattenkondensators bewegliches, elektrisch geladenes Öltröpfchen verschiedene Kräfte wirken, die indirekt messbar sind.

Die Öltröpfchen werden mithilfe eines Zerstäubers in den Spalt zwischen zwei Platten eines Plattenkondensators eingebracht. Während dieses Prozesses werden die Öltröpfchen durch Reibung elektrisch aufgeladen. Aufgrund ihrer äußerst geringen Größe, mit einem Radius in der Größenordnung von 10^{-7} Metern, erfordert es die Verwendung eines Mikroskops, um diese Tröpfchen sichtbar zu machen. Mit dem Einstellrad an der Mikroskopfuhrung zur Scharfstellung und Fernbedienung zu Kontrast und Helligkeit des Monitorbildes werden die Öltröpfchen besser abgelichtet und analysiert. Wir messen die Zeiten mit zwei Stoppuhren.

1.2.2 Prinzip der Messung

Die Öltröpfchen erfahren nun verschiedene Kräfte. In einem feldfreien Raum, in dem keine Spannung angelegt ist, wirken zunächst die Gravitationskraft nach unten sowie eine Auftriebskraft durch die Luft und eine Reibungskraft (Stokes'sche Reibung) nach oben.

Da die Reibungskraft geschwindigkeitsabhängig ist, erlebt das Öltröpfchen zunächst eine Beschleunigung nach unten aufgrund der Gravitationskraft, die von der Auftriebskraft subtrahiert wird. Mit zunehmender Geschwindigkeit nimmt jedoch die Reibungskraft zu, bis schließlich ein dynamisches Kräftegleichgewicht erreicht ist. In diesem Zustand sinkt das Tröpfchen mit konstanter Geschwindigkeit.

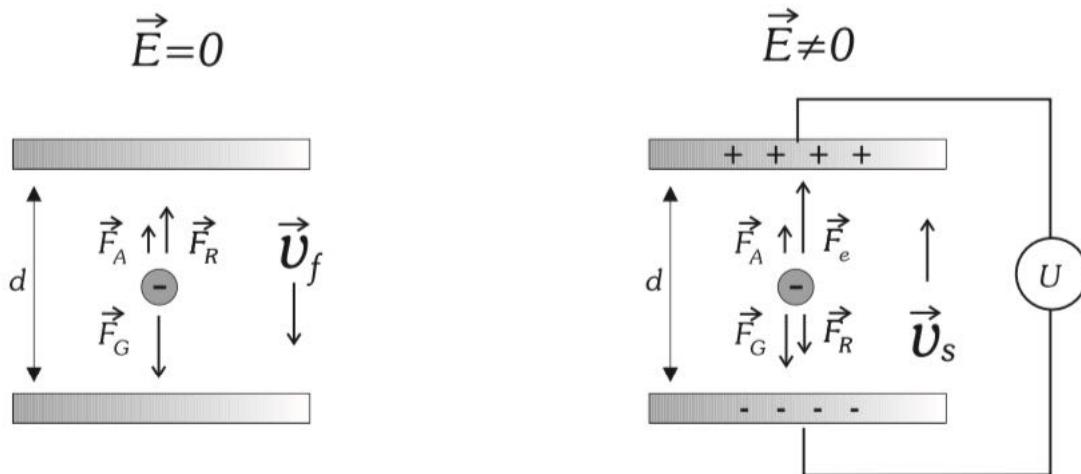


Abbildung 2: Auf ein Öltröpfchen wirkende Kräfte im feldfreien Raum (links) und unter Einfluss eines homogenen elektrischen Felds (rechts)

Wenn nun eine Spannung an den Platten des Kondensators angelegt wird, entsteht ein homogenes elektrisches Feld innerhalb des Kondensators. Dieses Feld übt eine zusätzliche Kraft auf die geladenen Öltröpfchen aus. Diese Kraft wirkt nach oben und ist groß genug, um die Gravitationskraft zu überwinden. Infolgedessen steigen

die Öltröpfchen nach einer anfänglichen Beschleunigung mit konstanter Geschwindigkeit auf. Diese Geschwindigkeit ergibt sich analog zum Fallprozess aus dem sich einstellenden Kräftegleichgewicht, wobei die elektrische Kraft nach oben gerichtet ist und die Gravitationskraft nach unten wirkt.

1.2.3 Kontinuierliche Verteilungen

- Gauß-Verteilungen

Die Normal- oder Gauß-Verteilung ist in der Stochastik ein wichtiger Typ stetiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Die Dichte von einer Gauß-Verteilung hat die Form:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad (1)$$

wobei μ der Erwartungswert und σ die Standardabweichung der Verteilung ist.

Nach Wahrscheinlichkeitstheorie gilt die Standardisierung:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (2)$$

wobei Z die Normalverteilung ist. X ist gauss-verteilt mit Parametern (μ, σ^2)

- Chi-Quadrat-Verteilung

Die Chi-Quadrat-Verteilung bzw. χ^2 -Verteilung ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge der nichtnegativen reellen Zahlen. Die Chi-Quadrat-Verteilung hat einen einzigen Parameter, nämlich die Anzahl der Freiheitsgrade n . Sie ist eine der Verteilungen, die aus der Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ abgeleitet werden kann: Sind Z_1, \dots, Z_n unabhängige und standardnormalverteilte Zufallsvariablen, so ist die Chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden definiert als die Verteilung der Summe $Z_1^2 + \dots + Z_n^2$ der quadrierten Zufallsvariablen.

