

Grundlagen der Geometrie und Topologie
Sommersemester 2025
Dozent: Kevin Wiegand

1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Organisatorisches: Übungsaufgabe Dienstags, Termin: Mo, Di 11-13 Uhr.

Ziele der Vorlesung:

- Topologische und differenzierbare Mannigfaltigkeit
- Vektorbündel
- Lie- Gruppen
- Triangulierung und
- Überlagerung & Fundamentalgruppe

1.1 Wiederholung Topologischer Grundlage und Mannigfaltigkeit

Definition 1.1: Sei M eine Menge, ein Mengensystem $O = O_M \subset \mathcal{P}(M)$ heißt Topologie auf M , falls

- $\emptyset, M \in O$
- $U, V \in O \implies U \cap V \in O$ (endlicher Schnitt)
- $U_i \in O \forall i \in I, I$ beliebig $\implies \bigcup_{i \in I} U_i \in O$ (beliebige Vereinigung)

Das Paar (M, O) heißt topologischer Raum. $U \subseteq M$ heißt offen, falls $U \in O$; $A \subseteq M$ heißt abgeschlossen, falls $M \setminus A$ offen.

Beispiel:

1) Standardtopologie auf \mathbb{R}^n : $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\Leftrightarrow \forall x \in U \exists r_x > 0$ mit $B_{r_x}(x) := \{y \in \mathbb{R}^n | |x - y| < r_x\} \subseteq U$

Allgemein: (M, d) metrischer Raum $U \subseteq M$ offen $\Leftrightarrow \forall x \in U \exists r_x > 0$ mit $B_{r_x}(x) := \{y \in \mathbb{R}^n | d(x, y) < r_x\} \subseteq U$

2) Sei M beliebige Menge

- diskrete Topologie: $O = \mathcal{P}(M)$, also die Topologie, bei der jede Teilmenge offen ist. Diese Topologie kommt von einer Metrik (diskrete Metrik)

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = y \\ 1 & \text{wenn } x \neq y \end{cases}$$

- indiskrete Topologie: $O = \{\emptyset, M\}$, diese Topologie kommt im Allgemeinen NICHT von einer Metrik, wenn M mehr als ein Element hat. Denn sonst wäre (M, d) metrischer Raum, der hausdorff ist. Muss es ausreichend viele offene Mengen geben, um Punkte unterscheiden zu können.

3) Teilraumtopologie: (μ, O_μ) topologischer Raum, $X \subseteq M$. Wir definieren eine Topologie O_X auf X durch

$$U \in O_X : \Leftrightarrow \exists V \in O_\mu \text{ mit } U = X \cap V, O_X$$

heißt Teilraumtopologie oder induzierte Topologie auf X (vgl. Übungsaufgabe).

4) $M = \mathbb{Z}$, $U \subseteq \mathbb{Z}$ offen $\Leftrightarrow \mathbb{Z} \setminus U$ endlich oder $U = \emptyset$ ([Ko-endliche Topologie](#))

5) Die Quotiententopologie: M topologischer Raum, \sim eine Äquivalenzrelation auf M . Dann wird $M/\sim :=$ Menge der Äquivalenzklassen $= \{[x] | x \in M\}$ wird zu einem topologischen Raum durch:

$$U \subseteq M/\sim \text{ offen} \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subseteq M \text{ offen, wobei } \pi : M \rightarrow M/\sim, x \mapsto [x]$$

6) $M = \mathbb{R} \times \{+, -\}$, $(x, \xi) \sim (y, \eta) \Leftrightarrow \xi = \eta, x = y$ oder $\xi \neq \eta, x = y \neq 0$ offene Menge von M/\sim sind

- offene Intervalle I mit $0 \notin I$
- $(a, 0) \cup \{0, -\} \cup (0, b)$ $a < 0 < b$
- $(a, 0) \cup \{0, +\} \cup (0, b)$ $a < 0 < b$
- Vereinigung davon

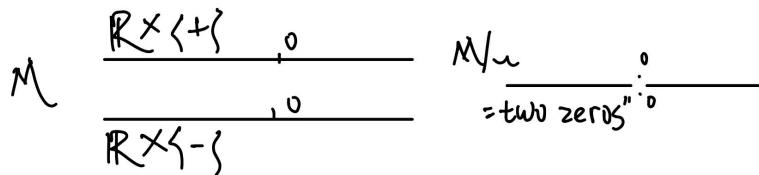


Abbildung 1: Darstellung Quotientenmenge

$U \subseteq M$ offen, falls $U \cap \mathbb{R} \times \{+\}$ offen und $U \cap \mathbb{R} \times \{-\}$ offen.

Definition 1.2: Ein Mengensystem $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(M)$ heißt Basis der Topologie O_M , falls die offene Menge aus O_M genau die Vereinigung der Mengen aus \mathcal{B} sind. Insbesondere $\mathcal{B} \subseteq O_M$. Eine (topologische) Basis auf X ist eine Menge \mathcal{B} mit folgenden Eigenschaften:

- Jeder Punkt $x \in X$ ist in mindestens einer Menge von \mathcal{B} enthalten. (Mit anderen Worten, es gilt $\bigcup \mathcal{B} = X$.)

- Ist ein Punkt $x \in X$ in zwei Mengen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ enthalten, dann gibt es $B_3 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_3$ und $B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Bemerkung: $\mathcal{B} \subseteq O_M$ ist eine Basis der Topologie \Leftrightarrow Für alle $U \in O_M$ und alle $p \in U$ ein $B \in \mathcal{B}$ mit $p \in B \subseteq U$ existiert.

Beispiel:

1) $\mathcal{B} = \{B_r(q) \subseteq \mathbb{R}^n \mid r \in \mathbb{Q}_{>0}, q \in \mathbb{Q}^n\}$ ist eine (abzählbare) Basis der Standardtopologie auf \mathbb{R}^n .

Allgemein: (M,d) metrischer Raum und $D \subseteq M$ abzählbare dichte Teilmenge, $\mathcal{B} = \{B_r(q) \subseteq M \mid r \in \mathbb{Q}_{>0}, q \in D\}$

2) $\mathcal{B} = \{\{x\} \subseteq M \mid x \in M\}$ ist eine Basis der diskreten Topologie

$\mathcal{B} = \{M\}$ ist eine Basis der indiszierten Topologie (Konvention: $\bigcup_{i \in \emptyset} B_i = \emptyset$)

Definition 1.3

- Eine Abbildung $f : (M, O_M) \rightarrow (N, O_N)$ heißt stetig, falls $f^{-1}(V) \in O_M$ für alle $V \in O_N$ (Urbild offener Mengen wieder offen).
- Eine bijektive Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt Homöomorphismus, falls f und f^{-1} stetig sind. In diesem Fall nennt man die Räume M und N homöomorph.
- Ein topologischer Raum M heißt lokal homöomorph zu \mathbb{R}^n (häufig: lokal euklidisch), falls für alle $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq M$ mit $p \in U$, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein Homöomorphismus $\phi : p \in U \rightarrow V$ existieren.

Beispiel:

- $(M, \mathcal{P}(M))$ ist lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^0 = \{0\}$. (nehme $U := \{p\} \in \mathcal{P}(M)$ offen, $V = \{0\}$ für alle p)
- Reelle Achse mit zwei Nullen ist lokal homöomorph zu \mathbb{R}^1



Abbildung 2: Lokale Homöomorphie zu \mathbb{R}^1

Definition 1.4

- Ein topologischer Raum M heißt zusammenhängend, falls kein $\emptyset \neq U \subsetneq M$ existiert, dass zugleich offen und abgeschlossen ist. (M lässt sich nicht in nicht-leere, disjunkte, offene Mengen zerlegen.)

- $X \subseteq M$ heißt zusammenhängend, falls X mit der Teilraumtopologie zusammenhängend ist.
- Ein topologischer Raum M heißt weg-zusammenhängend, falls sich je zwei Punkte in M durch einen stetigen Weg in M verbinden lassen, d.h.

$$\forall p, q \in M \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow M \text{ stetig mit } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q$$

Lemma 1.5

- M wegzusammenhängend $\implies M$ zusammenhängend
- M zusammenhängend und lokal euklidisch $\implies M$ wegzusammenhängend

Beweis. Sei $p \in M$, betrachte $W_p = \{q \in M \mid \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow M \text{ stetig mit } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}$ und zeige W_p ist offen und abgeschlossen:

(a) offen: Sei $q \in W_p$, dann existiert ein Weg γ zwischen p und q .

M lokal euklidisch $\implies \exists$ offene Umgebung U von q , wobei U homöomorph zu einer offenen Umgebung V in \mathbb{R}^n ist. Da \mathbb{R}^n wegzusammenhängend ist, ist V selbst auch wegzusammenhängend sowie U . So für alle q' in U existiert ein Weg δ zwischen q und q' . Verbinde δ und γ hat man einen Weg $\gamma \circ \delta$ zwischen p und q' konstruiert. $\implies q' \in W_p \implies U \subset W_p$ offen, aus Definition von Offenheit folgt dann W_p offen.

(b) abgeschlossen: Sei $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W_p$, $q_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} q \in \overline{W_p}$, zu zeigen $q \in W_p$. Da M lokal euklidisch, existiert eine wegzusammenhängende Umgebung U von q . Wegen Konvergenz gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$, $q_n \in U \forall n \geq N_0$. Es gibt also einen Weg γ_n zwischen q_n und q , hänge γ_n an dem Weg δ_n zwischen p und q_n ergibt sich der Weg $\gamma_n \circ \delta_n$ zwischen q und p . $\implies q \in W_p$ \square

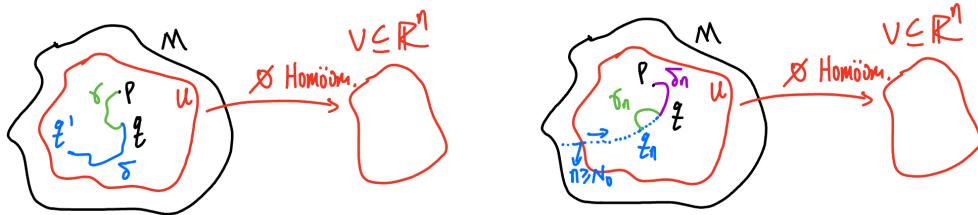


Abbildung 3: Links: Offenheit; Rechts: Abgeschlossenheit

Definition 1.6

- Ein topologischer Raum heißt (Überdeckungs-)kompakt, falls jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. (i.A. nicht dasselbe wie Folgen-kompakt, für metrische Räume schon)
- Ein topologischer Raum heißt hausdorff (auch T_α), falls für alle $p, q \in M, p \neq q$ offene Mengen $U, V \subset M$ existiert mit

- $p \in U, q \in V, U \cap V = \emptyset$

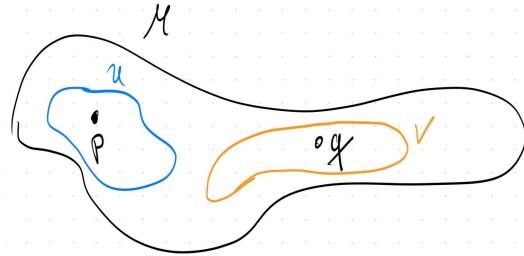


Abbildung 4: Hausdorff'scher Raum

Bemerkung: Lokal euklidisch impliziert NICHT hausdorff'sch, siehe Beispiel reelle Achse mit zwei Nullen (Problem bei $0+$ und $0-$).

Definition 1.7

Ein n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum M mit:

- (i) M ist lokal homöomorph zu \mathbb{R}^n (selbes n für alle Punkte)
- (ii) M ist hausdorff (Trennungseigenschaft)
- (iii) M besitzt eine abzählbare Basis der Topologie (zweitabzählbar)

Die lokalen Homöomorphismen $\varphi : U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ heißen Karten (lokale Koordinatensysteme / lokale Koordinaten)

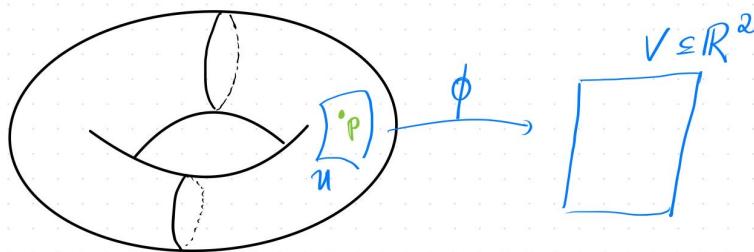


Abbildung 5: Torus $T^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ als 2-dim topologische Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^3

Die zweitabzählbarkeit garantiert, dass die Mannigfaltigkeit nicht zu groß wird.

Bemerkung

Für $M \neq \emptyset$ ist die Dimension von M eindeutig bestimmt.

D. h. sind $p \in M, U, V$ offene Mengen mit $p \in U, p \in V$ und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n, \psi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ Homöomorphismen, dann gilt: $n = m$.

Beweis. Benutzt den Satz von Brouwer: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv. Dann ist die Menge $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ offen, d. h. f ist ein Homöomorphismus aufs

Bild.

Angenommen $n \neq m$ (o. E. $n > m$).

Wir betrachten die stetige, injektive Abschneidung

$$z : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

Aber: $z(\mathbb{R}^n)$ enthält keine offene, nicht-leere Menge. ($\forall x, \forall \epsilon > 0, B_\epsilon(x) \not\subseteq z(\mathbb{R}^m)$, denn es gibt $y \in B_\epsilon(x), y_i \neq 0$ für ein i nach n)

$p \in U \cap V \subseteq M$ ist offen:

$$\underbrace{\phi(U \cap V)}_{\in \mathbb{R}^n} \xrightarrow{\phi^{-1} \text{ Homöom}} \underbrace{U \cap V}_{\in M} \xrightarrow{\psi \text{ Homöom}} \underbrace{\psi(U \cap V)}_{\in \mathbb{R}^m} \xrightarrow{z \text{ injektiv, stetig}} \mathbb{R}^n$$

Die Verkettung ist also stetig und injektiv, aber das Bild $(z \circ \psi \circ \phi^{-1})(\phi(U \cap V)) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist nicht offen, Widerspruch zum Satz v. Brower!

$$\Rightarrow m = n.$$

□

Bemerkung

- Sei M eine Mannigfaltigkeit, aus dem Metrisierungssatz von Nagata-Smirnov folgt, dass es eine Metrik auf M gibt, welche die Topologie auf M erzeugt.
- O.E. können wir annehmen, dass das Bild einer Karte ganz \mathbb{R}^n ist.
Sei $\phi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte und $p \in U$. Dann gibt es Ball $B_\epsilon(\phi(p)) \subseteq V$.

\Rightarrow Die Einschränkung $\tilde{\phi} : \phi^{-1}(B_\epsilon(\phi(p))) \rightarrow B_\epsilon(\phi(p))$ ist ein Homöomorphismus.

Durch Verketten von $\tilde{\phi}$ mit einem Homöomorphismus, der $B_\epsilon(\phi(p))$ mit \mathbb{R}^n identifiziert, folgt die Behauptung.

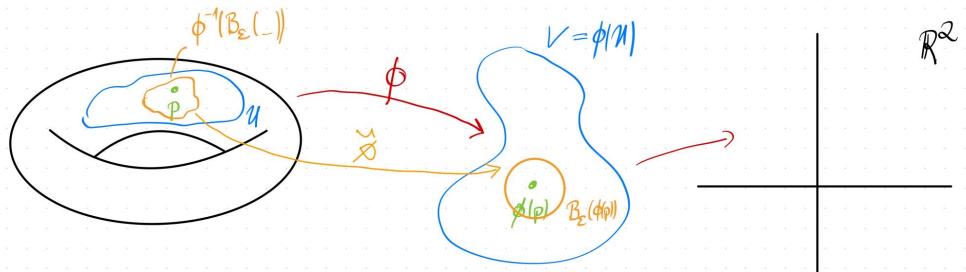


Abbildung 6: Bild von Karte ganz auf \mathbb{R}^n

Beispiele:

(i) $M = \mathbb{R}^n$, der n -dimensionale euklidische Raum, Karte: $\text{id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Allgemein: Jede offene Teilmenge von \mathbb{R}^n ist eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit.

(ii) $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$, die n -dimensionale Sphäre, mit der Teilraumtopologie des \mathbb{R}^{n+1}

Hausdorff (Teilmenge von hausdorff'schem Raum), zweitabzählbar (Teilraum Basistopologie $\{B_r(q) \mid q \in \mathbb{Q}^n, r \in Q_{>0}\}$)

Karten: (stereographische Projektion)

$$g_1 : S^n \setminus \{0, \dots, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (\text{Nordpol})$$

$$x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$$

$$g_2 : S^n \setminus \{0, \dots, 0, -1\} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (\text{Südpol})$$

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$$

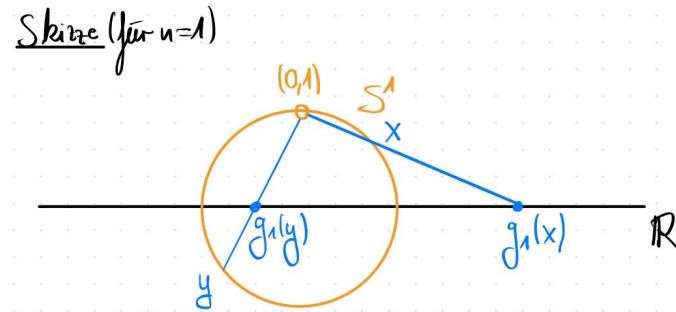


Abbildung 7: stereographische Projektion $n=1$

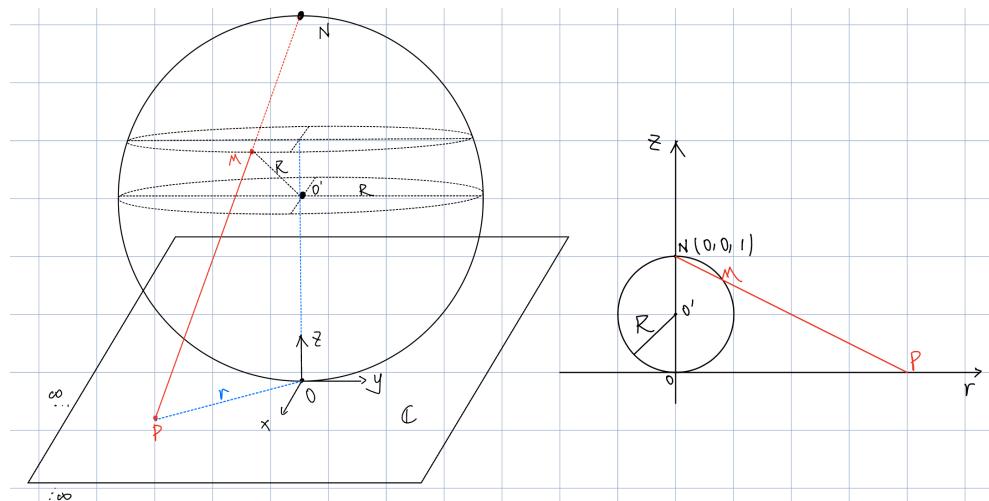


Abbildung 8: stereographische Projektion $n=2$

(iii) \mathbb{RP}^n , der n -dimensionale reell projektive Raum.

„Der Raum aller 1-dimensionalen Unterräume von \mathbb{R}^{n+1} “
 „Alle Geraden durch Null in \mathbb{R}^{n+1} “

Genauer: $\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$, wobei

$$x \sim y \iff x = \lambda y \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

\mathbb{RP}^n trägt die Quotiententopologie, d.h. sei

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{RP}^n, \quad x \mapsto [x] \quad (\text{alle Vektoren in einer Richtung})$$

die Quotientenabbildung, dann gilt:

$$U \subseteq \mathbb{RP}^n \text{ offen} \iff \pi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \text{ offen}$$

Wir schreiben die Äquivalenzklasse von x als

$$\pi((x_0, \dots, x_n)) = [(x_0, \dots, x_n)] = [x_0 : \dots : x_n] = [\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n], \quad \forall \lambda \neq 0$$

\mathbb{RP}^n ist kompakt, hausdorffsch, zusammenhängend und zweitabzählbar.
 (n-dim reelle, kompakte, glatte Mannigfaltigkeit, nicht orientierbar für $n \geq 2$)

Karten:

$$V_i = \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_i \neq 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$$U_i = \pi(V_i) = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\} = \left\{ \left[\frac{x_0}{x_i} : \dots : 1 : \dots : \frac{x_n}{x_i} \right] \right\}$$

$$\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad [x] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

φ_i ist wohldefiniert, denn:

$$\begin{aligned} [x] = [y] &\iff x \sim y \\ &\iff \exists \lambda \neq 0 : x = \lambda y \\ &\iff x_j = \lambda y_j \quad \forall j \quad \lambda \neq 0 \\ &\iff \frac{x_j}{x_i} = \frac{\lambda y_j}{\lambda y_i} = \frac{y_j}{y_i} \quad \forall j \neq i \\ \Rightarrow \varphi_i([x]) &= \varphi_i([y]) \end{aligned}$$

Die Karte misst einfach die Steigung der Geraden durch den Ursprung.

(iv) Die Kegel $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2\}$ ist keine topologische Mannigfaltigkeit (nicht lokal euklidisch bei $(0, 0, 0)$).

Satz 1.8 Eine 0-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist eine abzählbare Menge von Punkten mit der diskreten Topologie. Insbesondere sind 0-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeiten endlich.

Beweis. Sei M eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit und $p \in M$.

Dann existiert eine offene Menge $U_p \subseteq M$ mit $p \in U_p$, die homöomorph zu $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ ist.

$\Rightarrow U = \{p\} \Rightarrow$ Die Punkte in M sind offene Mengen.

- zweitabzählbar $\Rightarrow M$ abzählbar
- kompakt $\Rightarrow M$ endlich (endliche Teilüberdeckung)

□

Bemerkung: Eine zusammenhängende 1-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu S^1 oder \mathbb{R} .

Satz 1.9: Sei M eine m -dimensionale und N eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist $M \times N$ eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $m+n$. (s. Übungen)

Beispiel: Sei $M = S^1$, dann ist T^2 der 2-dimensionale Torus. Allgemein: $T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n\text{-mal}}$ ist der n -dimensionale Torus.

Bemerkung: $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, $T^n \subset \mathbb{R}^{2n}$, aber $T^2 \subset \mathbb{R}^3$. Das das kleinste m mit $T^n \subset \mathbb{R}^m$ ist $n+1$. Um einen n -dim Torus zu überdecken wird mindestens 2 Karten benötigt (Stichwort: group action, Lens Space). Im Allgemeinen benötigt man $n+1$ Karten, um eine topologische Mannigfaltigkeit abzudecken, wobei n die Dimension der Mannigfaltigkeit ist. Diese Invariante wird als *Lusternik-Schnirelmann-Kategorie* bezeichnet und steht in tiefer Verbindung zur Morsetheorie.

Für S^1 braucht man mindestens 2 Karten (stereographische Projektion + Nordpol). Produktkarten können T^n mit 2^n Karten überdecken ($T^n = S^1 \times \dots \times S^1$). Wie viele braucht man mindestens?

$$T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n \quad \text{mit Quotiententopologie} \quad x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}^n$$

1.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

In der Analysis I,II war Differenzierbarkeit eine gute Eigenschaft von Funktionen, aber es funktioniert nur auf \mathbb{R}^n . Nun wollen wir **differenzierbare Funktionen auf Mannigfaltigkeiten definieren**. (Abb. zwischen Mannigfaltigkeiten definieren). Dafür benötigen wir differenzierbare Strukturen.

Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, $p \in M$, sowie $(U, \phi), (V, \psi)$ Karten um p . Dann betrachten wir die Komposition

$$f \circ \phi^{-1} = (f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \phi^{-1}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

(auf $\phi(U \cap V)$). Können über Differenzierbarkeit von $f \circ \phi^{-1}$ bzw. $(f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \phi^{-1})$ nachdenken. Diese sollte unabhängig von der gewählten Karte sein.

Definition 1.20 (Verträglichkeit von Karten) Zwei Karten (U, ϕ) und (V, ψ) heißen verträglich, falls die Abbildung

$$\phi \circ \psi^{-1} : \underbrace{\psi(U \cap V)}_{\in \mathbb{R}^n} \rightarrow \underbrace{\phi(U \cap V)}_{\in \mathbb{R}^n}$$

ein *Diffeomorphismus* von offenen Mengen in \mathbb{R}^n ist. Die Abbildung $\phi \circ \psi^{-1}$ heißt Kartenwechsel.

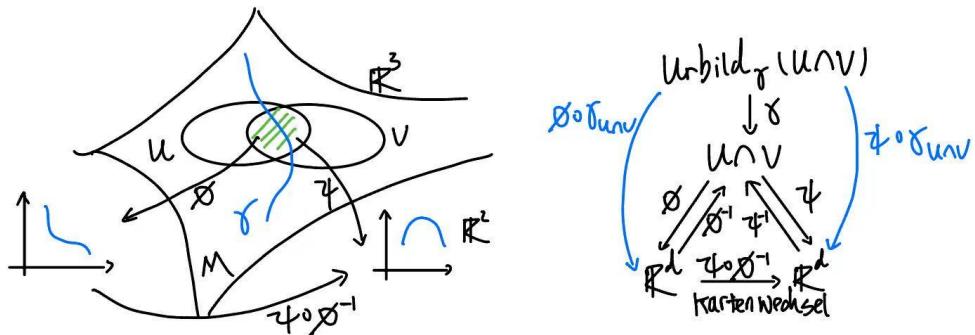


Abbildung 9: Verträglichkeit zweier Karten

Eine Menge von Karten $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ heißt *Atlas*, wenn die Karten

- M überdecken
- je zwei Karten verträglich sind

Ein Atlas heißt *maximal*, wenn jede Karte, die mit allen Karten in \mathcal{A} verträglich ist, bereits in \mathcal{A} enthalten ist.

Lemma 1.21 Sei A ein Atlas für M , und sei A_{\max} die Menge aller Karten von M , die mit allen Karten aus A verträglich sind. Dann gilt:

1. $A \subseteq A_{\max}$
2. A_{\max} ist ein Atlas
3. A_{\max} ist ein maximaler Atlas
4. Jeder Atlas ist in genau einem maximalen Atlas enthalten (Widerspruchsbeweis)

Beweis. Angenommen, es gibt zwei maximale Atlanten \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 , die \mathcal{A} enthalten. Da \mathcal{M}_1 maximal ist, muss er alle mit \mathcal{A} kompatiblen Karten enthalten, also $\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_1$. Analog folgt $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$. Somit gilt $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$. Ein maximaler Atlas ist also durch die Forderung, „alle kompatiblen Karten zu enthalten“, eindeutig festgelegt. \square

Definition 1.22 (Differenzierbare Mannigfaltigkeit)

Eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit C^∞ - oder glatte Mannigfaltigkeit (M, A) ist eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit M zusammen mit einem maximalen Atlas (differenzierbare Struktur) A .

Bemerkungen:

- Ein maximaler Atlas definiert eine differenzierbare Struktur.
- Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten, die keine differenzierbare Struktur zu lassen (z.B. Alexander's horned sphere (Einbettung der 2-Sphäre S^2 in \mathbb{R}^3) https://en.wikipedia.org/wiki/Alexander_horned_sphere).
- Auf einer topologischen Mannigfaltigkeit kann es unterschiedliche differenzierbare Strukturen geben.
- Mit Mannigfaltigkeit meinen wir im Folgenden differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Beispiel:

1. Jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein n -dim (differenzierbare) Mannigfaltigkeit mit dem Atlas $A = \{(U, \text{id})\}$
2. Die Sphäre S^n ist eine n -dim (differenzierbare) Mannigfaltigkeit.
 $\{(U_i, g_i)\}$ ($i = 1, 2$) die Karten aus der letzten Vorlesung (stereographische Projektionen).

Zu zeigen: Der Kartenwechsel $g_1 \circ g_2^{-1}$ ist differenzierbar.

Für $x \in g_2(U_1 \cap U_2) = g_2(S^n \setminus \{\pm e_{n+1}\}) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$g_1 \circ g_2^{-1}(x) = g_1\left(\frac{2x}{1 + \|x\|^2}, \frac{1 - \|x\|^2}{1 + \|x\|^2}\right) = \dots = \frac{x}{\|x\|^2} \quad (\text{Spiegelung an } S^{n-1})$$

Damit sind die Karten (U_i, g_i) ($i = 1, 2$) verträglich.

Da sei S^n überdecken erhalten wir den Atlas $A = \{(U_i, g_i), i = 1, 2\}$

3. Der reell-projektive Raum \mathbb{RP}^n ist eine n -dim. (differenzierbare) Mannigfaltigkeit.

Mit den Karten (U_i, ψ_i) aus der letzten Vorlesung gilt:

$$\psi_j \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \psi_j(U_i \cap U_j)$$

$$\begin{aligned} (\psi_j \circ \psi_i^{-1})(y_0, \dots, y_{n-1}) &= \psi_j([y_0 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_{i+1} : \dots : y_{n-1}]) \\ &= \left(\frac{y_0}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, 1, \frac{y_{i+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_{n-1}}{y_j} \right) \end{aligned}$$

Dies ist ein Diffeomorphismus.

Bemerkung $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ ist eine n-dim., kompakte, (weg-)zusammenhängende Mannigfaltigkeit.

Allgemeiner: Sei V ein $(n+1)$ -dimensionaler Vektorraum über einem (Schief-)körper K , dann definieren wir den projektiven Raum

$K\mathbb{P}^n :=$ Menge aller 1-dim. Unterräume von V

M.a.W: $K\mathbb{P}^n$ ist der Quotient von $V \setminus \{0\}$

$K\mathbb{P}^n = V \setminus \{0\} / \sim$ wobei $v \sim w \Leftrightarrow v, w$ linear abhängig

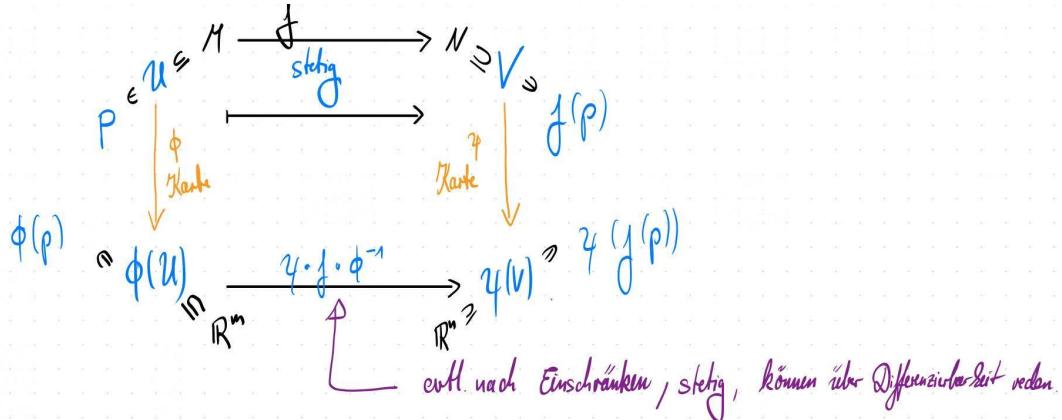
$K = \mathbb{C} \Rightarrow$ komplex projektiver Raum $K = \mathbb{H} \Rightarrow$ quaternionischprojektiver Raum

1.3 Differenzierbare Abbildungen

Definition 1.30: Seien M, N zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine stetige Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt *differenzierbar*, wenn es um jeden Punkt $p \in M$ Karten (U, ϕ) und um $f(p) \in N$ (V, ψ) gibt, so dass auf einer Umgebung $W \subseteq \phi(U \cap f^{-1}(V))$ von $\phi(p)$ die Abbildung

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : W \subset \underbrace{\phi(f^{-1}(V) \cap U)}_{\in \mathbb{R}^m} \rightarrow \underbrace{\psi(V)}_{\in \mathbb{R}^n}$$

differenzierbar ist.



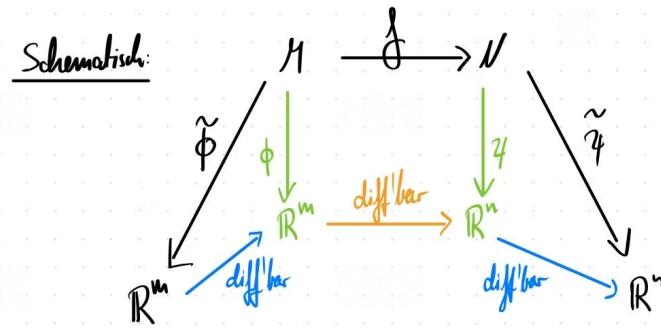
Ein *Diffeomorphismus* ist ein Homöomorphismus f , für den f und f^{-1} differenzierbar sind. In diesem Fall nennen wir die Mannigfaltigkeiten M und N *diffeomorph* (schreibe $M \cong N$).

Bemerkung

- Die Definition ist unabhängig von der Wahl der Karten. D.h.: Sei f differenzierbar bzgl. der Karten (U, ϕ) von M und (V, ψ) von N ; $p \in U, f(p) \in V$, und

seien (U', ϕ') , (V', ψ') verträgliche Karten von M bzw. N; $p \in U'$, $f(p) \in V'$, so gilt nach Einschränkung:

$$\begin{aligned}\psi' \circ f \circ (\phi')^{-1} &= (\psi' \circ \underbrace{\psi^{-1}}_{id_V}) \circ (\underbrace{\psi \circ f \circ \phi^{-1}}_{id_U}) \circ (\phi \circ (\phi')^{-1}) \\ &= \underbrace{(\psi' \circ \psi^{-1})}_{\text{diff'bar}} \circ \underbrace{(\psi \circ f \circ \phi^{-1})}_{\text{diff'bar nach Annahme}} \circ \underbrace{(\phi \circ \phi')}_{\text{diff'bar}}\end{aligned}$$



- ii) Den unendlich-dimensionalen Vektorraum der differenzierbaren Funktionen auf M mit Werten in \mathbb{R} bezeichnen wir mit $C^\infty(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$.
- iii) Analog zu Def. 1.30 kann man Differenzierbarkeit in einem Punkt definieren. Für Differenzierbarkeit auf ganz M genügt es, die Existenz von Karten (U, ϕ) und (V, ψ) mit $f(U) \subseteq V$ zu fordern, für die $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ differenzierbar auf $\phi(U)$ ist. (Die (U, ϕ) müssen M überdecken.)
- iv) Analog zu Def. 1.15 sagen wir f ist k -fach differenzierbar, falls $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ k -fach differenzierbar ist.
Im Weiteren meinen wir mit *differenzierbar* immer „beliebig oft differenzierbar“. Alternative Sprechweise: „glatt“ oder C^∞ .

Beispiele:

1. Die antipodale Abbildung

$$f : S^n \rightarrow S^n, \quad y \mapsto -y$$

ist differenzierbar.

2. Sei $M = N = \mathbb{R}$ mit den Atlanten

$$\mathcal{A}_1 = \{\phi = \text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{A}_2 = \{\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \gamma(t) = t^3\}$$

ϕ und γ sind keine verträglichen Karten, denn

$$\phi \circ \gamma^{-1}(t) = \sqrt[3]{t}$$

ist nicht differenzierbar.

$\Rightarrow \text{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{A}_1^{\max}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{A}_2^{\max})$ ist differenzierbar ($\psi \circ \text{id} \circ \phi^{-1} : t \mapsto t^3$)

aber kein Diffeomorphismus. Denn

$\text{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{A}_2^{\max}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{A}_1^{\max})$

ist nicht differenzierbar ($\phi \circ \text{id} \circ \psi^{-1} : t \mapsto \sqrt[3]{t}$).

Allerdings ist die Abbildung $f(t) = t^3$ ein Diffeomorphismus ($\psi \circ f \circ \phi^{-1} : t \mapsto t$)

$f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}_1^{\max}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{A}_2^{\max})$.

