Physikalisches Anfängerpraktikum II
Sommersemester 2023

Versuch 221 Tutor: Felix Waldherr

Adiabatenkoeffizient

1 Einleiung[1]

1.1 Ziel des Versuchs

In diesem Experiment soll das Verhältnis der spezifischen Wärmen c_p/c_V für Luft auf zwei verschiedene Weisen und für Argon nach Rüchardt gemessen werden.

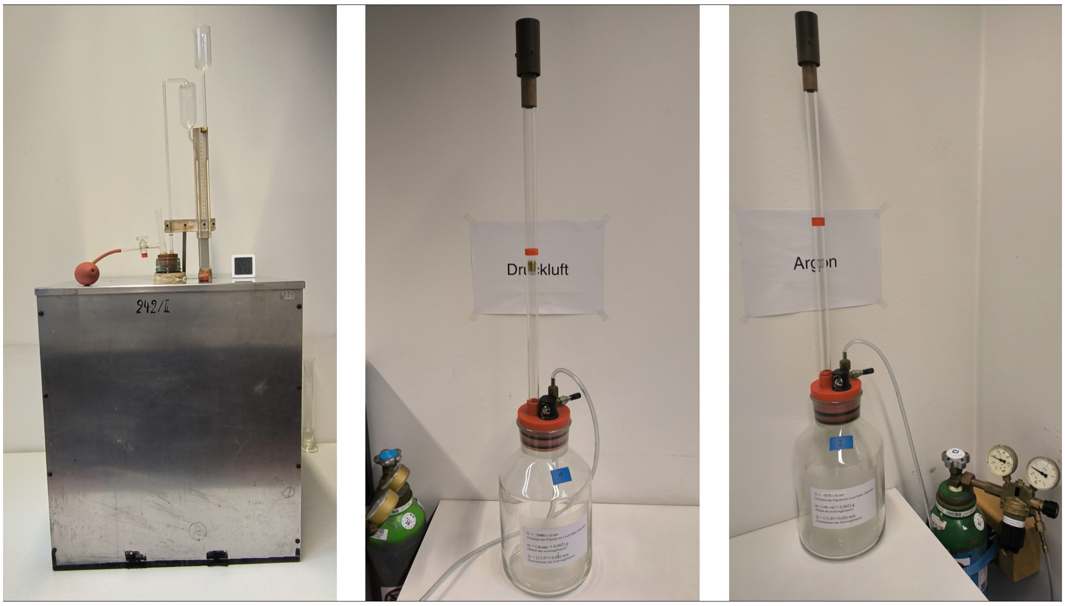

Abbildung 1: Versuchsaufbau

1.2 Messung des Adiabatenkoeffizienten nach Clément und Desormes

Für den Zustand 1 wird im Gasbehälter ein Überdruck erzeugt, wodurch sich das Gas erwärmt. Wenn es wieder auf Zimmertemperatur gekühlt ist, ist es im Zustand 1 mit Volumen V_1, Druck p_1 und Zimmertemperatur T_1. Für den Druck gilt:

$$p_1 = b + \rho h_1 g \tag{1}$$

Dabei sind b äußere Luftdruck, h_1 Höhendifferenz und A das Querschnitt des Manometers und ρ die Dichte .

[1] Dr. J.Wagner - Physikalisches Anfängerpraktikum - V. 2.0β Stand 04/2023 - Python Edition