$$Q = Z_1^2 + \dots + Z_n^2 \sim \chi^2(n) \quad (3)$$

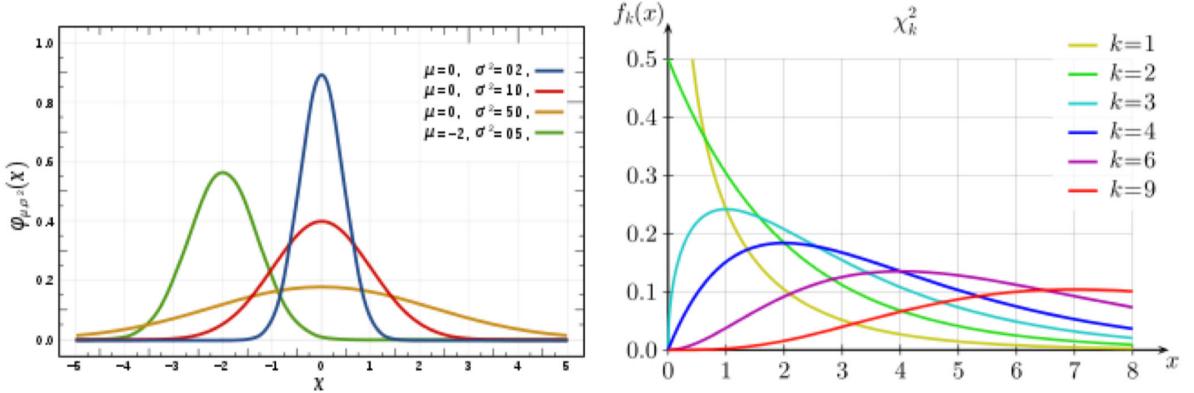


Abbildung 3: Links: Gauss-Verteilung, rechts: Chi-Verteilung

1.3 Relevante Formeln

Die Gravitationskraft ist gegeben durch:

$$F_G = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{Öl}} g \quad (4)$$

Die Auftriebskraft ist gegeben durch:

$$F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{Luft}} g \quad (5)$$

Die Kraft aus der Stokes'schen Reibung ist gegeben durch:

$$F_R = 6\pi r \eta v \quad (6)$$

Wobei r , $\rho_{\text{Öl}}$, und r der Radius, die Dichte und die Geschwindigkeit des Ölropfchens bezeichnen, g ist die Schwerkraft, ρ_{Luft} und η sind die Dichte und die Viskosität der Luft.

η ist aber auf keinen Fall eine Konstante. Weil die Radien der Ölropfchen (im Bereich $10^{-6} \sim 10^{-7}$ m) derselben Größenordnung wie die mittlere freie Weglänge der Moleküle in Luft entspricht. Die Viskosität η wird nur als konstant angenommen, wenn der Durchmesser der Ölropfchen deutlich größer als die mittlere freie Weglänge der Luftpolekule ist.

Wir können aber die Viskosität η mit einem radiusabhängigen Korrekturfaktor $f(r)$ versehen:

$$\eta(r) = \eta_0 f(r) = \frac{\eta_0}{1 + \frac{b}{r_p}} \quad (7)$$

Hier ist η_0 der Grenzwert der Viskosität für sehr große Öltröpfchen, p ist der Luftdruck und b eine empirische Konstante.

Trägt das Öltröpfchen eine elektrische Ladung q, so wirkt im Feld eines Plattenkondensators eine zusätzliche Kraft:

$$F_e = q \cdot \frac{U}{d} \quad (8)$$

Hier ist q die Ladung des Tröpfchens, U ist die am Kondensator anliegende Spannung und d der Abstand der Kondensatorplatten.

Wenn das Tröpfchen zuerst ohne elektrisches Feld fällt und zum dynamischen Gleichgewicht kommt:

$$\sum F = F_G - F_A - F_R = 0 \quad (9)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3(\rho_{Öl} - \rho_{Luft})g = 6\pi r\eta v_f \quad (10)$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{9\eta}{2\rho g}v_f} \quad \text{mit } \rho = \rho_{Öl} - \rho_{Luft} \quad (11)$$

Es wird nun eine Spannung angelegt und das Tröpfchen kommt wieder zum Gleichgewicht:

$$\sum F = F_G - F_A + F_R - F_e = 0 \quad (12)$$

$$\Rightarrow \frac{U}{d}q = (6\pi\eta v_f + 6\pi\eta v_s)r \quad (13)$$

$$\Rightarrow q = (v_f + v_s) \sqrt{\frac{9v_f\eta^3}{2\rho g} \frac{6\pi d}{U}} \quad (14)$$

In unserer Analyse hängt der Radius r von η ab, wie in Gleichung (7) angegeben. Um r genau zu berechnen, wäre es notwendig, Gleichung (7) in Gleichung (11) einzusetzen und nach r umzustellen, was zu einer quadratischen Gleichung führt. Es stellt sich jedoch heraus, dass es ausreicht, in Gleichung (11) mit η_0 zu arbeiten. Der Fehler, den man dabei für r macht, liegt bei etwa 5 %. Der daraus resultierende Fehler für den Korrekturfaktor f beträgt nur etwa 0,5 % und ist somit vernachlässigbar.

In der folgenden Auswertung werden diese Werte nach der Anleitung gegeben:

$$\text{Viskosität der Luft} \quad \eta_0 = 1,81 \times 10^{-5} \text{ Ns/m}^2 \quad (15)$$

$$\text{Schwerebeschleunigung} \quad g = 9,81 \text{ m/s}^2 \quad (16)$$

$$\text{Dichte des Öls bei } 15^\circ\text{C} \quad \rho_{\text{Öl}} = 877 \text{ kg/m}^3 \quad (17)$$

$$\text{Dichte des Öls bei } 25^\circ\text{C} \quad \rho'_{\text{Öl}} = 871 \text{ kg/m}^3 \quad (18)$$

$$\text{Dichte der Luft} \quad \rho_{\text{Luft}} = 1,29 \text{ kg/m}^3 \quad (19)$$

$$\text{Konstante im Korrekturfaktor} \quad b = 7,78 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{m} \quad (20)$$

$$\text{Abstand der Kondensatorplatten} \quad d = (6,00 \pm 0,05) \text{ mm} \quad (21)$$

$$\text{Skala auf dem Bildschirm} \quad 1Skt = (5,00 \pm 0,13) \times 10^{-5} \text{ m} \quad (22)$$

$$(23)$$

Der Index f bezieht sich auf ein fallendes Öltröpfchen, s bezieht sich auf ein steigendes Tröpfchen.

