UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

K. Wiegand, T. Stalljohann, T. Witt
Sommersemester 2025
Heidelberg, 13. Mai 2025

Grundlagen der Geometrie und Topologie

Übungsblatt 5

Stichworte: Vektorfelder, Flüsse und Lie-Ableitung

Für Aufgabe 1 benötigen Sie das Konzept der *Partition der Eins*, welches wir nun einführen.

Proposition (Partition der Eins)**.** *Gegeben sei eine glatte Mannigfaltigkeit M und eine beliebige offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von M. Dann existiert eine Partition der Eins $(\rho_i)_{i\in I}$ zur Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$, d.h. $(\rho_i)_{i\in I}$ erfüllt die folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für jedes $i \in I$ ist $\rho_i : M \to \mathbb{R}$ glatt mit $0 \leq \rho_i \leq 1$.*

(ii) $\operatorname{supp}(\rho_i) := \overline{\{\, p \in M \mid \rho_i(p) \neq 0 \,\}} \subseteq U_i$ *für jedes $i \in I$.*

(iii) *Für jedes $p \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von p sodass*

$$\left\{\, i \in I \,\middle|\, U \cap \operatorname{supp}(\rho_i) \neq \varnothing \,\right\}$$

eine endliche Menge ist.

(iv) $\sum_{i\in I} \rho_i = 1$ *auf M.*

Man bemerke, dass wegen Eigenschaft (iii) für jedes $p \in M$ eine Umgebung U um p existiert, sodass auf U nur endlich viele ρ_i nicht verschwinden. Insbesondere sind an jedem Punkt in M in der Summe in (iv) nur endlich viele Terme ungleich Null.

Sie dürfen die obige Proposition im Folgenden ohne Beweis annehmen.

Aufgabe 1 *Schnitte von Vektorbündeln* (3+1 Punkte)

Sei $\pi : E \to M$ ein glattes Vektorbündel über der Mannigfaltigkeit M.

a) Gegeben seien Teilmengen $A \subseteq U \subseteq M$ mit A abgeschlossen in M und U offen in M. Zeigen Sie, dass für jeden glatten[1] Schnitt $\sigma : A \to E$ ein glatter Schnitt $\widetilde{\sigma} : M \to E$ existiert mit $\widetilde{\sigma}|_A = \sigma$ und

$$\operatorname{supp}(\widetilde{\sigma}) := \overline{\left\{\, p \in M \,\middle|\, \widetilde{\sigma}(p) \neq 0 \,\right\}} \subseteq U \quad .$$

Hinweis: Man behandle zunächst den Fall, in dem $E \cong M \times \mathbb{R}^n$ ein triviales Vektorbündel ist. Wähle für jedes $p \in A$ eine Umgebung $U_p \subseteq U$ von p und einen glatten Schnitt

[1] Glattheit bedeutet hier: Für jedes $p \in A$ existiert eine offene Umgebung $U_p \subseteq M$ um p und ein glatter Schnitt $\sigma_p : U_p \to E$ mit $\sigma_p|_{U_p \cap A} = \sigma|_{U_p \cap A}$.

$\sigma_p : U_p \to E$, der σ lokal fortsetzt, sowie eine Partition der Eins $(\rho_p)_{p\in A} \cup (\rho_{M-A})$ zur offenen Überdeckung $(U_p)_{p\in A} \cup (M-A)$ von M. Definiere nun

$$\widetilde{\sigma} := \sum_{p\in A} \rho_p \, \sigma_p \ .$$

Man zeige, dass dies wohldefiniert ist und $\widetilde{\sigma}$ eine glatte Fortsetzung von σ ist. Nun behandle man den allgemeinen Fall mittels Trivialisierungen und noch einer Partition der Eins.

b) Benutzen Sie a) um zu folgern, dass für $p \in M$ und eine beliebige offene Umgebung $U \subseteq M$ von p für jedes $e \in E_p = \pi^{-1}(p)$ ein glatter Schnitt $\sigma : M \to E$ mit $\sigma(p) = e$ und $\operatorname{supp}(\sigma) \subseteq U$ existiert.

Aufgabe 2 *Integralkurven auf dem Torus* (4 Punkte)

Auf dem 2-Torus $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ sei für $\alpha \in (0, +\infty)$ das konstante Vektorfeld X_α gegeben durch

$$X_\alpha\left([x,y]\right) := \partial_x + \alpha\, \partial_y \qquad , \, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Zeigen Sie, dass (maximale) Integralkurven von X_α genau dann periodisch sind, wenn α rational ist. Zeigen Sie, dass das Bild $\gamma(\mathbb{R})$ von (maximalen) Integralkurven γ für irrationales α dicht in $\mathbb{T}^2$ liegt und folgern Sie, dass $\gamma(\mathbb{R})$ keine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{T}^2$ ist.
Hinweis: Für die Dichtheit kann es nützlich sein, folgendes Zwischenresultat zu zeigen:
Sei $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ und $\pi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}\,,\ x \mapsto [\alpha x] = \alpha x + \mathbb{Z}$. Dann ist $\pi_\alpha(\mathbb{Z})$ dicht in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3 *Gradientenflusslinien* (2+2 Punkte)

Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine glatte Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und bezeichne mit $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,,\ \nabla f(x) := (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\,,\ \dots\,,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))$, das Gradientenvektorfeld von f. Integralkurven von ∇f heißen auch *Gradientenflusslinien* (von f). Zeigen Sie

a) Ist $\gamma : I = (a,b) \to \mathbb{R}^n\,,\ -\infty \le a < b \le +\infty$, eine nicht-konstante Gradientenflusslinie von f, so ist $f \circ \gamma$ streng monoton steigend. Folgern Sie, dass γ nicht periodisch ist.

b) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Gradientenflusslinie von f mit $\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = x_0$. Folgern Sie, dass x_0 ein kritischer Punkt von f ist.

Aufgabe 4 *Lie-Ableitungen* (4 Punkte)

Seien X, Y Vektorfelder auf der glatten Mannigfaltigkeit M. Bezeichne mit $\phi_X : \mathbb{R} \times M \to M$, den (nach Annahme vollständigen) Fluss von X und sei $\mathcal{L}_X Y = [X,Y]$ die Lie-Ableitung von Y in Richtung X. Sei $(t_0, p) \in \mathbb{R} \times M$ beliebig. Zeigen Sie

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \Big((\phi_X^t)^* Y\Big)_p = \Big((\phi_X^{t_0})^* \mathcal{L}_X Y\Big)_p \in T_pM \ .$$

Hinweis: Der Fluss ϕ_X ist eine glatte Funktion auf $\mathbb{R} \times M$. Folgern Sie daraus, dass $t \mapsto ((\phi_X^t)^* Y)_p$ eine glatte Kurve im endlich-dimensionalen Vektorraum T_pM ist. Also ist die linke Seite in der obigen Gleichung wohldefiniert.

Abgabe bis Dienstag, 20. Mai 2025, 13:00 Uhr im MaMpf in Zweiergruppen. Abgabe zu dritt ist erlaubt.