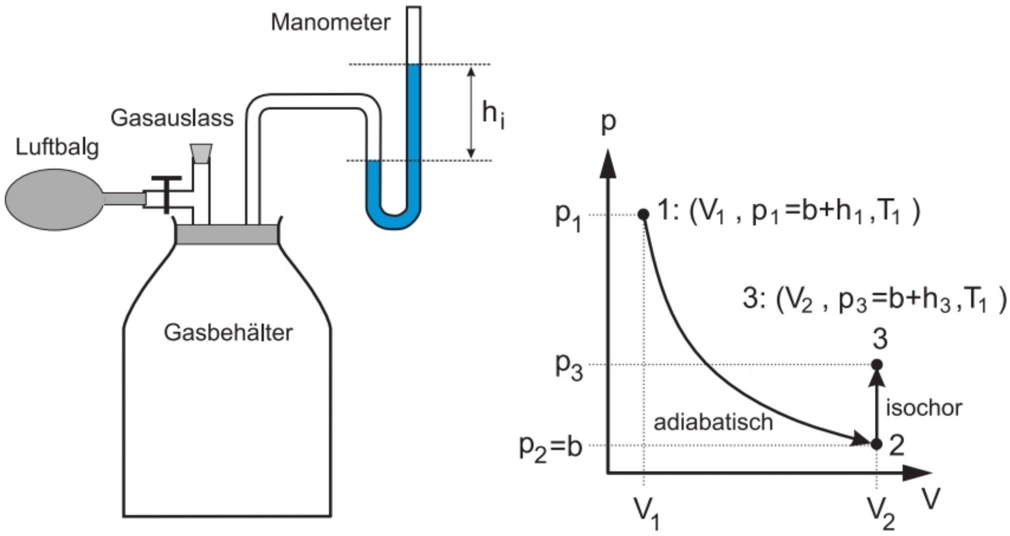

Abbildung 2: Aufbau von Clément und Desormes sowie das pV-Diagramm

Für den Zustand 2 wird ein Druckausgleich mit der Umluft durchgeführt ($p_2 = b$) und wir nehmen an, dass kein Wärmeaustausch stattfindet. Bei diesem adiabatischen Prozess vergrößert sich das Volumen um ΔV und das Gas kühlt um ΔT. Es befindet sich nun in Zustand 2 mit Volumen V_2 und Temperatur T_2:

$$V_2 = V_1 + \Delta V \qquad T_2 = T_1 - \Delta T \tag{2}$$

Nun wird der Prozess 3 eine isochore Zustandsänderung durchgeführt, der Druck steigt an bis die Temperatur wieder auf Zimmertemperatur ($T_3 = T_1$) erreicht. Das Gas befindet sich im Zustand 3:

$$V_3 = V_2 = V_1 + \Delta V \qquad p_3 = b + \rho h_3 g \tag{3}$$

Die Zustände 1, 2 sind durch die Poissonsche Gleichung miteinander verknüpft:

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa \iff (b + \rho h_1 g) V_1^\kappa = b(V_1 + \Delta V)^\kappa \tag{4}$$

$$b(V_1 + \Delta V)^\kappa = b V_1^\kappa (1 + \frac{\Delta V}{V_1})^\kappa \approx b V_1^\kappa (1 + \kappa \frac{\Delta V}{V_1}) \tag{5}$$

Für die Approximation benutzen wir die Annahme, dass $\Delta V \ll V_1$ ist. Daher bekommen wir:

$$\frac{\rho h_1 g}{b} = \kappa \frac{\Delta V}{V_1} \tag{6}$$

Der Zusammenhang zwischen 1 und 3 ist durch das Boyle-Mariotte Gesetz ($pV = const$) gegeben:

$$(b + \rho h_1 g) V_1 = p_1 V_1 = p_3 V_3 = (b + \rho A g h_3)(V_1 + \Delta V) \tag{7}$$

Mit (1), (3) und (6) erhalten wir einen Ausdruck für den Adiabatenkoeffizienten κ:

$$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_3} \tag{8}$$

1.3 Messung des Adiabatenkoeffizienten nach Rüchhardt

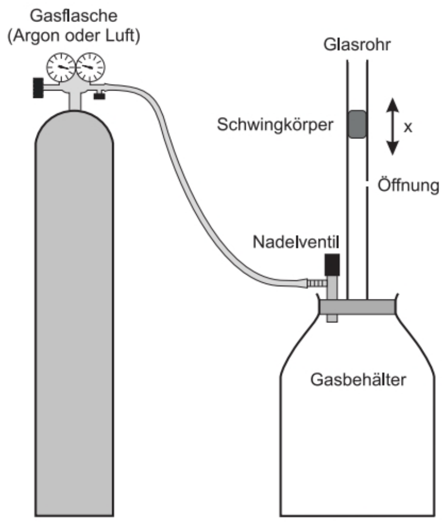

Abbildung 3: Aufbau von Clément und Desormes sowie das pV-Diagramm

Ein Schwingkörper im Glasrohr, fast gleicher Durchmesser, schwingt aufgrund des periodischen adiabatischen Gasdrucks. Eine 1 mm Öffnung in der Mitte ermöglicht einen gleichmäßigen Gasstrom: Unter der Öffnung erhöht sich der Druck auf den Schwingkörper, darüber entweicht Gas, und der Druck sinkt. Im Gleichgewicht bezeichnet sich der Druck in der Flasche:

$$p = p_0 + \frac{mg}{A} \tag{9}$$

Dabei benutzen wir das Newton-Gesetz für kleine Druckänderungen dp sowie die Poisson-Gleichung:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = a\ dp \qquad pV^\kappa = const \tag{10}$$