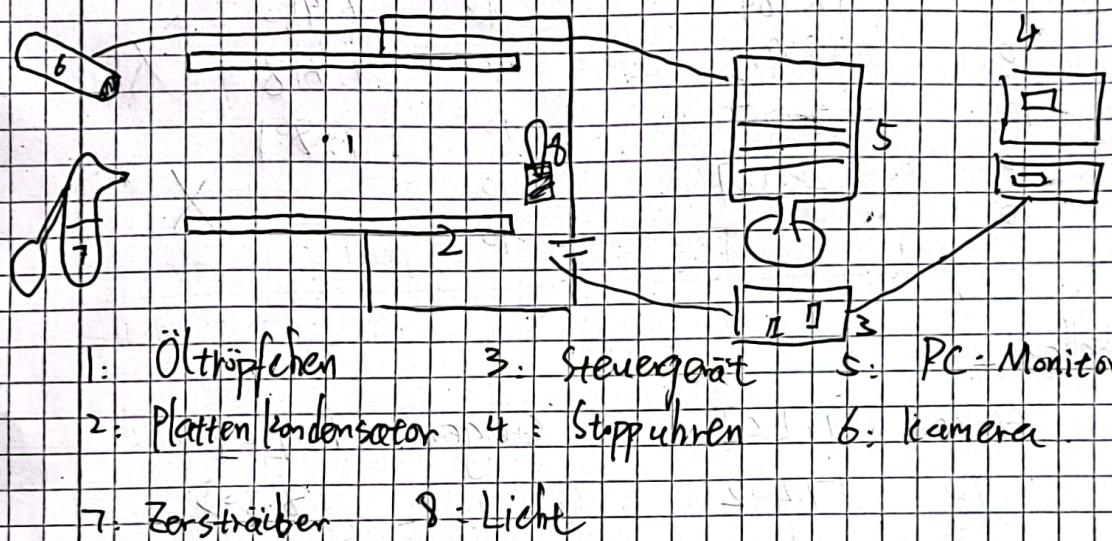
2 Versuchsdurchführung

2.1 Versuchsdurchführung und Messprotokoll

Versuchsaufbau, Versuchsdurchführung und Messprotokoll: siehe folgende Seiten.

Messgeräte:

- Millikan-Gerät (Plattenkondensator, Ölzersetzer, Beleuchtung)
- Mikroskop-Kamera mit Monitor
- Millikan-Steuergerät (Hochspannungsquelle, Triggerung der Stoppuhren)
- Zwei elektronische Stoppuhren
- PC mit Drucker, Datenauswertung mit dem Programm Excel.

Aufgabe 1: Skizzen des AufbausAufgabe 2: Durchführung und Exceltabelle

Zunächst wurde die Sink- und Steigzeit eines der langsamsten Öltröpfchen gemessen (5 mal hintereinander).

Dazu wurde erste Öl in den Zwischenraum zwischen den Kondensatorplatten eingespritzt und mithilfe des Mikroskops, welches wir zuvor eingestellt haben, das Öltröpfchen beobachtet.

Dann wurden nacheinander 40 Tröpfchen beobachtet. Durch An- und Abschalten der Spannung wechselten



die beobachteten Tröpfchen die Bewegungsrichtung.

Die Fall- und Steigzeiten wurden in eine Excel-Tabelle notiert, die dann mithilfe der entsprechenden Formen die Geschwindigkeiten der Teilchen und ihre Radien, Ladungen sowie den Koeffizientenfaktor berechnet.

Zimmertemperatur: $25.0^{\circ}\text{C} \pm 1.0$

Luftdruck: $997.60\text{ hPa} = 99760\text{ Pa} \pm 0.20\text{ hPa}$

Systematische Fehler - Abschätzung (Tabelle 1)

Sinken	$t_1 [\text{s}]$	Steigen	$t_2 [\text{s}]$
10	18.184	10	6.950
Insgesamt, da das Öl tröpfchen sich am Bildschirm bewegen.	10	18.915	10
10	18.007	10	7.618
10	20.507	10	7.801
10		10	
			X

Tabelle 1

Sinken	$t_1 [\text{s}]$	Steigen	$t_2 [\text{s}]$
10	17.402	10	8.503
10	16.638	10	7.921
10	18.399	10	7.966
10	17.700	10	8.530
10	17.676	10	8.199