3. $\mathbb{RP}^1 \cong S^1, \quad \mathbb{CP}^1 \cong S^2, \quad \mathbb{HP}^1 \cong S^4 \quad \cong \text{diffeomorph}$

Später: Für $n \geq 2$ ist \mathbb{RP}^n nicht diffeomorph zu S^n . (Fundamentalgruppe)

4. Die Abbildungen

$$S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n, \quad S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n, \quad S^{4n+3} \rightarrow \mathbb{HP}^n$$

$$\pi(z_0, \dots, z_n) = [z_0 : \dots : z_n]$$

sind differenzierbar und heißen *Hopf-Faserungen*.

$$\pi^{-1}(p) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{für } \mathbb{RP}^n \quad (\text{zwei Punkte}) \\ S^1 & \text{für } \mathbb{CP}^n \\ S^3 & \text{für } \mathbb{HP}^n \quad (\text{auch für } n=1, S^3 \rightarrow S^2) \end{cases} \quad \text{sog. Fasern.}$$

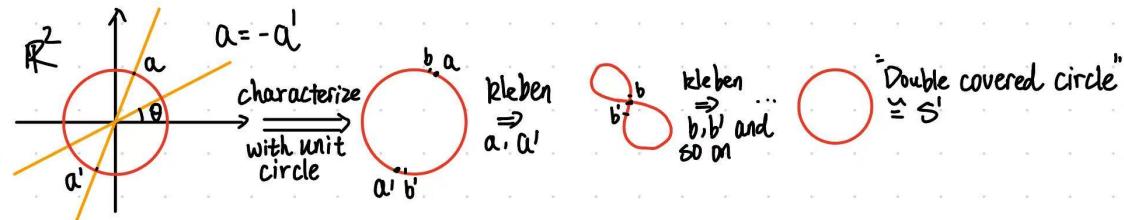


Abbildung 10: \mathbb{RP}^1 diffeomorph zu S^1

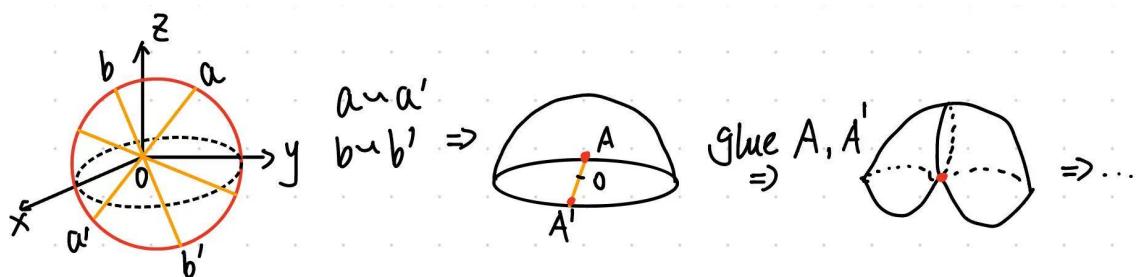


Abbildung 11: Innerhalb \mathbb{RP}^2 ist Möbius-Band enthalten

Bemerkung

1. Für $n \neq 4$ ist jede differenzierbare Struktur auf \mathbb{R}^n diffeomorph zur Standardstruktur \mathcal{A}_{\max} zu $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, \text{id})\}$
2. Auf \mathbb{R}^4 gibt es überabzählbar viele differenzierbare Strukturen, die paarweise nicht diffeomorph sind. („Exotische Strukturen!“)
3. Jede topologische Mannigfaltigkeit in Dimension 1, 2 und 3 besitzt genau eine differenzierbare Struktur. (eindeutige differenzierbare Struktur)
4. Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten in Dimension 4, die keine differenzierbare Struktur zulassen.
5. Für $n \geq 7$ gibt es Mannigfaltigkeiten, die homöomorph zu S^n aber nicht diffeomorph sind.
In jeder Dimension n , $n > 7$, gibt es höchstens endlich viele exotische Sphären.
Die Existenz einer exotischen S^4 ist unklar.

1.4 Der Satz vom regulären Wert

Nachrechnen, dass M durch eine Menge von Karten A zu einer Mannigfaltigkeit wird, ist aufwendig. Deshalb wollen wir einen anderen Weg finden.

Sei $f : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung.

Definition 1.40: Seien (U, ϕ) bzw. (V, ψ) Karten um p bzw. $f(p)$.

Dann ist der Rang von f in p definiert als der Rang der Jacobi-Matrix von $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$, d.h.

$$\text{rg}_p(f) := \text{Rang} (J_p(\psi \circ f \circ \phi^{-1})) = \text{Rang} \left(\frac{\partial (\psi \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial x_j} \right) = \text{Rang} J_{\psi(f(p))} (\psi \circ f \circ \phi^{-1})$$

wobei $J_p(f)$ die Jacobi-Matrix einer Abbildung f im Punkt p bezeichnet.

Bemerkung: Der Rang der Jacobi-Matrix $J_{\psi(f(p))}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})$ hängt nicht von den gewählten Karten (U, ϕ) und (V, ψ) ab, d.h. der Rang $\text{rg}_p(f)$ ist wohldefiniert.

Beweis. Seien (U, ϕ) und $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ Karten um p , (V, ψ) und $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$ Karten um $f(p)$. Dann gilt:

$$\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\phi}^{-1} = (\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \tilde{\phi}^{-1})$$

Die Kartenwechsel $\phi^{-1} \circ \tilde{\phi}$ und $\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}$ sind Diffeos und ihre Jacobi-Matrizen Isomorphismen, die den Rang der linearen Abbildung nicht ändern.

Kettenregel:

$$\text{rg} \left[J(\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\phi}^{-1}) \right] = \text{rg} \left[J(\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ J(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ J(\phi \circ \tilde{\phi}^{-1}) \right] = \text{rg} J(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \quad \square$$

□

Bemerkung: Die Abbildung $p \mapsto \text{rg}_p(f)$ ist unterhalbstetig, d.h. hat f in p den Rang r , dann gilt $\text{rg}_q(f) \geq r$ für alle q in einer kleinen Umgebung von p .

Rangsatz Sei $f : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung (nicht zwingend Diffeomorphismus), die in einer Umgebung von $p \in M$ (es gibt eine Menge V mit $p \in V$ und ein $U \subseteq M$ offen mit $p \in U \subseteq V$) konstanten Rang r hat.

Dann ist f bzgl. geeigneter lokaler Koordinaten um p von der Form

$$\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^t, \quad (x, y) \mapsto (x, 0, \dots, 0)$$

wobei $\dim M = r + s$ und $\dim N = r + t$.

D.h.: Es gibt Karten (U, ϕ) um p und (V, ψ) um $f(p)$, so dass

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(x, y) = (x, 0, \dots, 0)$$

f Diffeomorphismus (voller Rang) $\Rightarrow J_p(f)$ invertierbar.

Umkehrssatz

Sei $f : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten der Dimension n . Sei $p \in M$ ein Punkt mit $\text{rg}_p(f) = n$. Dann existiert eine Umgebung von p , auf der f ein Diffeomorphismus ist.

Beweisskizze:

Ist der Rang von f in p gleich n , dann ist die Jacobi-Matrix von $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ (in p) invertierbar und damit ist $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ ein lokaler Diffeomorphismus um $\phi(p)$.

Bei Def. ist f also ein lokaler Diffeomorphismus zwischen M und N .

(Spezialfall des Rangsatzes)

Definition 1.41: Sei $f : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Dann heißt ein Punkt $p \in M$ *regulär*, falls

$$\text{rg}_p(f) = \dim N$$

d.h. falls $J(\psi \circ f \circ \phi^{-1})$ surjektiv ist.

Andernfalls heißt ein Punkt *kritisch* oder *singulär*.

Bemerkung:

- i) Ist p regulär, dann folgt $\dim M \geq \dim N$
- ii) Ist $\dim M < \dim N$, dann sind alle Punkte in M singulär.

Satz vom regulären Punkt

Sei $f : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung und $p \in M$ regulär.

Dann existieren Karten (U, ϕ) um p und (V, ψ) um $f(p)$ mit $f(U) \subseteq V$ und

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(x_1, \dots, x_{r+s}) = (x_1, \dots, x_r)$$

wobei $\dim M = r + s$ und $\dim N = r$, d.h. in lokalen Koordinaten stimmt f mit der Projektion $\mathbb{R}^{r+s} \rightarrow \mathbb{R}^r$ überein.

Definition 1.16: Sei $f : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Ein Punkt $q \in N$ heißt *regulärer Wert* von f , falls jedes $p \in f^{-1}(q)$ ein regulärer Punkt von f ist.

Bemerkung:

- i) Jeder Punkt, der nicht im Bild von $f : M \rightarrow N$ liegt, ist ein regulärer Wert.
- ii) **Satz von Sard:** Die Menge der regulären Werte hat Lebesgue-Maß 0 in N , ist dicht in N und speziell kann eine differenzierbare Abbildung $f : M \rightarrow N$ für $\dim(M) < \dim(N)$ nicht surjektiv sein.
(Die Menge der kritischen Punkte ist eine Lebesgue-Nullmenge: Sei f diff'bar $K := \{f(x) | f'(x) = 0\}$ $\mathcal{L}(K) = 0$)
- iii) Es gibt keine surjektive differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (hätte nur singuläre Werte laut Bem (ii), insbe. liegen reguläre Werte nicht dicht in \mathbb{R}^2), jedoch stetige surjektive Abbildungen existieren (Fass-kurven stetig aber nicht bijektiv <https://de.wikipedia.org/wiki/Peano-Kurve>).

Definition 1.17: Eine Teilmenge $M_0 \subseteq M$, einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M nennt man *k -dimensionale Untermannigfaltigkeit*, wenn es um jeden Punkt von M_0 eine Karte (U, ϕ) von M gibt mit

$$\phi(U \cap M_0) = \mathbb{R}^k \cap \phi(U)$$

wobei $\mathbb{R}^k = \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Differenz $\dim M - \dim M_0$ nennt die *Kodimension* von M_0 in M .

(Vgl. Analysis II mit $M = \mathbb{R}^n$.)

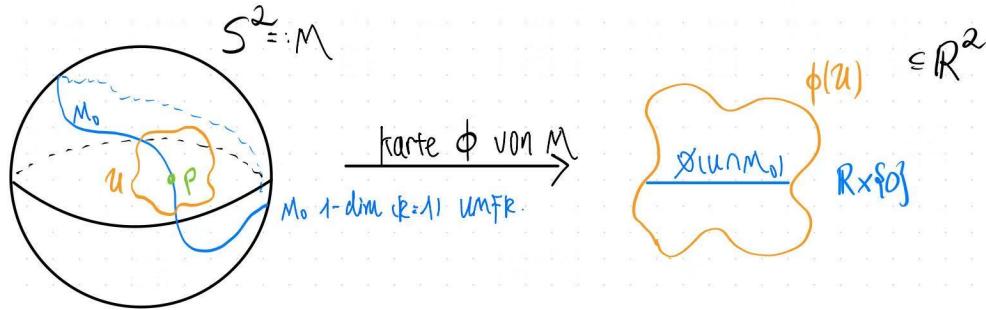


Abbildung 12: Untermannigfaltigkeit M_0 von $M := S^2$

Bemerkung:

- i) Jede Untermannigfaltigkeit ist wieder eine Mannigfaltigkeit (mit der Teilraumtopologie von M).

- Untermannigfaltigkeiten der Kodimension 0 sind genau die offenen Teilmengen in M
 - Untermannigfaltigkeiten der Dimension 0 sind genau die diskreten Teilmengen in M , also diskrete Punkte die keine Häufung haben. (endlich, falls M kompakt)
- ii) Eine Teilmenge $M_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Untermannigfaltigkeit der Dimension k von \mathbb{R}^n , wenn M_0 lokal diffeomorph zu einer offenen Teilen von \mathbb{R}^k ist, z. B. reguläre Fläche in \mathbb{R}^3 (Def. in Analysis II)
- iii) Einschränkungen differenzierbarer Abbildungen auf Untermannigfaltigkeiten sind wieder differenzierbar.

Theorem (Einbettungs-Satz von Whitney):

Jede n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist diffeomorph zu einer Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{2n} .

Das Resultat kann nicht verbessert werden. Denn man kann zeigen: \mathbb{RP}^2 ist keine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 und Möbius-Band ist auch keine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 .

Satz vom regulären Wert:

Ist $q \in N$ ein regulärer Wert einer differenzierbaren Abbildung $f : M \rightarrow N$, dann ist $f^{-1}(\{q\})$ eine Untermannigfaltigkeit von M und es gilt:

$$\dim f^{-1}(\{q\}) = \dim M - \dim N$$

*₁: Jedes $p \in f^{-1}(\{q\})$ ist ein regulärer Punkt, d.h. $\forall p \in f^{-1}(\{q\})$ ist $J_{\varphi(p)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ surjektiv.

*₂: Für alle Karten (U, φ) von M und (V, ψ) von N ist $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar (dort wo definiert).

*₃: Für alle $p \in f^{-1}(\{q\})$ gibt es eine Karte (U, ϕ) von M um p mit

$$\phi(U \cap f^{-1}(\{q\})) = \mathbb{R}^k \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^m \quad k = \dim M - \dim N \quad (\text{Definition von Untermannigfaltigkeit})$$

Der Beweis verwendet den Satz vom regulären Punkt:

Sei $f : M \rightarrow N$ differenzierbar, $p \in M$ regulär. Dann existieren Karten (U, ϕ) um p und (V, ψ) um $f(p)$ mit $f(U) \subseteq V$ und

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(x_1, \dots, x_{n+k}) = (x_1, \dots, x_n)$$

wobei $\dim M = m$ $\dim N = n$.

Beweis. (Beweis vom „Satz vom regulären Wert“)

Sei $\dim M = m$, $\dim N = n$ und $k := m - n \geq 0$, sonst gibt es keinen regulären Punkt. Sei $p_0 \in f^{-1}(\{q\})$ ein regulärer Punkt.

Satz vom regulären Punkt: Wir können Karten (U, φ) um p_0 und (V, ψ) um $q = f(p_0)$ wählen mit

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n) \quad (\text{lokale Darstellung von } f)$$

Nach Umbenennen der Koordinaten: (damit $\times \{0\}$ rauskommt)

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1, \dots, x_m) = (x_{k+1}, \dots, x_m) \quad (m = k + (m - k) = k + n)$$

O.B.d.A.: $\psi(q) = \psi(f(p_0)) = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} p \in U \cap f^{-1}(\{q\}) &\iff p \in U \text{ und } f(p) = q \\ &\iff p \in U \text{ und } \psi \circ f(p) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n \\ &\iff \varphi(p)_i = 0 \quad \forall i = k + 1, \dots, m \end{aligned}$$

laut $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_{k+1}, \dots, x_m)$

Zusammenfassend:

$$p \in U \cap f^{-1}(\{q\}) \iff \varphi(p) \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$$

Also die Untermannigfaltigkeit-Gleichung:

$$\varphi(U \cap f^{-1}(\{q\})) \subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\}$$

Die Untermannigfaltigkeit $f^{-1}(\{q\})$ hat die Dimension $k = m - n = \dim(M) - \dim(N)$ \square

Anwendung / Beispiel:

i) Die n -dimensionale Sphäre

$$\mathcal{M} = \mathbb{R}^{n+1}, \quad \mathcal{N} = \mathbb{R}, \quad f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|^2$$

Jacobi-Matrix von f im Punkt $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$: $J(f) = (2x_1, \dots, 2x_{n+1})$

Für alle $x \neq 0$ hat $J(f)$ vollen Rang ($= 1$), d.h. 1 ist ein regulärer Wert von f

$$\Rightarrow f^{-1}(\{1\}) = S^n \text{ ist eine Untermannigfaltigkeit von } \mathbb{R}^{n+1}$$

ii) Die orthogonale Gruppe $O(n) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = \mathbb{I}\}$

$$\mathcal{M} = M(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}, \quad \mathcal{N} = \text{Sym}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid A^T = A\} = \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

Lemma 1.18: Die Einheitsmatrix \mathbb{I} ist ein regulärer Wert der Abbildung

$$f : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Sym}(n, \mathbb{R}), \quad A \mapsto A^T A$$

Daher ist die orthogonale Gruppe $O(n) = f^{-1}(\mathbb{I})$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $\frac{1}{2}n(n - 1)$

Beweis. Laut Satz vom regulären Wert folgt die zweite Behauptung aus der ersten.
Sei $p \in f^{-1}(\mathbb{I}) = O(n)$. Zu zeigen: $J(f)_p$ ist surjektiv.

Berechne die Jacobi-Matrix mittels der Richtungsableitung, $v \in \mathbb{R}^{n^2}$:

$$\begin{aligned} J(f)_p v &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(p+tv) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (p+tv)^T (p+tv) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (p^T p + tp^T v + tv^T p + t^2 v^T v) \\ &= p^T v + v^T p \end{aligned}$$

Für $B \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ und $p \in O(n) = f^{-1}(\{\mathbb{I}\})$, sei $v = \frac{1}{2}pB$

$$\Rightarrow p^T v + v^T p = \frac{1}{2}p^T(pB) + \frac{1}{2}(pB)^T p = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B^T = B \quad (p^T p = \mathbb{I})$$

D.h. die Jacobi-Matrix der oben definierten Abbildung f ist surjektiv in allen Punkten von $f^{-1}(\{\mathbb{I}\})$.

$\Rightarrow \mathbb{I}$ ist ein regulärer Wert von $f \Rightarrow$ Beh.

□

Bemerkung:

1. $\text{SO}(n)$, die speziell orthogonale Gruppe, ist eine offene Teilmenge von $O(n)$, daher eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 0.
2. $O(n)$ hat genau zwei Zusammenhangskomponenten (kann in zwei zusammenhängende disjunkte Teilmengen zerlegen $O(n) = SO(n) \oplus SO(n)^\perp$)
3. Die Matrixgruppen $\text{GL}(n), \text{U}(n), \text{SU}(n), \text{Sp}(n)$ sind Mannigfaltigkeiten $O(n) \times O(n) \rightarrow O(n) \quad (A, B) \mapsto AB$.
Die Gruppenoperation (Multiplikation) ist jeweils eine differenzierbare Abbildung.

Später: Solche Mannigfaltigkeiten heißen Lie-Gruppen

$$\text{GL}(n) = \{\text{invertierbare Matrizen}\}$$

$$\text{U}(n) = \{A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C}) \mid (A^*)^T = A^{-1}\}$$

$$\text{SU}(n) = \{A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}$$

$$\text{Sp}(n) = \left\{ A \in \mathcal{M}(2n, \mathbb{R}) \mid A^T \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

1.5 Immersion, Submersion, Einbettung

Definition 1.19: Sei $f : M^m \rightarrow N^n$ eine differenzierbare Abbildung.

- Die Abbildung f heißt Submersion, wenn $m \geq n$

$$\text{Rang } J_p(f) = \dim(N) \quad \forall p \in M \quad (\text{Rang der Jacobi-Matrix})$$

- Die Abbildung f heißt Immersion, wenn $m \leq n$

$$\text{Rang } J_p(f) = \dim(M) \quad \forall p \in M$$

- Die Abbildung f heißt Einbettung, wenn $f(M) \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit und $f : M \rightarrow f(M)$ ein Diffeomorphismus auf seine Bildmenge ist.
(Intuition: Eine Einbettung ist eine „saubere“ Einlagerung von M in N , ohne Selbstüberschneidung oder komische Topologie.)

Lemma 1.20

Die Abbildung $f : M^m \rightarrow N^n$ ist genau dann eine *Submersion*, wenn die Jacobi-Matrix $J(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ in allen Punkten $p \in M$ bezüglich Karten (U, φ) um p und (V, ψ) um $f(p)$ surjektiv ist.

Weiter ist f eine Submersion genau dann, wenn f in lokalen Koordinaten von der Form

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

ist.

Lemma 1.21

Die Abbildung $f : M^m \rightarrow N^n$ ist genau dann eine *Immersion*, wenn die Jacobi-Matrix $J(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ in allen Punkten $p \in M$ bezüglich Karten (U, φ) um p und (V, ψ) um $f(p)$ injektiv ist.

Weiter ist f eine Immersion genau dann, wenn f in lokalen Koordinaten von der Form

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

ist.

Bemerkung

- Immersionen sind im Allgemeinen nicht injektiv, und injektive Immersionen sind im Allgemeinen keine Einbettungen.

Beispiel:

- $f(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$ ist eine Immersion, da $f'(t) \neq 0 \quad \forall t$, aber nicht injektiv, da $f(1) = f(-1)$.

- $g(t) = (\cos(t), \sin(2t))$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, ist injektive Immersion, aber keine Einbettung. (Am Rand $-\pi/2$ und $3\pi/2$ ist g gegen 0, und $g(\pi/2) = 0$: Umkehrfunktion g^{-1} nicht stetig!)

Skizze: (Acht-förmige Kurve, zeigt Selbstüberschneidung)

Es gilt:

$$g\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0,0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right), \text{ aber } \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{n} \not\rightarrow 0$$

$$\Rightarrow g^{-1} : \text{Bild}(g) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ ist nicht stetig.}$$

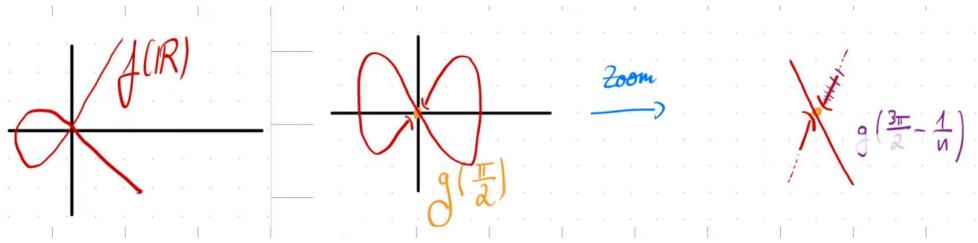


Abbildung 13: Achtförmige Schleife (rechts) und nicht-injektive Immersion (links)

- ii) Einbettungen sind Immersion, die Homöomorphismen auf ihr Bild sind. (D.h. die Differenzierbarkeit der Immersion folgt aus den anderen Eigenschaften.)
(Beispiel: Der Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ mit Einbettung $f(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$)
- iii) Sei M kompakt und $f : M \rightarrow N$ eine injektive Immersion, dann ist f eine Einbettung. (M kompakt, $f(M)$ hausdorff, $f : M \rightarrow f(M)$ bijektiv $\Rightarrow f : M \rightarrow f(M)$ Homöomorphismus)
(Problem für achtförmige Schleife: Definitionsbereich nicht kompakt)
- iv) Eine Abbildung f ist genau dann ein **lokaler Diffeomorphismus**, wenn f Immersion und Submersion ist (f und f^{-1} lokal differenzierbar sind).
(Ana II: Satz von der lokalen Umkehrabbildung: $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ hat lokale Inverse $\Rightarrow \varphi \circ (\varphi^{-1} \circ f^{-1} \circ \psi) \circ \psi$ ist lokale Inverse zu f).
- v) Diffeomorphismen sind bijektive lokale Diffeomorphismen.
- vi) Submersionen sind im Allgemeinen nicht surjektiv.
Beispiel: $\emptyset \neq U \subsetneq \mathbb{R}^n$ offen, $U \rightarrow \mathbb{R}^n$, Inklusion ist Submersion, aber nicht surjektiv.
- vii) Submersionen sind offene Abbildungen, d.h. ist $f : M \rightarrow N$ eine Submersion und $U \subseteq M$ offen, dann ist $f(U) \subseteq N$ offen.
- viii) Sei $f : M \rightarrow N$ eine Submersion, M kompakt und N zusammenhängend, dann ist f surjektiv.
(Tipp: $f(M)$ ist offen (aus vii)), abgeschlossen auch nicht-leer.)
 M kompakt $\Rightarrow f(M) \subset N$ kompakt $\xrightarrow{N \text{ sh.hausdorff}} f(M)$ abgeschlossen

1.6 Immersierte Untermannigfaltigkeiten

In Definition 1.7 haben wir Untermannigfaltigkeiten eingeführt, genauer gesagt haben wir eingebettete Untermannigfaltigkeiten definiert. Man kann auch immersierte Untermannigfaltigkeiten betrachten.

Über eingebettete Untermannigfaltigkeiten:

$N \subseteq \mathbb{R}^m$ eine n -dimensionale eingebettete Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt $p \in N$ eine Karte (U, φ) von M um p existiert, so dass $\varphi(U \cap N) = \mathbb{R}^n \cap \varphi(U)$ gilt.

In diesem Fall ist N mit der Teilraum-Topologie eine topologische Mannigfaltigkeit und es existiert eine eindeutige bestimmte differenzierbare Struktur auf N , so dass die Inklusionsabbildung $\tau : N \hookrightarrow M$ eine Einbettung ist.

Erinnerung: Einbettung \iff injektive Immersion, die Homöomorphismus auf Bild ist.

Zusammenfassend: Bilder von Einbettungen sind **eingebettete** Untermannigfaltigkeiten (und umgekehrt).

Eine Teilmenge $N \subseteq M$ heißt immersierte Untermannigfaltigkeit, falls N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist (die differenzierbare Struktur darf unabhängig von der auf M sein!) und die Inklusionsabbildung $\tau : N \hookrightarrow M$ eine **Immersion** ist.

Beispiel: Die 8-Kurve ist eine immersierte aber keine eingebettete Mannigfaltigkeit (da $f(t) = (\cos(t), \sin(2t))$ Immersion aber keine Einbettung).

Konstruktion: N eine Untermannigfaltigkeit und $F : N \hookrightarrow M$ eine injektive Immersion. Dann existiert auf $F(N) \subseteq M$ eine eindeutig bestimmte Topologie und differenzierbare Struktur, für die $F : N \rightarrow F(N)$ ein Diffeomorphismus ist (i.A. nicht die Teilraumtopologie),

(Neue Topologie): $U \subseteq F(N)$ offen $\iff F^{-1}(U)$ offen in N .

Differenzierbare Struktur: Sei (V, ψ) eine Karte von N , definiere eine Karte von $F(N)$ durch

$$(F(V), \psi \circ F^{-1})$$

Durch diese Wahlen wird die Inklusion $\tau : F(N) \hookrightarrow M$ eine injektive Immersion. Dann

$$\tau = F \circ F^{-1}$$

ist die Komposition eines Diffeomorphismus und einer Immersion.

Bemerkung.:

- Immersierte Untermannigfaltigkeiten sind genau die Bilder injektiver Immersion.
- Immersierte Untermannigfaltigkeit tragen i.A. nicht die Teilraumtopologie.

Man kann ein Beispiel für folgende Situation konstruieren:

$N \subseteq M$ immersierte Untermannigfaltigkeit, $f : P \rightarrow M$ differenzierbare Abbildung, $f(P) \subseteq N$. Aber:

- $f : P \rightarrow N$ nicht stetig
- Ist $f : P \rightarrow N$ stetig, so ist f auch differenzierbar.

Bemerkung:

- Ist n eine 2er-Potenz, so lässt sich \mathbb{RP}^n nicht nach \mathbb{R}^{2n-1} einbetten.
(\mathbb{RP}^2 ist nicht diffeomorph zu einer Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3)
- Ist n keine 2er-Potenz, so existiert für jede n -dim Untermannigfaltigkeit eine Einbettung nach \mathbb{R}^{2n-1} . (Haefliger–Hirsch–Wall)
- iii)

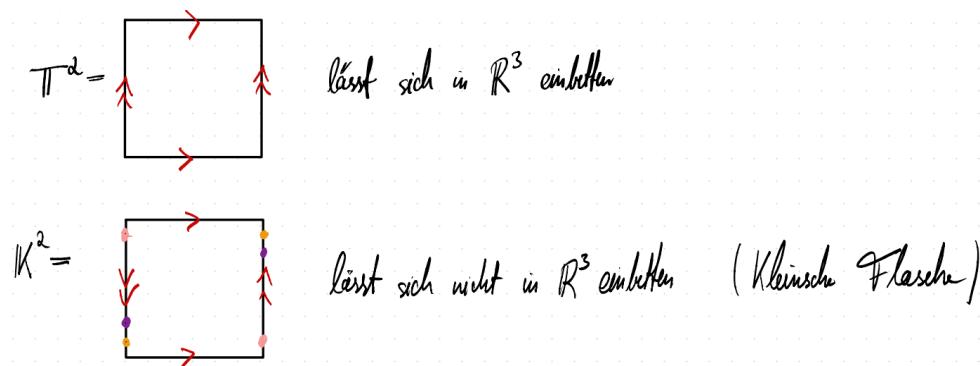


Abbildung 14: Torus und Kleinsche Flasche (Stichwort: Linsenraum, $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n$, Homotopie, Riemannsche Gitter, Orientierbarkeit)

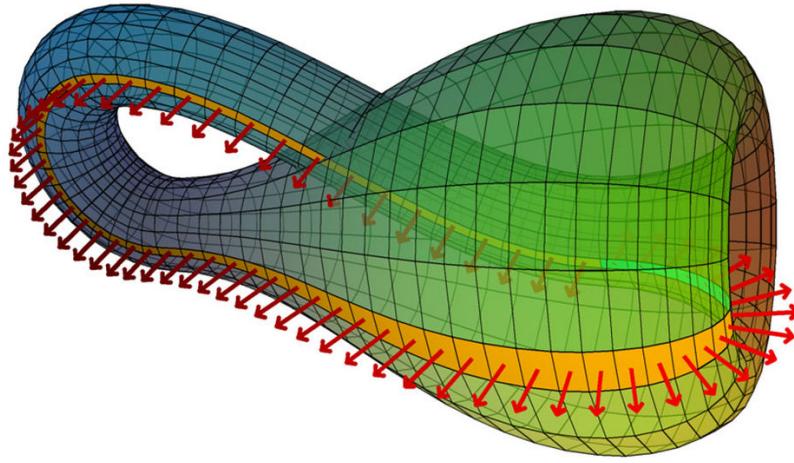


Abbildung 15: Kleinsche Flasche

2 Der Tangentialraum

Erinnerung:

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung. Dann ist die Ableitung, die „beste“ lineare Approximation. Genauer gilt:

$$f(x + v) = f(x) + Df_x(v) + \varphi(v)$$

mit

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\varphi(v)}{\|v\|} = 0.$$

Wobei:

$$Df_x(v) = \underbrace{J_f(x) \cdot v}_{\text{Jacobi-Matrix angewandt auf } v} = \underbrace{v(f)_x \equiv \frac{d}{dt} \big|_{t=0} f(x + tv)}_{\substack{\text{Richtungsableitung von } f \text{ in Richtung } v \\ \text{jeweils im Punkt } x}}$$

Partielle Ableitungen von f sind die Bilder der Basisvektoren e_i der kanonischen Basis im \mathbb{R}^n unter der linearen Abbildung $Df_x(e_i)$.

Ziel: Definiere die Ableitung zwischen Mannigfaltigkeiten.

Die Jacobi-Matrix $J_{\varphi(p)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ hängt von der Wahl der Karten ab, liefert also nur qualitative Aussagen, keine quantitativen.

Brauchen:

- Abstrakten Vektorraum $T_p M$, den Tangentialraum von M in p (*abhängig von M und p*)
- Lineare Abbildung $Df : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$, das Differential von f in p (*abhängig von f und p*)

Für Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^n gibt es eine anschauliche Definition des Tangentialraums mittels der Kurven durch p :

$$T_p M := \{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n \text{ differenzierbar}, \gamma(0) = p\}.$$

Für **abstrakte Mannigfaltigkeiten** haben wir keine kanonische Einbettung, daher müssen wir den Tangentialraum $T_p M$ durch innere Eigenschaften von M bzw. mit Hilfe von Karten definieren.

Beispiel. Der Tangentialraum in $p \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist gegeben als das orthogonale Komplement von p , d.h.

$$T_p S^n = p^\perp = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, p \rangle = 0\}.$$

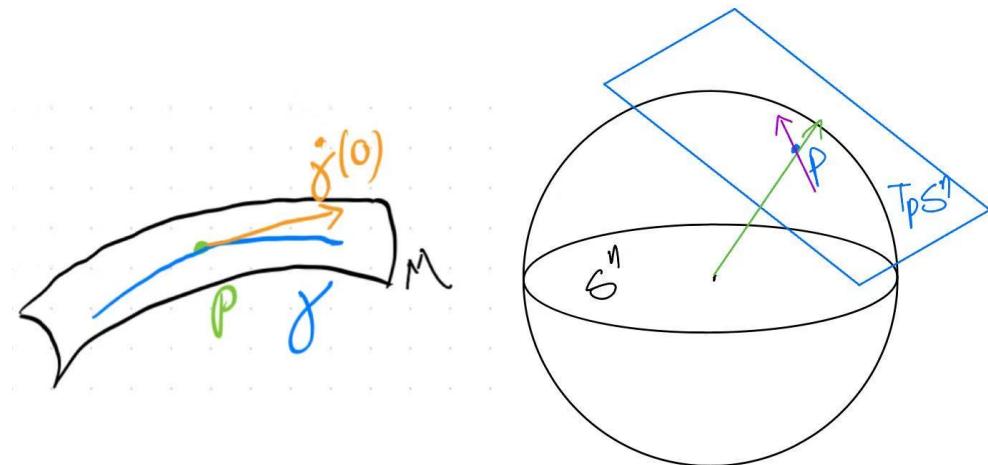


Abbildung 16: Tangentialraum auf Mannigfaltigkeit

Erinnerung: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ Untermannigfaltigkeit, $T_p M = \{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \text{ differenzierbar}, \gamma(0) = p\}$

2.1 Die geometrische Definition des Tangentialraums

Idee: Benutze Äquivalenzklassen von Kurven.

Die Äquivalenzrelation: $\alpha, \beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ zwei (differenzierbare) Kurven in M , mit

$$\alpha(0) = p = \beta(0)$$

dann sind α, β äquivalent, $\alpha \sim \beta$, falls für eine (und damit in allen) Karte (U, φ) um p gilt:

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \varphi \circ \alpha(t) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \varphi \circ \beta(t)$$

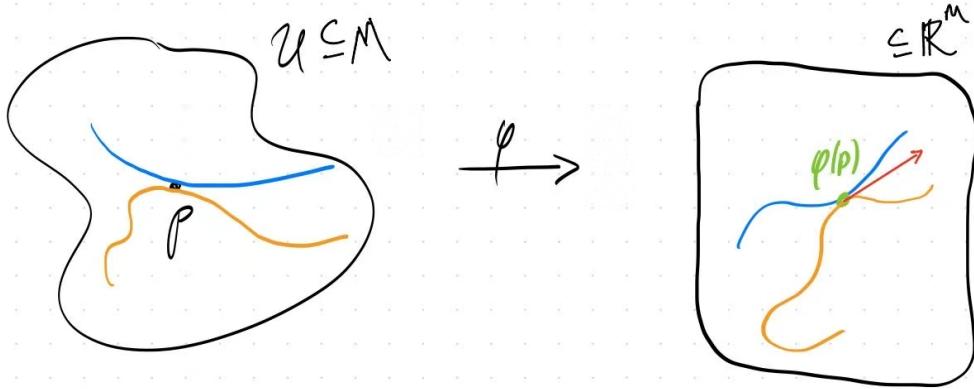


Abbildung 17: Zwei äquivalente Kurven

Die Definition ist unabhängig von der Wahl der Karte. Denn sind $\varphi, \tilde{\varphi}$ Karten um p , so gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|_{t=0} (\tilde{\varphi} \circ \alpha)(t) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} (\tilde{\varphi} \circ \underbrace{\varphi^{-1} \circ \varphi}_{\text{id}} \circ \alpha)(t) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} D(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}) \cdot \frac{d}{dt}|_{t=0} (\varphi \circ \alpha)(t) \\ &= D(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}) \cdot \frac{d}{dt}|_{t=0} (\varphi \circ \beta)(t) = \dots = \frac{d}{dt}|_{t=0} (\tilde{\varphi} \circ \beta)(t) \end{aligned}$$

Für ϵ klein genug liegen $\alpha(-\epsilon, \epsilon)$ und $\beta(-\epsilon, \epsilon)$ in $U \cap \tilde{U}$
Das führt zu der Definition:

Definition 2.1

Tangentialvektoren an M im Punkt $p \in M$ sind Äquivalenzklassen bezüglich \sim von Kurven in M durch p . Der Tangentialraum von M in p ist die Menge all dieser Äquivalenzklassen:

$$T_p M = \{ \gamma : I_\gamma \rightarrow M \text{ differenzierbar, } \gamma(0) = p \} / \sim$$

für hinreichend kleines Intervall mit $0 \in I_\gamma$
Schreibweise:

$$[\gamma] = \dot{\gamma}(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \gamma(t)$$

Lemma 2.2

Sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Dann ist der Tangentialraum $T_p M$ ein n -dimensionaler reeller Vektorraum.

Beweis. Sei (U, φ) eine Karte um p , dann definieren wir

$$D_p \varphi : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n \quad [\gamma] \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi \circ \gamma(t)$$

Die Abbildung ist linear, wohldefiniert (unabhängig von der gewählten Repräsentanten) nach Definition der Äquivalenzrelation \sim .

Behauptung: $D_p \varphi$ ist bijektiv.