Durch Differentiation der Poissonschen Gleichung und Einsetzen in die Bewegungsgleichung ergibt sich die für einen harmonischen Oszillator:

$$\ddot{x} + \frac{\pi^2 r^4 \kappa p}{mV} x = 0 \tag{11}$$

Daraus kann die Kreisfrequenz ω und mit $T = 2\pi/\omega$ die Periodendauer des Schwingkörpers bestimmt werden. Es folgt der Adiabatenkoeffizient:

$$\kappa = \frac{4mV}{r^4 T^2 p} \tag{12}$$

2 Versuchsdurchführung

Versuchsaufbau, Versuchsdurchführung und Messprotokoll siehe folgende Seiten.

Messprotokoll 221 — 26.01.2024

Adiabatenkoeffizient $\kappa = \frac{C_p}{C_v}$ — Yubei Shi, Yufeng Shi

Messgeräte:
- Gasbehälter mit Manometeraufsatz und Luftbalg (Clément-Desormes)
- Gasbehälter mit Rohransatz und Nadelventil (Rüchardt)
- Glasrohr mit zylindrischem Schwingkörper
- Gasflaschen
- Stoppuhr.

Raumtemperatur: 21.6 °C ± 0.3 °C

I. Messung nach Clément und Desormes

Es wird am beschriebenen Aufbau durch Pumpen am Luftbalg ein Überdruck im Gasbehälter erzeugt, und einige Minuten bis zum Temperaturausgleich gewartet. Notieren die Manometeranzeige.

Es wird nun für etwa 2s der Auslass geöffnet, und wieder der T-ausgleich abgewartet. 5 mal wiederholen.

Tabelle 1: Messung nach Clément-Desormes

h_1 [cm]	h_3 [cm]
5.7	1.1
7.2	1.6
8.0	1.4
8.5	1.8
6.3	1.4

$\Delta h = 0.05$ cm.

II. Messung nach Rüchardt

Ein Auslaßdruck von etwa 0.4 bar einstellen. Vor Beginn der Messung ein paar Minuten bis zur vollständigen Füllung der Apparatur mit dem genutzten Gas abwarten. Zeit für 50 Schwingungen des Schwingkörpers messen.

- Luft: Volumen $V = (5460 \pm 5)\,\text{cm}^3$, Masse der Schwingkörper (SK) $m = (26.006 \pm 0.002)$ g, Durchmesser des SKs

$2r = (15.97 \pm 0.02)$ mm

- **Argongas**: $V = (5370 \pm 5)\,cm^3$,
  $m = (26.116 \pm 0.002)\,g$
  $2r = (15.95 \pm 0.02)\,mm$

Luftdruck in beiden Fällen (977.6 ± 0.05) bar

$t_{Luft} = (59 \pm 0.5)\,s$; $t_{Ar} = (57.4 \pm 0.5)\,s$

3 Auswertung

Für beide Messmethoden wird die Adiabatenkoeffizienten der entsprechenden Gase bestimmt und diese mit den theoretisch zu erwartenden Werten verglichen.

3.1 Methode nach Clément und Desormes

Mit (8) lässt sich das Adiabatenkoeffizient bestimmen, dabei wurden insgesamt 5 Messreihen aufgenommen:

$$\Delta\kappa = \sqrt{(\frac{h_3 \Delta h_1}{(h_1 - h_3)^2})^2 + (\frac{h_1 \Delta h_3}{(h_1 - h_3)^2})^2} \tag{13}$$

Die Ergebnisse werden in die folgende Tabelle eingetragen:

h_1 [cm]	5.7	7.2	8.5	8.5	6.3
h_3 [cm]	1.1	1.6	1.4	1.8	1.4
κ	1.239 ± 0.014	1.286 ± 0.012	1.197 ± 0.009	1.269 ± 0.010	1.286 ± 0.014

Tabelle 1: Adiabatenkoeffzient nach der 5 Messungen

Diese Werte werden nun gemittelt und der statistische Fehler als mittlerer Fehler des Mittelwerts berechnet, durch quadrieren der Addition von systematischen Fehlern lässt sich das Korffizient bestimmen als:

$$\Delta\kappa_{stat} = \frac{1}{5}\sqrt{\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{4}(\kappa_i - \bar{\kappa})^2} = 0.017 \qquad \Delta\kappa_{sys} = \frac{1}{5}\sqrt{\sum_{i=1}^{5} (\Delta\kappa_i)^2} = 0.027 \tag{14}$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\kappa_{CD} = 1.26 \pm 0.03}} \tag{15}$$