Fehler der Spannung: $\Delta U = 3\text{ V}$

P. K.



扫描全能王 创建

Praktikumsversuch "Bestimmung der elektrischen Elementarladung nach Millikan"																
18.09.2023	Datum der Messung			Namen der StudentInnen:			Yulai Shi, Yutng Shi									
500	V	Spannung des Kondensators U			Versuchsaufbau:			22	Alles rote ist zu ändern, der Rest wird automatisch berechnet.							
9,98E+04	mbar	Luftdruck p			Zimmertemperatur T											
25,0	oC															
6,00E-03	m	Abstand der Kondensatorplatten d														
5,00E-05	m	1 Skt			C1 =	2,0001E-10	VAs (s/m)**1.5									
3,14159		Zahl π			C2 =	9,5466E-09	ms									
1,00E-19	As	Benutzte Ladungseinheit q0			$\rho = \rho_1 - \rho_2$	8,6971E+02	kg/m³									
1,81E-05	Ns/m²	Viskosität der Luft η_0 (unkorrigiert)			b =	7,7800E-03	Pa m									
8,710E+02	kg/m³	Dichte des Öls ρ_1														
1,29E+00	kg/m³	Dichte der Luft ρ_2														
9,81	m/s²	Erdbeschleunigung g														
2,400		Oberere Grenze der Ladung für einfach geladene Tröpfchen			f	Korrekturfaktor für η										
1,632		Mittelwert Q1m der einfach mit Q1 geladenen Tröpfchen			Q	Ladung der gemessenen Tröpfchen										
1,602		Mittelwert Q/n für Tröpfchen mit n<6			Q1	Ladung der einfach geladenen Tröpfchen										
48		Zahl der Tröpfchen mit n<6			n	nächste ganze Zahl von Q/Q1										
0,153		Standardabweichung einer Einzelmessung														
0,022		Standardabweichung des Mittelwertes														
0,8725		Mittelwert von f für Tröpfchen mit n<6														
Nr.	Sinken	t1	Steigen	t2	v1	v2	v1+v2	R0	f	Q	Q1					
	[Skt]	[s]	[Skt]	[s]	[m/s]	[m/s]	[m/s]	[m]		Q1	Q/Q1m					
										n	Q/n					
										(n<6)	f					
											(n<6)					
1	10	19,628	20	2,796	2,547E-05	3,577E-04	3,831E-04	4,931E-07	0,863	6,206	3,803	4	1,552	0,863	1	
2	10	24,659	20	1,015	2,028E-05	9,852E-04	1,005E-03	4,400E-07	0,849	14,179	8,689	9				
3	10	15,157	20	8,228	2,028E-05	1,215E-04	1,418E-04	4,400E-07	0,849	2,000	1,226	1	2,000	0,849	1	
4	10	23,819	20	11,497	2,099E-05	8,698E-05	1,080E-04	4,477E-07	0,852	1,555	1,555	0,953	1	1,555	0,852	1
5	10	30,535	20	9,316	1,637E-05	1,073E-04	1,237E-04	3,954E-07	0,835	1,529	0,937	1	1,529	0,835	1	
6	10	23,286	20	8,116	2,147E-05	1,232E-04	1,447E-04	4,528E-07	0,853	2,113	1,295	1	2,113	0,853	1	
7	10	9,625	20	7,281	5,195E-05	1,373E-04	1,893E-04	7,042E-07	0,900	4,662	2,857	3	1,554	0,900	1	
8	10	13,128	20	8,350	3,809E-05	1,198E-04	1,578E-04	6,030E-07	0,885	3,247	1,990	2	1,623	0,885	1	
9	10	16,635	20	17,624	3,006E-05	5,674E-05	8,680E-05	5,357E-07	0,873	1,552	1,552	0,951	1	1,552	0,873	1
10	10	19,345	20	15,632	2,585E-05	6,397E-05	8,982E-05	4,967E-07	0,864	1,468	0,899	1	1,468	0,864	1	
11	10	19,825	20	13,564	2,522E-05	7,372E-05	9,895E-05	4,907E-07	0,863	1,593	0,976	1	1,593	0,863	1	
12	10	22,673	20	10,582	2,205E-05	9,450E-05	1,166E-04	4,588E-07	0,855	1,730	1,730	1,060	1	1,730	0,855	1
13	10	19,320	20	13,145	2,588E-05	7,607E-05	1,020E-04	4,971E-07	0,864	1,667	1,667	1,022	1	1,667	0,864	1
14	10	13,581	20	20,260	3,682E-05	4,936E-05	8,617E-05	5,928E-07	0,884	1,738	1,738	1,065	1	1,738	0,884	1
15	10	20,588	20	2,512	2,429E-05	3,981E-04	4,224E-04	4,815E-07	0,861	6,648	4,074	4	1,662	0,861	1	
16	10	21,863	20	11,920	2,287E-05	8,389E-05	1,068E-04	4,673E-07	0,857	1,620	1,620	0,993	1	1,620	0,857	1
17	10	17,717	20	13,512	2,822E-05	7,401E-05	1,022E-04	5,191E-07	0,869	1,761	1,761	1,079	1	1,761	0,869	1
18	10	12,529	20	2,786	3,991E-05	3,589E-04	3,988E-04	6,172E-07	0,888	8,432	5,167	5	1,686	0,888	1	
19	10	21,308	20	2,694	2,347E-05	3,712E-04	3,947E-04	4,733E-07	0,859	6,084	3,728	4	1,521	0,859	1	
20	10	21,611	20	5,891	2,314E-05	1,698E-04	1,929E-04	4,700E-07	0,858	2,948	1,807	2	1,474	0,858	1	
21	10	16,399	20	9,163	3,049E-05	1,091E-04	1,396E-04	5,395E-07	0,874	2,519	1,543	2	1,259	0,874	1	
22	10	29,938	20	9,345	1,670E-05	1,070E-04	1,237E-04	3,993E-07	0,837	1,548	1,548	0,948	1	1,548	0,837	1
23	10	21,164	20	9,938	2,363E-05	1,006E-04	1,242E-04	4,749E-07	0,859	1,923	1,923	1,179	1	1,923	0,859	1
24	10	27,081	20	10,398	1,846E-05	9,617E-05	1,146E-04	4,198E-07	0,843	1,526	1,526	0,935	1	1,526	0,843	1
25	10	13,739	20	7,812	3,639E-05	1,280E-04	1,644E-04	5,894E-07	0,883	3,293	2,018	2	1,646	0,883	1	
26	10	22,007	20	13,062	2,272E-05	7,656E-05	9,928E-05	4,657E-07	0,857	1,501	1,501	0,920	1	1,501	0,857	1
27	10	21,078	20	12,912	2,372E-05	7,745E-05	1,012E-04	4,759E-07	0,859	1,570	1,570	0,962	1	1,570	0,859	1
28	10	19,778	20	13,460	2,528E-05	7,429E-05	9,957E-05	4,913E-07	0,863	1,606	1,606	0,984	1	1,606	0,863	1
29	10	20,832	20	14,886	2,400E-05	6,718E-05	9,118E-05	4,787E-07	0,860	1,425	1,425	0,873	1	1,425	0,860	1
30	10	14,463	20	18,412	3,457E-05	5,431E-05	8,888E-05	5,745E-07	0,880	1,727	1,727	1,058	1	1,727	0,880	1
31	10	8,534	20	15,318	5,859E-05	6,528E-05	1,239E-04	7,479E-07	0,906	3,269	2,003	2	1,634	0,906	1	
32	10	13,984	20	8,458	3,576E-05	1,182E-04	1,540E-04	5,842E-07	0,882	3,052	1,870	2	1,526	0,882	1	
33	10	8,988	20	14,836	5,563E-05	6,740E-05	1,230E-04	7,287E-07	0,903	3,152	1,931	2	1,576	0,903	1	
34	10	14,693	20	5,000	3,403E-05	2,000E-04	2,340E-04	5,700E-07	0,880	4,506	2,761	3	1,502	0,880	1	
35	10	11,493	20	6,031	4,350E-05	1,658E-04	2,093E-04	6,445E-07	0,892	4,653	2,851	3	1,551	0,892	1	
36	10	12,453	20	11,173	4,015E-05	8,950E-05	1,297E-04	6,191E-07	0,888	2,751	1,686	2	1,375	0,888	1	
37	10	6,488	20	5,677	7,707E-05	1,761E-04	2,532E-04	8,577E-07	0,917	7,804	4,782	5	1,561	0,917	1	
38	10	22,682	20	12,497	2,204E-05	8,002E-05	1,021E-04	4,587E-07	0,855	1,515	1,515	0,928	1	1,515	0,855	1
39	10	13,505	20	8,894	3,702E-05	1,124E-04	1,495E-04	5,945E-07	0,884	3,024	1,853	2	1,512	0,884	1	
40	10	22,336	20	11,809	2,239E-05	8,468E-05	1,071E-04	4,623E-07	0,856	1,604	1,604	0,983	1	1,604	0,856	1
41	10	4,925	20	4,388	1,015E-04	2,279E-04	3,294E-04	9,845E-07	0,927	11,843	7,257	7				
42	10	9,001	20	7,427	5,555E-05	1,346E-04	1,902E-04	7,282E-07	0,903	4,868	2,983	3	1,623	0,903	1	
43	10	8,863	20	5,285	5,641E-05	1,892E-04	2,456E-04	7,339E-07	0,904	6,343	3,887	4	1,586	0,904	1	
44	10	8,750	20	4,463	5,714E-05	2,241E-04	2,812E-04	7,386E-07	0,904	7,315	4,483	4	1,829	0,904	1	
45	10	9,538	20	6,774	5,242E-05	1,476E-04	2,000E-04	7,074E-07	0,901	4,953	3,035	3	1,651	0,901	1	
46	10	7,808	20	9,522	6,404E-05	1,050E-04	1,691E-04	7,819E-07	0,909	4,692	2,876	3	1,564	0,909	1	
47	10	20,821	20	13,720	2,401E-05	7,289E-05	9,690E-05	4,788E-07	0,860	1,515	1,515	0,928	1	1,515	0,860	1
48	10	19,569	20	14,111	2,555E-05	7,087E-05	9,642E-05	4,939E-07	0,864	1,565	1,565	0,959	1	1,565	0,864	1
49	10	21,523	20	15,810	2,323E-05	6,325E-05	8,648E-05	4,709E-07	0,858	1,325	0,812	1	1,325	0,858	1	
50	10	18,850	20	12,649	2,653E-05	7,906E-05	1,056E-04	5,032E-07	0,866	1,752	1,752	1,074	1	1,752	0,866	1