- Injektivität: Direkt aus der Definition von \sim .
- Surjektivität: Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Gesucht: Kurve γ in M mit $\gamma(0) = p$ und
Definiere

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)$$

und wähle $\varepsilon > 0$ klein genug, um $\varphi(p) + tv \in \varphi(U)$ für $|t| < \varepsilon$ zu garantieren,
Dann folgt:

$$\gamma(0) = p \quad D_p \varphi([\gamma]) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(\varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(p) + tv = v$$

Vektorraumstruktur auf $T_p M$: Wir wollen erreichen, dass $D_{\varphi(p)}$ eine lineare Abbildung wird. Für $v, w \in T_p M$, $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir:

$$v + w := (D_p \varphi)^{-1} \circ (D_p \varphi(v) + D_p \varphi(w)) \quad \lambda \cdot v := (D_p \varphi)^{-1} \circ (\lambda D_p \varphi(v))$$

Bleibt zu zeigen: Die Vektorraumstruktur hängt nicht von der Wahl der Karte ab.

$$(D_p \tilde{\varphi})^{-1} (D_p \tilde{\varphi}(v) + D_p \tilde{\varphi}(w)) \stackrel{?}{=} (D_p \varphi)^{-1} (D_p \varphi(v) + D_p \varphi(w))$$

Bedenke:

$$\begin{aligned} (D_p \tilde{\varphi})(v) &\stackrel{v=[\gamma]}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \tilde{\varphi}(\gamma(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma))(t) \\ &= \dots = D_{\varphi(p)}(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}) D_p \varphi(v) \end{aligned}$$

und:

$$D_{\varphi(p)}(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}) = D_p \tilde{\varphi} \circ (D_p \varphi)^{-1}.$$

□

Bemerkung:

- i) Die Abbildung $D_p\varphi$ ist das Differential der Kartenabbildung φ im Punkt p .
- ii) Die kanonische differenzierbare Struktur auf \mathbb{R}^n ist definiert durch die Karte $(\mathbb{R}^n, \varphi = \text{id})$. Dabei stimmt hier $D_p\varphi$ überein mit der kanonischen Identifikation

$$\Phi : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad [\gamma] \mapsto \dot{\gamma}(0)$$

die nach Definition ein linearer Isomorphismus ist. Die Kurve ist gegeben durch $v \mapsto [\alpha]$, wobei $\alpha(t) = p + tv$ eine Kurve mit:

$$\alpha(0) = p, \quad \dot{\alpha}(0) = v.$$

Definition 2.3

Sei $f : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Dann ist das Differential von f in p definiert durch

$$Df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N \quad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$$

Alternative Schreibweisen: Tf_p , df_p , $Df_p(\dot{\gamma}(0)) = (f \circ \gamma)'(0)$.

Anschaung: Wenn γ eine Kurve in M mit $\gamma(0) = p$ ist, dann ist $f \circ \gamma$ eine Kurve in N mit $(f \circ \gamma)(0) = f(p)$.

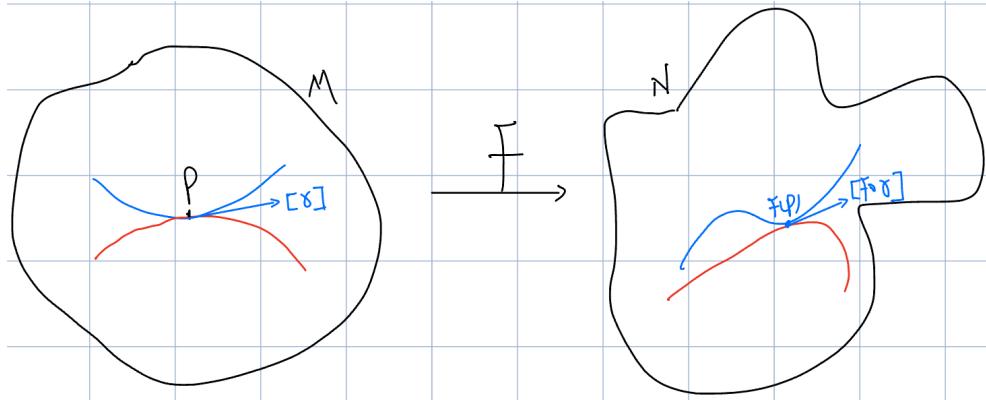


Abbildung 18: Differential von f in p

Das Differential von f ordnet dem Tangentialvektor gegeben durch die Kurve γ den Tangentialvektor gegeben durch die Kurve $f \circ \gamma$ zu.

Lemma 2.4

Das Differential einer differenzierbaren Funktion ist

- wohldefiniert (unabhängig von der Wahl der Repräsentanten)
- linear
- erfüllt Kettenregel

Beweis. 1. Wohldefiniert

Seien α und $\tilde{\alpha}$ zwei äquivalente Kurven auf M durch p , d.h. es gilt

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \tilde{\alpha})'(0)$$

für alle Karten φ um p . Sei $(U, \varphi), (V, \psi)$ eine Karte um p bzw. $f(p)$, dann folgt

$$D\psi_{f(p)}([f \circ \alpha]) \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\psi \circ f \circ \alpha)(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \alpha)(t)$$

$$\text{Kettenregel } dt \quad D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \alpha)'(0) \stackrel{\text{Voraus}}{=} D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \tilde{\alpha})'(0) = \dots = D\psi_{f(p)}([f \circ \tilde{\alpha}])$$

$D\psi_{f(p)}$ bijektiv $\rightarrow [f \circ \alpha] = [f \circ \tilde{\alpha}]$ d.h. Df ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten des Tangentialvektors.

2. Kettenregel: Sei $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$

$$(Dg \circ Df)([\alpha]) = Dg(Df([\alpha])) = Dg([f \circ \alpha]) = [g \circ f \circ \alpha] = D(g \circ f)([\alpha]).$$

3. Linearität

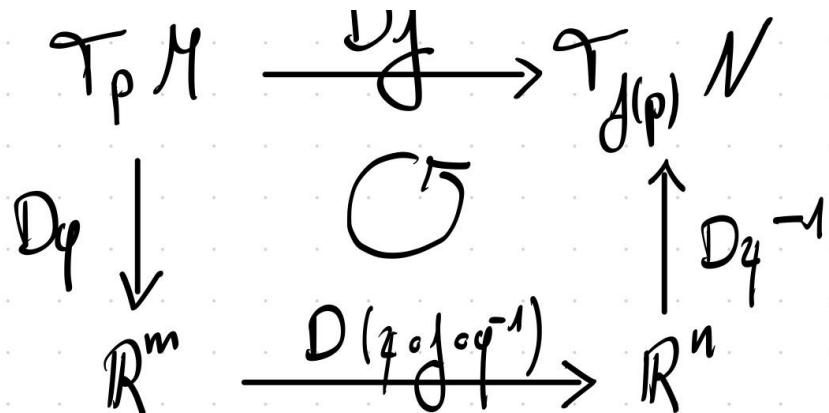
Sei $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Karte um p . Das Differential von φ in p ist eine Abbildung

$$D\varphi_p : T_p M = T_p U \rightarrow T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^m$$

Verknüpft mit der kanonischen Identifikation $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ von $T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^m$ mit \mathbb{R}^m , so erhält man genau die oben definierte Abbildung $D\varphi_p$. Diese ist nach Definition linear.

\Rightarrow Das Differential der Kartenabbildung φ in p ist linear.

Im Folgenden unterscheiden wir nicht mehr zwischen $D\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$ und $\Phi \circ D\varphi_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Schreiben wir nun $f = \psi^{-1}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$, so folgt aus der Kettenregel $Df = \underbrace{(D\psi)^{-1} D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) D\varphi}_{\text{alle Ableitungen linear}} \Rightarrow Df \text{ linear}$



□

Bemerkung:

- (i) Für $\mathcal{M} = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{N} = \mathbb{R}^n$ stimmt das Differential aus Def. 2.3 mit der Jacobi-Matrix aus Analysis II überein.
- (ii) $(D \text{id}_{\mathcal{M}})_p = \text{id}_{T_p \mathcal{M}}$ $[\gamma] \rightarrow [id \circ \gamma] = [\gamma]$
- (iii) Ist f ein Diffeomorphismus, dann ist Df_p für alle $p \in \mathcal{M}$ ein Isomorphismus. $[\gamma] \rightarrow [f \circ \gamma] \rightarrow [f^{-1} \circ f \circ \gamma]$
- (iv) Ist Df_p ein Isomorphismus für alle $p \in \mathcal{M}$, dann ist f ein lokaler Diffeomorphismus um p .
- (v) Da die Jacobi-Matrix von $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ eine andere Beschreibung des Differentials $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ ist, folgt:
 $Rg_p(f) = Rg_p(Df_p)$ im Sinne LA für abstrakte VR
- (vi) Sei $\iota : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit mit Inkusionsabbildung ι . Dann ist

$$\Phi \circ D_{\iota} : T_p \mathcal{M} \rightarrow T_{\iota(p)} \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$$

ein Isomorphismus aufs Bild, also ein Monomorphismus.

Es gilt

$$D\iota([\gamma]) = [\iota \circ \gamma], \quad \text{also } (\Phi \circ d\iota)([\gamma]) = \dot{\gamma}(0)$$

$T_p \mathcal{M} \equiv$ Vektorraum aller Tangentialvektoren $\dot{\gamma}(0)$ für Kurven mit $\gamma(0) = p$. (vgl. Analysis)

2.2 Die Physiker-Definition von Tangentialvektoren

Idee: Tangentialvektoren werden mittels Karten als Vektoren in \mathbb{R}^m definiert, die bei Kartenwechseln bestimmte Transformationsverhalten aufweisen.

Bezeichnungen:

$K_p \mathcal{M}$ = Menge aller Karten um $p \in \mathcal{M}$

$V_p(\mathcal{M}) :=$ Menge aller Abbildungen $v : K_p \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$v(V, \psi) = J_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1})v(U, \varphi) \quad \forall (U, \varphi), (V, \psi) \in K_p \mathcal{M}.$$

Die Menge $V_p(\mathcal{M})$ ist isomorph zu $T_p \mathcal{M}$, der Isomorphismus ist gegeben durch:

$$T_p \mathcal{M} \longrightarrow V_p(\mathcal{M}) \quad \xi \mapsto ((U, \varphi) \mapsto D\varphi_p(\xi)).$$

Tatsächlich gilt

$$((U, \varphi) \mapsto D\varphi_p(\xi)) \in V_p \mathcal{M}$$

denn:

$$D_{\psi_p}(\xi) = D(\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi)_p(\xi) = D(\psi \circ \varphi^{-1})(D_{\varphi_p}(\xi)).$$

und $D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}$ ist genau die Jacobi-Matrix $J_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1})$.

2.3 Die algebraische Definition des Tangentialraums

Idee:

- Identifizieren $T_p\mathcal{M}$ mit Derivationen auf Funktionenkeimen um p .
- Verallgemeinerung von Richtungsableitungen: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $v \in T_p U = \mathbb{R}^n$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion auf U , dann ist die Richtungsableitung von f in p in Richtung v :

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(p + tv) = J(f)_p(v)$$

Bemerkung:

- Wir müssen f nur lokal bei p kennen.
- Wenn wir $J(f)_p(v)$ für genügend viele f kennen, können wir v bestimmen.

Zum Beispiel: Ist

$$f_i : U \rightarrow \mathbb{R} \quad x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i, \quad \text{dann } J(f_i)_p(v) = v_i$$

Schlussfolgerung: Ableitungen von Funktionen enthalten Informationen über Tangentialvektoren.

Seien $p \in \mathcal{M}$ und $f, h : U \rightarrow \mathbb{R}$ glatte Funktionen, definiert auf einer Umgebung U von p . Wir sagen, f ist äquivalent zu h (geschrieben $f \sim h$), falls es eine Umgebung $V \subseteq U$ von p gibt, sodass

$$f|_V = h|_V.$$

Erinnerung: Eine Menge $V \subseteq \mathcal{M}$ heißt *Umgebung* von p , falls eine offene Menge \tilde{V} mit

$$p \in \tilde{V} \subseteq V$$

existiert. Man kann also immer von offenen Umgebungen ausgehen.

Definition 2.5:

Die Äquivalenzklassen bezüglich \sim differenzierbarer Funktionen, definiert auf Umgebungen von $p \in \mathcal{M}$, heißen **Funktionenskeime** in p . Man schreibt $C_p^\infty(\mathcal{M})$ für den Raum der Funktionenskeime in p .

Bemerkung:

$C_p^\infty(\mathcal{M})$ ist eine reelle Algebra (Vektorraum mit Multiplikation) mit

$$[f] + [g] = [f + g], \quad [f] \cdot [g] = [f \cdot g].$$

Lemma 2.6: Sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist

$$\mathcal{C}_p^\infty \cong \mathcal{C}_0^\infty$$

Beweis. Sei (U, φ) eine Karte um p mit $\varphi(p) = 0$. Dann ist die Abbildung

$$[f] \mapsto [f \circ \varphi^{-1}]$$

der gesuchte Isomorphismus. □

Definition 2.7:

Eine **Derivation** auf $C_p^\infty(\mathcal{M})$ ist eine lineare Abbildung

$$v : C_p^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft

$$v([f][g]) = v([f])g(p) + f(p)v([g]) \quad (\text{Produktregel}).$$

Die Menge der Derivationen auf $C_p^\infty(\mathcal{M})$ wird mit $\mathcal{D}_p(\mathcal{M})$ bezeichnet.

Bemerkung:

- (i) $\mathcal{D}_p(\mathcal{M})$ ist ein reeller Vektorraum.
- (ii) $\mathcal{D}_p(\mathcal{M}) \cong \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$.

Wir definieren den Isomorphismus durch: Sei $v \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$, dann ist

$$[f] \mapsto v([f \circ \varphi^{-1}])$$

eine Derivation in $\mathcal{D}_p(\mathcal{M})$.

Beispiel:

Jeder Vektor $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ definiert durch die Richtungsableitung eine Derivation auf $C_{x_0}^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$v([f]) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(x_0 + tv) = Df_{x_0}(v) = \langle v, \nabla f \rangle = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_{x_0} .$$

für eine Funktion f , definiert in einer Umgebung von x_0 .

Insbesondere entsprechen die Basisvektoren e_i der kanonischen Basis den partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$.

Im Wesentlichen sind alle Derivationen von dieser Form, d.h.:

$$\mathbb{R}^n \cong \mathcal{D}_{x_0}(\mathbb{R}^n) \cong \mathcal{D}_p(M)$$

(Das ist die Aussage des nächsten Satzes.)

Satz 2.8:

Jede Derivation δ auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ schreibt sich, angewendet auf $[f] \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, als

$$\delta([f]) = \sum_{i=1}^n \delta([x_i]) \frac{\partial f}{\partial x_i}|_0$$

Insbesondere hat der Raum der Derivationen auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Dimension n , mit einer Basis aus den Derivationen

$$\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Der Beweis benötigt folgendes Lemma:

Lemma 2.9:

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einer konvexen Umgebung U von $0 \in \mathbb{R}^n$. Dann kann f geschrieben werden als

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i h_i(x)$$

für gewisse differenzierbare Funktionen h_i , mit

$$h_i(0) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) dt = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0).$$

Beweis. (Beweis von Lemma 2.9)

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zusammen mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_0^1 \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) dt \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) dt \right) =: \sum_{j=1}^n x_j h_j(x), \end{aligned}$$

Setze:

$$h_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt,$$

dann folgt:

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i h_i(x).$$

Beobachtung: $h_i(0) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) dt = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$. h ist glatt da Differential und Integral vertauscht werden dürfen, denn $\frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)$ ist C^∞ in x . \square

Beweis von Satz 2.8:

Wir wenden die Derivation S auf $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ an:

$$\begin{aligned}
\delta([f]) &\stackrel{\text{Lem.2.9}}{=} \delta\left(f(0) + \sum_{j=1}^n x_j h_j\right) \stackrel{\delta \text{ linear}}{=} \delta([f(0)]) + \sum_{j=1}^n \delta([x_j h_j]) \\
&\stackrel{\text{Produktregel}}{=} \delta([f(0)]) + \sum_{j=1}^n \left(\delta([x_j]) h_j(0) + \underbrace{x_j(0)}_{=0} \delta([h_j]) \right) \\
&= \delta([f(0)]) + \sum_{j=1}^n \delta([x_j]) \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_0.
\end{aligned}$$

Da $x_i(0) = 0$ und $h_i(0)$ konstant ist.

bleibt zu zeigen: $\delta([f(0)]) = 0$

Allgemein gilt für alle konstanten Funktionen c : $\delta([c]) = 0$. Durch die Linearität von δ reicht es, $c=1$ zu betrachten.

$$\delta([1 \cdot 1]) = \delta([1]) + \delta([1]) \quad \rightarrow \quad \delta([1]) = 0$$

□

Zur Basis:

Die partiellen Ableitungen nach x_j im Punkt 0 sind die Derivationen

$$[f] \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_{x=0}.$$

Wir schreiben diese Ableitungen als $\frac{\partial}{\partial x_j}$.

In der obigen Rechnung haben wir gezeigt, dass diese den Raum der Derivationen aufspannen. Weiterhin sind sie linear unabhängig.

Somit:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \right\}_{j=1,\dots,n}$$

ist eine Basis von $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$.

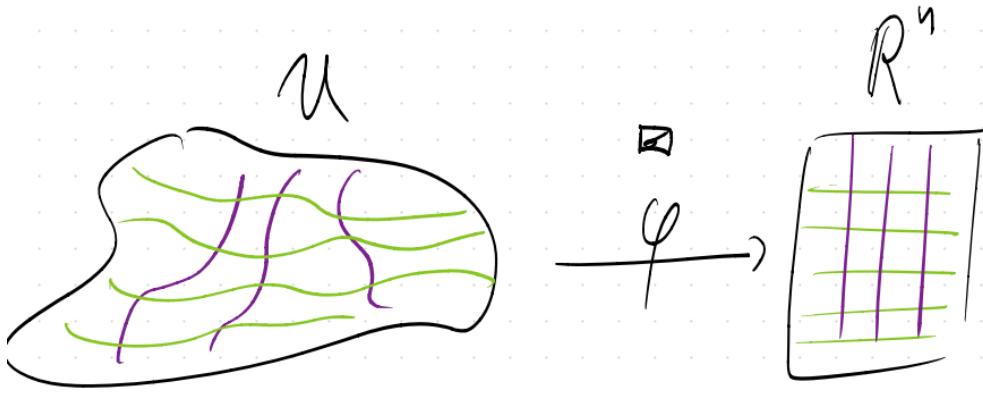


Abbildung 19: Gekrümmte Richtungskurven nach Kartenabbildung

Kurze Zusammenfassung:

- Geometrische Definition von Tangentialraum und Differential

$$T_p M := \{\gamma : I_\gamma \rightarrow M \mid \gamma \text{ ist differenzierbar}, \gamma(0) = p\} / \sim$$

$\gamma \sim \tilde{\gamma} \Leftrightarrow$ Für eine/jede Karte (U, φ) um p gilt $\frac{d}{dt}|_{t=0} \varphi \circ \gamma(t) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \varphi \circ \tilde{\gamma}(t)$

f ist differenzierbar \Rightarrow Differential von f in p $(Df)_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$

Nach Einführung der kanonischen Identifikation $\Phi : T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ lässt sich der Tangentialraum auffassen als Menge der Kurvenableitungen

$$\{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma(0) = p\} = \{v \mid \langle v, p \rangle = 0\}$$

- Algebraische Definition des Tangentialraums

Funktionskeimen (um p) $\mathcal{C}_p^\infty(M) := \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ glatt}\} / \sim$

$$f \sim \tilde{f} \Leftrightarrow \exists V \subseteq M \text{ Umgebung von } p \text{ mit } f|_V = \tilde{f}|_V$$

Menge der Derivationen

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_p(M) &= \{v : \mathcal{C}_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \mid v \text{ linear } v([fg]) = v([f])g(p) + f(p)v([g])\} \\ &\cong \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^{\dim(M)}) \quad (\text{durch Wahl einer Karte}) \quad \cong \mathbb{R}^n \quad (\text{Richtungsableitung}) \end{aligned}$$

Definition 2.16

Sei $\xi \in T_p M$, $f \in C^\infty(M)$. Dann ist die Lie-Ableitung von f in Richtung ξ definiert als

$$\mathcal{L}_\xi(f) = \xi(f) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\alpha(t)) \quad \xi = [\alpha].$$

Auf Funktionsräumen definieren wir die Lie-Ableitung durch

$$\mathcal{L}_\xi([f]) = \mathcal{L}_\xi(f).$$

Bemerkung:

i) Identifizieren wir \mathbb{R} mit $T_{f(p)}\mathbb{R}$, so schreiben wir die Lie-Ableitung auch als

$$\mathcal{L}_\xi(f) = Df_p(\xi).$$

ii) Die Lie-Ableitung ist eine Derivation:

(a) Linearität:

$$\mathcal{L}_\xi([\lambda f + g]) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\lambda f + g)(\alpha(t)) = \lambda \mathcal{L}_\xi([f]) + \mathcal{L}_\xi([g])$$

(b) Für Produkte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi([f] \cdot [g]) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (fg)(\alpha(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\alpha(t))g(\alpha(t)) \\ &\stackrel{\text{Produktregel dt}}{=} \left[\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\alpha(t)) \right] \cdot g(\alpha(0)) + f(\alpha(0)) \cdot \left[\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g(\alpha(t)) \right] \\ &= \mathcal{L}_\xi([f]) \cdot g(p) + f(p) \cdot \mathcal{L}_\xi([g]) \end{aligned}$$

Satz 2.11:

Die Abbildung $\xi \mapsto \mathcal{L}_\xi$ ist ein linearer Isomorphismus zwischen $T_p M$ und dem Raum der Derivationen $\mathcal{D}_p(M)$ auf $C_p^\infty(M)$, d. h.

$$T_p M \cong \mathcal{D}_p(M).$$

Daraus stimmen die geometrische sowie die algebraische Definitionen überein!

Beweis. Sei (U, φ) eine Karte um $p \in M$ mit $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$. Sei $\xi \in T_p M$ ein Tangentialvektor mit

$$D\varphi_p(\xi) = v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Die Zuordnung $\xi \mapsto \mathcal{L}_\xi$ ist linear, denn Df ist linear (Lemma 2.4).

Es gilt:

$$\mathcal{L}_\xi(f) = Df_p(\xi) = D(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi)_p(\xi) = D(f \circ \varphi^{-1})_0 \cdot \underbrace{(D\varphi)_p(\xi)}_{=v}$$

$$\stackrel{\substack{\text{Def. Derivation} \\ \text{vgl. Bsp 2.8 oben}}}{=} v(f \circ \varphi^{-1})(0) \quad (v \text{ definiert Derivation durch Richtungsableitung})$$

$$\stackrel{2.8}{=} \sum_{j=1}^n v([x_j]) \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j}(0) \quad (*)$$

Injectivitat:

Sei $\mathcal{L}_\xi(f) = 0$ für alle $f \in C_p^\infty(M)$, insb. für $f = \overbrace{\Pr_k}^{\text{Projektion k-te Komponente}} \circ \varphi =: \varphi_k$

$$0 = \mathcal{L}_\xi(\varphi_k) \stackrel{(*)}{=} \sum_{j=1}^m v_j \frac{\partial(\Pr_k \circ \varphi \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j}(0) = \sum_{j=1}^m v_j \delta_{jk} = v_k \Rightarrow \xi = 0.$$

Surjektivität:

$$\dim T_p M = m \stackrel{2.8}{=} \dim \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^m) \stackrel{2.6}{=} \dim \mathcal{D}_p(M)$$

Aus Lineare Algebra ist die Abbildung dann surjektiv. \square

Bezeichnung:

$f \in C^\infty(M)$, (U, φ) Karte um $p \in M$. Schreiben

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial}{\partial x_j}|_p(f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j}(\varphi(p)). \quad \text{Partielle Ableitung abhängig von der Wahl der Karte}$$

Genau genommen muss f auf der Kartenumgebung U definiert sein, d. h. die partielle Ableitung hängt nur von dem Funktionskeim $[f]$ ab.

Bemerkungen:

- i) Die Derivationen $\frac{\partial}{\partial x_j}|_p$, $j = 1, \dots, m$ bilden eine Basis in $\mathcal{D}_p(M) \cong T_p M$.

$$\frac{\partial}{\partial x_j}|_p \longleftarrow (D\varphi)_p^{-1} e_j$$

Denn nach (*) können wir jeden Tangentialvektor $\xi \in T_p M$ bzw. die zugehörige Derivation \mathcal{L}_ξ schreiben als

$$\mathcal{L}_\xi = \sum_{j=1}^m v_j \frac{\partial}{\partial x_j}|_p, \quad v_j \in \mathbb{R}.$$

Dabei sind die Koeffizienten v_j eindeutig bestimmt durch

$$v_k = \mathcal{L}_\xi(\varphi_k) = (D\varphi_k)(\xi),$$

denn

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_k) = \frac{\partial(\Pr_k \circ \varphi \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j} = \delta_{kj}.$$

Aus (*) wissen wir

$$v = (v_1, \dots, v_n) = D\varphi_p(\xi). \quad \text{Insbesondere:}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p = (D\varphi_p)^{-1}(e_j).$$

- ii) Die Derivation $\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p$ entspricht dem Tangentialvektor $\xi \in T_p M$ mit $D\varphi_p(\xi) = e_j$, d.h. der Äquivalenzklasse von Kurven γ mit $\alpha_j(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_j)$.

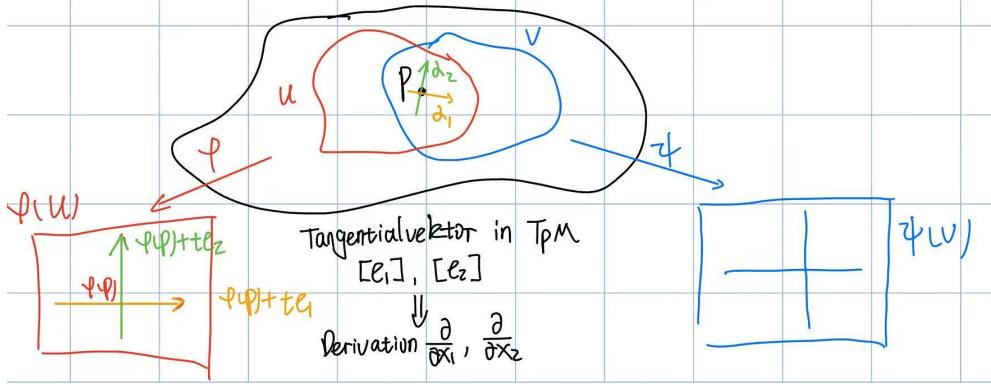


Abbildung 20: Derivationen identifizieren mit Basisvektoren

- iii) Seien (U, φ) und (V, ψ) zwei Karten um p . Dann gilt

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p = \sum_j \frac{\partial \psi_j(p)}{\partial x_i} \left. \frac{\partial}{\partial y_j} \right|_p,$$

wobei

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = (D\varphi_p)^{-1}(e_i), \quad \frac{\partial}{\partial y_j} = (D\psi_p)^{-1}(e_j), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Häufig wird diese Formel für Karten (U, x) , (V, y) aufgestellt und liest sich als

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} &= (D\varphi)^{-1}(e_i) = (D\psi)^{-1}(D\psi)(D\varphi)^{-1}(e_i) = (D\psi^{-1})(D(\psi \circ \varphi^{-1})(e_i)) \\ &= (D\psi^{-1})(J(\psi \circ \varphi^{-1})(e_i)) = (D\psi^{-1}) \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_j}{\partial x_i} e_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_j}{\partial x_i} (D\psi^{-1})(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^m \underbrace{\frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_j}{\partial x_i}}_{\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial y_j} \quad (\text{vgl. Bezeichnung}) \end{aligned}$$

□

- iv) $f : M \rightarrow N$ differenzierbare Abbildung, (U, φ) Karte um p , (V, ψ) Karte um $f(p)$. Dann gilt:

$$Df_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(p)}$$

wobei:

$$f_j = \psi_j \circ f = Pr_j \circ \psi \circ f.$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = (D\varphi_p)^{-1}(e_i), \quad \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(p)} = (D\psi_{f(p)})^{-1}(e_j).$$

Insbesondere gilt für Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$

$$Df_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)}. \quad (\text{siehe Bezeichnung nach 2.11})$$

- v) Sei $\varphi_j : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ die j -te Koordinatenfunktion. Dann bilden die linearen Abbildungen

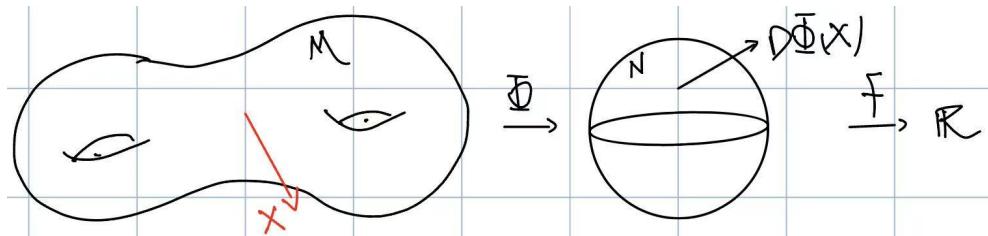
$$(D\varphi_j)_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, m,$$

eine Basis des Dualraums $(T_p M)^*$ (Linearformen). Dies ist die zu $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right\}_{j=1,\dots,m}$ duale Basis, denn nach iv) gilt für $f = \varphi_j$:

$$(D\varphi_j)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = \frac{\partial(\varphi_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} = \frac{\partial Pr_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}.$$

- vi) Sei $\Phi : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung, $f \in C^\infty(N)$ und $X \in T_p M$, dann gilt:

$$\underbrace{D\Phi_p(X)}_{\text{Tangentialvektor an } f(p) \in N} (f) = \mathcal{L}_X \underbrace{(f \circ \Phi)}_{M \rightarrow \mathbb{R}} = X(f \circ \Phi). \quad (\text{Kettenregel})$$



vii) Sei $X = [\gamma] \in T_p M$, $\gamma : I_\gamma \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ und $\gamma(0) = p$. Dann gilt:

$$X = D\gamma \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right).$$

Wobei

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} = (D_{\text{id}})_0^{-1}(e_1) \in T_0 \mathbb{R}.$$

Tatsächlich:

$$X(f) = \mathcal{L}_X(f) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \gamma) = D\gamma \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right)(f).$$

Alternative:

Per Definition:

$$(D\varphi)_p(X) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ \gamma)(t) \quad \text{und}$$

$$(D\varphi)_p \left(D\gamma \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) \right) = D(\varphi \circ \gamma)_0 \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ \gamma)(t).$$

$$D\varphi_p \text{ Isomorphismus} \implies X = D\gamma \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right)$$

Schließlich:

$$D\varphi_p(\xi) = (\mathcal{L}_\xi(x_1), \dots, \mathcal{L}_\xi(x_n)).$$

2.4 Das Tangentialbündel (Spezialfall Vektorbündel)

Idee: M Mannigfaltigkeit, für alle $p \in M$ haben wir den Tangentialraum $T_p M$. Wollen alle Tangentialräume zu einem topologischen Raum zusammenfassen, sodass wir zwischen verschiedenen Tangentialräumen „umherlaufen“ können.

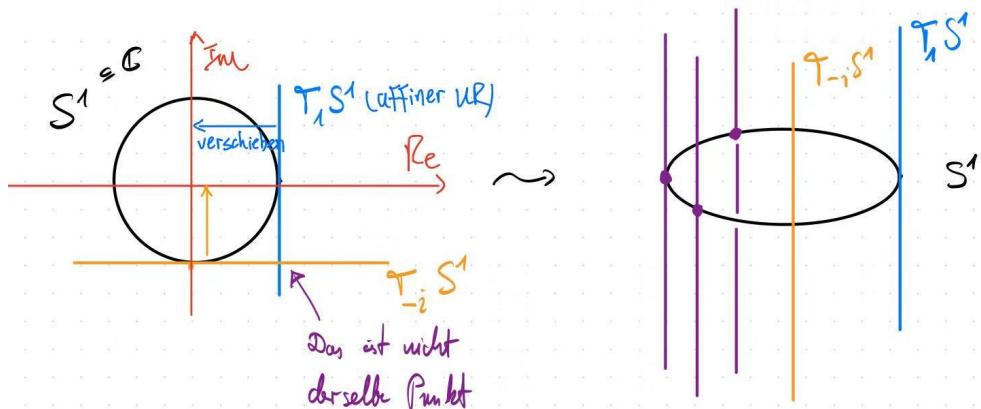


Abbildung 21: Links: S^1 mit eigenen seiner Tangentialräumen; Rechts: fasst die Tangentialräume zum Tangentialbündel, einem besonderen Vektorbündel zusammen

Definition 2.12:

Das Tangentialbündel TM einer Mannigfaltigkeit M ist definiert als die disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume:

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M \quad (\text{als Menge}).$$

Nicht klar:

Was ist eine gute topologische Struktur auf TM ?

Wunschliste:

- Soll Informationen über die Topologie von M enthalten.
- Soll Informationen über die Topologie der Tangentialräume enthalten.
- In einer Umgebung U von p ist

$$\bigcup_{p \in U} \{p\} \times T_p M \cong U \times \mathbb{R}^m.$$

Satz 2.13:

Sei M eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann trägt TM die Struktur einer $2m$ -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Die Fußpunktabbildung $\pi : TM \rightarrow M$ ist surjektiv und differenzierbar.

Beweis. Wir definieren die (kanonische) Fußpunktabbildung $\pi : TM \rightarrow M$ durch

$$\pi : TM \rightarrow M, \quad \pi(\xi) = p, \quad \text{falls } \xi \in T_p M.$$

Sei (U, φ) eine Karte von M , dann definieren wir Karte $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ auf TM :

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$$

durch

$$\xi \mapsto (\varphi(\pi(\xi)), D\varphi_{\pi(\xi)}(\xi)).$$

Klar: Diese Abbildung ist bijektiv.

Hier kommt die Topologie von TM ins Spiel, da genau Definition ist trickreich. Aber sie wird so gewählt, dass alle Abbildungen Φ Homöomorphismen sind.

Wir betrachten die **Kartenwechsel**:

Seien $(U, \varphi), (V, \psi)$ Karten um $p \in M$ mit assoziierten Karten $(\pi^{-1}(U), \Phi), (\pi^{-1}(V), \Psi)$. Uns interessiert

$$\Psi \circ \Phi^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^m.$$

Sei $(q, v) \in \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^m$ und $\xi = \Phi^{-1}((q, v))$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\pi(\xi) &= \varphi^{-1}(q) \quad (\Leftrightarrow \varphi(\pi(\xi)) = q) \quad v = D\varphi_{\pi(\xi)}(\xi) \\ \Rightarrow \Psi \circ \Phi^{-1}(q, v) &= \Psi(\xi) = (\psi \circ \pi(\xi), D\psi_{\pi(\xi)}(\xi)) = (\psi \circ \varphi^{-1}(q), D\psi_{\pi(\xi)}(D\varphi_{\pi(\xi)})^{-1}v).\end{aligned}$$

Wir sehen: Der Kartenwechsel ist differenzierbar.

\Rightarrow Diese Karten definieren eine differenzierbare Struktur auf TM .

(s. lokal euklidisch mit differenzierbarem Kartenwechsel)

Hausdorff:

Seien $\xi = (p, a)$ und $s = (q, b)$ zwei verschiedene Punkte in TM , mit $a \in T_p M$, $b \in T_q M$.

1. Fall: $p \neq q$. Dann existieren offene Umgebungen U, V von p, q mit $U \cap V = \emptyset$. (wegen Hausdorff-Eigenschaft von M)

Dann sind $\pi^{-1}(U)$ und $\pi^{-1}(V)$ disjunkte offene Umgebungen von (p, a) und (q, b) .

2. Fall: $p = q, a \neq b \in T_p M$.

Sei (U, φ) eine Karte um p mit der zugehörigen Karte

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \quad \text{für } TM$$

und

$$\Phi(a) = (\varphi(p), v), \quad \Phi(b) = (\varphi(p), w), \quad v \neq w.$$

Sind V, W offene Mengen in \mathbb{R}^n mit $v \in V, w \in W$ und $V \cap W = \emptyset$, dann sind

$$\Phi^{-1}(\varphi(u) \times V) \quad \text{und} \quad \Phi^{-1}(\varphi(u) \times W)$$

disjunkte offene Umgebungen von (p, a) und (p, b) .

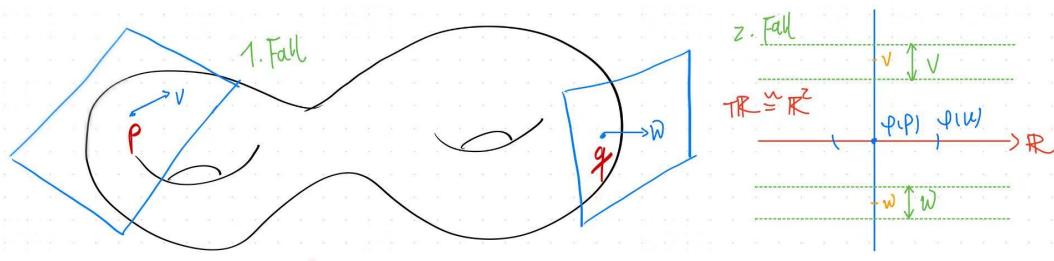


Abbildung 22: TM ist hausdorff'sch

Zweitabzählbar:

Heuristisch, da wir keine genaue Definition der Topologie gegeben haben. M besitzt

abzählbare Basis der Topologie (o.E. besteht diese aus Kartengebieten), für alle Mengen U aus dieser Basis ist $\pi^{-1}(U)$ homöomorph zu $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ und dort finden wir eine abzählbare Basis \leadsto Diagonalargument.