3.2 Methode nach Rüchardt

Aus den Zeitmessungen der harmonischen Oszillation können bei der Methode von Rüchardt die Adiabatenkoeffzienten für Luft κ_l und Argon κ_a berechnet werden. Der Fehler folgt mit (12):

$$\kappa = \frac{4mV}{r^4 T^2 p} = \frac{4mV}{r^4 T^2 (p_0 + mg/A)} = \frac{4mV}{r^4 T^2 (p_0 + mg/\pi r^2)} \tag{16}$$

$$\Delta\kappa = \sqrt{\left(\frac{\partial\kappa}{\partial m}\Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial V}\Delta V\right)^2 + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial r}\Delta r\right)^2 + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial T}\Delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial p_0}\Delta p_0\right)^2} \tag{17}$$

$$= \kappa\sqrt{(\frac{\Delta m}{m})^2 + (\frac{\Delta V}{V})^2 + (\frac{\Delta r}{r})^2 + (\frac{\Delta T}{T})^2 + (\frac{\Delta p_0}{p_0})^2} \tag{18}$$

Die Fehler können jeweils aus dem Messprotokoll ablesen, dabei haben wir angenommen, dass es keinen Fehler für g gibt. Die Periodendauer T_j berechnet sich aus den gemessenen Zeiten t und der Anzahl der Schwingungen:

$$T = \frac{t}{N} \qquad \Delta T = \frac{\Delta t}{N} \tag{19}$$

Wir setzen alle Werte in die Gleichungen und bekommen:[2]

$$\underline{\underline{\kappa_l = 1.45 \pm 0.37}} \qquad \underline{\underline{\kappa_a = 1.50 \pm 0.39}} \tag{20}$$

Wir vergleichen zum Schluss die ermittelten Adiabatenkoeffizienten für Luft mit verschiedenen Methoden:

$$\frac{|\kappa_{CD} - \kappa_l|}{\sqrt{(\Delta\kappa_{CD})^2 + (\Delta\kappa_l)^2}} \approx 0.51 \tag{21}$$

Die Fehlerabweichung beträgt 0.51σ und liegt innerhalb von 3σ und ist damit nicht signifikant.

4 Diskussion

Im Experiment wurde der Adiabatenkoeffizient κ mithilfe von zwei verschiedenen Methoden ermittelt. Dabei wurde κ sowohl für Luft als auch für Argon mittels der Rüchardt-Methode bestimmt, und zusätzlich wurde eine weitere Bestimmung für Luft unter Verwendung der Clément-Desormes-Methode durchgeführt.

Der Literaturwert für den Adiabatenkoeffizienten von Luft kann durch die Anteile der Gase in Luft berechnet werden. Luft besteht zu 78.08% aus Stickstoff, 20.95% aus Sauerstoff, 0.93% aus Argon und 0.04% aus Kohlenstoffdioxid.[3] Somit ergibt sich als Literaturwert $\kappa(\text{Luft}) = 0,7808 \cdot 1,401 + 0,2095 \cdot 1,398 + 0,0093 \cdot 1,648 + 0,0004 \cdot 1,293 = 1,403$. Der Literaturwert für Argon beträgt $\kappa(\text{Argon}) = 1,648$. Mit den Fehlerabweichungen jeweils 0.12σ der Luft und 0.38σ der Argon von den experimentell ermittelten Ergebnissen wird eine Kosistenz zwischen Theorie und Experiment gezeigt. Die größere Abweichung bei Argon könnte sich auf einer nicht exakt symmetrischen Schwingung im Rohr zurückführen lassen.