3 Auswertung

3.1 Verifizierung für ein ausgewähltes Tröpfchen aus der Excel-Tabelle

Wir werden das vierte Tröpfchen auswerten, indem wir seine $v_f, v_s, r_0, f(r_0), q$ unter Berücksichtigung der Einheiten berechnen.

Die Zimmertemperatur beträgt: $25^\circ C$, die $\rho_{\text{Öl}} = 871 \text{ kg/m}^3$ entspricht.

Der Druck beträgt: $p = 997,6 \text{ mbar}$ und die Spannung U beträgt $U = 500V$

Aus der Excel-Tabelle wissen wir: $t_f = 15,157s, t_s = 8,228s, s_f = 10Skt, s_s = 20Skt$:

$$v_f = \frac{s_f}{t_f} = \frac{10 \cdot 5 \times 10^{-5} \text{ m}}{23,819 \text{ s}} \approx 2,0991 \cdot 10^{-5} \text{ m/s} \quad (24)$$

$$v_s = \frac{s_s}{t_s} = \frac{20 \cdot 5 \times 10^{-5} \text{ m}}{11,497 \text{ s}} \approx 8,6979 \cdot 10^{-5} \text{ m/s} \quad (25)$$

(26)

Aus Gl.(11) berechnen wir r_0 mit der Viskosität η_0 :

$$r_0 = \sqrt{\frac{9 \times 1,81 \times 10^{-5}}{2 \times (871 - 1,29) \times 9,81} \times 2,0991 \cdot 10^{-5}} \approx 4,4765 \cdot 10^{-7} \text{ m} \quad (27)$$

Aus der Gleichung berechnen wir $f(r_0)$:

$$f(r_0) = \frac{1}{1 + \frac{b}{r_0 p}} = \frac{1}{1 + \frac{7,78 \times 10^{-3}}{4,4765 \times 10^{-7} \times 997,6 \times 100}} \approx 0,8516 \quad (28)$$

Mit Gl.(14) berechnen wir die Ladung q:

$$q = (2,0991 + 8,6979) \times 10^{-5} \times \sqrt{\frac{9 \times 2,0991 \times 10^{-5} \times (1,81 \times 10^{-5})^3}{2 \times (871 - 1,29) \times 9,81}} \quad (29)$$

$$\times \frac{6 \times 3,14 \times 0,006}{500} \approx 1,5552 \cdot 10^{-19} \text{ As} \quad (30)$$

Die Werte wurde auf die gleiche Anzahl an Stellen gerundet, die in der Excel-Tabelle auch angegeben sind. Wie man durch Vergleich mit der Tabelle sieht, stimmen die Werte bis auf die letzte Stelle immer überein (der Fehler an der letzten Stelle ist Rundungsfehlern geschuldet).

3.2 Betrachtung der bestimmten Ladungen

In der Anleitung wird gefordert, ein Histogramm aller gemessenen Ladungen im Bereich von 0 As bis ca. 10^{-18} As zu zeichnen. und eine Intervallgröße von 2×10^{-20} As zu wählen. Aufgrund der Tatsache, dass die gemessenen Ladungen eine erhebliche Streuung aufzeigten, ein paar extreme Daten auftauchten und eine gewisse Verwirrung hinsichtlich der Skalenteilung bestand, haben wir beschlossen, dass der kleinste Abstand $0,15 \cdot 10^{-19}$ As entsprechen sollte. Nur auf diese Weise ergaben die Werte einen sinnvollen Zusammenhang.