Differenzierbarkeit von π :

$\pi : TM \rightarrow M$ ist differenzierbar, da

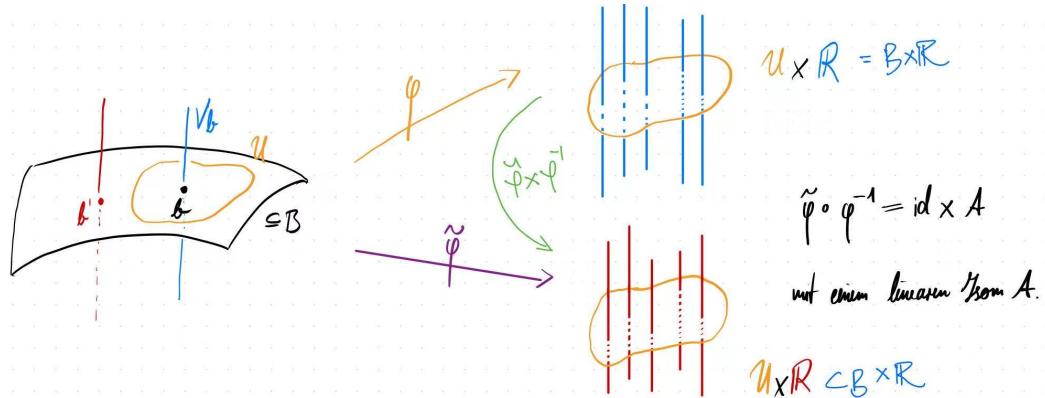
$$\varphi \circ \pi \circ \Phi^{-1} : \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi(U) \quad (x_1, \dots, x_{2n}) \mapsto (x_1, \dots, x_n).$$

Stetigkeit kommt wieder aus der Definition von Topologie. \square

2.5 Vektorbündel (Familie von Vektorräumen)

Idee:

B Mannigfaltigkeit, über jedem $b \in B$ soll ein Vektorraum V_b angeheftet werden, so dass $\bigcup_{b \in B} \{b\} \times V_b$ eine Mannigfaltigkeit ist, $V_b \cong V_{b'}$ als Vektorräume, Kartenwechsel sollen Isomorphismen in den Vektorräumen sein.



$$\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} = \text{id} \times A \quad \text{mit einem linearen Isomorphismus } A.$$

Vektorbündel oder manchmal auch Vektorraumbündel sind Familien von Vektorräumen, die durch die Punkte eines topologischen Raumes parametrisiert sind. Anschaulich besteht ein Vektorbündel aus je einem Vektorraum für jeden Punkt des Basisraumes.

Definition 2.14:

Seien E und B differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $\pi : E \rightarrow B$ eine surjektive Submersion, sodass jede Faser

$$E_p := \pi^{-1}(\{p\})$$

die Struktur eines k -dimensionalen Vektorraums besitzt.

Eine *Trivialisierung* von π über einer offenen Menge U von B ist ein Diffeomorphismus

$\chi : E_U \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{m+k}$ $E_U := \pi^{-1}(U)$, $E|_U$ enthält sowie Standpunkt als auch Faser so dass für alle $p \in U$:

i) $\chi(E_p) = \{p\} \times \mathbb{R}^k$

ii) $\chi|_{E_p} : E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$ ist ein linearer Isomorphismus

Für alle $p \in U$ existiert also ein linearer Isomorphismus $\xi(p) : E_p \rightarrow \mathbb{R}^k$ so dass:

$$\chi(e) = (\pi(e), \xi(\pi(e))e)$$

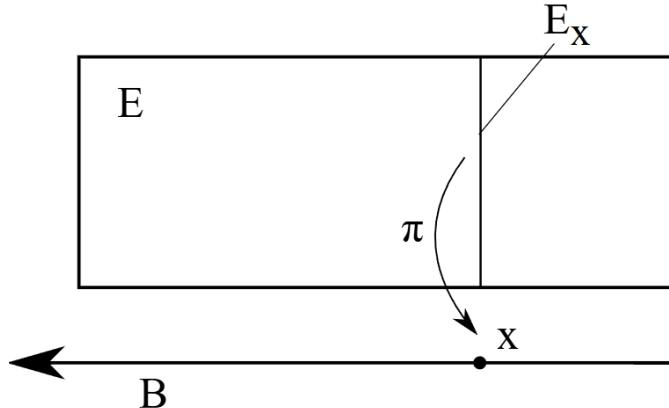


Abbildung 23: Illustration des Vektorbündels (E, B, π) : $E = \mathbb{R}^2$ der Totalraum und $B = \mathbb{R}$ der Basisraum. Die Abbildung $\pi : E \rightarrow B$ projiziert jeden Punkt $p = (x, y) \in E$ auf $x \in B$. Die Faser über $x \in B$ ist definiert als $E_x = \{p \in E \mid \pi(p) = x\}$. Der Totalraum E ist die Vereinigung aller Fasern: $E = \bigsqcup_{x \in B} E_x$.

Bemerkung:

- i) Die erste Bedingung lässt sich auch als $\text{Pr}_1 \circ \chi = \pi$ schreiben, wobei $\text{Pr}_1 : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U$ die Projektion auf den ersten Faktor ist.
- ii) Sind χ_1, χ_2 zwei Trivialisierungen von π über $U_1, U_2 \subseteq B$ offen.

Bedingung i) \oplus ii): Es gibt glatte Abbildungen $A_{12} : U_1 \cap U_2 \rightarrow \underbrace{\text{GL}_k(\mathbb{R})}_{\text{invertierbar, linear}}$ mit

$$\chi_2 \circ \chi_1^{-1} : (U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^k \rightarrow (U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^k,$$

$$(p, v) \mapsto (p, A_{12}(p)v).$$

A_{12} heißt Übergangsabbildung zwischen den Trivialisierungen.

- b) Ein reelles Vektorbündel (E, B, π) von Rang k über einer Mannigfaltigkeit B^m der Dimension m ist eine surjektive Submersion $\pi : E \rightarrow B$ zwischen einer Mannigfaltigkeit E (der Dimension $k+m$), dem sog. Totalraum des Bündels, und der Mannigfaltigkeit B , der sog. Basis des Bündels, mit den folgenden Eigenschaften:

- i) jede Faser $E_p := \pi^{-1}(\{p\})$ besitzt die Struktur eines k -dim Vektorraums, dessen Nullelement mit 0_p bezeichnet wird,
- ii) es gibt eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von B und eine Familie von lokalen (bijektiven, differenzierbaren) Trivialisierungen $\{\chi_i : E_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^k\}_{i \in I}$ von π über den Elementen der Überdeckung, die auf jeder Faser einen \mathbb{R} -Vektorraum-Isomorphismus induziert, und mit $\text{Pr}_1 \circ \chi_i = \pi$

Zu jedem Paar $(i, j) \in I \times I$ mit $U_{ij} := U_i \cap U_j \neq \emptyset$ gebe es eine differenzierbare Abbildung

$$g_{ij} : U_{ij} \rightarrow \text{GL}_k(\mathbb{R}),$$

so dass gilt:

$$\chi_i \circ \chi_j^{-1}(x, v^\top) = (x, g_{ij}(x) \cdot v^\top).$$

Dann gibt es auf E eine (eindeutig bestimmte) differenzierbare Struktur, so dass E ein Vektorbündel vom Rang k über X mit Bündelprojektion π und lokalen Trivialisierungen φ_i ist.

Jede lokale Trivialisierung eines Vektorbündels liefert zugleich eine Karte der Gesamtmanigfaltigkeit E , da sie lokal einen Diffeomorphismus in den Standardraum \mathbb{R}^{m+k} gibt. Man identifiziert $U_i \times \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{m+k}$ über eine Karte der Basis X :

$$\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Zusammengekommen ergibt das eine Karte $\chi_i \circ (\varphi_i \times \text{id})$ der Gesamtmanigfaltigkeit E in der Form:

$$\pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\chi_i} U_i \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\varphi_i \times \text{id}} \mathbb{R}^{m+k}.$$

- c) Wenn (E, B, π) eine Trivialisierung $\chi : E \rightarrow B \times \mathbb{R}^k$ (über ganz B) besitzt, sagen wir, dass π ein *triviales Vektorbündel* ist. Das bedeutet, dass es eine globale stetige Auswahl von Basen (eine globale Trivialisierung) gibt.

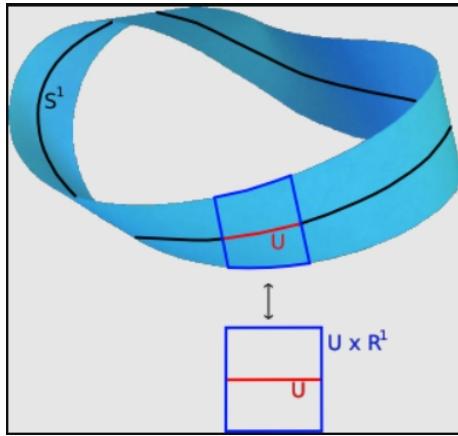


Abbildung 24: Möbiusband als reelles Linienbündel (also ein \mathbb{R}^1 -Bündel) über dem Kreis. Lokal ist es homöomorph zu $U \times \mathbb{R}$, wobei U eine offene Teilmenge von S^1 ist. Allerdings ist das Möbiusband nicht homöomorph zu $S^1 \times \mathbb{R}$, was einem Zylinder entspricht.

Bemerkung:

Häufig nennt man E das Bündel (anstatt (E, B, π) oder $\pi : E \rightarrow B$) und geht implizit von einer Abbildung $\pi : E \rightarrow B$ aus.

Beispiele:

- i) Das triviale Bündel über B : $E = B \times \mathbb{R}^k$, $\pi : B \times \mathbb{R}^k \rightarrow B$, $(x, v) \mapsto x$.
Ein Vektorbündel heißt trivial, wenn es isomorph zu einem trivialen Bündel ist.
(Per Def ist jedes Vektorbündel lokal trivial.)
- ii) Das *Tangentialbündel* $\pi : TM \rightarrow M$ einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist ein Vektorbündel vom Rang m .
- iii) Analog zum Tangentialbündel ist das *Kotangentialbündel* T^*M als Vereinigung der Dualräume von Tangentialräumen

$$T_p^*M = (T_p M)^*$$

auch ein Vektorbündel und wir können das *Endomorphismenbündel* $\text{End}(TM)$ definieren.

- iv) Die Vektorbündel TS^2 und das Möbiusband sind nicht trivial.
Für das triviale Bündel wählen wir eine globale Trivialisierung, sodass der Übergang

$$\chi_1 \circ \chi_2^{-1}(x, v) = (x, v) \quad \text{für alle } x \in U_1 \cap U_2.$$

Wäre das Möbiusband trivial, gäbe es glatte Funktionen

$$h_{\pm} : E|_{U_{\pm}} \rightarrow U_{\pm} \times \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \mu_{+-}(x) = h_+(x) \circ h_-(x)^{-1}.$$

Dies würde bedeuten, dass ein glatter Weg von einem orientierungserhaltenden zu einem orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus existiert. Ein solcher Weg kann jedoch nicht existieren, da orientierungserhaltende (bzw. -umkehrende) Diffeomorphismen überall positive (bzw. negative) Ableitungen haben, während die Ableitung entlang eines glatten Weges stetig sein müsste.

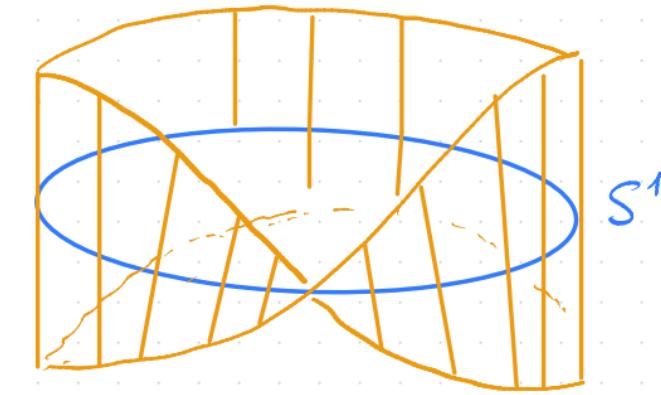


Abbildung 25: Möbiusband: nicht triviales Bündel über S^1

TS^1 , TS^3 und TS^7 sind trivial.

- v) Der Raum der Differentialformen ist als Bündel der äußeren Algebra auch ein Vektorbündel.

Def 2.14 1/2:

Seien $\pi_1 : E_1 \rightarrow B_1$ und $\pi_2 : E_2 \rightarrow B_2$ Vektorbündel. Eine glatte Abbildung $F : E_1 \rightarrow E_2$ heißt *Bündelhomomorphismus*, wenn:

- i) eine glatte Abbildung $\bar{F} : B_1 \rightarrow B_2$ existiert, sodass $\pi_2 \circ F = \bar{F} \circ \pi_1$ (F bildet Fasern auf Fasern ab). Als Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{F} & E_2 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ B_1 & \xrightarrow{\bar{F}} & B_2 \end{array}$$

- ii) die Einschränkung $F|_{(E_1)_p} : (E_1)_p \rightarrow (E_2)_{\bar{F}(p)}$ linear ist.
Sprechweise: F hebt die Abbildung \bar{F} hoch/an.

F heißt *Bündelisomorphismus*, wenn ein Bündelhomomorphismus $G : E_2 \rightarrow E_1$ existiert mit:

$$F \circ G = \text{id}_{E_2}, \quad G \circ F = \text{id}_{E_1}.$$

Definition 2.15:

Eine differenzierbare Abbildung $s : B \rightarrow E$ heißt Schnitt des Vektorbündels $\pi : E \rightarrow B$, falls

$$\pi \circ s = id_B,$$

d.h. falls $s(x) \in E_x$ für alle $x \in B$.

Den unendlich-dimensionalen Vektorraum der Schnitte in E bezeichnet man mit $\Gamma(E)$.

Beispiele.

- Trivialbündel: Sei $E = B \times \mathbb{R}^k$, dann ist jeder Schnitt eine Abbildung

$$s : B \rightarrow B \times \mathbb{R}^k, \quad s(x) = (x, v(x)),$$

wobei $v : B \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine glatte Funktion ist. Die Schnitte entsprechen also genau den glatten \mathbb{R}^q -wertigen Funktionen auf X .

- Tangentialbündel TM : Ein Schnitt des Tangentialbündels

$$s : M \rightarrow TM$$

mit $\pi \circ s = id_M$ ist ein **Vektorfeld** auf M , da $s(x) \in T_x M$ für alle $x \in X$ ist.

Ein Schnitt ist wie ein „Feld von Vektoren“, das sich kontinuierlich (oder glatt) über die ganze Mannigfaltigkeit X erstreckt, wobei jeder Vektor aus dem passenden Vektorraum (der Faser) über dem Punkt kommt.

Definiton 2.16:

Eine Nullstelle eines Schnittes $s : B \rightarrow E$ ist ein Punkt $x \in B$ mit

$$s(x) = 0 \in E_x.$$

Jedes Vektorbündel hat den Nullschnitt $s \equiv 0$, für den jedes Punkt $x \in B$ eine Nullstelle ist.

Der Spezialfall $E = TM$ verdient einen eigenen Namen.

3 Vektorfeld

Definition 3.1: Ein (differenzierbares) Vektorfeld ist ein Schnitt des Tangentialbündels, d.h. eine differenzierbare Abbildung

$$X : M \rightarrow TM \quad \text{mit } \pi \circ X = id_M.$$

Sei $X_p = \text{Pr}_2 \circ X(p) \in T_p M$ für alle $p \in M$.

Beispiel: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Identifizieren $TU \cong U \times \mathbb{R}^n$

Vektorfelder \iff differenzierbare Abbildung $X: U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ mit $X(p) = (p, X_p)$
 \iff differenzierbare Abbildung $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$

Skizze:

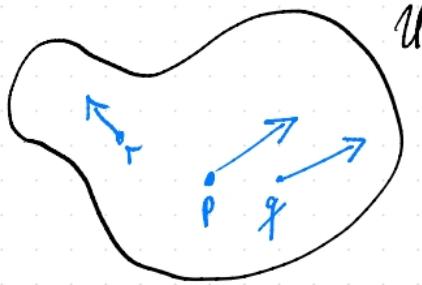


Abbildung 26: Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M

Bemerkung: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Wir identifizieren TM mit einer Teilmenge von \mathbb{R}^{2n} .

Für $p \in M: T_p M \longleftrightarrow$ Untervektorraum von \mathbb{R}^n

Sei $\Psi: TM \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\Psi(v) = (p, v) \quad \text{wobei } v \in T_p M \subseteq TM$$

Dann ist Ψ eine Einbettung.

Beschreibung des Vektorfelds: (*) Differenzierbare Abbildung $X: M \rightarrow \Psi(TM) \subseteq \mathbb{R}^{2n}$

mit $X(p) = (p, X_p)$

(bzw. $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Bild in einem von p abhängigen Untervektorraum)

Beispiel: $M = S^n$, dann schreiben wir den Tangentialraum $T_p S^n$ von S^n an p als

$$T_p S^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, p \rangle = 0\}$$

\Rightarrow Ein Vektorfeld auf S^n ist eine glatte Abbildung $X: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$\langle X(p), p \rangle = 0. \quad (\text{Hier } X(p) = X_p \in T_p M)$$

Frage: M Mannigfaltigkeit, gibt es ein Vektorfeld X ohne Nullstellen?
(Also $X(p) \neq 0$ für alle $p \in M$)

Auf der Sphäre S^n existiert genau dann ein nichtverschwindendes Vektorfeld, wenn n ungerade ist. Für $M = S^{2n+1}: X(x_0, \dots, x_{2n+1}) = (-x_1, x_0, \dots, -x_{2n+1}, x_{2n})$ ist ein konkretes Beispiel für ein nichtverschwindendes Vektorfeld, das tangential zur Sphäre S^{2n+1} liegt.

Satz vom Igel

Jedes Vektorfeld auf S^{2n} hat mindestens eine Nullstelle.

(Offensichtlich kann dieser Satz nur für differenzierbare / stetige Vektorfelder richtig sein.)

Weiterführende Frage: Wie viele linear unabhängige solcher Vektorfelder gibt es?

Definition: Zwei oder mehr Vektorfelder heißen *linear unabhängig*, falls sie punktweise linear unabhängig sind. (Stichwort: Rahmen)

Bemerkung:

(i) Sei $n + 1 = (2r + 1) \cdot 2^{c+4d}$ mit $0 \leq c \leq 3$, $d, r \in \mathbb{N}_0$.

Dann gibt es auf S^n genau $2^c + 8d - 1$ linear unabhängige Vektorfelder (insbesondere haben diese keine Nullstellen).

(ii) S^n hat n linear unabhängige Vektorfelder genau dann, wenn $n = 1, 3, 7$

$$(S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}, \quad S^3 \subseteq \mathbb{R}^4 = \mathbb{H}, \quad S^7 \subseteq \mathbb{R}^8 = \mathbb{O})$$

(iii) Gibt es auf einer m -dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit M die maximal mögliche Anzahl von m linear unabhängigen Vektorfeldern, so sagen wir, dass M parallelisierbar bzw. das Tangentialbündel trivial ist. ($T_M \cong M \times \mathbb{R}^m$)

(iv) Den unendlich-dimensionalen (z.B. auf einem Funktionenraum) (falls $\dim M > 0$) reellen Vektorraum der Vektorfelder auf M bezeichnen wir mit $\mathcal{X}(M) = \Gamma(TM)$. Der Vektorraum $\Gamma(TM)$ ist ein Modul über dem Ring $C^\infty(M)$, da $f \cdot X$ (punktweises Produkt) für jede Funktion f und jedes Vektorfeld X wieder ein Vektorfeld ist.

3.1 Vektorfelder als Derivationen

- Schon gesehen: Tangentialvektoren \longleftrightarrow Derivationen auf Funktionenkeimen
- Wollen sehen: Vektorfelder \longleftrightarrow Derivationen auf $C^\infty(M)$ (Raum der glatten Funktionen auf M)

Definition 3.2: Eine Derivation δ auf der Algebra $C^\infty(M)$ der differenzierbaren Funktionen auf M ist eine lineare Abbildung

$$\delta: C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M),$$

die die Produktregel

$$\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g)$$

erfüllt. Der Vektorraum der Derivationen auf M heißt $\mathcal{D}(M)$.

Beispiel: Jedes Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ definiert durch die Lie-Abbildung

$$\mathcal{L}_X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

eine Derivation auf M . Dabei definieren wir punktweise:

$$\mathcal{L}_X(f)(p) = \mathcal{L}_{X_p}(f) = Df_p(X_p).$$

Die Funktion $\mathcal{L}_X(f)$ ist in $C^\infty(M)$, da $f \in C^\infty(M)$ (partielle Ableitung einer glatten Funktion ist glatt).

Satz 3.3: Die Abbildung

$$\mathcal{L} : \Gamma(TM) \longrightarrow \mathcal{D}(M), \quad X \mapsto \mathcal{L}_X$$

ist ein Isomorphismus unendlich-dimensionaler Vektorräume.

Beweis.

- \mathcal{L} ist eine lineare Abbildung ✓
- \mathcal{L}_X ist eine Derivation ✓

Injectivität: Zu zeigen: Für $X \in \Gamma(TM)$ mit $X \neq 0$ ist $\mathcal{L}_X \neq 0$

Sei $X \neq 0$ ein Vektorfeld auf M , d.h. es gibt ein $p \in M$ mit $X_p = X(p) \neq 0$

Haben schon gesehen: Die Abbildung

$$T_p M \longrightarrow \mathcal{D}_p(M) \quad X_p \mapsto \mathcal{L}_{X_p}$$

ist injektiv. (Satz 2.11, ist zwar linearer Isomorphismus)

⇒ Es gibt eine Funktion f , definiert auf einer Umgebung U von p mit

$$\mathcal{L}_{X_p}(f) = Df_p(X_p) \neq 0$$

Behauptung: Wir können f zu einem auf ganz M definierten, differenzierbaren Funktion fortsetzen. Wähle dazu eine Funktion $\chi \in C^\infty(M)$ mit $\text{supp}(\chi) \subset U$ und $\chi|_V = 1$ auf einer Umgebung $V \subset U$ von p :

- $\text{supp}(g) = \{x \in M \mid g(x) \neq 0\}$
- Nicht klar, dass es eine solche Funktion χ gibt.
- χ heißt *Abschneide Funktion*.

Dann ist $\chi \cdot f \in C^\infty(M)$, definiert durch

$$(\chi f)(p) = \begin{cases} (\chi f)(p) & \text{für } p \in U \\ 0 & \text{für } p \in M \setminus U \end{cases}$$

die gesuchte glatte Fortsetzung von f .

Beobachtung:¹

$$\mathcal{L}_X(\chi f) = D(\chi f)_p(X_p) \stackrel{\chi|_V=1}{=} Df_p(X_p) \neq 0$$

Alternative:

$$\mathcal{L}_X(\chi f)(p) = \mathcal{L}_{X_p}(\chi f) \stackrel{\text{produktregel}}{=} \underbrace{\mathcal{L}_{X_p}(\chi)}_{=0 \text{ konst. Fkt.}} f(p) + \underbrace{\chi(p) \mathcal{L}_{X_p}(f)}_{=1} = \mathcal{L}_{X_p}(f) \neq 0.$$

Surjektivität:

Sei δ eine Derivation auf $C^\infty(M)$. Gesucht: $X \in \Gamma(TM)$ mit $\mathcal{L}_X = \delta$.

Klar gesehen: Durch Abschneide Funktion lässt sich jede lokal definierte Funktion zu einer global definierten Funktion fortsetzen. (Daher sprechen wir von *Funktionenkeimen*.)

δ definiert durch $\delta_p: f \mapsto \delta(f)(p)$ eine Derivation auf den Funktionenkeimen $C_p^\infty(M)$. (Def. 2.7 Derivation durch algebraische Definition von Tangentialraum)
(Dazu wählen wir einen Repräsentanten von f und setzen diesen zu einer globalen Funktion fort.)

$$\stackrel{2.8}{\Rightarrow} \delta_p = \sum_{i=1}^m \delta_p(\varphi_j) \frac{\partial}{\partial x_j}|_p$$

Definiere das Vektorfeld auf M durch: X_p ist der Tangentialvektor, der zu δ_p gehört.
(Durch Isomorphismus $T_p M \cong \mathcal{D}_p M$ Satz 2.11) Für alle p definiert man ein δ_p , aus dem ein X_p stammt. Damit ist X bestimmt so auch dessen Lie-Ableitung \mathcal{L}_X .

$$\Rightarrow \mathcal{L}_X = \delta$$

□

In lokalen Koordinaten (U, φ) schreibt sich X mittels Basis $\{\frac{\partial}{\partial x_j}\}$ von $\mathcal{D}_p M$ als

$$X|_U = \sum_{j=1}^m \mathcal{L}_X(\varphi_j) \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^m \delta(\varphi_j) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \text{ als Tangentialvektor}$$

$\Rightarrow X$ ist ein glattes Vektorfeld.

Zur Existenz einer *Abschneidefunktion*:

¹ $\mathcal{L}_X(\chi f) = \mathcal{L}_X(\chi) \cdot f + \chi \cdot \mathcal{L}_X(f)$

Lemma 3.4: Sei $R > 0$, dann existiert ein glattes Feld

$$\chi = \chi_R: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$$

mit

$$\chi|_{\overline{B_{1/3R}(0)}} \equiv 1 \quad \text{und} \quad \chi|_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{2/3R}(0)}} \equiv 0$$

Insbesondere: Dieses Feld ist

- glatt auf \mathbb{R}^n
- identisch 1 für $|x| \leq \frac{1}{3}R$
- identisch 0 für $|x| \geq \frac{2}{3}R$

Bemerkung:

- (i) Es reicht, das Lemma für $n = 1$ zu zeigen, danach können wir $\chi(\|x\|^2)$ für $n > 1$ wählen.
- (ii) Um die Abschneidefunktion auf M^m um den Punkt p zu erhalten, wählen wir eine Karte (U, φ) mit $p \in U$ und $\varphi(p) = 0$. Dann gibt es ein $R > 0$ mit $B_R(0) \subset \varphi(U)$. Die gesuchte Abschneidefunktion ist:

$$\begin{cases} \chi \circ \varphi & \text{auf } U \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Zurückziehen von χ mit φ .)

Beweis. Betrachte die Funktionen

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1], \quad x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1], \quad x \mapsto \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)}$$

Es gelten:

- $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$
- $g(x) = 0$ für $x \leq 0$
- $g(x) = 1$ für $x > 1$

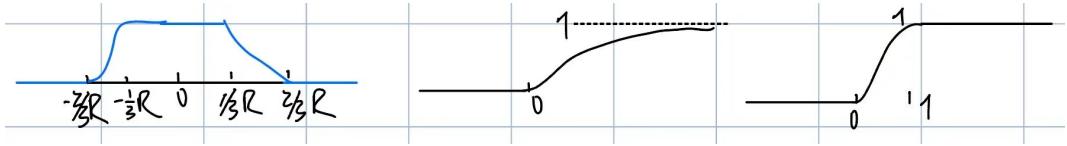


Abbildung 27: Links: χ ; Mittel: f ; Rechts: g

Die gesuchte Funktion ist

$$\chi: \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1], \quad x \mapsto g(x+2) \cdot g(x-2)$$

Es gilt $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$:

- $\chi(x) = 1 \quad \text{für } x \in [-1, 1]$
- $\chi(x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus (-2, 2)$

Das ist die Funktion für $R = 3$, die allgemein erhalten wir durch Strecken/Stauchen.

□

Bemerkung: Sei X ein Vektorfeld auf M und (U, φ) eine Karte von M . Dann können wir X auf U als

$$X|_U = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

schreiben, mit glatten Funktionen $a_i \in C^\infty(U)$. Diese sind durch $a_i = X(\varphi_i)$ eindeutig bestimmt, wobei φ_i die i -te Koordinatenfunktion bezeichnet, $\varphi_i(q) = (\varphi(q))_i = (Pr_i \circ \varphi)(q)$

Die Derivationen $\frac{\partial}{\partial x_j}$ sind glatte Vektorfelder auf U , die in jedem Punkt eine Basis bilden (sog. *Basisvektorfelder*).

3.2 Die Lie-Algebra der Vektorfelder

Was passiert, wenn wir zwei Derivationen hintereinander ausführen? Ist sie wieder einen Derivation?

$$\begin{aligned} \delta_1 \delta_2(f \cdot g) &= \delta_1(\delta_2(f) \cdot g + f \cdot \delta_2(g)) \\ &= \delta_1(\delta_2(f)) \cdot g + \delta_2(f) \cdot \delta_1(g) + \delta_1(f) \cdot \delta_2(g) + f \cdot \delta_1(\delta_2(g)) \\ &\neq (\delta_1 \delta_2(f)) \cdot g + f \cdot \delta_1 \delta_2(g) \quad (\text{im Allg.}) \end{aligned}$$

(Stichwort: Paralleltransport)

Lemma 3.5: Seien δ_1, δ_2 zwei Derivationen auf $C^\infty(M)$. Dann ist der Kommutator

$$[\delta_1, \delta_2] := \delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1$$

wieder eine Derivation.

Der Isomorphismus $\mathcal{L}: \Gamma(TM) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ motiviert die folgende Definition:

Definition 3.6:

Seien X, Y Vektorfelder auf M . Dann ist $[X, Y]$ das eindeutig bestimmte Vektorfeld mit

$$\mathcal{L}_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$$

Das Vektorfeld $[X, Y]$ heißt die Lie-Klammer bzw. der Kommutator der Vektorfelder X, Y .

Definition 3.7: Die Lie-Ableitung von Y nach X ist $\mathcal{L}_X Y := [X, Y]$.

Bemerkung: Das Vektorfeld $[X, Y]$ ist als Derivation bestimmt durch die Gleichung

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad \forall f \in C^\infty(M)$$

Lemma 3.8:

Zwei Vektorfelder $X, Y \in \Gamma(TM)$ seien in einer Karte (U, φ) gegeben als

$$X|_U = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y|_U = \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

wobei $a_i = X(\varphi_i)$, $b_i = Y(\varphi_i)$. Dann gilt

$$[X, Y]|_U = \sum_{i,j=1}^m \left(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Beweis. Schreibe $[X, Y]$ auf (U, φ) als

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^m c_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Die Koeffizienten c_i sind bestimmt durch

$$\begin{aligned} c_i &= [X, Y](\varphi_i) = X(Y(\varphi_i)) - Y(X(\varphi_i)) \\ &= X(b_i) - Y(a_i) \\ &= \sum_j a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - \sum_j b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \end{aligned}$$

□

Satz 3.9:

Seien X, Y, Z Vektorfelder auf M , a, b reelle Zahlen und f eine differenzierbare Funktion auf M , dann gilt:

$$(i) \quad [X, Y] = -[Y, X] \quad (\text{Schiefsymmetrie bzw. Antikommutativit\"at})$$

- (ii) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (Bilinearität über \mathbb{R})
- (iii) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (Jacobi-Identität)
- (iv) $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$
 $\mathcal{L}_X(fY) = [X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y.$

Definition 3.10: Eine reelle Lie-Algebra $(V, [\cdot, \cdot])$ ist ein reeller Vektorraum V mit einer Abbildung:

$$[\cdot, \cdot]: V \times V \longrightarrow V,$$

welche die Eigenschaften (i)–(iii) erfüllt. Die Lie-Klammer $[\cdot, \cdot]$ ist also eine bilineare schiefsymmetrische Abbildung, welche die Jacobi-Identität erfüllt.

Beispiele:

- (i) Der Raum $V = \Gamma(TM)$ der Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M zusammen mit dem Kommutator von Vektorfeldern ist eine unendlich-dimensionale reelle Lie-Algebra.
- (ii) Jeder Vektorraum V wird mit $[\cdot, \cdot] = 0$ zu einer Lie-Algebra. Diese Lie-Algebren heißen *abelsch*.
- (iii) Der Vektorraum $V = M(n, \mathbb{R})$ der quadratischen reellen Matrizen mit der Lie-Klammer

$$[A, B] = AB - BA$$

ist eine n^2 -dimensionale reelle Lie-Algebra.

- (iv) Der Vektorraum

$$\mathfrak{so}(n) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid A + A^T = 0\}$$

der schiefsymmetrischen Matrizen ist mit dem Kommutator

$$[A, B] = AB - BA$$

eine $\frac{1}{2}n(n - 1)$ -dimensionale reelle Lie-Algebra.

- (v) $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Vektorprodukt \times als Lie-Klammer

$$[v, w] = v \times w, \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^3$$

ist eine 3-dimensionale Lie-Algebra. Diese Lie-Algebra ist isomorph zu $\mathfrak{so}(3)$.

Definition 3.11: Seien $(V, [\cdot, \cdot]_V)$ und $(W, [\cdot, \cdot]_W)$ Lie-Algebren. Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ heißt Lie-Algebren-Homomorphismus, falls f linear ist und

$$f([v_1, v_2]_V) = [f(v_1), f(v_2)]_W \quad \forall v_1, v_2 \in V$$

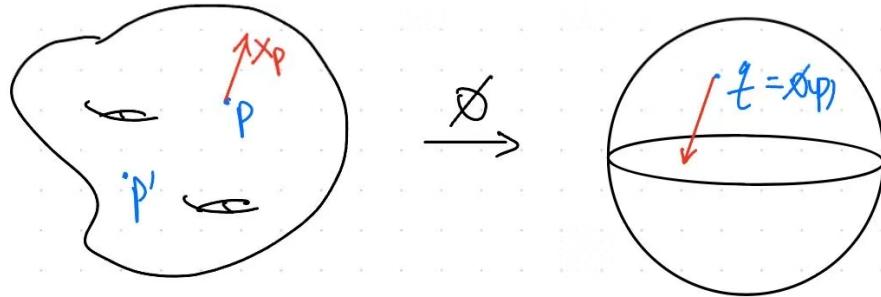
Ein bijektiver Lie-Algebren-Homomorphismus heißt Lie-Algebren-Isomorphismus. Zwei Lie-Algebren heißen *isomorph*, falls es einen Lie-Algebren-Isomorphismus zwischen ihnen gibt.

3.3 Das Bild von Vektorfeldern unter Diffeomorphismen

\mathcal{M}, \mathcal{N} Mannigfaltigkeiten $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ differenzierbare Abbildung $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ Vektorfeld auf \mathcal{M}

Gibt es ein Vektorfeld Y auf \mathcal{N} mit

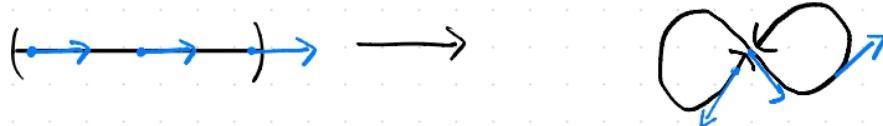
$$T_{\phi(p)}\mathcal{N} \ni Y_{\phi(p)} = (D\phi_p(X_p)) \in T_{\phi(p)}\mathcal{N}?$$



Falls ϕ nicht injektiv ist: Mehrere Punkte können auf $q \in \mathcal{N}$ landen, $\phi(p) = q = \phi(p')$ mit $p \neq p' \Rightarrow$ Es gibt keinen Grund warum

$$D\phi_p(X_p) = D\phi_{p'}(X_{p'})$$

Falls ϕ nicht surjektiv ist: Was sollte Y außerhalb des Bildes von X sein? Stetige Fortsetzungen sind nicht immer möglich.



Definition 3.12: Sei $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ein Diffeomorphismus, dann ist der Push-Forward (oder das Bild) des Vektorfeldes $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ unter ϕ ein Vektorfeld auf \mathcal{N} , das wir mit ϕ_*X auf \mathcal{N} bezeichnen und durch

$$(\phi_*X)_q := (D\phi)_{\phi^{-1}(q)}(X_{\phi^{-1}(q)}) \quad \forall q \in \mathcal{N}$$

bzw.

$$(\phi_*X)_{\phi(p)} := (D\phi)_p(X_p) \quad \forall p \in \mathcal{M}$$

definieren.

Satz 3.13: Sei $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ein Diffeomorphismus und $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ ein glattes Vektorfeld. Dann ist ϕ_*X ein glattes Vektorfeld auf \mathcal{N} und es gilt:

$$(i) \quad \mathcal{L}_{\phi_*X}(f) = \mathcal{L}_X(f \circ \phi) \circ \phi^{-1}$$

(ii) $\phi_*[X, Y] = [\phi_*X, \phi_*Y]$
 für alle $f \in C^\infty(\mathcal{N})$, $Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$.