Im ersten Teil des Experiments wurden insgesamt fünf Messreihen betrachtet. Dabei ist deutlich erkennbar, dass der durch die Clement-Desormes-Methode bestimmte Adiabatenkoeffizient wesentlich geringere Fehler aufweist im Vergleich zur Rüchardt-Methode. Dies lässt sich darauf zurückführen, dass die erste Methode weniger potenzielle Fehlerquellen aufweist (nur h_1, h_3), während bei der zweiten gleichzeitig

[2]Python Code 2

[3]Wikipedia (`https://de.wikipedia.org/wiki/Luft`)

fünf Fehlerquellen berücksichtigt werden müssen. Es ist jedoch wichtig zu beachten, dass beispielsweise eine überschätzte Ablesegenauigkeit der Drucke am Manometer und die ungleichmäßige Öffnungszeit ebenfalls zu Fehlern führen können, auch wenn sie möglicherweise weniger offensichtlich erscheinen. Zudem sollte bei der Volumenänderung ΔV in Gleichung (5) berücksichtigt werden, dass sie nicht klein genug im Vergleich zum Volumen V_1 ist. In solchen Fällen ist es vielleicht ratsam, nach besseren Näherungsmöglichkeiten zu suchen.

Im zweiten Teil des Experiments haben wir mithilfe der Rüchardt-Methode die Adiabatenkoeffizienten für Luft und Argon gemessen. Dabei zeigte sich eine Fehlerabweichung von 0.51σ für die Luft, was auf eine gewisse Kompatibilität zwischen den beiden Methoden hindeutet. Es wurde jedoch festgestellt, dass die Fehler möglicherweise leicht überschätzt wurden, beispielsweise bei der Zeitmessung mit einem Fehler von 0.5s, was als übertrieben angesehen werden kann. Zudem haben wir für die Druckmessung digitale Messgeräte verwendet, die möglicherweise nicht ausreichend sensitiv und genau genug waren, um die Messung zu gestalten. Eventuell könnte auch bei der Durchführung mit Argon ein Fehler vorliegen, wie zum Beispiel eine Vermischung des Argongases mit Luft aufgrund einer Abweichung nach unten. Dieser Effekt allein sollte jedoch, sofern die Wartezeit zwischen den Messungen angemessen berücksichtigt wurde, nicht zu einer derart extremen Abweichung führen.

Wie bereits erwähnt, erscheint die harmonische Schwingung nicht vollständig symmetrisch. Dies lässt sich auf die ungleichmäßige Änderung des Luftdrucks zurückführen. Wenn das Gas aufgrund des hohen Drucks austritt, ist die Leckagegeschwindigkeit schnell, während sie sich verlangsamt, wenn der Luftdruck abnimmt. Dies führt dazu, dass sich das eigentliche Objekt weniger nach oben bewegt als der Teil, der nach unten bewegt wird.

5 Anhang

Python Code 221

January 17, 2024

[2]:
```
import numpy as np
```

Python Code 1

[6]:
```
h1=6.3
h3=1.4
dh=0.05
kappa=h1/(h1-h3)
d_kappa=np.sqrt(((h3*dh)/(h1-h3)**2)**2+(h1*dh/(h1-h3)**2)**2)
print('kappa', kappa)
print('d_kappa', d_kappa)
```

```
kappa 1.2857142857142856
d_kappa 0.013439569179727238
```

Python Code 2

[15]:
```
#Luft
m1=26.006*10e-3
V1=5460e-6
r1=7.975e-3
T1=59/60
p0=990.2e3
g=9.81
k1=4*m1*V1/(r1**4*T1**2*(p0+m1*g/(np.pi*r1**2)))
print('k1', k1)

dV1=5e-6
dm1=0.002e-3
dr1=0.01e-3
dT1=0.25
dp0=0.5e3
dk1=k1*np.sqrt((dm1/m1)**2+(dV1/V1)**2+(dr1/r1)**2+(dT1/T1)**2+(dp0/p0)**2)
print('dk1',dk1)
```

```
k1 1.4478204895889322
dk1 0.368097545856844
```

[17]:

```
#Ar
m2=26.116*10e-3
V2=5370e-6
r2=7.985e-3
T2=57.4/60
p0=990.2e3
g=9.81
k2=4*m2*V2/(r2**4*T2**2*(p0+m2*g/(np.pi*r2**2)))
print('k2', k2)

dV2=5e-6
dm2=0.002e-3
dr2=0.025e-3
dT2=0.25
dp0=0.5e3
dk2=k2*np.sqrt((dm2/m2)**2+(dV2/V2)**2+(dr2/r2)**2+(dT2/T2)**2+(dp0/p0)**2)
print('dk2',dk2)
```

```
k2 1.5032226087486453
dk2 0.39285962677818625
```

6 Quelle

- Wagner, J. (April 2022). Physikalisches Praktikum PAP 2.1 für Studierende der Physik [Praktikumsanleitung]. Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg. Abgerufen am 29. Oktober 2023, von https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen /AP/info/Corona /PAP2_1_2023.pdf