In Excel wurde als Obergrenze für die Ladung der Wert $2,400 \cdot 10^{-19}$ verwendet. Wie aus dem Histogramm ersichtlich ist, gibt es auch eine nicht kleine Menge der Proben, die ganz zu der Obergrenze erhoben werden. Eine mögliche Erklärung dafür könnte sein, dass wir ein paar zu schnelle Teilchen beobachtet haben, die Vielfache der Elementarladung trugen und daher deutlich größer waren als der maximale Wert in Excel.

Trotz dieser Beobachtung macht es dennoch Sinn, diesen Wert zu verwenden. Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass die Simulationskurve der gesamten Ladungsverteilung links verteilt und zwischen 1 und 3 konzentriert ist. Wie wir in 1.2.3 schon erklärt haben, entspricht diese Ladungsverteilung in größter Wahrscheinlichkeit einer Chi-Verteilung. Die kritischen Punkte der lokalen Maxima entsprechen jeweils den wahrscheinlichsten Werten für ein Vielfaches der Elementarladung. Da keine Ladungen deutlich niedriger als das erste Maximum links von $1,576 \cdot 10^{-19}$ As aufgezeichnet wurden, ist es naheliegend anzunehmen, dass dieser Wert die einfache Elementarladung repräsentiert.

$$\tilde{q} = 1,576 \cdot 10^{-19} \text{ As} \quad (31)$$

In Excel-Tabelle wird eine obere Grenze ($2,400 \cdot 10^{-19}$ As) der Ladung für einfach geladene Tröpfchen benutzt. Obwohl ein Teil unserer Messungen sich bevor dieser Grenze befinden, liegen auch viele Werte, die eine Ladung deutlich größer als ($2,400 \cdot 10^{-19}$ As) besitzen. Deswegen ist diese obere Grenze vernüftig aufgestellt.

Da die Ladung auf den Öltröpfchen nur in ganzzahligen Vielfachen der Elementarladung auftreten kann, zeigt die folgende Tabelle auch im Vergleich mit den Maxima im Histogramm deutlich, dass dieser Wert sinnvoll ist:

Tabelle 1: Mögliche Ladungen als ganzzahlige Vielfache der Ladung am ersten Maximum der Messwerte $\tilde{q} = 1,576 \cdot 10^{-19} As$

n	$Q = n * \tilde{q} [\cdot 10^{-19} As]$	$\Delta Q [\cdot 10^{-19} As]$
1	1.576	0.063
2	3.152	0.126
3	4.728	0.189
4	6.304	0.252
5	7.880	0.315
6	9.456	0.378
7	11.032	0.441
8	12.608	0.504
9	14.184	0.567
10	15.760	0.630
11	17.336	0.693
12	18.912	0.756
13	20.488	0.819
14	22.064	0.882
15	23.640	0.945
16	25.216	1.008
17	26.792	1.071
18	28.368	1.134

Aus Diagramm können wir dann das Fazit ziehen: die wahrscheinlichsten Werten für ein Vielfaches der Elementarladung sind 1 bis 5.

Hierbei wurde der Fehler ΔQ unter Annahme von $\Delta \tilde{q} = 0,063 \cdot 10^{-19} As$ wie folgt berechnet:

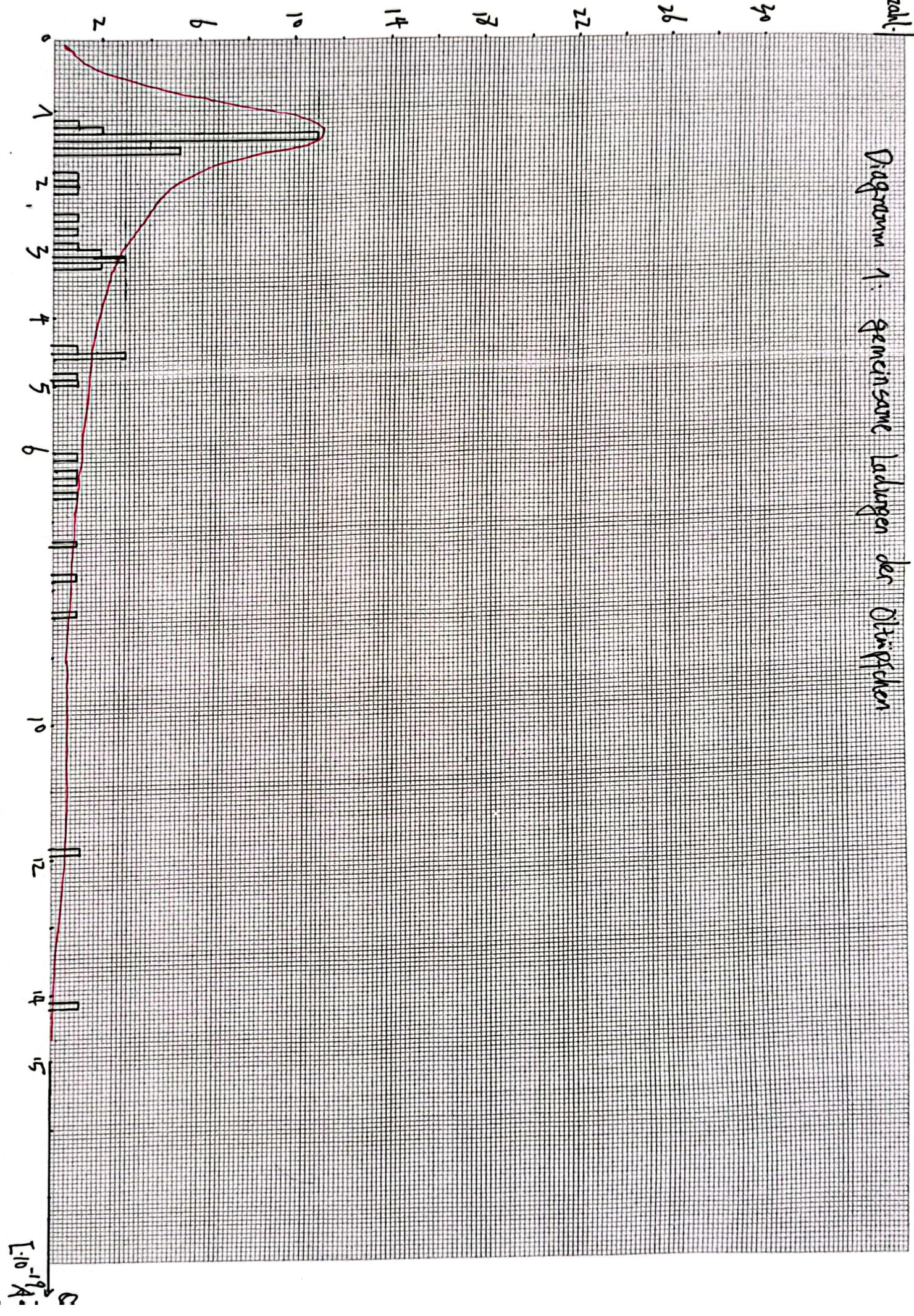
$$\Delta Q = n \cdot \Delta \tilde{q} \quad (32)$$