Sanity Check: (ergeben die Formeln Sinn)

$f : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist auch $\mathcal{L}_{\phi_*X}(f)$ eine Funktion $\mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$f \circ \phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist $\mathcal{L}_X(f \circ \phi)$ eine Funktion $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{L}_X(f \circ \phi) \circ \phi^{-1} : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$

X, Y Vektorfelder auf \mathcal{M} , dann ist $[X, Y]$ Vektorfeld auf $\mathcal{M} \Rightarrow \phi_*[X, Y]$ Vektorfeld auf \mathcal{N}

ϕ_*X, ϕ_*Y Vektorfelder auf \mathcal{N} , dann ist $[\phi_*X, \phi_*Y]$ Vektorfeld auf \mathcal{N}

Beweis. **Zu (0):** Der Diffeomorphismus $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ induziert einen Diffeomorphismus $D\phi : T\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{N}$ durch

$$D\phi : T\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{N}, \quad (p, v) \mapsto (\phi(p), D\phi_p(v))$$

Als Abbildung ist $\phi_*X : \mathcal{N} \rightarrow T\mathcal{N}$ so definiert, dass das Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} T\mathcal{M} & \xrightarrow{D\phi} & T\mathcal{N} \\ X \uparrow & & \uparrow \phi_*X \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{N} \end{array}$$

$\Rightarrow \phi_*X$ glattes Vektorfeld auf \mathcal{N} .

(Aus Definition entspricht push-forward genau dem linken Verlauf, der aus glatten Abbildungen besteht.)

Zu i) Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\phi_*X} f)(\phi(p)) &\stackrel{(\phi_*X)_{\phi(p)} = D\phi_p(X_p)}{=} \mathcal{L}_{D\phi_p(X_p)} f \stackrel{\text{Def. Lie-Ableitung}}{=} Df_p(D\phi_p(X_p)) \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} D(f \circ \phi)_p(X_p) \stackrel{\text{Def. Lie-Ableitung}}{=} \mathcal{L}_{X_p}(f \circ \phi) = \mathcal{L}_X(f \circ \phi)(p). \\ &\Rightarrow (\mathcal{L}_{\phi_*X} f) \circ \phi = \mathcal{L}_X(f \circ \phi) \quad \# \end{aligned}$$

Zu ii) Wir benutzen die Gleichung aus i):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{[\phi_*X, \phi_*Y]} f &= \mathcal{L}_{\phi_*X}(\mathcal{L}_{\phi_*Y} f) - \mathcal{L}_{\phi_*Y}(\mathcal{L}_{\phi_*X} f) \quad [\text{Def 3.6}] \\ &= \mathcal{L}_{\phi_*X}(\mathcal{L}_Y(f \circ \phi) \circ \phi^{-1}) - \mathcal{L}_{\phi_*Y}(\mathcal{L}_X(f \circ \phi) \circ \phi^{-1}) \quad [i] \\ &= \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y(f \circ \phi) \circ \phi^{-1} \circ \phi) \circ \phi^{-1} - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X(f \circ \phi)) \circ \phi^{-1} \quad [i] \\ &= \mathcal{L}_{[X, Y]}(f \circ \phi) \circ \phi^{-1} \quad [\text{Def 3.6}] \\ &= \mathcal{L}_{\phi_*[X, Y]} f \quad [i] \end{aligned}$$

□

3.4 ϕ -verknüpfte Vektorfelder

Definition 3.14: Sei $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ eine differenzierbare Abbildung. Zwei gegebene Vektorfelder $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$, $Y \in \Gamma(T\mathcal{N})$ heißen ϕ -verknüpft (ϕ -verwandt), falls

$$Y_{\phi(p)} = D\phi_p(X_p)$$

für alle $p \in \mathcal{M}$ erfüllt ist.

Beispiel: $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ Diffeomorphismus und X Vektorfeld auf \mathcal{M} . Dann sind die Vektorfelder X und ϕ_*X ϕ -verknüpft.

Bemerkung: Zwei Vektorfelder $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$, $Y \in \Gamma(T\mathcal{N})$ sind genau dann ϕ -verknüpft, wenn

$$\mathcal{L}_Y(f) \circ \phi = \mathcal{L}_X(f \circ \phi) \quad (*)$$

für alle Funktionen (bzw. Funktionenskeime) f auf \mathcal{N} gilt.

Beweis. Für $p \in \mathcal{M}$ ist

$$\mathcal{L}_Y(f) \circ \phi(p) = \mathcal{L}_{Y_{\phi(p)}}(f)$$

und

$$\mathcal{L}_X(f \circ \phi)(p) = \mathcal{L}_{X_p}(f \circ \phi) = \mathcal{L}_{D\phi_p(X_p)}(f)$$

(Kettenregel, Bem. vi) am Ende von Abschnitt 2.3.)

Die Gleichheit in $(*)$ gilt, wenn $Y_{\phi(p)}$ und $D\phi_p(X_p)$ dieselbe Derivation definieren, also gleich sind. \square

Lemma 3.15: Sei $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ eine differenzierbare Abbildung und für $i = 1, 2$ seien $X_i \in \Gamma(T\mathcal{M})$ bzw. $Y_i \in \Gamma(T\mathcal{N})$ zwei Paare von ϕ -verknüpften Vektorfeldern. Dann sind die Kommutatoren $[X_1, X_2]$ und $[Y_1, Y_2]$ ebenfalls ϕ -verknüpft, d. h.

$$D\phi([X_1, X_2]_p) = [Y_1, Y_2]_{\phi(p)}.$$

Beweis. Übung. \square

3.5 Vektorfelder und Differentialgleichungen

Aufgabe / Fragestellung:

- Sei \mathcal{M} eine Mannigfaltigkeit. Finde einen Diffeomorphismus $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ mit $\phi \neq \text{id}$
- Sei \mathcal{M} weg-zusammenhängend und $p \neq q \in \mathcal{M}$. Finde einen Diffeomorphismus $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ mit $\phi(p) = q$

Wir wollen beide Fragen mit Hilfe von Vektorfeldern beantworten.

Definition 3.16: Eine differenzierbare Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ heißt Integralkurve des Vektorfeldes $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ durch p , falls

$$\gamma(0) = p \quad (1)$$

$$(D\gamma)_t \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}\mathcal{M} \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad (2)$$

Fragen: Gegeben ein Vektorfeld X auf \mathcal{M} .

- Gibt es für jedes $p \in \mathcal{M}$ ein $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$ und eine Integralkurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ durch p ?
- Was ist das größtmögliche ε ?
- Wie ändert sich die Integralkurve, wenn wir p verschieben?
- Können zwei verschiedene Integralkurven durch denselben Punkt verlaufen?

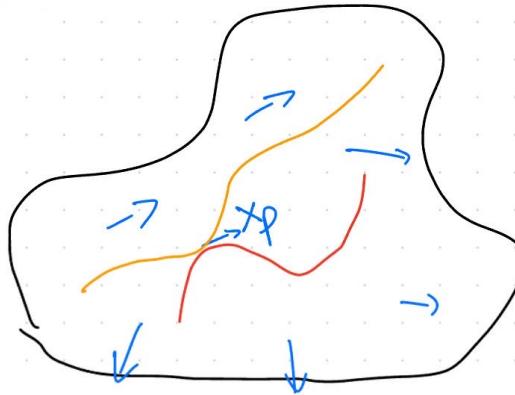


Abbildung 28: Integralkurve auf einem Vektorfeld

Zunächst lokal:

Sei (U, φ) eine Karte um $p \in \mathcal{M}$. Wir schreiben X auf U als

$$X|_U = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

mit glatten Funktionen $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$. (Bemerkung Section 3.2 oben)

Erinnerung: $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ ist die Basis des Tangentialraums, induziert von der Karte φ . Gegeben durch: $[\varphi^{-1}(\varphi(p) + t \cdot e_i)]$

Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ eine Kurve durch $p \in \mathcal{M}$. Für ε klein genug liegt das Bild der Kurve γ in U (da γ stetig ist). Auch den Tangentialvektor $\dot{\gamma}(t)$ können wir auf U durch $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ darstellen:

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^m b_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(t)}$$

für glatte $b_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$.

Wir wollen die Funktion b_i mit Hilfe von γ und φ ausdrücken.

In der Karte φ gilt:

$$(\varphi \circ \gamma)(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t)) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

d. h. $\gamma_i = \underbrace{pr_i \circ \varphi}_{=: \varphi_i} \circ \gamma$, wobei pr_i die i -te Koordinate auswählt.

Erinnerung: Zwei Vektorfelder sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Derivationen definieren.

$$b_j(t_0) = \sum_{i=1}^m b_i(t_0) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(t_0)}}_{\delta_{ij}} (\varphi_j) = \dot{\gamma}(t_0)(\varphi_j) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \varphi_j(\gamma(t)) = \dot{\gamma}_j(t_0)$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^m \dot{\gamma}_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(t)}$$

Dadurch wird Gleichung (2):

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)} \quad \text{zu}$$

$$\dot{\gamma}_i(t) = a_i(\gamma(t)) = (a_i \circ \varphi^{-1})(\varphi(\gamma(t))) = (a_i \circ \varphi^{-1})(\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t)) \quad \text{für } 1 \leq i \leq m.$$

Das ist ein System von m gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\dot{\gamma}_1(t) = (a_1 \circ \varphi^{-1})(\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))$$

\vdots

$$\dot{\gamma}_m(t) = (a_m \circ \varphi^{-1})(\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))$$

für die Funktionen

$$\gamma_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m,$$

mit den Anfangsbedingung

$$\gamma_i(0) = \varphi_i(p).$$

Bemerkung: Jedes System von m gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung entspricht der Differentialgleichung für Integralkurven eines Vektorfeldes auf

(einer Teilmenge von) \mathbb{R}^m .

Aus dem Satz von Picard–Lindelöf folgt:

Satz 3.17 (lokale Existenz und Eindeutigkeit): Sei \mathcal{M} eine Mannigfaltigkeit und $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ ein Vektorfeld. Für alle Punkte $p \in \mathcal{M}$ existiert ein offenes Intervall $I_p \subset \mathbb{R}$ um 0 und eine eindeutig bestimmte Kurve

$$\gamma_p : I_p \rightarrow \mathcal{M}$$

mit

$$\gamma_p(0) = p, \quad \dot{\gamma}_p(t) = X_{\gamma(t)} \quad \forall t \in I_p,$$

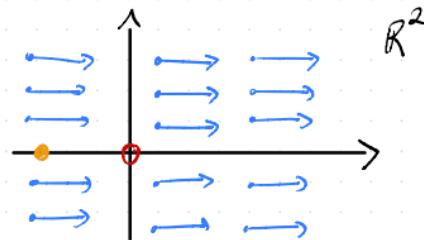
d.h. die Integralkurven von X existieren lokal und sind (lokal) eindeutig bestimmt.

Bemerkung: Im Allgemeinen kann man nicht $I_p = \mathbb{R}$ wählen, d.h. Integralkurven müssen nicht für alle Zeiten definiert sein.

Beispiele:

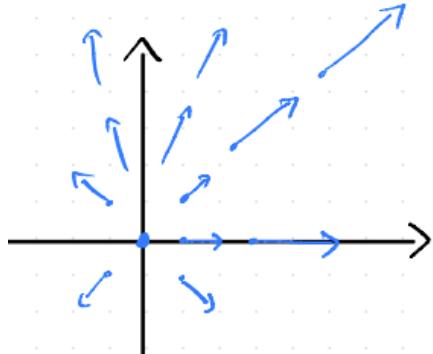
$$(i) \quad \mathcal{M} = \mathbb{R}^2, \quad X(p) = (1, 0)$$

$$\text{Integralkurven: } \gamma_p(t) = p + te_1$$



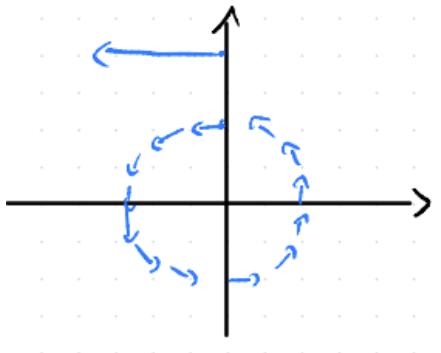
$$(ii) \quad \mathcal{M} = \mathbb{R}^2, \quad X(p) = p, \text{ das radiale Vektorfeld.}$$

$$\text{Integralkurven: } \dot{\gamma}_p(t) = e^t p = X(e^t p) = X(\gamma_p(t))$$



$$(iii) \quad \mathcal{M} = \mathbb{R}^2, \quad X(p) = X(p_1, p_2) = (-p_2, p_1) = ip$$

$$\text{Integralkurven: } \gamma_p(t) = e^{it} p = \begin{pmatrix} p_1 \cos(t) - p_2 \sin(t) \\ p_1 \sin(t) + p_2 \cos(t) \end{pmatrix}$$



Test für (iii):

$$\gamma_p(0) = (p_1 \cdot 1 - p_2 \cdot 0, p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 1) = (p_1, p_2)$$

$$X(\gamma_p(t)) = (-p_1 \sin(t) - p_2 \cos(t), p_1 \cos(t) - p_2 \sin(t))$$

$$\dot{\gamma}_p(t) = (-p_1 \sin(t) - p_2 \cos(t), p_1 \cos(t) - p_2 \sin(t)) = X(\gamma_p(t))$$

(iv) $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $X(p) = (1, 0)$

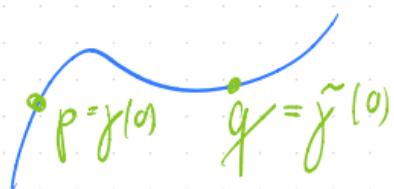
Integralkurven: $\gamma_p(t) = p + (t, 0)$, aber für $p = (-1, 0)$ existiert die Integralkurve nur für $t \in (-\infty, 1)$

(v) $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$, $X(p) = (p_y^2, p_x^2)$

Die Integralkurve durch $p_0 = (1, 1)$ ist: $\gamma_{p_0}(t) = \left(\frac{1}{1-t}, \frac{1}{1-t}\right)$

Existiert nur für $t \in (-\infty, 1)$

Korollar 3.18 (Globale Eindeutigkeit): Durch jeden Punkt p der Mannigfaltigkeit \mathcal{M} verläuft genau eine Integralkurve von X , d.h. insbesondere, dass sich Integralkurven nur schneiden, wenn sie identisch sind.



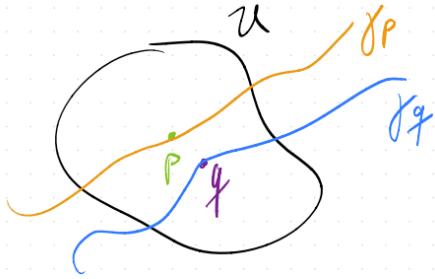
Aus dem Satz über die differenzierbare Abhängigkeit von Lösungen folgt:

Satz 3.19 (Existenz eines lokalen Flusses): Für alle $p \in \mathcal{M}$ existiert eine offene Umgebung U von p und ein nicht-leeres offenes Intervall I um 0, so dass für alle $q \in U$ die Kurve γ_q auf I definiert ist. Die Abbildung

$$I \times U \longrightarrow \mathcal{M}, \quad (t, q) \longmapsto \gamma_q(t)$$

ist differenzierbar.

Insbesondere können wir für alle q in einer kleinen offenen Menge U die Intervalle I_q gleich einem festen Intervall I wählen.



Definition 3.20: Die Abbildung $(t, q) \mapsto \gamma_q(t)$ heißt der lokale Fluss des Vektorfeldes X . Da Integralkurven von X heißen Flusslinien von X . Der Fluss definiert für alle hinreichend kleinen Parameter $t \in I$ eine lokale Abbildung

$$\varphi_t : U \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}, \quad q \mapsto \varphi_t(q) = \gamma_q(t),$$

den sogenannten Zeit-t-Fluss.

Satz 3.21: Die Abbildungen φ_t sind lokale Diffeomorphismen von U auf $\varphi_t(U)$ und es gilt

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$$

für alle Parameter $t, s \in I$, für die $t + s \in I$. Insbesondere kommutieren die lokalen Diffeomorphismen φ_t und φ_s . Man sagt: $\{\varphi_t\}$ ist eine *1-parametrische Gruppe (lokaler) Diffeomorphismen*.

Außerdem gilt:

$$(\varphi_t)_* X|_U = X|_{\varphi_t(U)} \quad \forall t \in I.$$

Beweis. Die Abbildungen

$$t \mapsto \gamma_q(s+t) \quad \text{und} \quad t \mapsto \gamma_{\varphi_s(q)}(t)$$

sind Integralkurven von X mit Anfangspunkt

$$\gamma_q(s) = \varphi_s(q) = \gamma_{\varphi_s(q)}(0).$$

$$\varphi_{t+s}(q) = \gamma_q(t+s) \quad \underbrace{=}_{\text{Eindeutigkeit von Flusskurven}} \quad \gamma_{\varphi_s(q)}(t) = \varphi_t(\varphi_s(q)) = \varphi_t \circ \varphi_s(q).$$

Insbesondere folgt aus dieser Gleichung:

$$\text{id} = \varphi_0 = \varphi_{t+(-t)} = \varphi_t \circ \varphi_{-t}, \quad \text{also} \quad \varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}.$$

Also ist φ_t invertierbar und die Umkehrabbildung ist wieder differenzierbar, d.h. φ_t ist ein (lokaler) Diffeomorphismus.

Bleibt zu zeigen:

$$(\varphi_t)_* X|_U = X|_{\varphi_t(U)} \quad (\text{d.h. } ((\varphi_t)_* X)_p = X_{\varphi_t(p)})$$

Beobachtung:

$(\psi_* X)_p = (D\psi)_{\psi^{-1}(p)}(X_{\psi^{-1}(p)})$ ist äquivalent zu $(\psi_* X)_p = (D\psi)_p(X_p)$ ($p \leftrightarrow \psi(p)$)

Wollen zeigen: $(\psi \leftrightarrow \varphi_t)$

$$((\varphi_t)_* X)_p = (D\varphi_t)_p(X_p) \stackrel{?}{=} X_{\varphi_t(p)}$$

$$\begin{aligned} (D\varphi_t)_p(X_p) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \varphi_t(\gamma_p(s)) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \varphi_t(\varphi_s(p)) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \varphi_{t+s}(p) \\ &= \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=t} \varphi_\tau(p) = X_{\varphi_t(p)} \end{aligned}$$

□

In der letzten Vorlesung: Sei M eine Mannigfaltigkeit, X ein Vektorfeld auf M und $p \in M$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Kurve $\gamma_p : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit

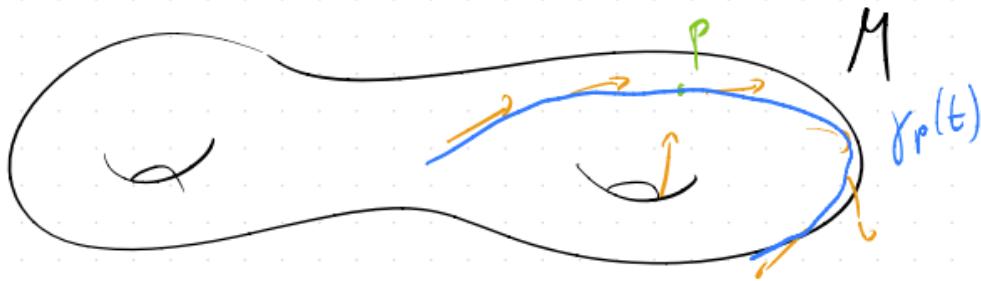
$$\gamma_p(0) = p, \quad \dot{\gamma}_p(t) = X_{\gamma_p(t)} \quad \text{Existenz (*)}$$

Diese Kurve ist bis auf die Wahl des Intervalls eindeutig, d.h. sind

$$\gamma_p : (a, b) \rightarrow M \quad \text{und} \quad \tilde{\gamma}_p : (\tilde{a}, \tilde{b}) \rightarrow M$$

zwei Kurven, die (*) erfüllen, dann stimmen γ_p und $\tilde{\gamma}_p$ auf dem Schnitt der Intervalle $(a, b) \cap (\tilde{a}, \tilde{b})$ überein. (Eindeutigkeit)

Auf dem maximalen Definitionssatz ist die Kurve eindeutig. Dadurch können wir den Fluss definieren.



Gegeben: M Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und X Vektorfeld.

Dann gibt es eine offene Umgebung U von p und ein nicht-leeres offenes Intervall I , s.d. γ_q für alle $q \in U$ und alle $t \in I$ definiert ist.

Die Abbildung

$$\varphi : I \times U \longrightarrow M, \quad (t, q) \longmapsto \gamma_q(t)$$

heißt der (lokale) Fluss von X und $\gamma_q(t)$ ist die Lösung von

$$\begin{cases} \gamma_q(0) = q \\ \dot{\gamma}_q(t) = X_{\gamma_q(t)} \end{cases}$$

Wird $q \in U$ festgehalten, bekommen wir die Flusskurve von X durch q :

$$\gamma_q : I \longrightarrow M$$

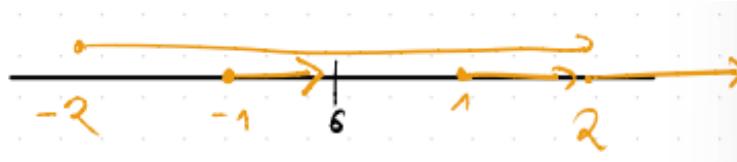
Wird $t \in I$ festgehalten, bekommen wir den Zeit- t -Fluss:

$$\varphi_t : U \longrightarrow M, \quad q \longmapsto \varphi_t(q) = \gamma_q(t)$$

Beispiel:

Sei $\mathcal{M} = \mathbb{R}$ und $X_x = x^2 e_1 = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ (für alle $x \in \mathbb{R}$). Die Integralkurve von X durch x_0 ist gegeben durch

$$\gamma_{x_0}(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}.$$

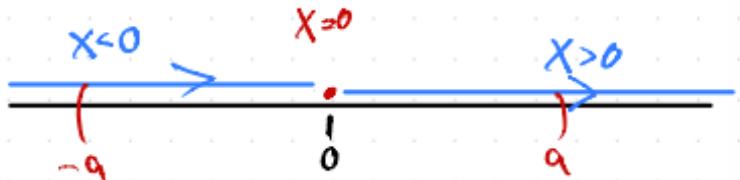


Test:

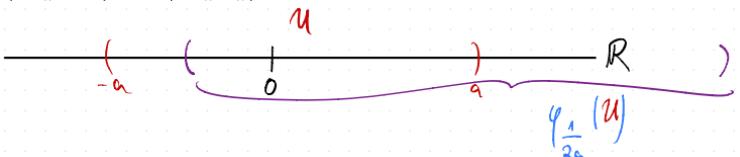
$$\gamma(0) = x_0, \quad \dot{\gamma}(t) \stackrel{\text{identify } T_p \mathbb{R} \text{ mit } \mathbb{R}}{=} \frac{-x_0}{(1-tx_0)^2} \cdot (-x_0) = \frac{x_0^2}{(1-tx_0)^2} = \gamma(t)^2 = X_{\gamma(t)}$$

Die Integralkurve von X durch den Startpunkt x ist maximal für die folgende Intervalle I_x um 0 definiert:

$$I_x = \begin{cases} (-\infty, \frac{1}{x}) & , \text{ falls } x > 0 \\ (\frac{1}{x}, \infty) & , \text{ falls } x < 0 \\ (-\infty, \infty) & , \text{ falls } x = 0 \end{cases}$$



Auf $U = (-a, a)$ mit $a > 0$, ist der lokale Fluss φ_t für alle $t \in I = (-\infty, \frac{1}{a}) \cap (-\frac{1}{a}, \infty) = (-\frac{1}{a}, \frac{1}{a})$ definiert. Das Intervall wird klein, wenn a groß wird.



Definition 3.22

Sei M ein topologischer Raum und $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, dann heißt die Menge

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}}$$

der Träger von f .

Bemerkung: Wir sagen, dass ein Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ einen kompakten Träger hat, falls

$$\text{supp}(X) = \overline{\{p \in M \mid X_p \neq 0\}}$$

kompakt ist.

Lemma 3.23:

Sei X ein Vektorfeld und

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M, \quad (t, p) \longmapsto \varphi_t(p)$$

eine differenzierbare Abbildung mit

$$\varphi_0 = \varphi(0, \cdot) = \text{id}_M$$

$$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dt} \varphi_t(p) = X_p \quad \forall p \in M$$

$$(\varphi_t)_* X = X \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Dann ist $\{\varphi_t\}$ der (globale) Fluss von X . (Existiert für alle $t \in \mathbb{R}$)

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $\gamma_p(t) = \varphi_t(p) = \varphi(t, p)$ eine Integralkurve von X ist.

$$\dot{\gamma}_p(s) \stackrel{\text{Def. von } \gamma}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \varphi_t(p) \stackrel{2. \text{ Eigenschaft}}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \varphi_s \circ \varphi_{t-s}(p) \stackrel{\tau:=t-s}{=} \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \varphi_s \circ \varphi_\tau(p)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_p(s) &\stackrel{\text{Kettenregel } \varphi_s \text{ Abb. } M \rightarrow M}{=} D\varphi_s \circ (X_p) \\ &\stackrel{3. \text{ Eigenschaft}}{=} X_{\varphi_s(p)} \\ &\stackrel{4. \text{ Eigenschaft}}{=} X_{\gamma_p(s)} \end{aligned}$$

$$\gamma_p(0) = \varphi_0(p) = p \quad (1. \text{ Eigenschaft})$$

□

Satz 3.24:

Ist X ein Vektorfeld mit kompaktem Träger, so ist der Fluss φ_t für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert:

$$\varphi_t : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M, \quad (t, p) \longmapsto \varphi_t(p)$$

und für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $\varphi_t : M \longrightarrow M$ ein globaler Diffeomorphismus.

Bemerkung:

- Die Voraussetzung des Satzes ist für kompakte Mannigfaltigkeiten erfüllt.
- Ein Vektorfeld X , dessen lokaler Fluss für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist, heißt vollständig.

Beweis.

Laut Satz 3.19 existiert für alle $p \in M$ eine offene Umgebung V von p und ein Intervall $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, so dass der Fluss $\varphi_t(q)$ für alle $q \in V$, $t \in I$ definiert ist

Da der Träger $\text{supp}(X)$ von X kompakt ist, reichen endlich viele der V 's um diesen zu überdecken

Wir bezeichnen diese offene Menge mit V_1, \dots, V_r .

$$\Rightarrow X_q = 0 \quad \text{für alle } q \in M \setminus \bigcup_{i=1}^r V_i$$

Durch die Punkte $q \in M$ mit $X_q = 0$ existiert immer die konstante Integralkurve $\gamma(t) = q$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Seien $(-\varepsilon_i, \varepsilon_i)$ die zugehörigen Definitionsbereiche der Flüsse auf V_i und $\epsilon := \min\{\varepsilon_i\}$. Dann ist $\varepsilon > 0$.

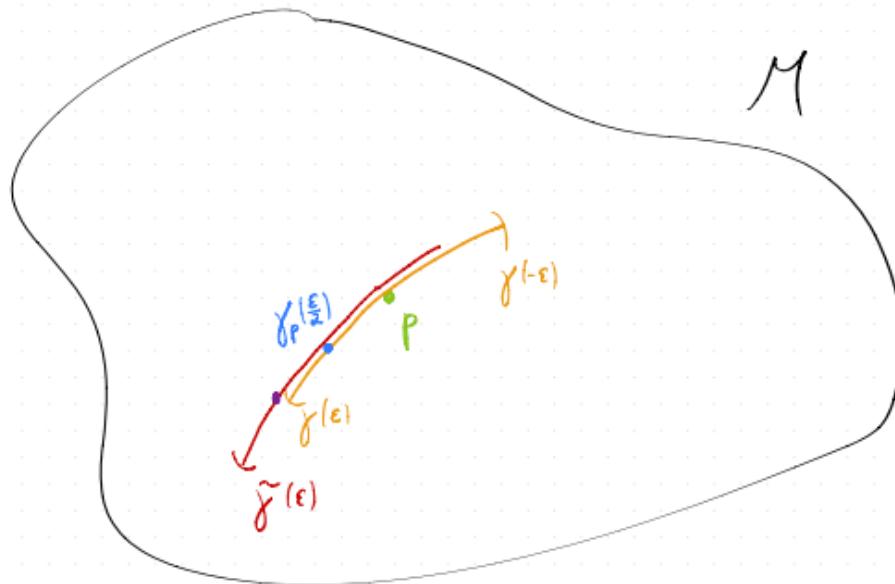
Der Fluss $\varphi_t(q)$ ist definiert für alle $q \in M$ und $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Der Fluss ist eine Abbildung

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \times M \longrightarrow M, \quad (t, p) \longmapsto \varphi_t(p).$$

Für $t \in \mathbb{R}$ schreibe $|t| = k \frac{\varepsilon}{2} + r$ mit eindeutig bestimmten $k \in \mathbb{N}_0$ und $r \in [0, \frac{\varepsilon}{2})$.

Wir definieren

$$\hat{\varphi}_t := \begin{cases} (\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}})^k \circ \varphi_r & \text{für } t \geq 0 \\ (\varphi_{-\frac{\varepsilon}{2}})^k \circ \varphi_{-r} & \text{für } t < 0 \end{cases}$$



Durch diese Definition bekommen wir eine Abbildung

$$\hat{\varphi} : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M, \quad (t, p) \longmapsto \hat{\varphi}(t, p) := \hat{\varphi}_t(p)$$

Für $|t| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ gilt $k = 0$, d.h. $|t| = r$ und $\hat{\varphi}_t$ stimmt mit dem ursprünglichen φ_t überein.
 Für $\frac{\varepsilon}{2} \leq |t| < \varepsilon$ gilt $k = 1$ und

$$\hat{\varphi}_t = \begin{cases} \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}} \circ \varphi_r = \varphi_t & \text{für } t > 0 \\ \varphi_{-\frac{\varepsilon}{2}} \circ \varphi_{-r} = \varphi_t & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Die Gruppengesetze dürfen wir anwenden, da $\frac{\varepsilon}{2} + r, -\frac{\varepsilon}{2} - r \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Insgesamt folgt, dass $\hat{\varphi}$ eine Fortsetzung des auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$ definierten φ_t zu einer Abbildung auf ganz \mathbb{R} ist.

Wir überprüfen die Bedingungen aus Lemma 3.23, um zu zeigen, dass $\hat{\varphi}_t$ der globale Fluss von X ist.

1. $\hat{\varphi}_0(\cdot) = \varphi_0(\cdot) = \text{id}_M$ ✓

2. $\hat{\varphi}_t \circ \hat{\varphi}_{t'} = \hat{\varphi}_{t+t'} \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}$

Seien $t, t' \in \mathbb{R}$, zum Beispiel $t, t' > 0$. Schreiben wir dann:

$$t = k \cdot \frac{\varepsilon}{2} + r, \quad t' = k' \cdot \frac{\varepsilon}{2} + r'$$

$$\Rightarrow t + t' = \begin{cases} (k + k')\frac{\varepsilon}{2} + (r + r') & , \text{ falls } r + r' \in [0, \frac{\varepsilon}{2}) \\ (k + k' + 1)\frac{\varepsilon}{2} + (r + r' - \frac{\varepsilon}{2}) & , \text{ falls } r + r' \in [\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon) \end{cases}$$

Es folgt

$$\hat{\varphi}_t \circ \hat{\varphi}_{t'} = \left(\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}} \right)^k \circ \varphi_r \circ \left(\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}} \right)^{k'} \circ \varphi_{r'}$$

schriftweises Anwenden der Gruppengesetze (Verkettungen), da $r + \frac{\varepsilon}{2} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Vgl. oben.

$$= \left(\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}} \right)^k \circ \left(\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}} \right)^{k'} \circ \varphi_r \circ \varphi_{r'} = \left(\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}} \right)^{k+k'} \circ \varphi_{r+r'}$$

evtl. nach dem Ausklammern eines weiteren $\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}$ aus $\varphi_{r+r'}$.

$$= \hat{\varphi}_{t+t'}$$

3. $(\hat{\varphi}_t)_* X = X$

Sei $t \in \mathbb{R}$, z.B. $t = k \frac{\varepsilon}{2} + r > 0$. Da $(\varphi_s)_* X = X \quad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, (Satz 3.21) folgt

$$(\hat{\varphi}_t)_* X = \left((\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}})^k \circ \varphi_r \right)_* X = \left((\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}})_* \right)^k \circ \underbrace{(\varphi_r)_* X}_{=X} = \left((\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}})_* \right)^{k-1} \underbrace{(\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}})_* X}_{=X} = \dots = X$$

□

3.6 Lie-Ableitung von Vektorfeldern

Sei X ein glattes Vektorfeld auf M mit dem lokalen Fluss $\varphi_t : M \rightarrow M$. Dann ist X (nach Definition) tangential zu den Flusslinien $\gamma_p(t) = \varphi_t(p)$, daraus folgt

$$X_p(f) = \mathcal{L}_X(f)_p = (Df)_p(X_p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\gamma_p(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\varphi_t(p))$$

$$\stackrel{\varphi_0=\text{id}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(\varphi_t(p)) - f(p)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((\varphi_t^* f)(p) - f(p))$$

(Lie-Ableitung der Funktion $f \in C^\infty(M)$ in Richtung X .)

wobei $\varphi_t^* f := f \circ \varphi$ das Zurückziehen (Pull-Back) der Funktion $f \in C^\infty(M)$ durch φ ist.

$$\Phi : M \xrightarrow{\Phi \text{ glatt}} N \rightarrow \mathbb{R}$$

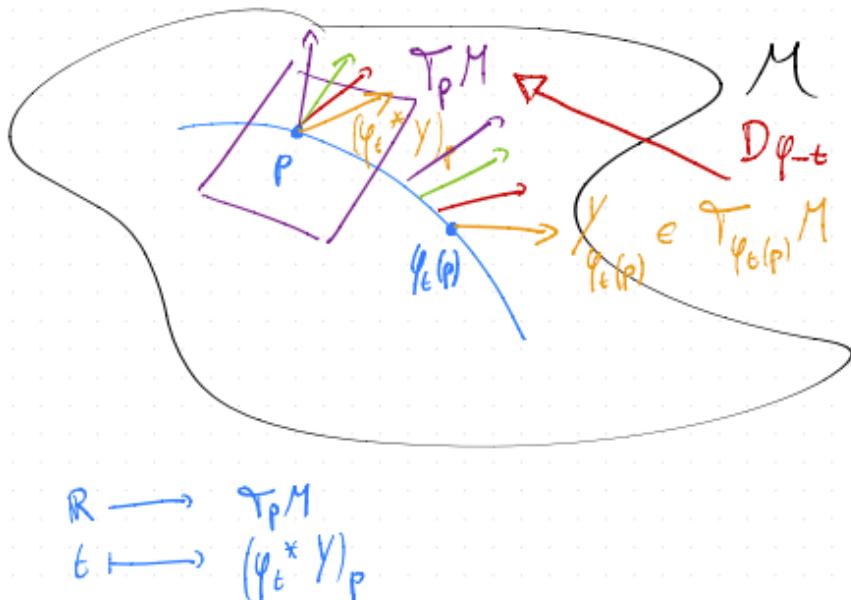
$$\Gamma(TM) \xrightarrow{\text{Push-forward}} \Gamma(TN) \quad X \mapsto \Phi_* X$$

$$\Gamma(TM) \xleftarrow{\text{Pull-Back}} \Gamma(TN) \quad \Phi^* Y = (\Phi^{-1})_* Y \leftarrow Y$$

Durch (lokale) Flüsse können die Lie-Ableitungen anderer Objekte beschrieben werden.

Das Zurückziehen eines Vektorfeldes mittels der lokalen Diffeomorphismen φ_t ist definiert als (X und Y sind zwei Vektorfelder auf M)

$$(\varphi_t^* Y)_p = ((\varphi_{-t})_* Y)_p = \underbrace{(D\varphi_{-t})_{\varphi_t(p)}}_{T_{\varphi_t(p)}M \longrightarrow T_p M} \underbrace{Y_{\varphi_t(p)}}_{T_{\varphi_t(p)}M} \in T_p M$$



Satz 3.25:

Seien X, Y glatte Vektorfelder auf M . Dann gilt in $p \in M$:

$$\mathcal{L}_X Y_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(\varphi_t^* Y)_p - Y_p] \stackrel{(*)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Y_p - (\varphi_t)_* Y|_p] \stackrel{(**)}{=} [X, Y]_p$$

Beweis.