Mit der Berechnung des Fehlers werden wir uns weiter unten in der Auswertung beschäftigen.

Die Maxima im Histogramm liegen deutlich nah bei den theoretisch berechneten Werten (unter Berücksichtigung der Fehler), aber nicht zwischen ihnen. Dies untermauert die Annahme, dass das erste Maximum der einfachen Elementarladung entspricht.

Anzahl.

Diagramm 1: gemeinsame Ladungen der Ölküpfchen



3.3 Abschätzung des systematischen Fehlers Δq

Wir schätzen den systematischen Fehler $\Delta q/q$ unter Berücksichtigung der oben angegebenen Fehler einiger Eingabegrößen ab. Wir nehmen dann für den Fehler der Spannungsmessung 0,5%, für den Fehler der Viskosität η (einschließlich des Korrekturfaktors) 2,0% und für den Fehler der Öldichte 0,5 % an.

Gemäß Gleichung (14) sehen wir, dass q proportional zu $\eta^{\frac{3}{2}}$ ist, was bei partieller Ableitung nach η einen zusätzlichen Vorfaktor von $\frac{3}{2}$ ergibt. Der Faktor $\frac{1}{2}$ lässt sich erklären durch die lineare Abhängigkeit von q von $\rho^{-\frac{1}{2}}$. Für den Faktor im Ausdruck mit s liegt dies daran, dass s und v in linearer Beziehung stehen und q proportional zu $v^{\frac{3}{2}}$ ist. Nach der partiellen Ableitung nach s ist gleichbedeutend nach v daher kommt der Faktor $\frac{3}{2}$.

Laut Praktikumsskript berechnet sich der Fehler Δq mit der folgenden Formel:

$$\frac{\Delta q}{q} = \sqrt{\left(\frac{3\Delta s}{2s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\rho}{2\rho}\right)^2 + \left(\frac{3\Delta\eta}{2\eta}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2} \quad (33)$$

$\Delta s/s$ lässt sich berechnen als:

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{\Delta(1Sk)}{1Sk} = \frac{0,13}{5,00} \approx 0,026 \quad (34)$$

Nun setzen wir die Werte sowie Relationen in die Gl.(33):

$$\Delta\rho = 0,5\% \cdot \rho_{\text{Öl}} = 0,5\% \cdot 871 \text{ kg/m}^3 \approx 4,355 \text{ kg/m}^3 \quad (35)$$

$$\rho = 869,71 \text{ kg/m}^3 \quad (36)$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{4,355}{869,71} \approx 0,005 \quad (37)$$

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{0,5\%U}{U} = 0,005 \quad (38)$$

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{2,0\%\eta}{\eta} = 0,020 \quad (39)$$

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{6}{0,05} \approx 0,008 \quad (40)$$

(41)

Wir setzen nun alle Werte in die Gl.(33) und bekommen:

$$\Rightarrow \frac{\Delta q}{q} \approx 0,04 \quad (42)$$

Jetzt wissen wir erst aus 3.2, dass der Fehler der gemessenen Ladungen beträgt $\Delta Q = n \cdot \Delta \tilde{q}$, wobei $\Delta \tilde{q}/\tilde{q} = 0,04$ ist.

3.4 Anschätzung der Fehler bei der Einzelmessung der Ladungen

Wir nehmen an, dass der statistische Fehler im wesentlichen auf den Messfehlern beruht, die wir bei den Geschwindigkeitsmessungen gemacht haben.

Um den Fehler aus der Geschwindigkeitsmessung abzuschätzen, beginnen wir damit, den Mittelwert μ der ersten fünf gemessenen Ladungen zu berechnen. Diese Messungen beziehen sich alle auf dasselbe Öltröpfchen. Wir geben insgesamt die 10 Messwerte in die Excel-Tabelle ein und benutzen die Gl.(14) um die Ladungen zu bestimmen. Den Fehler der Einzelmessungen können wir wie folgt berechnen (mit $n = 5$):

$$\mu = \frac{1,524 + 1,666 + 1,515 + 1,499 + 1,540}{5} = 1,549 \cdot 10^{-19} \text{ As} \quad (43)$$

$$\Delta q' = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^5 (q_i - \mu)^2} \approx 0,067 \cdot 10^{-19} \text{ As} \quad (44)$$

Abbildung 4: Darstellung der ersten 5 Messungen

Excel gibt den Fehler der Einzelmessung als $\Delta_{Excel}q = 0,145 \cdot 10^{-19} \text{ As}$ an. Wir können die Abweichung unseres Wertes vom Excel-Wert wie folgt berechnen:

$$\frac{|\Delta_{Excel}q - \Delta q'|}{\Delta_{Excel}q} \approx 53,7\% \quad (45)$$

Wir betrachten noch die Standardabweichung des Mittelwertes. In Excel lautet $\sigma_{q_{Excel}} = 0,020 \cdot 10^{-19} \text{ As}$

$$\sigma_{\bar{q}} = \frac{\Delta q'}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{(n-1)n} \sum_{i=1}^5 (q_i - \mu)^2} \approx 0,034 \cdot 10^{-19} \text{ As} \quad (46)$$

Die Abweichung beträgt:

$$\frac{|\sigma_{q_{Excel}} - \sigma_{\bar{q}}|}{\sigma_{q_{Excel}}} \approx 70,0\% \quad (47)$$

Vergleichbar mit dem Fehler vom Excel ist die Abweichung von unserem Fehler schon ein bisschen signifikant. Ein möglicher Grund für diese Abweichung könnte die offensichtlich zu kurz gemessene Fallzeit des zweiten Tröpfchens beim ersten Fallvorgang sein. Dies könnte auf Ungenauigkeiten beim Einschalten der Stoppuhr zu Beginn zurückzuführen sein.

Im folgenden werden wir den von Excel berechneten Wert benutzen.

3.5 Vergleich mit dem Literaturwert

Der Literaturwert der Elementarladung ist laut Wikipedia gegeben durch:

$$e_{Lit} = 1.602176634 \cdot 10^{-19} C \quad (48)$$

Aus unseren Messungen ergibt sich also mit dem von Excel ermittelten Mittelwert:

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} C \quad (49)$$

Nach Gl.(42) können wir den Fehler der gemessenen Ladungsmittelwert berechnen. Der Gesamtfehler wurde hierbei berechnet durch quadratische Addition des Fehlers aus **3.3** und **3.4**:

$$\frac{\Delta e}{e} = 0,04 \implies \Delta e \approx 0,064 \cdot 10^{-19} \text{ As} \quad (50)$$

$$\Delta e = \sqrt{(\Delta e)^2 + (\Delta_{Excel} q)^2} \approx 0,085 \cdot 10^{-19} \text{ As} \quad (51)$$

Basierend auf unseren Messungen ergibt sich daher der Mittelwert, den Excel ermittelt hat:

$$e = (1,602 \pm 0,085) \cdot 10^{-19} C \quad (52)$$

Zum Schluss möchten wir noch die Fehlerabweichung sowie den relativen Fehler betrachten:

$$\frac{|e - e_{Lit}|}{\Delta e} \approx 0,002 \quad (53)$$

$$\frac{|e - e_{Lit}|}{e_{Lit}} \approx 0,011\% \quad (54)$$

Wir sind dann ziemlich zufrieden damit, dass die Fehlerabweichung lediglich $0,002\sigma$ beträgt! Ohne Berücksichtigung der signifikanten Stellen nach drei Dezimalstellen haben wir sogar ein Experiment durchgeführt, mit dem wir den Literaturwert der Elementarladung bestimmt haben!

4 Diskussion

In diesem Experiment wurde die Elementarladung durch die Messung der Fall- und Steiggeschwindigkeit von elektrisch geladenen Öltröpfchen in einem Plattenkondensator bestimmt. Zunächst haben wir mithilfe des Millikan-Geräts 5 Mal die Fall- und Steigzeit sowie den dazugehörigen Weg gemessen, um systematische Fehler bei der Berechnung der Geschwindigkeit zu erkennen. In einer zweiten Messreihe haben wir 50 weitere Messungen durchgeführt und die entsprechenden Ladungen berechnet. Mit dieser Ladungsverteilung haben wir ein Histogramm erstellt. Die Ergebnisse zeigten eine kaum signifikante Abweichung vom Literaturwert, mit einer Fehlerabweichung von nur $0,02\sigma$. Der Versuch scheint daher geeignet zu sein, die Elementarladung zu bestimmen.

Die meisten Messungen ergaben Werte in der Nähe von $1e$, wobei 24 Messungen in diesem Bereich lagen. Es gab jedoch auch eine starke Streuung in der Ladungsverteilung, was die Erstellung eines homogenen Histogramms erschwerte (es gab auch Werte um $14,179 \cdot 10^{-19} As$, aber die meisten lagen zwischen $1e$ und $5e$). Dies könnte darauf zurückzuführen sein, dass es schwierig war, Tröpfchen mit nur einer Elementarladung zu identifizieren. Möglicherweise war das Mikroskop nicht scharf genug eingestellt.

Ein weiterer Faktor waren die Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Öltröpfchen. Wir beobachteten einige größere Öltröpfchen mit geeigneten Ladungen für einen langsamem Aufstieg im elektrischen Feld. Diese wurden jedoch oft stark von benachbarten Öltröpfchen beeinflusst, entweder durch Abstoßung oder Anziehung aufgrund gleicher oder unterschiedlicher Ladungen, daher gibt es eine erhebliche Verzögerung und auch führte zu Messfehlern.

Bei der Fehlerabschätzung für einzelne Messungen wurden die Fehler in der zurückgelegten Strecke gemäß Gleichung (33) berücksichtigt, wobei ein Fehler in der Strecke benötigt wurde. Bei Strecke Fehlerabschätzung haben wir einfach angenommen, dass $\Delta s/s =$

$\Delta(1Sk)/1Sk$. Die Reaktionszeit des Menschen bei der Gerätekontrolle wurde jedoch vernachlässigt.

Es traten jedoch einige Probleme bei der Bestimmung der Elementarladung auf. Insbesondere lieferte die Excel-Tabelle lange Zeit keine geeigneten Werte. Das Starten und Stoppen der Stoppuhr erforderte häufige Neuanpassungen, was zeitaufwendig war. Darüber hinaus fiel auf, dass der Fehler in der bestimmten Elementarladung relativ klein war, etwa 17% des bestimmten Werts. Bei der Untersuchung der einzelnen Beiträge zum Fehler Δe stellte sich heraus, dass Δq etwa doppelt so groß war wie $\Delta_{Excel}q$. Letzterer setzte sich aus verschiedenen Komponenten zusammen. Nach Analyse der einzelnen Terme wurde festgestellt, dass insbesondere der Fehler in der Luftviskosität einen Beitrag zum Fehler von q leistete. Dieser hätte durch Berücksichtigung des im Skript erwähnten Korrekturterms reduziert werden können.