Zu (*): Per Definition

$$\begin{aligned} (\varphi_t^* Y)_p - Y_p &= ((\varphi_{-t})_* Y)_p - Y_p = (\varphi_{-t})_*(Y - (\varphi_t)_* Y)_p \\ \implies \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(\varphi_t^* Y)_p - Y_p] &\stackrel{\text{Def. Pull-back}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} (\varphi_{-t})_* \frac{1}{t} (Y_p - ((\varphi_t)_* Y)_p) \stackrel{(\varphi_t^* Y)_p|_{t=0}}{=} \underbrace{(\varphi_0)_*}_{id} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y_p - (\varphi_t)_* Y_p) \end{aligned}$$

Zu (**): Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Wir definieren:

$$F(t, p) := f(\varphi_t(p)) - f(p)$$

Aus Lemma 2.9 folgt: Es gibt eine glatte Funktion g mit $F(t, p) = tg(t, p)$, insbesondere

$$g(0, p) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t, p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(\varphi_t(p)) - f(p)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\varphi_t(p)) = X_p(f) = (\mathcal{L}_X f)_p$$

Wir können nachrechnen

$$\begin{aligned} (\varphi_t^* Y)_p(f) &\stackrel{\text{Def. } \varphi_t^* Y}{=} (D\varphi_{-t})_{\varphi_t(p)} Y_{\varphi_t(p)}(f) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} Y_{\varphi_t(p)}(f \circ \varphi_{-t}) \stackrel{\text{Def. von } F}{=} Y_{\varphi_t(p)}(F(-t, \cdot) + f) \\ &\stackrel{\substack{\text{Linearität der Ableitung} \\ \text{Def. von } g}}{=} -t Y_{\varphi_t(p)}(g(-t, \cdot)) + Y_{\varphi_t(p)}(f) = (Y(f))_{\varphi_t(p)} - t Y_{\varphi_t(p)}(g(-t, \cdot)) \end{aligned}$$

Für den Grenzwert folgt also:

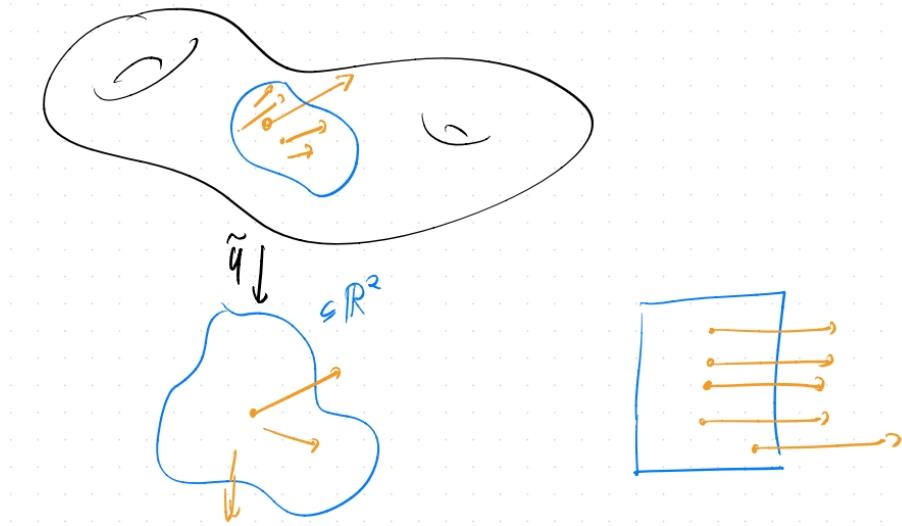
$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((\varphi_t^* Y)_p(f) - Y_p(f)) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y(f)_{\varphi_t(p)} - Y(f)_p) - \lim_{t \rightarrow 0} Y_{\varphi_t(p)}(g(-t, \circ)) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Y(f)(\varphi_t(p)) - Y_p(X(f)) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)) = [X, Y]_p(f) \end{aligned}$$

□

3.7 Ergänzende Informationen zu Vektorfeldern

Satz 3.26: Sei X ein Vektorfeld auf M mit $X_p \neq 0$ für ein $p \in M$. Dann existiert eine Karte (U, φ) um p mit

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \text{auf } U. \quad (\text{m.a.W. } \varphi_* X = e_1)$$



Beweis. Da es sich um eine lokale Aussage handelt, können wir o.E. annehmen, dass M eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^m ist.

Wir nehmen an, dass die Aussage für offene Mengen von \mathbb{R}^m korrekt ist. Sei $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ eine Karte um p . Dann ist $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^m$ offen und $\tilde{\varphi}_*X$ ein Vektorfeld auf \tilde{V} mit

$$(\tilde{\varphi}_*X)_{\varphi(p)} \neq 0$$

Nach Annahme gibt es eine Karte (V', ψ) um $\tilde{\varphi}(p)$ mit

$$\psi_*(\tilde{\varphi}_*X) = \frac{\partial}{\partial x_1} \text{ auf } \psi(V').$$

Nach Einschränken $\tilde{V} = V'$ Die gesuchte Karte um p ist

$$\varphi = \psi \circ \tilde{\varphi}, \quad (\varphi_*X) = \psi_* \tilde{\varphi}_*X = \psi_*(\tilde{\varphi}_*X) = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

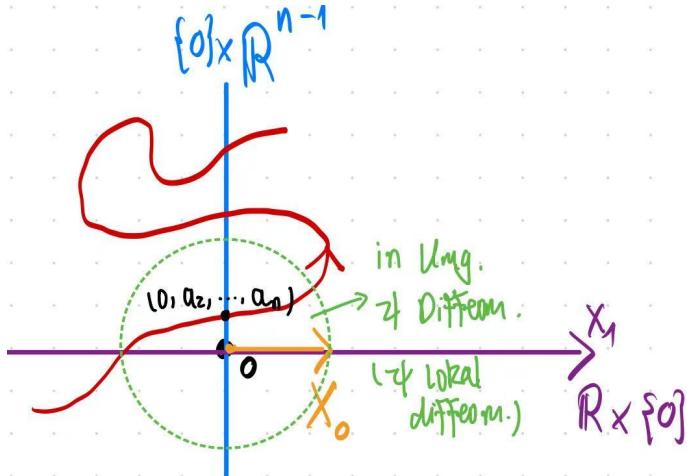
Zum Beweis für \mathbb{R}^n : Sei X ein Vektorfeld mit $X_p \neq 0$.

Durch Anwenden einer linearen Transformation und einer Verschiebung können wir

$$p = 0 \quad \text{und} \quad X_0 = e_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}|_0$$

annehmen.

Idee:



Durch den Punkt $(0, a_2, \dots, a_n)$ verläuft genau eine Integralkurve von X .

Wenn wir $(0, a_2, \dots, a_n)$ vorgeben, ist jeder Punkt auf der Kurve eindeutig durch die Zeit festgelegt, die $(0, a_2, \dots, a_n)$ braucht, um bis zu diesem Punkt zu gelangen.

Sei φ_t der lokale Fluss von X , wir definieren eine Abbildung ψ auf einer hinreichend kleinen Umgebung von 0 durch

$$\psi(a_1, \dots, a_n) = \varphi_{a_1}(0, a_2, \dots, a_n)$$

Wollen zeigen: Auf einer hinreichend kleinen Umgebung von 0 ist ψ ein Diffeomorphismus.

Hilfsmittel: Inverser Funktionssatz, es reicht zu zeigen, dass $D\psi|_0$ invertierbar ist.

In $a = (a_1, \dots, a_n)$ gilt:

$$\begin{aligned} D\psi \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_a \right) (f) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_a (f \circ \psi) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\psi(a_1 + t, a_2, \dots, a_n)) - f(\psi(a_1, \dots, a_n))] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\underbrace{\varphi_{a_1+t}(0, a_2, \dots, a_n)}_{=\varphi_t(\varphi_{a_1}(0, a_2, \dots, a_n))}) - f(\psi(a))] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\varphi_t(\psi(a))) - f(\psi(a))] \\ &\stackrel{\text{Lie-Ableitung von Fkt. } p=\psi(a)}{=} X_{\psi(a)}(f) \quad \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

Analog für $a = 0$ und $i \geq 2$: Das Differential von ψ auf den Basisvektoren $\frac{\partial}{\partial x_i}|_0$ ist

$$\begin{aligned} D\psi \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 \right) (f) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 (f \circ \psi) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\psi(0, \dots, t, \dots, 0)) - f(0)] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(0, \dots, t, \dots, 0) - f(0)] = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 (f) \end{aligned}$$

Da $X_0 = \frac{\partial}{\partial x_1}|_0$, folgt $D\psi_0 = \text{id}$.

$\Rightarrow \psi$ ist ein lokaler Diffeomorphismus und $\varphi = \psi^{-1}$ ist die gesuchte Karte um 0.

In dieser Karte gilt $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$, denn

$$\begin{aligned}\psi : \left(\mathbb{R}^n, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) &\rightarrow \left(\mathbb{R}^n, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right) \\ X_{\psi(a)}(f) &= D\psi \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_{\psi^{-1}(\psi(a))} \right)(f) = \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial x_1} \Big|_{\psi^{-1}(\psi(a))} = \frac{\partial f}{\partial y_1} \Big|_{\psi(a)}\end{aligned}$$

Denn nach Definition der partiellen Ableitung in einer Karte (U, φ) gilt andererseits

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_{\psi(a)}(f) = \frac{\partial}{\partial x_1}(f \circ \psi) \Big|_{\psi^{-1}(\psi(a))}$$

□

Lemma 3.27

Sei $\psi : M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus und X ein Vektorfeld auf M mit dem lokalen Fluss φ_t . Dann hat das Vektorfeld ψ_*X den Fluss $\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}$

Beweis. Sei f ein Funktionskeim um $q \in M$. Dann berechnen wir:

$$\begin{aligned}(\psi_*X)_q(f) &\stackrel{\text{Def. Push-forward}}{=} (D\psi)_{\psi^{-1}(q)}(X_{\psi^{-1}(q)})(f) = X_{\psi^{-1}(q)}(f \circ \psi) \\ \stackrel{\varphi_t \text{ Fluss}}{\Leftrightarrow} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0}(f \circ \psi)(\varphi_t(\psi^{-1}(q))) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0}f(\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}(q))\end{aligned}$$

⇒ Das Vektorfeld ψ_*X in dem Punkt q ist tangential an die Kurve $\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}(q)$.

Diese Kurven sind genau die Flusslinien von ψ_*X .

□

Korollar 3.28

Sei $\psi : M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus und X ein Vektorfeld auf M mit dem lokalen Fluss φ_t . Dann gilt $\psi_*X = X$ genau dann, wenn $\varphi_t \circ \psi = \psi \circ \varphi_t$.

Beweis.

$$\begin{aligned}\psi_*X = X &\Leftrightarrow \text{Der lokale Fluss von } \psi_*X \text{ ist gleich den lokalen Fluss von } X \\ \stackrel{3.27}{\Leftrightarrow} \psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1} &= \varphi_t \Leftrightarrow \psi \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \psi\end{aligned}$$

□

Lemma 3.29

Sei X ein Vektorfeld mit dem lokalen Fluss φ_t und sei Y ein Vektorfeld mit dem lokalen Fluss ψ_t . Dann gilt

$$[X, Y] = 0 \quad \text{genau dann, wenn} \quad \varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$$

Diese rechte Gleichung soll für alle s und t erfüllt sein, für die die entsprechenden Flüsse definiert sind.

Interpretation: Zwei Vektorfelder kommutieren genau dann, wenn die Flüsse kommutieren.

Beweis.

" \Leftarrow ": Laut Korollar 3.28: $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$

$\Rightarrow (\varphi_t)_* Y = Y$ für alle t , für die der Fluss definiert ist.

$$\stackrel{\text{Satz 3.25}}{\Rightarrow} [X, Y] = \mathcal{L}_X Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((\varphi_t^* Y)_p - Y_p) = 0$$

" \Rightarrow ": Für alle $q \in M$ gilt $[X, Y]_q = 0$, also

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y_q - (\varphi_t)_* Y_q) = 0 \quad (\star)$$

Wir definieren die Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T_p M$ durch

$$c(t) = ((\varphi_t)_* Y)_p$$

Der Tangentialvektor von c bei t ist

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \underbrace{[c(t+h) - c(t)]}_{\text{Differenz in } T_p M} \stackrel{\text{Def. } c}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [(\varphi_{(t+h)})_* Y - (\varphi_t)_* Y]_p \\ &\stackrel{(f \circ g)_* X = f_*(g_* Y)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [D\varphi_t((\varphi_h)_* Y)_{\varphi_{-t}(p)} - D\varphi_t(Y)_{\varphi_{-t}(p)}] \\ &\stackrel{\text{+ Def. Push-forward}}{=} D\varphi_t \left(\underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [(\varphi_h)_* Y]_{\varphi_{-t}(p)} - Y_{\varphi_{-t}(p)}}_{=0 \text{ wegen } (\star) \text{ in } q=\varphi_{-t}(p)} \right) = 0 \\ &\implies c(t) \text{ ist konstant, also } (\varphi_t)_* Y|_p = c(t) = c(0) = Y_p \stackrel{3.28}{\implies} \text{Beh.} \end{aligned}$$

□

Im Satz 3.26 haben wir gesehen, dass es für ein Vektorfeld X mit $X_p \neq 0$ eine Karte (U, φ) um p gibt, sodass X ein Koordinatenvektorfeld auf U ist.

Was passiert bei zwei oder mehr Vektorfeldern?

Gegeben: X, Y Vektorfelder, linear unabhängig in $p \in M$ (also auch auf einer kleinen Umgebung von p). Gibt es eine Karte um p in der X und Y Koordinatenvektorfelder sind?

Notwendige Bedingung aus dem Satz von Schwarz: In jeder Karte (U, q) gilt

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0.$$

$\implies [X, Y] = 0$ ist eine notwendige Bed. für die Existenz der gesuchten Karte.

Der folgende Satz sagt, dass dies auch hinreichend ist.

Satz 3.30

Seien X_1, \dots, X_k Vektorfelder auf einer Umgebung V von $p \in M$, die in jedem Punkt von V linear unabhängig sind und es gilt $[X_a, X_b] = 0$ für $1 \leq a, b \leq k$. Dann gibt es eine Karte (U, φ) um p mit

$$X_a = \frac{\partial}{\partial x_a} \quad \text{auf } U \quad \text{für } a = 1, \dots, k.$$

Beweis. Wie im Beweis von Satz 3.26 können wir annehmen, dass $M = \mathbb{R}^n, p = 0$ und $X_a = \frac{\partial}{\partial x_a}|_0$ für $a = 1, \dots, k$.

Sei φ_t^a der lokale Fluss zum Vektorfeld X_a , dann definieren wir:

$$\psi(a_1, \dots, a_n) = \varphi_{a_1}^1 (\varphi_{a_2}^2 (\dots (\varphi_{a_k}^k (0, 0, a_{k+1}, \dots, a_n)) \dots)).$$

Wie in Satz 3.26:

$$D\psi \left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_0 \right) = \begin{cases} X_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}|_0 & \text{für } i = 1, \dots, k \\ \frac{\partial}{\partial x_i}|_0 & \text{für } i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

Somit ist ψ auf einer Umgebung von 0 ein Diffeomorphismus, und durch ψ^{-1} wird die neue Karte definiert.

Analog zu Satz 3.26:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}$$

Aus Lemma 3.23 folgt: Die Reihenfolge der $\varphi_{a_i}^i$'s in der Definition von ψ kann vertauscht werden. Aus $\psi = \varphi_{a_i}^i(\dots)$ folgt $X_i = \frac{\partial}{\partial y_i}$ \square

4 Lie-Gruppen

Definition 4.1:

Eine Gruppe G heißt **Lie-Gruppe**, falls G eine Mannigfaltigkeit ist und die Abbildung

$$G \times G \longrightarrow G, \quad (g, h) \longmapsto g \cdot h^{-1}$$

differenzierbar ist.

Bemerkung: Die zweite Bedingung ist äquivalent zu der Forderung, dass

$$g \longmapsto g^{-1} \quad \text{und} \quad (g, h) \longmapsto g \cdot h$$

differenzierbar sind.

Beispiele für Lie-Gruppe:

- (i) $(\mathbb{R}^n, +)$
- (ii) $(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \cdot)$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ist eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^{n^2} und trägt die induzierte differenzierbare Struktur.

Also sind $(A, B) \mapsto A \cdot B$ und $A \mapsto A^{-1}$ genau dann differenzierbar, wenn die Einträge von $A \cdot B$ und A^{-1} differenzierbar (im Sinne von Analysis 2) in den Einträgen von A und B sind.

Für das Produkt: Sei $A = (A_{ij})$ und $B = (B_{ij})$, dann gilt:

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

Für das Inverse: Laut Cramerscher Regel:

$$(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{1}{\det A} \det \hat{A}_{ij}$$

wobei \hat{A}_{ij} die Teilmatrix von A ist.

- (iii) $O(n), U(n)$ sind Untermannigfaltigkeiten von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und die Gruppenoperation ist die Einschränkung der Gruppenoperation auf $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.
- (iv) Für $n = p + q$, betrachten wir auf \mathbb{R}^n die symmetrische Bilinearform

$$h(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \dots - x_n y_n$$

Wir definieren

$$O(p, q) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid h(Ax, Ay) = h(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n\}$$

die **Invarianz-Gruppe**.

Die Gruppe $O(3, 1)$ heißt **Lorentz-Gruppe**, sie ist die Invarianz-Gruppe des Minkowski-Raums $\mathbb{R}^{3,1}$.

$O(3, 1)$ hat vier Zusammenhangskomponenten.

Definition 4.2:

Die Links- bzw. Rechtstranslationen auf G sind für jedes fixiertes $g \in G$ definiert durch $g, h : G \rightarrow G$

$$l_g(h) = gh, \quad r_g(h) = hg.$$

Bemerkung.: Die Abbildungen $l_g, r_g : G \rightarrow G$ sind **Diffeomorphismen**.

Tatsächlich sind r_g und l_g nach Definition für alle $g \in G$ differenzierbar und es gilt $l_g^{-1} = l_{g^{-1}}$ (analog für r_g).

Definition 4.3:

Ein Vektorfeld $X \in \Gamma(TG)$ heißt **links-invariant**, falls für alle $g \in G$:

$$(l_g)_* X = X,$$

d.h. X ist l_g -verküpft zu sich selbst. $\forall g \in G$

Bemerkung

- (i) Ein Vektorfeld X ist links-invariant genau dann, wenn

$$(Dl_g)_h(X_h) = X_{gh} \quad T_h G \rightarrow T_{l_g(h)} G = T_{gh} G \quad l_g(h) = gh$$

für alle $g, h \in G$. Denn nach der Definition des push-forwards gilt:

$$X_h \stackrel{\text{links invar.}}{=} ((l_g)_* X)_h \stackrel{\text{Def. Push-forward}}{=} (Dl_g)_{l_g^{-1}(h)}(X_{l_g^{-1}(h)}) = (Dl_g)_{g^{-1}h}(X_{g^{-1}h}).$$

Setze hier $\tilde{h} = g \cdot h$ $(l_g)^{-1} = l_{g^{-1}}$.

- (ii) Links-invariante Vektorfelder sind bestimmt durch den Wert in einem Punkt. Denn sei X ein links-invariantes Vektorfeld und $g \in G$ ein beliebiger Punkt, dann gilt:

$$X_g = X_{g \cdot e} \stackrel{i)}{=} (Dl_g)_e(X_e),$$

wobei e das neutrale Element in der Gruppe G ist.

Die Abbildung

$$T_e G \longrightarrow \Gamma(TG), \quad X_e \longmapsto \tilde{X}, \quad \text{mit } \tilde{X}_g = (Dl_g)_e(X_e) = X_g$$

ist eine lineare Bijektion zwischen $T_e G$ und dem Vektorraum der links-invarianten Vektorfelder. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch:

$$\tilde{X} \longmapsto \tilde{X}_e = X_e$$

Mit anderen Worten: Jedes links-invariante Vektorfeld hat die Form \tilde{X} , wobei $X_e \in T_e G$ der Wert des Vektorfeldes im neutralen Element e ist. Insbesondere ist \tilde{X} definiert durch:

$$g \longmapsto \tilde{X}_g = (Dl_g)_e(X_e)$$

ein differenzierbares Vektorfeld auf G .

- (iii) Lie-Gruppen sind parallelisierbar, d.h., es existieren $\dim(G)$ punktweise linear unabhängige Vektorfelder.

Idee: Setze eine Basis in $T_e G$ zu links-invarianten Vektorfeldern auf G fort. Das ist äquivalent dazu, dass TG trivial ist ($\cong G \times \mathbb{R}^{\dim G}$).

(iv) Die Sphären

$$S^1 \cong SO(2) \cong U(1) \text{ und } S^3 \cong SU(2) \cong Sp(1) \text{ und } SO(3) \cong SU(2)/\{\pm I\}$$

symplektische Gruppe in Dimension 1 über Quaternion \mathbb{H}

sind Lie-Gruppen. Die gerade-dimensionalen Sphären S^{2n} sind keine Lie-Gruppen, da auf S^{2n} kein Vektorfeld ohne Nullstellen existiert. (Satz von Igel)

Satz von Adams: S^1, S^3 und S^7 sind die einzigen parallelisierbaren Sphären.

S^7 ist jedoch keine Lie-Gruppe. (Körper-Multiplikation nicht assoziativ)

(v) Analog zu links-invarianten Vektorfeldern kann man auch **rechts-invariante Vektorfelder** definieren.

(vi) Sind G, H Lie-Gruppen, so ist auch $G \times H$ eine Lie-Gruppe.

Der n -dimensionale Torus $\mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ ist also ebenfalls eine Lie-Gruppe.

Erinnerung: Def. 3.10 Eine reelle Lie-Algebra ist ein reeller Vektorraum V mit einer Abbildung

$$[\cdot, \cdot] : V \times V \longrightarrow V,$$

die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) Antisymmetrie:

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

(ii) Bilinearität:

$$[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$$

(iii) Jacobi-Identität:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Wir haben gesehen, dass $\Gamma(TM)$, der unendlich-dimensionale Raum der Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M , eine Lie-Algebra ist. $[X, Y]$ ist definiert durch:

$$\mathcal{L}_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X.$$

Es gibt auch endlich-dimensionale Beispiele:

- $\text{End}(V)$ mit der Lie-Klammer: $[A, B] = A \circ B - B \circ A$
- \mathbb{R}^3 mit dem Lie-Produkt: $[v, w] = v \times w$ (Kreuzprodukt)

wollen sehen: Zu jeder Lie-Gruppe gibt es eine eindeutig bestimmte Lie-Algebra.

Satz 4.4

Sei G eine Lie-Gruppe und $\mathfrak{g} := T_e G$. Dann gilt:

- (i) Die Menge der links-invarianten Vektorfelder auf G ist ein reeller Vektorraum, der isomorph zu $\mathfrak{g} = T_e G$ ist. Insbesondere gilt:

$$\dim \mathfrak{g} = \dim G.$$

- (ii) Der Kommutator zweier links-invarianter Vektorfelder ist ebenfalls links-invariant. Daher ist die Menge der links-invarianten Vektorfelder mit der Einschränkung des Kommutators von Vektorfeldern eine Lie-Algebra.

Auf $\mathfrak{g} = T_e M$ ist die Lie-Algebra-Struktur definiert durch:

$$[X, Y]^\mathfrak{g} := [\tilde{X}, \tilde{Y}]_e^{\text{VF}}$$

für $X, Y \in \mathfrak{g}$. (pass auf hier X, Y sind Werte, keine Vektorfelder!).

$$\text{Insbesondere gilt: } \widetilde{[X, Y]}^\mathfrak{g} = [\tilde{X}, \tilde{Y}]^{\text{VF}}$$

Beweis.

- (i) Dies haben wir bereits diskutiert.

- (ii) X ist links-invariant $\overset{\text{Def.}}{\iff} X$ ist l_g -verknüpft zu sich selbst für alle $g \in G$
 $\iff (l_g)_* X = X$ für alle $g \in G$

Nach Lemma 3.15 gilt für links-invariante Vektorfelder X, Y :

$$l_{g*}[X, Y] \stackrel{3.15}{=} [l_{g*}X, l_{g*}Y] \stackrel{X, Y \text{ links-inv}}{=} [X, Y].$$

D.h. $[X, Y]$ ebenfalls links-invariant ist.

Seien $X, Y \in T_e G$ mit den assoziierten links-invarianten Vektorfeldern $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \Gamma(TG)$. Auf $T_e G$ definieren wir:

$$[X, Y] := [\tilde{X}, \tilde{Y}]_e. \quad (*)$$

Seien \tilde{X}, \tilde{Y} links-invariante Vektorfelder, dann sind sie nach Definition l_g -verknüpft mit sich selbst:

$$\widetilde{[X, Y]}_g^\mathfrak{g} \underset{\text{links-inv. VF}}{\stackrel{[X, Y]^\mathfrak{g}}{=}} \text{als } Dl_g([X, Y]^\mathfrak{g}) \underset{\text{Struktur}}{\stackrel{\text{Def. Lie-Algebra}}{=}} Dl_g([\tilde{X}, \tilde{Y}]_e^{\text{VF}}) \underset{\text{Def. links-inv}}{=} [\tilde{X}, \tilde{Y}]_g^{\text{VF}}$$

Daraus folgt, dass $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ ebenfalls links-invariant ist, und die behauptete Gleichung gilt.

Für die Lie-Algebra-Struktur müssen wir die Jacobi-Identität überprüfen. Für $X, Y, Z \in T_e G$ gilt:

$$[X, [Y, Z]] \stackrel{(*)}{=} [\widetilde{X}, \widetilde{[Y, Z]}]_e^{\text{VF}} = \left[\widetilde{X}, [\widetilde{Y}, \widetilde{Z}]_e^{\text{VF}} \right]_e$$

Damit erfüllt $[\cdot, \cdot]$ die Jacobi-Identität, da diese für die Lie-Klammer von Vektorfeldern gilt. Insbesondere ist

$$T_e G \longrightarrow \{\text{links-invariante Vektorfelder auf } G\} \subseteq \Gamma(TG), \quad X \longmapsto \tilde{X}$$

ein Lie-Algebren Isomorphismus von Vektorräumen, der die Lie-Algebra-Struktur überträgt. (Def. 3.11) \square

Definition 4.5

Die Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ einer Lie-Gruppe G ist definiert als der Raum der links-invarianten Vektorfelder bzw. des Tangentialraums an G im neutralen Element e .

Die Lie-Klammer ist definiert durch den Kommutator von Vektorfeldern (vgl. Satz 4.4).

Beispiele

(i) Sei $G = GL(n, \mathbb{R})$, dann ist:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R}) \quad (\text{da } GL(n, \mathbb{R}) \subseteq M(n, \mathbb{R}) \text{ offen})$$

Die Lie-Klammer auf \mathfrak{g} ist der gewöhnliche Kommutator von Matrizen:

$$[A, B] = AB - BA.$$

(Zum Herleiten betrachtet man die Kurve $A(t) = I + tX + o(t^2)$ in $Gl(n, \mathbb{R})$, wobei X die beliebige $n \times n$ Matrix ist. $d/dt|_{t=0} A(t) = X$, verknüpft man mit Links-Abbildung dann für $g \in Gl(n, \mathbb{R})$ ergibt sich die Elemente in \mathfrak{g} $g \cdot X$ was zu einer beliebigen Matrix führt)

(ii) Sei $G = O(n)$, dann ist:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(n) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid A + A^T = 0\}$$

Die Lie-Algebra der orthogonalen Gruppe ist die Menge der schief-symmetrischen Matrizen.

Die Lie-Algebra von $SO(n)$ ist gleich der von $O(n)$, da $SO(n) \subset O(n)$ offen ist. (Genauer: $SO(n)$ ist die Zusammenhangskomponente der Einheitsmatrix.)

Für $O(3)$ gilt:

$$\mathfrak{o}(3) \cong (\mathbb{R}^3, \times) \quad \times : \text{Kreuzprodukt}$$

4.1 Die Lie-Algebra - Lie-Gruppen Korrespondenz

Definition

Eine Lie-Untergruppe $H \subseteq G$ einer Lie-Gruppe G ist eine Untergruppe H von G mit Teilraum-Topologie und glatter Struktur, die H zu einer Lie-Gruppe und eine *immersierte Untermannigfaltigkeit* machen.

Bemerkungen

- (i) H ist wieder eine Lie-Gruppe.
- (ii) Sei $\iota : H \rightarrow G$ die Immersion, dann gilt:

$$\iota(e_H) = e_G$$

und das Differential definiert einen Homomorphismus:

$$D\iota_e : T_e H \hookrightarrow T_e G.$$

Jedes $X \in T_e H$ definiert ein links-invariantes Vektorfeld:

- X_G auf G (als Fortsetzung von $D\iota_e(X)$)
- X_H auf H

Behauptung: Diese Vektorfelder sind ι -verwandt.

Da die Immersion ein Gruppenhomomorphismus ist, gilt:

$$\iota \circ l_a^H = l_{\iota(a)}^G \circ \iota \quad \text{für alle } a \in H.$$

Daraus folgt für das Differential:

$$D\iota X_H(a) = D\iota(Dl_a^H(X)) \stackrel{\text{KR}}{=} D(\iota \circ l_a^H)(X) = D(l_{\iota(a)}^G \circ \iota)(X) \stackrel{\text{KR}}{=} X_G(\iota(a)).$$

- (iii) Seien $X, Y \in T_e H$, dann sind die Kommutatoren ι -verknüpft, d.h.,

$$[X_G, Y_G]_e = D\iota([X_H, Y_H]_e).$$

Daraus folgt: $D\iota(T_e H) \subseteq T_e G$ ist eine Lie-Unteralgebra, d.h. ein Untervektorraum, der abgeschlossen unter der Lie-Klammer ist.

Zusätzlich haben wir einen Lie-Algebra-Isomorphismus:

$$(T_e H, [\cdot, \cdot]_H) \cong (D\iota(T_e H), [\cdot, \cdot]_G|_{T_e H}).$$

Insbesondere für $H \subseteq GL(n, \mathbb{R})$, dann ist der Kommutator auf H , die Einschränkung des Kommutators von Matrizen.

Beispiel

$$G = \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Die Gruppenoperation ist definiert durch:

$$(\theta, \varphi) + (\theta', \varphi') = (\theta + \theta', \varphi + \varphi').$$

Dann sind die folgenden Mengen Lie-Untergruppen von G :

- $H_1 = S^1 \times \{1\} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}$.
- $H_2 = \{(t, \lambda t) \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$.

Lie-Gruppe von G , H_2 ist immersiert, aber nicht eingebettet.

Die Umkehrung von Bemerkung (iii) ist ebenfalls korrekt.

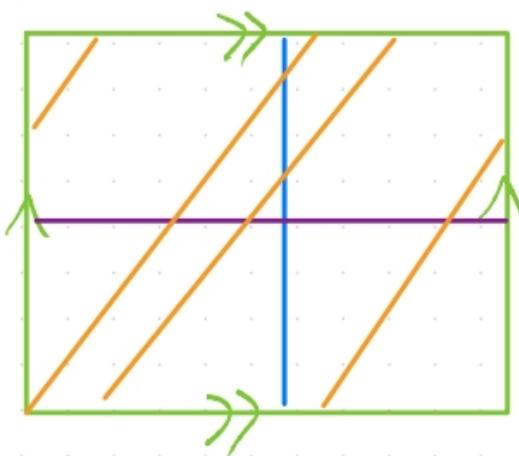


Abbildung 29: 2-dim Torus, blaue und purpurne Linien S^1 , orange Linien entsprechen irrationalen Steigungen und liegen dicht in Torus

Satz 4.6

Sei G eine Lie-Gruppe und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine Lie-Unteralgebra. Dann existiert eine eindeutig bestimmte zusammenhängende Lie-Untergruppe $H \subseteq G$ mit:

$$\text{Lie}(H) = \mathfrak{h}.$$

Das bedeutet, es besteht eine bijektive Beziehung zwischen den zusammenhängenden Lie-Untergruppen von G und den Lie-Unteralgebren von \mathfrak{g} .

Bemerkungen

- (i) Laut dem **Satz von Ado** ist jede endlich-dimensionale Lie-Algebra isomorph zu einer Lie-Unteralgebra der Lie-Algebra von $GL(n, \mathbb{R})$. Zusammen mit Satz 4.6 ist jede Lie-Algebra isomorph zu der Lie-Algebra einer Lie-Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$.

- (ii) Laut dem **Cartan-Kriterium** ist eine abgeschlossene Untergruppe $H \subseteq G$ automatisch eine Lie-Untergruppe von G , d.h., H mit der Teilraum-Topologie besitzt eine differenzierbare Struktur, die H zu einer Lie-Untergruppe von G macht.

4.2 Lie-Gruppen Homomorphismen

Definition 4.7

Ein Homomorphismus von Lie-Gruppen ist ein Gruppenhomomorphismus, der auch eine differenzierbare Abbildung ist.

Ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist eine lineare Abbildung, die die Lie-Klammern erhält (siehe Def. 3.11).

Lemma 4.8

Sei $\varphi : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus von Lie-Gruppen, dann ist das Differential am neutralen Element:

$$D\varphi_e : T_e G \rightarrow T_e H$$

ein Lie-Algebren Homomorphismus, d.h. für alle $X, Y \in \mathfrak{g} = T_e G$ gilt:

$$D\varphi_e([X, Y]^\mathfrak{g}) = [D\varphi_e(X), D\varphi_e(Y)]^\mathfrak{h}.$$

Beweis.

Per Definition der Lie-Klammer auf den Lie-Algebren von G bzw. H müssen wir zeigen, dass für $X, Y \in T_e G = \mathfrak{g}$ gilt:

$$D\varphi_e([\tilde{X}, \tilde{Y}]_e^{\text{VF}}) = [\widetilde{D\varphi_e(X)}, \widetilde{D\varphi_e(Y)}]^{\text{VF}}.$$

Dabei ist \tilde{X} das links-invariante Vektorfeld zu $X \in T_e G$, d.h., das Vektorfeld mit:

$$\tilde{X}_g = Dl_g(X).$$

Da φ ein Gruppenhomomorphismus ist, gilt: $\varphi \circ l_g = l_{\varphi(g)} \circ \varphi$.

Durch Ableiten erhalten wir:

$$D\varphi \circ Dl_g = Dl_{\varphi(g)} \circ D\varphi.$$

Anwenden auf $X \in T_e G$ ergibt:

$$D\varphi(\tilde{X}_g) = D\varphi(Dl_g(X)) = D(l_{\varphi(g)})(D\varphi(X)) = \widetilde{D\varphi(X)}_{\varphi(g)}.$$

D.h., die links-invarianten Vektorfelder \tilde{X} und $\widetilde{D\varphi(X)}$ sind φ -verknüpft.

Seien $X, Y \in T_e G$, dann sind auch die Kommutatoren φ -verknüpft, d.h.,

$$D_e\varphi([\tilde{X}, \tilde{Y}]_e) = [\widetilde{D_e\varphi(X)}, \widetilde{D_e\varphi(Y)}]_e.$$

□

Beispiel

Sei $G = H = \mathbb{R}$ mit der Addition als Gruppenoperation.

Dann ist jeder differenzierbare/stetige Homomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von der Form:

$$\varphi(t) = c \cdot t$$

für ein geeignetes $c \in \mathbb{R}$.

Denn: Ableiten von $\varphi(s + t) = \varphi(s) + \varphi(t)$ nach t und in $s = 0$ zeigt

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}(0) = c$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = c \cdot t \quad \text{mit} \quad \dot{\varphi}(0) = c.$$

Jeder differenzierbare Homomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist ebenfalls von der Form:

$$\varphi(t) = e^{ict}$$

In beiden Fällen ist das Differential $D\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Multiplikation mit c .

Bemerkung

Es gibt keinen nicht-trivialen Lie-Gruppen-Homomorphismus $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$. (Trivial z.B. alle Elemente in S^1 abgebildet zu $0 \in \mathbb{R}$) Denn $\varphi(S^1)$ wäre eine kompakte Untergruppe in \mathbb{R} , aber $\{0\}$ ist die einzige kompakte Untergruppe von \mathbb{R}

$$\varphi(S^1) = \{0\}.$$

Sei nun $G \subseteq \mathbb{R}$ eine kompakte Untergruppe, dann ist G beschränkt, aber mit $g \in G$ auch $ng \in G$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, würde G unbeschränkt wachsen. Für $g \neq 0$ im Widerspruch zur Kompaktheit von G . Also existieren keine nicht-trivialen Lie-Gruppen-Homomorphismen von S^1 nach \mathbb{R} .

Folgerung:

Nicht jeder Lie-Algebren-Homomorphismus ist das Differential eines Lie-Gruppen-Homomorphismus $G \rightarrow H$. Ein Beispiel dafür ist:

$$\mathrm{Lie}(S^1) \cong \mathrm{Lie}(\mathbb{R}).$$

wobei die Lie-Algebren gleich sind aber es existiert kein Lie-Gruppen-Homomorphismus.

Satz 4.9

Seien G, H Lie-Gruppen und sei $\Phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus. Dann existiert eine Umgebung U von $e \in G$ und eine glatte Abbildung $\varphi : U \rightarrow H$ mit:

- (i) $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, falls $a, b, a \cdot b \in U$,
- (ii) $D\varphi(X) = \Phi(X)$ für alle $X \in \mathfrak{g} = T_e G$,

- (iii) Sind $\varphi, \psi : G \rightarrow H$ zwei Lie-Gruppen-Homomorphismen mit $D\varphi = \Phi = D\psi$ und ist G zusammenhängend, dann folgt:

$$\varphi = \psi.$$

Mit Lie-Algebren-Homomorphismus kann man jedoch lokal Lie-Gruppen-Homomorphismus konstruieren!

Bemerkung

Der Gruppen-Homomorphismus aus Satz 4.9 ist auf ganz G definiert, falls G **einfach zusammenhängend** ist. Unter dieser Voraussetzung hat man also eine bijektive Beziehung:

$$\{\text{Lie-Gruppen Homom. von } G \text{ nach } H\} \longleftrightarrow \{\text{Lie-Algebren Homom. von } \mathfrak{g} \text{ nach } \mathfrak{h}\}.$$

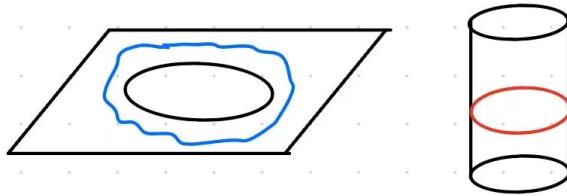


Abbildung 30: Ebene mit Loch und die Zylinder Oberfläche sind nicht einfach zusammenhängend

Hinweis:

Wir werden noch eine genaue Definition geben. Anschaulich: Jede Schleife in G lässt sich stetig zu einem Punkt zusammenziehen.

Korollar 4.10

Zwei Lie-Gruppen mit isomorphen Lie-Algebren sind **lokal isomorph**.

Die Isomorphie ist **global**, falls beide Gruppen einfach zusammenhängend sind.

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\Phi \cong} \mathfrak{h} \quad U \subseteq G \xrightarrow{\varphi} H \quad V \subseteq H \xrightarrow{\psi} G$$

$$g \in G \xrightarrow{l_g^{-1}} e_g \in G \rightarrow e_h \in H \xrightarrow{l_h} h \in H$$

Korollar 4.11

Eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit abelscher Lie-Algebra ist abelsch.

(Erinnerung: Eine Lie-Algebra ist abelsch, falls die Lie-Klammer identisch Null ist.)

Um zu zeigen braucht man folgenden Satz:

Satz 4.12

Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe und sei U eine Umgebung des Einselements in G . Dann gilt:

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n \quad U^n := \{x_1 \cdot \dots \cdot x_n \mid x_i \in U\}$$

wobei U^n aus dem n -fachen Produkt von Elementen aus U besteht. Man sagt: **Die Umgebung U erzeugt die Gruppe G .**

Beweis. (Beweis Korollar 4.11)

Eine abelsche Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ ist isomorph zu $(\mathbb{R}^n, [\cdot, \cdot] = 0) = \text{Lie}(\mathbb{R}^n, +)$, denn sie keine zusätzliche (Gruppen-)Strukturen außer Vektorraum-Struktur besitzt (da Lie-Klammer trivial).

Laut Korollar 4.10 ist G dann lokal isomorph zu \mathbb{R}^n . Es gilt also:

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \text{für alle } a, b \text{ in einer hinreichend kleinen Umgebung von } e_G.$$

Jede solche Umgebung erzeugt also die ganze Gruppe (Satz 4.12), d.h., jedes Gruppenelement lässt sich als Produkt von Elementen aus der Umgebung schreiben.

Damit ist die ganze Gruppe G abelsch. □

Bemerkungen

- (i) Alle zusammenhängenden Lie-Gruppen mit der gleichen Lie-Algebra werden von der gleichen einfach-zusammenhängenden Lie-Gruppe überlagert.
(Später: Theorie von Überlagerungen)
- (ii) Die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe G ist gleich der Lie-Algebra der zusammenhängenden Komponente des Eins-Elements² in G .

Zum Beispiel:

$$\text{Lie}(O(n)) = \text{Lie}(SO(n)).$$

$O(n)$ besitzt 2 Zusammenhangskomponente da $\det = \pm 1$

4.3 Die Exponential-Abbildung

Satz 4.13

Links-invariante Vektorfelder sind **vollständig**, d.h., für ein links-invariantes Vektorfeld X auf einer Lie-Gruppe G ist der Fluss φ_t für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ definiert.

Weiter gilt:

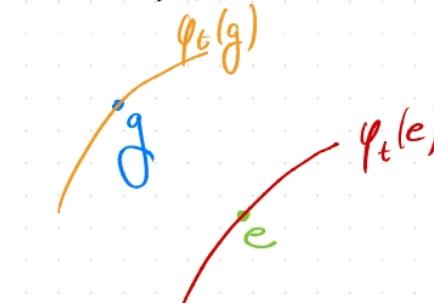
$$\varphi_t(g) = g \cdot \varphi_t(e) \quad \text{für alle } g \in G \text{ und } t \in \mathbb{R},$$

² $e \in G_0$ und G_0 zusammenhängend im topologischen Sinne

d.h., die Kurve:

$$l(t) = g \cdot \varphi_t(e)$$

ist die maximale Integralkurve von X durch g .



Beweis. Sei X ein links-invariantes Vektorfeld auf G , dann gilt $X = (l_g)_*X$ und laut Lemma 3.27 gilt für die Flüsse:

$$\forall g \in G : \quad \varphi_t = l_g \circ \varphi_t \circ l_{g^{-1}}$$

Angewandt auf $g \in G$ folgt:

$$\varphi_t(g) = l_g \circ \varphi_t \circ l_{g^{-1}}(g) = l_g \circ \varphi_t(e) \stackrel{\text{Def. Links-Abb}}{=} g \cdot \varphi_t(e) \quad (*)$$

\Rightarrow Es reicht zu zeigen: Die Integralkurve von X durch e existiert für alle $t \in \mathbb{R}$.
Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $\varphi_t(e)$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ definiert ist. Es gilt:

$$\varphi_{s+t}(e) = \varphi_s(\varphi_t(e)) = \varphi_t(e) \cdot \varphi_s(e) \quad (**)$$

für alle s, t klein genug.

Wir schreiben $s = k \cdot \frac{\varepsilon}{2} + t$, für $k \in \mathbb{Z}$ und $|t| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $s > 0$ definieren wir:

$$c(s) := (\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(e))^k \cdot \varphi_t(e)$$

Behauptung: $c(s)$ ist die Integralkurve von X durch e .

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=s_0=k\frac{\varepsilon}{2}+t_0} c(s) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} c\left(k\frac{\varepsilon}{2} + t\right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \underbrace{\left((\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(e))^k \cdot \varphi_t(e)\right)}_{=l_{(\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(e))^k}(\varphi_t(e))}$$

$$\stackrel{\text{KR}}{=} Dl_{(\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(e))^k} (X_{\varphi_{t_0}(e)}) \stackrel{(Dl_g)_h(X_h)=X_{gh}}{=} X_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(e))^k \varphi_{t_0}(e)} = X_{c(s)}$$

□

Korollar 4.14

Sei $c_X : \mathbb{R} \rightarrow G$ die Integralkurve durch e eines links-invarianten Vektorfelds X .

Dann ist c_X ein Lie-Gruppen-Homomorphismus, d.h.,

$$c_X(0) = e \quad \text{und} \quad c_X(s+t) = c_X(s) \cdot c_X(t) \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R}.$$

Weiter gilt:

$$c_{sX}(t) = c_X(s \cdot t).$$

Beweis. Es ist $c_X(t) = \varphi_t(e)$, die Homomorphismus-Eigenschaft von c_X folgt aus (**).

bleibt zu zeigen: Die Abbildung $t \mapsto c(t) := c_X(st)$ ist die Integralkurve des links-invarianten Vektorfeldes.

Daraus berechnen wir:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} c(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} c_X(st) = s \cdot \dot{c}_X(st_0) \stackrel{c_X \text{ Integralkurve}}{=} s \cdot X_{c_X(st_0)} = s \cdot X_{c(t_0)}$$

□

Definition 4.15

Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra \mathfrak{g} . Die Abbildung:

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G, \quad X \mapsto c_X(1)$$

heißt **Exponentialabbildung der Lie-Gruppe G** . Hierbei ist c_X die maximale Integralkurve von X mit:

$$c_X(0) = e.$$

Bemerkung

(i) Es gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\exp(tX) = c_{tX}(1) = c_X(t) = \varphi_t(e).$$

(ii) Homomorphismen $\mathbb{R} \rightarrow G$ heißen **1-parametrische Untergruppen** von G .

(iii) Für jedes fixierte $X \in \mathfrak{g}$ ist die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow G$, $t \mapsto \exp(tX)$ der eindeutig bestimmte glatte Gruppenhomomorphismus $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ mit:

$$\dot{\gamma}(0) = X.$$

Beweis:

Der Homomorphismus $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ definiert eine glatte Kurve in G mit:

$$\gamma(0) = e \quad \text{und} \quad \dot{\gamma}(0) = X.$$

Zu zeigen:

γ ist die Integralkurve des links-invarianten Vektorfeldes \tilde{X} .

Dann folgt aus der Eindeutigkeit der Integralkurven:

$$\gamma(t) = c_X(t) = c_{tX}(1) = \exp(tX).$$

Nun berechnen wir den Tangentialvektor an γ zur Zeit s :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \gamma(t) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma(s+t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma(s) \cdot \gamma(t) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \ell_{\gamma(s)} \gamma(t) = D\ell_{\gamma(s)} \dot{\gamma}(0) = D\ell_{\gamma(s)} X = \tilde{X}_{\gamma(s)}. \end{aligned}$$

Beispiel

Die Exponentialabbildung für $G = GL(n, \mathbb{R})$.

Für eine Matrix $A \in M(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ definieren wir:

$$\exp(tA) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}.$$

Diese Reihe:

- konvergiert absolut (Standardabschätzung mit Norm und absolute Konvergenz von e^x in \mathbb{R}).
- auf jeder beschränkten Menge in $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ gleichmäßig.
 $\Rightarrow \exp(tA)$ ist wohldefiniert.

Dabei benutzen wir, dass für die Operatornorm auf $GL(n, \mathbb{R})$ die Abschätzung gilt:

$$\|A^n\|_{\text{op}} \leq \|A\|^n.$$

Dies ist tatsächlich die Exponentialabbildung aus Definition 4.15.

Laut Bemerkung (iii) müssen wir zeigen:

$$\exp(0 \cdot A) \underset{\substack{= \\ \text{Def.}}}{=} I, \quad \exp : \mathbb{R} \underset{\substack{\rightarrow \\ 4.16i)}}{\curvearrowright} GL(n, \mathbb{R}), \quad t \mapsto \exp(tA)$$

ist glatt und ein **Gruppenhomomorphismus** gemäß (4.16.ii) mit $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tA) \underset{\substack{= \\ \text{Def.}}}{=} A$.

Lemma 4.16

Die Exponentialabbildung für Matrizen hat folgende Eigenschaften:

1. Für alle $A \in M(n, \mathbb{R})$ gilt:

$$\det(e^A) = e^{\text{Spur}(A)} \quad \text{und somit} \quad e^A \in GL(n, \mathbb{R}).$$

2. Für alle $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ folgt aus $AB = BA$ die Gleichung:

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B.$$

3. Für alle $B \in GL(n, \mathbb{R})$ und $A \in M(n, \mathbb{R})$ gilt:

$$Be^A B^{-1} = e^{BAB^{-1}}.$$

Beweis. **Ad (iii):** Multiplizieren der Reihe e^A von links mit B und von rechts mit B^{-1} , nutze die Beziehung:

$$Be^A B^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} BA^k B^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (BAB^{-1})^k = e^{BAB^{-1}}.$$

Ad i) Für Diagonalmatrizen gilt

$$\exp(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}),$$

für diese stimmt die Behauptung.

iii) \Rightarrow Die Aussage ist richtig für diagonalisierbare Matrizen. ($S^{-1}AS = D$ für ein $S \in GL(n, \mathbb{R})$). Die diagonalisierbaren Matrizen sind dicht in den Matrizen (Stetigkeit \Rightarrow Beh.).

Ad (ii): Berechne das Cauchy Produkt für die Reihen e^A und e^B und forme mit der binomischen Formel um, da A und B kommutieren. \square

Satz 4.17

Die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ ist beliebig oft differenzierbar und ein lokaler Diffeomorphismus um $0 \in \mathfrak{g}$. Weiter gilt:

- i) $\exp(0) = e$
- ii) $\exp((t+s)X) = \exp(sX) \cdot \exp(tX) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}, X \in \mathfrak{g}.$
- iii) $\exp(-X) = \exp(X)^{-1} \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$

Beweis. Die Glattheit der Abbildung $X \mapsto \exp(X) = c_X(1)$ folgt aus den Sätzen über die glatte Abhängigkeit der Lösungen linearer Differentialgleichungen von den Anfangswerten.

Die Aussagen (i) und (ii) folgen aus Homomorphismus der Exponentialabbildung. Zusammen ergeben sie die Aussage (iii), wenn man $s = -t$ in (ii) setzt.

bleibt zu zeigen Die Exponentialabbildung ist ein lokaler Diffeomorphismus um $0 \in \mathfrak{g}$. Dazu zeigen wir $D\exp_0 = \text{id}_{T_e G}$ und benutzen den Umkehrtsatz (Vorlesung 2). Sei $X \in \mathfrak{g}$, dann folgt:

$$D\exp_0(X) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tX) = X.$$

□

Bemerkung

Da die Exponentialabbildung ein lokaler Diffeomorphismus ist, lassen sich mit Hilfe der Exponentialabbildung speziell an die Lie-Gruppe angepasste Koordinaten definieren.

Sei $V(0) \subseteq \mathfrak{g}$ eine bezüglich 0 sternförmige Umgebung, auf der \exp ein Diffeomorphismus ist.

Wir definieren:

$$W(e) := \exp(V(0)) \subseteq G, \quad W(g) := l_g(W(e)) \text{ mit } \varphi_g = \exp^{-1} \circ l_g^{-1} : W(g) \rightarrow V(0) \subseteq \mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^n.$$

Bemerkung

Man kann sogar zeigen: Jeder stetige Homomorphismus zwischen Lie-Gruppen ist differenzierbar.

Bemerkung

Im Allgemeinen ist die Exponentialabbildung nicht surjektiv (und injektiv).

Man kann zeigen, dass die Exponentialabbildung auf kompakten zusammenhängenden Lie-Gruppen surjektiv ist.

Beispiel

$$G = SL(2, \mathbb{R}) = \{A \in M(2, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

$$\mathfrak{g} = \text{Lie}(SL(2, \mathbb{R})) = \{B \in M(2, \mathbb{R}) \mid \text{spur}(B) = 0\}$$

Dann ist die Exponentialabbildung nicht surjektiv, denn:

$$B = \text{diag} \left(-\frac{1}{2}, -2 \right) \text{ liegt nicht im Bild.}$$

Wäre $B = \exp(X)$, so würde folgen:

$$B = \exp(X) = \exp \left(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X \right) = \exp \left(\frac{1}{2}X \right) \cdot \exp \left(\frac{1}{2}X \right) = \left(\exp \left(\frac{1}{2}X \right) \right)^2$$

Aber es gibt keine Matrix $A \in SL(2, \mathbb{R})$ mit $B = A^2$.
(Cayley-Hamilton-Theorem für 2×2 -Matrizen):

$$A^2 - \text{spur}(A) \cdot A + \det(A) \cdot E = 0.$$

$$\begin{aligned} 0 &= \text{spur}(A^2 - \text{spur}(A)A + \det(A)E) = \text{spur}(A^2) - \text{spur}(A)^2 + 1 \leq \text{spur}(A^2) + 2 \\ &\implies -2 \leq \text{spur}(A^2) \end{aligned}$$

Aber:

$$\text{spur}(B) = -\frac{5}{2} < -2.$$

Zu Injektivität einfach $\text{Lie}(S^1) = (\mathbb{R}, [\cdot, \cdot] = 0)$ $\exp : \text{Lie}(S^1) \rightarrow S^1$ $t \mapsto e^{it}$

Satz 4.18

Sei $\varphi : G \rightarrow H$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus. Dann gilt

$$\varphi(\exp^G(X)) = \exp^H(D\varphi_{e_G}(X))$$

für alle $X \in \mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, d.h. es gilt das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{D\varphi_e} & H \\ \exp \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array}$$

Beweis. Sei $c(t) = \varphi(\exp(tX))$. Dann ist $c(0) = \varphi(e_G) = e_H$ und da $\varphi \circ l_g = l_{\varphi(g)} \circ \varphi$ (*) folgt:

$$\dot{c}(t) \stackrel{\text{KR}}{=} D\varphi \left(\tilde{X}_{\exp(tX)} \right) \stackrel{\text{Def. } \tilde{X}}{=} D\varphi \circ Dl_{\exp(tX)}(X_{e_G}) \stackrel{(*)}{=} Dl_{\varphi(\exp(tX))} \circ D\varphi(X_{e_G}) = D\widetilde{\varphi(X_{e_G})}_{c(t)}$$

d.h. $c(t)$ ist eine Integralkurve von $D\widetilde{\varphi(X_{e_G})}$ durch e_H und somit folgt:

$$\varphi(\exp(X)) = \exp(D\varphi(X)).$$

□

Korollar 4.19

Jeder injektive glatte Homomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ ist eine Immersion und $\varphi(G) \subseteq H$ ist damit eine Lie-Untergruppe von H . (immersierte Untermannigfaltigkeit)

Beweis. Sei $X \in \mathfrak{g} = T_e G$ und sei \tilde{X} das zugehörige Vektorfeld, d.h. $\tilde{X}_g = Dl_g(X)$.

Ist für ein $g \in G$ das Differential von φ nicht injektiv, also z.B. $D\varphi(\tilde{X}_g) = 0$, dann folgt:

$$0 = D\varphi(\tilde{X}_g) = D\varphi \circ Dl_g(X) \stackrel{(*)\text{Gruppenhomo.}}{=} Dl_{\varphi(g)} D\varphi(X)$$

Da $Dl_{\varphi(g)}$ ein Isomorphismus ist: $D\varphi(X) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}$. Durch Anwenden der Exponentialabbildung ergibt sich:

$$e_H \stackrel{tX \in \mathfrak{g}}{=} \exp(D\varphi(tX)) = \varphi(\exp(tX))$$

Dies ist ein Widerspruch, da φ injektiv $\Rightarrow D\varphi$ injektiv, d.h. φ ist eine Immersion. □

Korollar 4.20

Sei G eine Lie-Gruppe mit der Lie-Algebra \mathfrak{g} und sei $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Dann existiert ein $X \in \mathfrak{g}$ mit

$$\varphi(t) = \exp(tX) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Somit ist jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \rightarrow G$ schon glatt.

Beweis. Sei $W = \exp(V(0))$ eine Normalumgebung um $e \in G$. Da $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$ stetig ist, mit $\varphi(0) = e$, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\varphi(t) \in W$ für alle t mit $|t| < 2\varepsilon$.

Sei nun $Y \in V(0)$ der Vektor mit

$$\exp(Y) = \varphi(\varepsilon),$$

und setze

$$X = \frac{1}{\epsilon} Y$$

Zu zeigen: $\varphi(t) = \exp(tx) =: f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$
Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ definiert durch

$$K = \{t \in \mathbb{R} \mid f(t) = \varphi(t)\}.$$

Es gilt $0, \varepsilon \in K$. Da f und φ stetig sind, ist K eine abgeschlossene Untergruppe von \mathbb{R} . Für nicht-triviale abgeschlossene Untergruppen $K \subseteq \mathbb{R}$ gibt es zwei Möglichkeiten:

$$K = \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad K = K_d := \{nd \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

wobei d die kleinste positive Zahl in K ist.

Annahme: $K = K_d$

Da $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon \in K$, folgt: $\frac{d}{2} < \varepsilon$. Da φ und f Homomorphismen sind, gilt:

$$\left(f\left(\frac{d}{2}\right)\right)^2 = \exp\left(\frac{d}{2}X\right)^2 = \exp(dX) = f(d) \stackrel{d \in K}{=} \varphi(d) = \left(\varphi\left(\frac{d}{2}\right)\right)^2$$

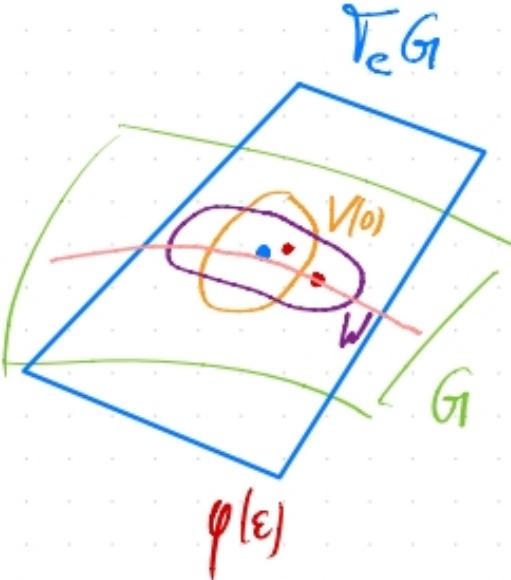
Anwenden von \exp^{-1} ergibt:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \exp^{-1}\left(f\left(\frac{d}{2}\right)\right) &= \exp^{-1}\left(f\left(\frac{d}{2}\right)^2\right) = \exp^{-1}\left(\varphi\left(\frac{d}{2}\right)^2\right) = 2 \cdot \exp^{-1}\left(\varphi\left(\frac{d}{2}\right)\right) \\ &\Rightarrow f\left(\frac{d}{2}\right) = \varphi\left(\frac{d}{2}\right). \end{aligned}$$

Das bedeutet, d war nicht das kleinste Element in K , was ein Widerspruch ist.

$$\Rightarrow K = \mathbb{R}.$$

□



Satz 4.21

Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g} = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$, dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi: V_1 \oplus \dots \oplus V_r &\longrightarrow G \\ v_1 + \dots + v_r &\longmapsto \exp(v_1) \dots \exp(v_r)\end{aligned}$$

ein lokaler Diffeomorphismus um $0 \in \mathfrak{g}$.

Beweis.

Wir zeigen $D\Phi_0 = \text{id}_{\mathfrak{g}}$, laut dem Umkehrtsatz ist Φ dann ein lokaler Diffeomorphismus um $0 \in \mathfrak{g}$.

Für $i = 1, \dots, r$ sei $X_i \in V_i$, dann gilt

$$D\Phi_0(X_i) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(0) \cdot \dots \cdot \exp(tX_i) \cdot \dots \cdot \exp(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tX_i) = X_i.$$

□

Korollar 4.22

Jeder stetige Homomorphismus $\psi: G \rightarrow H$ ist schon glatt.

Beweis. Sei X_1, \dots, X_n eine Basis von $T_e G = \mathfrak{g}$. Für $i = 1, \dots, n$ definieren wir stetige Gruppenhomomorphismen

$$\psi_i: \mathbb{R} \rightarrow H, \quad t \mapsto \psi(\exp(tX_i))$$

Laut Korollar 4.18 gibt es $Y_i \in T_e H$ mit $\psi(\exp(tX_i)) = \exp(D\psi_{e_G}(tX_i)) = \exp(tY_i)$ für $i = 1, \dots, n$.

$$\Rightarrow \psi(\exp(t_1X_1) \dots \exp(t_nX_n)) \stackrel{\text{Gruppenhomo.}}{=} \exp(t_1Y_1) \dots \exp(t_nY_n) \quad (*)$$

Laut Satz 4.21 ist die Abbildung $\Phi: \mathfrak{g} \rightarrow G$ definiert durch

$$\Phi(t_1X_1 + \dots + t_nX_n) = \exp(t_1X_1) \dots \exp(t_nX_n)$$

auf einer Umgebung U von $0 \in \mathfrak{g}$ ein Diffeomorphismus.

Sei $V = \Phi(U)$ die entsprechende Umgebung von $e \in G$. Auf V schreiben wir ψ als

$$\psi = (\psi \circ \Phi) \circ \Phi^{-1}$$

Mit Gleichung (*) schreiben wir $\psi \circ \Phi$ als

$$\psi \circ \Phi: (t_1, \dots, t_n) \mapsto \exp(t_1Y_1) \dots \exp(t_nY_n)$$

d.h. $\psi \circ \Phi$ ist glatt auf U , und Φ auch glatt auf $U \Rightarrow \psi$ ist glatt auf V .

Der Homomorphismus ψ ist also glatt auf einer Normalumgebung $W(e) \subseteq G$ von $e \in G$.

Behauptung: ψ ist glatt auf ganz G .

Auf $W(g) = l_g(W(e))$ schreiben wir

$$\psi|_{W(g)}^{(h)} = l_{\psi(g)}^H \circ \psi|_{W(e)} \circ l_{g^{-1}}^G \quad \text{da } \psi(g)\psi(g^{-1}h) = \psi(gg^{-1}h) = \psi(h)$$

Wir wissen, die Links-Abbildung ist glatt, also ist ψ glatt auf beliebiger $W(g)$. \square

Korollar 4.23

Eine lokal-euklidische topologische Gruppe mit abzählbarer Topologie besitzt höchstens eine differenzierbare Struktur bzgl. der sie eine Lie-Gruppe wird.

Beweis. Betrachte die Identität

$$\text{id}: (G, \mathcal{A}_1) \rightarrow (G, \mathcal{A}_2),$$

dies ist stetig und damit auch differenzierbar (Kor 4.20) und damit ein Diffeomorphismus zwischen den differenzierbaren Strukturen. \square

Bemerkung:

Das *fünfte Hilbert-Problem* fragt, ob jede lokal-euklidische Gruppe eine Lie-Gruppe ist. Die Frage wurde 1952 von Montgomery und Zippin positiv beantwortet.

Lemma 4.24

Sei $\iota: H \rightarrow G$ eine Lie-Untergruppe und sei $X \in \mathfrak{g}$. Dann gilt:

- i) $X \in D\iota(\mathfrak{h}) \Rightarrow \exp(tX) \in \iota(H) \subseteq G$ für alle $t \in \mathbb{R}$,
- ii) Gilt $\exp(tX) \in \iota(H)$ für alle t in einem Intervall I , dann folgt $X \in D\iota(\mathfrak{h})$.

Beweis. Sei zunächst $X \in D\iota(\mathfrak{h})$, es existiert also ein $X_0 \in \mathfrak{h}$ mit $X = D\iota(X_0)$. Dann folgt

$$\exp(tX) = \exp(D\iota(tX_0)) \stackrel{4.18}{=} \iota(\exp(tX_0)) \implies \exp(tX) \in \iota(H) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Für den Beweis der umgekehrten Richtung betrachten wir die glatte Abbildung

$$I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow G, \quad t \mapsto \exp(tX).$$

Nach Voraussetzung liegt das Bild dieser Abbildung in $\iota(H)$. Daher existiert eine glatte Abbildung

$$\alpha: I \rightarrow H \quad \text{mit} \quad \exp(tX) = \iota(\alpha(t)).$$

Sei nun \tilde{X} das links-invariante Vektorfeld auf H zu $\dot{\alpha}(t_0)$. Dann gilt $D\iota(\tilde{X}) = X$ (vgl. Bemerkungen unter Artikel 4.1 $\iota \circ l_a^H = l_{\iota(a)}^G \circ \iota$ und $D_\iota X_H(a) = X_G(\iota(a)) \quad \forall a \in H$ und $X \in T_e H$, X_H , X_G links-invariante Vektorfelder zu X) und somit $X \in D\iota(\mathfrak{h})$ □

Bemerkung: Für eingebettete Lie-Untergruppen $H \subseteq G$ mit Lie-Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ gilt also $X \in \mathfrak{h}$ genau dann, wenn $\exp(tX) \in H$ für alle t aus einem kleinen Intervall um 0.

Lemma 4.25

Sei $\varphi: G \rightarrow K$ ein Homomorphismus von Lie-Gruppen. Dann ist $\ker \varphi$ eine abgeschlossene Untergruppe von G und es gilt

$$\text{Lie}(\ker \varphi) = \ker(D\varphi).$$

Beweis. $\ker \varphi$ ist abgeschlossen: $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$ und Urbilder von stetiger Abbildung abgeschlossener Menge .

Sei $X \in \mathfrak{g}$, dann ist nach vorigem Lemma

$$X \in \text{Lie}(\ker \varphi) \stackrel{\text{exp}: \mathfrak{g} \rightarrow G}{\Leftrightarrow} \exp(tX) \in \ker(\varphi) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

d.h.

$$\varphi(\exp(tX)) = e_k \stackrel{4.18}{\Leftrightarrow} \exp(D\varphi(tX)) = e \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Da \exp in einer Umgebung der Null ein lokaler Diffeomorphismus ist, folgt $D\varphi(X) = 0$, also $X \in \ker(D\varphi)$. □

Letzte Woche: Für kommutierende Matrizen A, B gilt $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

Satz 4.26

Seien $X, Y \in \mathfrak{g}$ mit $[X, Y] = 0$, dann gilt

$$\exp(X + Y) = \exp(X) \cdot \exp(Y).$$

Beweis. Sei $\mathfrak{a} := \text{span}\{X, Y\} \subseteq \mathfrak{g}$, dann ist \mathfrak{a} eine abelsche Unterlagebra von \mathfrak{g} . Sei $A \subseteq G$ die zusammenhängende Untergruppe mit Lie-Algebra \mathfrak{a} (Existenz laut Satz 4.6). Laut Folgerung 4.11 ist die Gruppe A abelsch. Wir definieren eine Kurve $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow G$ durch

$$\alpha(t) := \exp(tX) \cdot \exp(tY).$$

Da A abelsch ist, ist $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow A \subseteq G$ ein glatter Homomorphismus (Vertauschung $\exp(tX), \exp(tY)$ erlaubt):

$$\alpha(s+t) = \exp(sX) \exp(tX) \exp(sY) \exp(tY) \stackrel{X, Y \text{ kommu}}{=} \alpha(s)\alpha(t)$$

Daher existiert ein $Z \in \mathfrak{g}$ mit $\alpha(t) = \exp(tZ)$, wobei $Z = \dot{\alpha}(0) \in \mathfrak{g}$.

Berechnet man die Ableitung von $\alpha(t) = \exp(tX) \cdot \exp(tY)$ in $t = 0$, so erhält man andererseits

$$Z = \dot{\alpha}(0) = X + Y.$$

$$\Rightarrow \exp(tX) \cdot \exp(tY) = \alpha(t) = \exp(t(X+Y)).$$

□

4.4 Die adjungierte Darstellung

Sprechweise: Gruppen-Isomorphismen einer Gruppe G auf sich selbst nennen wir Automorphismen. Wir schreiben $\text{Aut}(G)$ für die Gruppe aller Automorphismen.

Definition 4.27: Die Abbildung $\alpha_g: G \rightarrow G$ mit

$$\alpha_g(h) := ghg^{-1}$$

für ein $g \in G$ heißt Konjugation mit dem Gruppenelement g . ($\alpha_g = l_g \circ r_{g^{-1}} = r_{g^{-1}} \circ l_g$).

Lemma 4.28: Die Konjugation α_g hat folgende Eigenschaften:

- i) Die Konjugation $\alpha_g: G \rightarrow G$ ist ein Gruppenhomomorphismus.
- ii) $\alpha_g: G \rightarrow G$ ist ein Gruppenisomorphismus, es gilt $(\alpha_g)^{-1} = \alpha_{g^{-1}}$.
- iii) Die Abbildung $\alpha: G \rightarrow \text{Aut}(G)$ $g \mapsto \alpha_g$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Für beliebige $g, h, a, b \in G$ berechnen wir:

Zu (i):

$$\alpha_g(a \cdot b) = gabg^{-1} = gag^{-1} \cdot gbg^{-1} = \alpha_g(a) \cdot \alpha_g(b) \quad \alpha_g(e) = geg^{-1} = e.$$

Zu (ii):

$$(\alpha_g)^{-1} = (l_g \circ r_{g^{-1}})^{-1} = r_{g^{-1}}^{-1} \circ l_g^{-1} = r_g \circ l_g^{-1} = l_{g^{-1}} \circ r_g = \alpha_{g^{-1}}.$$

Zu (iii):

$$\begin{aligned} \alpha_{gh}(a) &= gh \cdot a \cdot (gh)^{-1} = ghah^{-1}g^{-1} = g \cdot \alpha_h(a) \cdot g^{-1} = \alpha_g(\alpha_h(a)) = (\alpha_g \circ \alpha_h)(a) \\ \Rightarrow \alpha_{gh} &= \alpha_g \circ \alpha_h, \quad \text{und} \quad \alpha_e = \text{id}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Ist G eine Lie-Gruppe, so ist die Konjugation eine differenzierbare Abbildung und damit ein Homomorphismus von Lie-Gruppen, da die Gruppenoperationen differenzierbare Abbildungen sind.

Gruppen-Automorphismen von der Form $\alpha_g: G \rightarrow G$, $g \in G$, heißen *innere Automorphismen*.

Das Differential der Konjugation definiert eine Abbildung $(D\alpha_g)_e: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Schreiben:

$$\text{Ad}(g) := (D\alpha_g)_e, \quad \text{d.h.} \quad \text{Ad}(g) = D\alpha_g \circ Dr_{g^{-1}}$$

Lemma 4.29

Das Differential der Konjugation hat die folgenden Eigenschaften:

- i) Die Abbildung $\text{Ad}(g): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ist ein Lie-Algebren-Homomorphismus, d.h. es gilt:

$$\text{Ad}(g)([X, Y]) = [\text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)Y].$$

- ii) Die Abbildung $\text{Ad}(g)$ ist ein Lie-Algebren-Isomorphismus, d.h. $\text{Ad}(g) \in \text{Aut}(\mathfrak{g}) = \text{GL}(\mathfrak{g})$ und es gilt:

$$\text{Ad}(g)^{-1} = \text{Ad}(g^{-1}) \quad \forall g \in G$$

- iii) Die Abbildung $\text{Ad}: G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$ $g \mapsto \text{Ad}(g)$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Zu (i): vgl. Lemma 4.8, dort haben wir gezeigt, dass das Differential eines Lie-Gruppen-Homomorphismus ein Lie-Algebren-Homomorphismus der assoziierten Lie-Algebren ist.

Zu (ii): $\text{Ad}(g)^{-1} = (D\alpha_g)^{-1} = (D\alpha_g^{-1}) = D\alpha_{g^{-1}} = \text{Ad}(g^{-1})$.

Zu (iii): $\text{Ad}(gh) = D\alpha_{gh} = D(\alpha_g \circ \alpha_h) = D\alpha_g \circ D\alpha_h = \text{Ad}(g) \circ \text{Ad}(h)$.

Es gilt sogar: $\text{Ad}: G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$ ist eine differenzierbare Abbildung, also ein *Lie-Gruppen Homomorphismus*.

Für kleines t folgt aus $\varphi(\exp(tX)) = \exp(D\varphi(tX))$ für $\varphi = \alpha_g$ (Satz 4.18) :

$$\text{Ad}(g)X = \frac{1}{t} \exp^{-1}(\alpha_g(\exp(tX))) = \frac{1}{t} \exp^{-1}(g \exp(tX)g^{-1})$$

\Rightarrow Ad ist stetiger Homomorphismus von Lie-Gruppen \Rightarrow Ad ist differenzierbar (nach 4.22). \square

Bemerkung: Das Differential der Abbildung $\text{Ad}: G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ ist ein Lie-Algebren-Homomorphismus

$$(D\text{Ad})_e: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}).$$

Schreiben: $\text{ad} := (D\text{Ad})_e$

Definition 4.30

Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra \mathfrak{g} .

Eine Darstellung von G auf einem Vektorraum V ist ein Lie-Gruppen-Homomorphismus

$$\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V) = \mathrm{Aut}(V) = \{\text{inv. lineare Abb } V \rightarrow V\} \xrightarrow[\text{nach Wahl Basis}]{} \mathrm{GL}(\dim V)$$

d.h.

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \cdot \rho(g_2) \quad \text{für alle } g_1, g_2 \in G.$$

Eine Darstellung von \mathfrak{g} auf V ist ein Lie-Algebren-Homomorphismus

$$\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End}(V) = \{\text{lineare Abb. } V \rightarrow V\} \cong M(\dim V, \mathbb{R})$$

d.h. es gilt

$$\varphi([X, Y]) = \varphi(X)\varphi(Y) - \varphi(Y)\varphi(X).$$

Beispiel: Darstellung von $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ auf \mathbb{R}^2

$$\rho(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (\text{Additions-Theorem}).$$

$$(\mathrm{Lie}(S^1) = \mathbb{R}, [,] = 0)$$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Bemerkung: Sei $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung von G , dann ist das Differential von ρ , also der Homomorphismus

$$\varphi = D\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathrm{End}(V),$$

eine Darstellung der Lie-Algebra \mathfrak{g} .

Definition 4.31

Der Gruppenhomomorphismus $\mathrm{Ad}: G \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ heißt adjungierte Darstellung von G .

Der Lie-Algebren-Homomorphismus $\mathrm{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ heißt adjungierte Darstellung von \mathfrak{g} .

Satz 4.32

Für die adjungierte Darstellung von \mathfrak{g} gilt:

$$\mathrm{ad}(X)Y = [X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Beweis. Sei X ein links-invariantes Vektorfeld, dann ist die Integralkurve durch $g \in G$ gegeben durch

$$c_g(t) = g \cdot \exp(tX).$$

D.h. der lokale Fluss von X ist gegeben durch

$$\varphi_t(g) = c_g(t) = r_{\exp(tX)}(g) \quad (\text{Rechtsmultiplikation}).$$

$$\begin{aligned} \text{ad}(X)Y &= D \text{Ad}(X)Y = \left[\frac{d}{dt} \right]_{t=0} \text{Ad}(\exp(tX))Y \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (Dr_{\exp(-tX)}Dl_{\exp(tX)}Y) \quad [\text{Def. von } \text{Ad} = D(r_{g^{-1}} \circ l_g)] \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (Dr_{\exp(-tX)}\tilde{Y}_{\exp(tX)}) \quad [\text{Def. linksinv. } \tilde{Y}] \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (D\varphi_{-t}\tilde{Y}_{\exp(tX)}) \quad [\text{Def. von } \varphi_t(g)] \\ &\stackrel{\text{Satz 3.25}}{=} [\tilde{X}, \tilde{Y}]_e = [X, Y] \end{aligned}$$

□

Bemerkung:

i) Für Matrixgruppen $G \subseteq \text{GL}(n, \mathbb{R})$ gilt:

$$\text{Ad}(g)A = gAg^{-1} \quad \text{für alle } g \in G \text{ und } A \in \mathfrak{g}.$$

ii) Es gilt:

$$g \exp(X)g^{-1} = \exp(gXg^{-1}) = \exp(\text{Ad}(g)X),$$

d.h. das folgende Diagramm kommutiert (vgl. Satz 4.18):

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{Ad}(g)=D(\alpha_g)} & \mathfrak{g} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\alpha_g} & G \end{array}$$

Speziell für Matrixgruppen:

$$Be^A B^{-1} = e^{BAB^{-1}}.$$

iii) Es gilt: $\text{Ad}(\exp X) = \exp(\text{ad}(X))$, d.h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{ad}=D\text{Ad}} & \text{End}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{GL}(\mathfrak{g}) \cong \text{GL}(n, \mathbb{R}) \end{array}$$

(vgl. Satz 4.18)

Definition 4.33

Eine Derivation einer Lie-Algebra \mathfrak{g} ist eine lineare Abbildung $\psi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ mit

$$\psi([X, Y]) = [\psi(X), Y] + [X, \psi(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Wir schreiben $\text{Der}(\mathfrak{g})$ für den Vektorraum aller Derivationen von \mathfrak{g} .

Satz 4.34

Die adjungierte Darstellung $\text{ad}(X): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ist eine Derivation von \mathfrak{g} .

Beweis. Die Behauptung ist eine Umformulierung der Jacobi-Identität von \mathfrak{g} :

$$\begin{aligned} \text{ad}(X)([Y, Z]) &\stackrel{4.32}{=} [X, [Y, Z]] \stackrel{\text{Jacobi}}{\equiv} -[Y, [Z, X]] - [Z, [X, Y]] \\ &= [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]] \stackrel{4.32}{=} [\text{ad}(X)(Y), Z] + [Y, \text{ad}(X)(Z)]. \end{aligned}$$

□

Satz 4.35

Es gilt: $\text{Der}(\mathfrak{g}) = \text{Lie}(\text{Aut}(\mathfrak{g}))$.

Wir benutzen Lemma 4.24: $\iota: H \hookrightarrow G$ Lie-Untergruppe. Dann:

- i) $X \in D\iota(H) \Rightarrow \exp(tX) \in \iota(H) \subseteq G$
- ii) $\exp(tX) \in \iota(H)$ für alle t in einem Intervall $I \Rightarrow X \in D\iota(\mathfrak{h})$

Bemerkung: $X \in \mathfrak{h} \Leftrightarrow \exp(tX) \in H$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Beweis.

$$\psi \in \text{Lie}(\text{Aut}(\mathfrak{g})) \subset \text{End}(\mathfrak{g}) \stackrel{\text{Bem.}}{\iff} e^{t\psi} \in \text{Aut}(\mathfrak{g}) \quad \text{für alle } t \text{ in einem Intervall um } 0$$

$$\stackrel{\text{exp insbes. Homo}}{\iff} e^{t\psi}[X, Y] = [e^{t\psi}X, e^{t\psi}Y]$$

$$\text{Ableiten nach } t \text{ in } t = 0: \psi([X, Y]) = [\psi(X), Y] + [X, \psi(Y)]$$

$$\Rightarrow \psi \in \text{Der}(\mathfrak{g}) \Rightarrow \text{Lie}(\text{Aut}(\mathfrak{g})) \subseteq \text{Der}(\mathfrak{g})$$

Für die andere Inklusion: Sei ψ eine Derivation von \mathfrak{g} . Induktiv gilt:

$$\psi^k([X, Y]) = \sum_{a+b=k} \frac{k!}{a! \cdot b!} [\psi^a(X), \psi^b(Y)] \quad (\psi^0(X) = X)$$

$$\begin{aligned} e^{t\psi}[X, Y] &= \sum_k \frac{1}{k!} (t\psi)^k [X, Y] = \sum_k \sum_{a+b=k} \frac{1}{a!b!} [(t\psi)^a X, (t\psi)^b Y] \\ &= \sum_{a,b} \left[\frac{1}{a!} (t\psi)^a X, \frac{1}{b!} (t\psi)^b Y \right] = [e^{t\psi}(X), e^{t\psi}(Y)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e^{t\psi} \text{ ist ein Automorphismus von } \mathfrak{g} \Rightarrow \psi \in \text{Lie}(\text{Aut}(\mathfrak{g}))$$

$$\Rightarrow \text{Der}(\mathfrak{g}) \subseteq \text{Lie}(\text{Aut}(\mathfrak{g}))$$

□

Damit können wir das Diagramm oberhalb von Definition 4.33 präzisieren:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{ad}} & \text{Der}(\mathfrak{g}) \subseteq \text{End}(\mathfrak{g}) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{Aut}(\mathfrak{g}) \subseteq \text{GL}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

Wir betrachten ein paar Anwendungen der adjungierten Darstellung

Definition 4.36

Das Zentrum $Z(G) \subseteq G$ von G bzw. $Z(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$ ist definiert als:

$$Z(G) = \{g \in G \mid gh = hg \text{ für alle } h \in G\}$$

$$Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \text{ für alle } Y \in \mathfrak{g}\}$$

Bemerkung:

$$Z(G) = \ker(\alpha) \quad \text{und} \quad Z(\mathfrak{g}) = \ker(\text{ad})$$

Beispiele:

$$Z(O(n)) = \{\pm \mathbb{1}_n\} \cong \mathbb{Z}_2$$

$$Z(SU(n)) = \left\{ \text{diag} \left(e^{\frac{2\pi ik}{n}}, \dots, e^{\frac{2\pi ik}{n}} \right) \mid 1 \leq k \leq n \right\} \cong \mathbb{Z}_n$$

$$Z(\text{GL}(n, \mathbb{R})) = \{c \cdot \mathbb{1}_n \mid c \neq 0\}$$

Satz 4.37

Das Zentrum $Z(G) \subseteq G$ ist eine abgeschlossene Lie-Untergruppe, und es gilt:

$$Z(G) \subseteq \ker(\text{Ad}).$$

Für zusammenhängende Gruppen G gilt:

$$Z(G) = \ker(\text{Ad}) \quad \text{und außerdem} \quad \text{Lie}(Z(G)) = Z(\mathfrak{g}).$$

Beweis. Für $g \in Z(G)$ gilt:

$$\alpha_g = r_{g^{-1}} \circ l_g = id_G \Rightarrow \text{Ad}(g) = D(\alpha_g) = D(id_G) = id_{\mathfrak{g}} \Rightarrow g \in \ker(\text{Ad}) \Rightarrow Z(G) \subseteq \ker(\text{Ad}).$$

Sei nun G zusammenhängend und $g \in \ker(\text{Ad})$.

Da G von einer Normalenumgebung der Eins erzeugt wird (Satz 4.12), genügt es, die folgende Aussage zu zeigen, dass

$$\alpha_g(\exp(tX)) = \exp(tX) \quad \text{für alle } X \in \mathfrak{g}, t \in \mathbb{R}.$$

also $\alpha_g = id$ in $\forall g \in W(g) = l_g(W(e))$.

(Siehe Satz 4.12 für die genaue Aussage.)

Betrachte den Homomorphismus

$$\mathbb{R} \rightarrow G, \quad t \mapsto \alpha_g(\exp(tX)).$$

Folgerung 4.20: Es gibt ein $Y \in \mathfrak{g}$ mit

$$\exp(tY) = \alpha_g(\exp(tX)) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ableiten in $t = 0$:

$$Y_e = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tY) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \alpha_g(\exp(tX)) \stackrel{\text{KR}}{=} D\alpha_g(X_e) = \text{Ad}(g)(X_e) \stackrel{\substack{g \in \ker(\text{Ad}) \\ \text{Ad}(g) = \text{id}}}{=} X_e.$$

Also $X = Y$ und $\alpha_g = \text{id}$, d.h. $g \in Z(G)$. Für die Lie-Algebra von $Z(G)$ berechnen wir mit Satz 4.25:

$$\text{Lie}(Z(G)) = \text{Lie}(\ker(\text{Ad})) \stackrel{4.25}{=} \ker(D\text{Ad}) = \ker(\text{ad}) = Z(\mathfrak{g}).$$

□

Korollar 4.38

Eine zusammenhängende Lie-Gruppe ist genau dann abelsch, wenn ihre Lie-Algebra abelsch ist.

Beweis.

$$G \text{ ist abelsch} \Leftrightarrow Z(G) = G \stackrel{G \text{ zsh}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{g} = \text{Lie}(G) = \text{Lie}(Z(G)) \stackrel{4.37}{=} Z(\mathfrak{g}) \Leftrightarrow \mathfrak{g} \text{ ist abelsch}$$

Für (*) ist (\Rightarrow) aus Satz 4.37, (\Leftarrow) folgt aus Definition zusammenhängend, da $Z(G)$ offen und abgeschlossen in G liegt. □

Bemerkung:

Ist \mathfrak{g} eine Lie-Algebra mit $Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$, dann besitzt \mathfrak{g} eine injektive Darstellung

$$\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g}),$$

d.h. \mathfrak{g} ist isomorph zu einer Lie-Algebra einer Lie-Gruppe.

Das ist das *Theorem von Ado* für $Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

Satz 4.39

Sei $H \subseteq G$ eine zusammenhängende Lie-Untergruppe einer zusammenhängenden Lie-Gruppe G . Dann ist die Gruppe H genau dann Normalteiler in G , wenn $\mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$ ein Ideal in $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ ist.

Erinnerung:

Normalteiler:

$$gHg^{-1} = H \quad \text{für alle } g \in G$$

Ideal: \mathfrak{g} ist eine Algebra wobei $+$: Vektorraumaddition und $\circ = [\cdot, \cdot]$. $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ist ein *Ideal*, falls \mathfrak{h} eine Untergruppe von $(\mathfrak{g}, +)$ ist und für alle $h \in \mathfrak{h}$, $g \in \mathfrak{g}$ gilt: $[h, g] \in \mathfrak{h}$ (bzw. $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$)

Beweis. Sei $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ein Ideal von \mathfrak{g} .

Sei $Y \in \mathfrak{h}$, $X \in \mathfrak{g}$ und $g = \exp(X)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} g \exp(Y) g^{-1} &= \exp(X) \exp(Y) \exp(-X) \stackrel{\substack{\text{kommut. Diag} \\ \text{unter 4.32}}}{=} \exp(\text{Ad}(\exp(X))Y) \\ &= \exp(e^{\text{ad}(X)}Y) = \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{ad}(X)^n Y\right) \stackrel{4.32}{=} \exp(Y + [X, Y] + \frac{1}{2!}[X, [X, Y]] + \dots) \\ &= \exp(Z) \end{aligned}$$

Da alle Kommutatoren in \mathfrak{h} liegen (da \mathfrak{h} Ideal), konvergiert die Reihe gegen ein $Z \in \mathfrak{h}$ ($\exp^G(\mathfrak{h}) \subseteq H$).

$$\Rightarrow g \exp(Y) g^{-1} \in H.$$

Da H und G von Normalumgebung des neutralen Elements erzeugt werden (Satz 4.12), folgt, dass H ein Normalteiler von G ist.

Für die umgekehrte Richtung: Sei $H \subseteq G$ ein Normalteiler und $Y \in \mathfrak{h}$, $X \in \mathfrak{g}$, $g_t = \exp(tX)$. Wir zeigen $[X, Y] \in \mathfrak{h}$:

$$g_t \exp(sY) g_t^{-1} = \exp(\text{Ad}(g_t)sY) = \exp(se^{t \text{ad} X}Y).$$

Da H ein Normalteiler ist, gilt für alle $s \in \mathbb{R}$: $g_t \exp(sY) g_t^{-1} \in H$

$$\Rightarrow e^{t \text{ad} X}Y \in \mathfrak{h} \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow t \mapsto e^{t \text{ad} X}Y = Y + t[X, Y] + \dots$$

ist eine glatte Kurve in \mathfrak{h} mit Tangentialvektor $[X, Y]$ in $t = 0$. Also $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, d.h.
 $\Rightarrow \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ist ein Ideal.

□

5 Differentialformen

5.1 Der Vektorraum der k -Formen

Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum und sei

$$V^* := \text{Hom}(V, \mathbb{R})$$

der *Dualraum* von V , d.h. der Raum der linearen Abbildungen $V \rightarrow \mathbb{R}$.

Später wollen wir insbesonder $T_p M$ betrachten.

Definition 5.1:

Eine k -Linearform (kurz: k -Form) auf V ist eine multilinear, alternierende Abbildung

$$\omega: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\text{-mal}} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Die Zahl k heißt der *Grad* der k -Linearform.

Dabei ist ω alternierend genau dann, wenn eine der folgenden vier äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- i) $\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) \omega(X_1, \dots, X_k)$ für alle $\sigma \in S_k$,
- ii) $\omega(\dots, X_i, \dots, X_j, \dots) = -\omega(\dots, X_j, \dots, X_i, \dots)$ für alle $i \neq j$,
- iii) $\omega(X_1, \dots, X_k) = 0$ falls es $i \neq j$ mit $X_i = X_j$ gibt,
- iv) $\omega(X_1, \dots, X_k) = 0$ falls X_1, \dots, X_k linear abhängig sind.

Bemerkung:

Die Menge der k -Linearformen auf V bildet einen reellen Vektorraum.
Diesen bezeichnen wir mit

$$\Lambda^k V^*.$$

Konvention: $\Lambda^0 V^* := \mathbb{R}$

Für $k > \dim V$ gilt:

$$\Lambda^k V^* = \{0\} \quad (\text{Nullform, siehe Charakterisierung iv})$$

Addition und skalare Multiplikation sind definiert durch:

$$(\omega_1 + \omega_2)(X_1, \dots, X_k) := \omega_1(X_1, \dots, X_k) + \omega_2(X_1, \dots, X_k),$$

$$(\lambda \cdot \omega)(X_1, \dots, X_k) := \lambda \cdot \omega(X_1, \dots, X_k).$$

Beispiele:

- (i) 1-Linearformen: $\Lambda^1 V^* = V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$. Insbesondere gilt: $\dim \Lambda^1 V^* = n$, falls V ein n -dimensionaler Vektorraum ist.
- (ii) 2-Linearformen: $\Lambda^2 V^*$ = Menge der schief symmetrische bilineare Abbildungen.
 $\omega: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. es gilt $\omega(X, Y) = -\omega(Y, X) \quad \forall X, Y \in V$.

Lemma 5.2:

$$\Lambda^2 V^* \cong \mathfrak{so}(V) := \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid A^T = -A\}.$$

Beweis. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V .

Definiere die Identifikation durch $\Lambda^2 V^* \rightarrow \text{End}(V)$,

$$\omega \mapsto \hat{\omega} \quad \text{mit} \quad \langle \hat{\omega}(X), Y \rangle := \omega(X, Y).$$

□

Korollar 5.3:

$$\dim \Lambda^2 V^* = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

- (iii) Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum und ω eine n -Form auf V . Sei e_1, \dots, e_n eine Basis von V , und sei $v_1, \dots, v_n \in V$ als Spaltenvektoren betrachten. Dann gilt:

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_n) \cdot \omega(e_1, \dots, e_n),$$

$$\Rightarrow \Lambda^n V^* = \mathbb{R} \cdot \det \cong \mathbb{R}.$$

Definition 5.4:

Die äußere Algebra von V ist definiert als $\Lambda(V^*) := \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k V^*$, d.h. als Menge der Formen von beliebigem Grad auf V .

Die Vektorraumstruktur kommt von den einzelnen Summanden $\Lambda^k V^*$, die Produktstruktur ist definiert durch das Dachprodukt (Wedge-Produkt)

$$\wedge: \Lambda^k V^* \times \Lambda^\ell V^* \longrightarrow \Lambda^{k+\ell} V^*, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta.$$

Dabei ist \wedge definiert durch:

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1, \dots, X_{k+\ell}) = \frac{1}{k! \ell!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \text{sgn}(\sigma) \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \cdot \beta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+\ell)}).$$

Bemerkung:

Der Raum der $(0, k)$ -Tensoren auf V ist definiert als der Vektorraum der k -fach multilinear Abbildungen:

$$\mathcal{T}^{(0,k)}(V^*) := \left\{ \lambda: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R} \mid \lambda \text{ multilinear} \right\}.$$

Das **Tensorprodukt** auf der Tensoralgebra $\mathcal{T}(V^*) := \bigoplus_k \mathcal{T}^{(0,k)}(V^*)$ ist definiert durch:

$$(\lambda \otimes \mu)(X_1, \dots, X_{k+\ell}) := \lambda(X_1, \dots, X_k) \cdot \mu(X_{k+1}, \dots, X_{k+\ell}).$$

Das **Wedge-Produkt** der äußeren Algebra ergibt sich als Projektion des Tensorprodukts auf den Unterraum

$$\Lambda^k V^* \subseteq \mathcal{T}^{(0,k)}(V^*).$$

Man definiert die Abbildung

$$\text{Alt}: \mathcal{T}^{(0,k)}(V^*) \rightarrow \Lambda^k V^* \quad \text{Alt}(\lambda)(X_1, \dots, X_k) := \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \lambda(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}).$$

Für eine Bilinearform $\lambda \in \mathcal{T}^{(0,2)}(V^*)$ gilt also:

$$\text{Alt}(\lambda)(X, Y) = \lambda(X, Y) - \lambda(Y, X).$$

In dieser Notation kann man für das Wedge-Produkt von $\alpha \in \Lambda^k V^*$, $\beta \in \Lambda^\ell V^*$ auch schreiben als:

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{k! \ell!} \text{Alt}(\alpha \otimes \beta).$$

Beispiele:

(i) Seien α, β 1-Formen auf V , dann gilt:

$$(\alpha \wedge \beta)(X, Y) = \alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X).$$

(ii) Sei α eine 1-Form und β eine 2-Form auf V , dann gilt:

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(X, Y, Z) &= \alpha(X)\beta(Y, Z) - \alpha(Y)\beta(X, Z) + \alpha(Z)\beta(X, Y) \\ &= \alpha(X)\beta(Y, Z) + \alpha(Y)\beta(Z, X) + \alpha(Z)\beta(X, Y). \end{aligned}$$

Allgemein: Sei α eine 1-Form, β eine k -Form, dann gilt:

$$(\alpha \wedge \beta)(X_0, \dots, X_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \alpha(X_i) \cdot \beta(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k),$$

wobei \widehat{X}_i bedeutet, dass der entsprechende Eintrag ausgelassen wird.

Lemma 5.5:

Das Wedge-Produkt von Formen hat folgende Eigenschaften:

- (i) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha$ für alle $\alpha \in \Lambda^k V^*$, $\beta \in \Lambda^\ell V^*$
- (ii) $\omega \wedge \omega = 0$ für alle ω mit ungeradem Grad
- (iii) $(\lambda\alpha + \mu\beta) \wedge \gamma = \lambda(\alpha \wedge \gamma) + \mu(\beta \wedge \gamma)$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda(V^*)$
- (iv) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda(V^*)$

5.2 Das Verhalten unter Abbildungen

Sei $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen V und W .
Wir definieren

$$f^* := \Lambda^k(f): \Lambda^k W^* \longrightarrow \Lambda^k V^*, \quad \omega \mapsto f^*\omega \quad (\text{Pullback}),$$

wobei

$$f^*\omega(v_1, \dots, v_k) := \omega(f(v_1), \dots, f(v_k)),$$

für $v_1, \dots, v_k \in V$ und $\omega \in \Lambda^k V^*$.

Die von f induzierte Abbildung f^* heißt das *Zurückziehen* von Formen.

Die Zuordnung $V \mapsto \Lambda^k V^*$, $f \mapsto f^*$ ist ein *kontravarianter Funktor* auf der Kategorie der Vektorräume.

Lemma 5.6:

Das Zurückziehen hat folgende Eigenschaften:

- (i) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$
- (ii) $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$
- (iii) $\det(f) = f^* : \Lambda^n V^* \rightarrow \Lambda^n V^*$, falls $\dim V = n$

5.3 Eine Basis im Raum der Formen

Sei e_1, \dots, e_n eine Basis in V , und sei e^1, \dots, e^n die zugehörige duale Basis von V^* , d.h.

$$e^i(e_j) = \delta_j^i.$$

Mit anderen Worten: Für $v = \sum_{j=1}^n v^j e_j$ gilt:

$$e^i(v) = v^i.$$

Dann ist

$$e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n,$$

eine Basis von $\Lambda^k V^*$. Das heißt: Für jede k -Form $\omega \in \Lambda^k V^*$ existieren eindeutig bestimmte reelle Zahlen $\omega_{i_1 \dots i_k}$ mit

$$\omega = \sum \omega_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}.$$

Insbesondere gilt:

$$\dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}, \quad \text{und} \quad \Lambda^k V^* \cong \Lambda^{n-k} V^*.$$

Lemma 5.7:

Seien $\omega_1, \dots, \omega_k \in V^*$ und $v_1, \dots, v_k \in V$, dann gilt:

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k)(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(v_1) & \cdots & \omega_k(v_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1(v_k) & \cdots & \omega_k(v_k) \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt:

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k = 0 \quad \text{falls die Linearformen } \omega_1, \dots, \omega_k \in V^* \text{ linear abhängig sind.}$$

Beispiel:

Seien ω_1, ω_2 zwei 1-Formen auf V und $X, Y \in V$. Dann gilt:

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(X, Y) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(X) & \omega_2(X) \\ \omega_1(Y) & \omega_2(Y) \end{pmatrix} = \omega_1(X)\omega_2(Y) - \omega_1(Y)\omega_2(X).$$

5.4 Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten

Wir wollen die Objekte aus der letzten Vorlesung punktweise auf Mannigfaltigkeiten übertragen.

Definition 5.8: Sei M eine Mannigfaltigkeit. Das Bündel der k -Formen auf M ist definiert als

$$\Lambda^k(T^*M) := \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^k(T_p^*M)$$

dabei ist $T_p^*M := (T_pM)^*$ und \bigsqcup bezeichnet die disjunkte Vereinigung.
Die kanonische Projektion ist definiert als die Fußpunktabbildung.

$$\pi : \Lambda^k(T^*M) \rightarrow M, \quad \pi(\omega) = p \quad \text{falls } \omega \in \Lambda^k(T_p^*M)$$

Bemerkung: Die Menge $\Lambda^k(T^*M)$ trägt die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit (analog zu TM).

Sei (U, φ) ein Karte um $p \in M$. Dann definieren wir ($\dim(M) = n$)

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \Lambda^k \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \omega \mapsto (\varphi(\pi(U)), (D\varphi^{-1})^* \omega)$$

Mit den Karten $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ wird $\Lambda^k(T^*M)$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $n + \binom{n}{k}$.

Mit der kanonischen Projektion $\pi : \Lambda^k(T^*M) \rightarrow M$ erhalten wir ein reelles Vektorbündel vom Rang $\binom{n}{k}$ über M .

Spezialfall: $k = 1$: $\Lambda^1 T^*M = T^*M$ heißt das Kotangentialbündel von M .

Definition 5.9: Eine Differentialform vom Grad k auf M (kurz: k -Form) ist eine differenzierbare Abbildung

$$\omega : M \longrightarrow \Lambda^k(T^*M) \quad \text{mit} \quad \pi \circ \omega = \text{id}_M,$$

d.h. ω ist ein Schnitt vom Vektorbündel $\Lambda^k(T^*M)$.

Den unendlich-dimensionalen Vektorraum der k -Formen auf M bezeichnen wir mit

$$\Omega^k(M) := \Gamma(\Lambda^k T^*M).$$

Insbesondere gilt für den Raum der 0-Form $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$.

Beispiel: Jede Funktion $f \in C^\infty(M)$ definiert eine Differentialform vom Grad 1, nämlich das Differential, also die 1-Form

$$Df \in \Omega^1(M) \quad Df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

Der Raum $\Omega^*(M)$ aller Differentialformen auf M ist eine reelle Algebra (vgl. äußere Algebra Def. 5.4). Wir definieren für Differentialformen $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^*(M)$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ in $p \in M$:

$$(\omega_1 + \omega_2)(p) := \omega_1(p) + \omega_2(p)$$

$$(\lambda \omega)(p) := \lambda \cdot \omega(p)$$

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(p) := \omega_1(p) \wedge \omega_2(p)$$

Der Raum $\Omega^*(M)$ ist auch ein Modul über dem Ring der Funktionen $C^\infty(M)$, d.h. für eine glatte Funktion f und eine Differentialform ω definieren wir das Produkt $f \cdot \omega := f \wedge \omega$, also

$$(f \cdot \omega)(p) = f(p) \cdot \omega(p)$$

Jede Differentialform $\hat{\omega} \in \Omega^k(M)$ (nimmt einen Punkt p , gibt eine k -Form aus, die Tangentialvektoren schnupft.) induziert eine $C^\infty(M)$ -multilineare, alternierende Abbildung

$$\omega : \underbrace{\Gamma(TM) \times \cdots \times \Gamma(TM)}_{k\text{-mal}} \longrightarrow C^\infty(M),$$

Für Vektorfelder X_1, \dots, X_k auf M definieren wir die Funktion durch

$$\underbrace{\omega(X_1, \dots, X_k)}_{\in C^\infty(M)}(p) := \hat{\omega}(p)(X_1(p), \dots, X_k(p)).$$

Die Umkehrung ist ebenfalls korrekt, wir erhalten eine äquivalente Definition von Differentialformen.

Lemma 5.10: Jede $C^\infty(M)$ -multilineare, alternierende Abbildung

$$\omega : \Gamma(TM) \times \cdots \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M)$$

definiert eine k -Form $\hat{\omega}$ auf M .

Beweis. Seien $X_1, \dots, X_k \in T_p M$ mit Fortsetzungen $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k$ zu lokal um p definierten Vektorfeldern. Wir definieren die k -Form $\hat{\omega}$ durch

$$\hat{\omega}(p)(X_1, \dots, X_k) := \omega(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k)(p).$$

Zu zeigen: $\omega(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k)(p)$ hängt nur von den Werten der Vektorfelder \tilde{X}_i im Punkt p ab, also von $X_1, \dots, X_k \in T_p M$, unabhängig von der Fortsetzung.

Wir betrachten nur den Fall $k = 1$.

Wir wollen also zeigen: $\omega(X)(p) = 0$, falls X ein Vektorfeld mit $X(p) = 0$ ist.

Warum reicht das: Seien X, X' Vektorfelder mit $X(p) = X'(p)$. Dann ist $Y := X - X'$ ein Vektorfeld mit $Y(p) = 0$. Nun gilt für eine 1-Form ω :

$$0 = \omega(Y)(p) = (\omega(X) - \omega(X'))(p) \Rightarrow \omega(X)(p) = \omega(X')(p)$$

Sei (U, φ) eine Karte um p , schreiben X auf U als

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

für glatte Funktionen $a_i \in C^\infty(U)$ mit $a_i(p) = 0, \forall i = 1, \dots, n$.

Wir wählen nun eine Abschneidefunktion $\chi \in C^\infty(M)$ mit $\text{supp}(\chi) \subset U$ und $\chi \equiv 1$ auf einer kleinen Umgebung von p . Insbesondere $\chi(p) = 1$. Es folgt

$$\chi^2 X = \sum_{i=1}^n \chi^2 a_i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^n \chi a_i \cdot \chi \frac{\partial}{\partial x^i}$$

χa_i ist für $1 \leq i \leq n$ eine auf M definierte glatte Funktion.

$\chi \frac{\partial}{\partial x_i}$ ist für $1 \leq i \leq n$ eine auf M definiertes Vektorfeld auf M .

Wenden wir ω auf die Gleichung an:

$$\omega(X)(p) \stackrel{\chi(p)=1}{=} \chi^2(p) \omega(X)(p) = \omega(\chi^2 X)(p) = \sum_{i=1}^n \chi \underbrace{a_i(p)}_{=0} \cdot \omega\left(\chi \frac{\partial}{\partial x^i}\right)(p) = 0$$

□

5.5 Differentialformen in lokalen Koordinaten

Sei (U, φ) eine Karte um $p \in M$. Dann sind für jeden Punkt $p \in M$ die Vektoren

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \quad \forall i = 1, \dots, n$$

eine Basis von $T_p M$.

Die dazu duale Basis bezeichnen wir wie gewohnt mit $dx_i(p) = (dx_i)_p$. Über U gilt also

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \in \Gamma(TU), \quad dx_i \in \Omega^1(U) \quad \text{mit} \quad dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \delta_{ij}.$$

Damit schreibt sich jede Differentialform $\omega \in \Omega^k(M)$ lokal über U als

$$\omega|_U = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

wobei $\omega_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(U)$ glatt ist, gegeben durch

$$\omega_{i_1 \dots i_k} = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\right)$$

5.6 Das Zurückziehen von Differentialformen

Sei $f : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung und sei $\omega \in \Omega^k(N)$. Dann erhalten wir mittels Zurückziehen eine k -Form $f^*\omega$ auf M , definiert durch

$$(f^*\omega)_p(X_1, \dots, X_k) := \omega_{f(p)}(Df_p(X_1), \dots, Df_p(X_k))$$

für Tangentialvektoren $X_i \in T_p M$, d.h. $(f^*\omega)_p = (Df)_p^* \omega_{f(p)}$ (vgl. 5.2).

Die Eigenschaften für das Zurückziehen mittels linearer Abbildungen von (linear-)Formen auf Vektorräumen übertragen sich auf (Differential-)Formen. Insbesondere:

Lemma 5.11: Seien α, β Differentialformen auf N und seien $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow P$ zwei differenzierbare Abbildungen, dann gilt:

- i) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$
- ii) $f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)$

Bemerkung: Sei $M \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit und $\iota : M \hookrightarrow N$ die Inklusionsabbildung. Dann ist die Einschränkung einer Differentialform $\omega \in \Omega^*(N)$ auf M genau das Zurückziehen von ω durch ι ,
d.h. es gilt

$$\omega|_M = \iota^* \omega.$$

5.7 Das Differential

Jede 0-Form f (sprich: glatte Funktion $f \in C^\infty(M)$) definiert eine 1-Form df , die sich in lokalen Koordinaten schreibt als

$$Df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Behauptung: Das Differential von Funktionen lässt sich eindeutig zu einer Folge von linearen Abbildungen fortsetzen:

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \dots$$

+ ein paar Bedingungen (damit d eindeutig ist). Genauer gilt:

Satz 5.12. Auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit M gibt es genau eine \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$d : \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(M)$$

vom Grad 1 (d.h. $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$), so dass gilt:

- i) $d|_{C^\infty(M)=\Omega^0 M}$, stimmt mit dem Differential von Funktionen überein. (Differentialbedingung)
- ii) $d \circ d = 0$. (Komplexeigenschaft)
- iii) Für $\omega \in \Omega^k(M)$, $\sigma \in \Omega^\ell(M)$ gilt: (Leibniz-Regel)

$$d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge d\sigma.$$

$d\omega$ heißt die äußere Ableitung der Form ω .

Bemerkung: Die Leibniz-Regel garantiert, dass $d \neq 0$, denn für $f \in \Omega^0(M)$, $\omega \in \Omega^2(M)$ gilt:

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega = \underbrace{Df \wedge \omega}_{\text{i.A. } \neq 0} + f d\omega$$

Beweis.

Schritt I: Definiere d lokal.

Sei (U, φ) eine Karte von M . Eine k -Form ω auf U hat eine eindeutige Darstellung

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \quad (5.5)$$

Gibt es einen Differentialoperator, der den Bedingungen des Satzes genügt, so hat er folgende Darstellung:

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Denn: $d(dx^i) = d(d\varphi_i) = (d \circ d)(\varphi_i) = 0$ (Leibniz-Regel gilt für die 1-Form)
 $d\omega$ hat eine eindeutige Darstellung, damit folgt die *Eindeutigkeit*.

Um die *Existenz* zu zeigen, legen wir obige Darstellung als Definition für d zugrunde. Damit ist d \mathbb{R} -linear und stimmt mit dem Differential von Funktionen überein.

Leibniz / Produktregel: o.E. sei

$$\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad \sigma = g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}$$

Dann gilt:

$$d(\omega \wedge \sigma) = d(fg dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell})$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{d(fg)}_{(df)g+f(dg)} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell} \\
&= (df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) \wedge (g \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell}) + (-1)^k (f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) \wedge (dg \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell}) \\
&= d\omega \wedge \sigma + \underbrace{(-1)^k}_{\text{k-mal Vertauschungen von } dg} \omega \wedge d\sigma
\end{aligned}$$

Komplexeigenschaft: Zu zeigen: $d^2 = d \circ d = 0$. Sei

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

Dann gilt:

$$d(d\omega) = d \left(\sum_{i_1 < \dots < i_k} d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \right)$$

Wegen der Leibniz-Regel (zweimal Leibniz-Regel anwenden auf $f \wedge \omega$) reicht es also zu zeigen, dass für alle $f \in C^\infty(M)$

$$d(df) = 0$$

Es gilt:

$$df = Df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \stackrel{\text{Def. } d \text{ auf 1-Form}}{\Rightarrow} d(df) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = 0$$

Da der Hessian von f symmetrisch ist (Satz von Schwarz) und das äußere Produkt antisymmetrisch, verschwindet die Summe auf der rechten Seite.

Schritt II: Allgemeiner Fall (lokal zu global)

Sei ω eine k -Form auf M , (U, φ) eine Karte von M , $\iota : U \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung. Dann ist die Einschränkung von ω auf U

$$\omega|_U = \iota^* \omega.$$

Ist $p \in U$, so definieren wir:

$$(d\omega)_p := (d_U \omega|_U)_p,$$

wobei d_U das in Schritt I für (U, φ) definierte äußere Differential ist. Da dies eindeutig ist, folgt für jede weitere Karte (V, φ')

Auf dem Schnitt $U \cap V$ zweier Karten gilt lokal:

$$\begin{aligned}
d_U \omega|_{T(U \cap V)} &\stackrel{\text{lokal Def.}}{=} \sum d\omega_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \Big|_{T(U \cap V)} \stackrel{\text{lokale Eindeutigkeit}}{=} d_{U \cap V} \omega|_{T(U \cap V)} \\
&\stackrel{\text{lokal def.}}{=} \sum d\tilde{\omega}_{i_1, \dots, i_k} \wedge dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k} \Big|_{T(U \cap V)} \stackrel{\text{lokal def.}}{=} d_V \omega|_{T(U \cap V)}
\end{aligned}$$

Dabei sind $\{x_i\}$ lokale Koordinaten auf U und $\{y_i\}$ auf V , und $\omega = \sum \omega_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ sowie $\tilde{\omega} = \sum \tilde{\omega}_{i_1, \dots, i_k} dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$ jeweils die lokale Darstellung von ω in den Karten.

Damit stimmen die lokal definierten Ausdrücke überein, und wir erhalten einen wohldefinierten

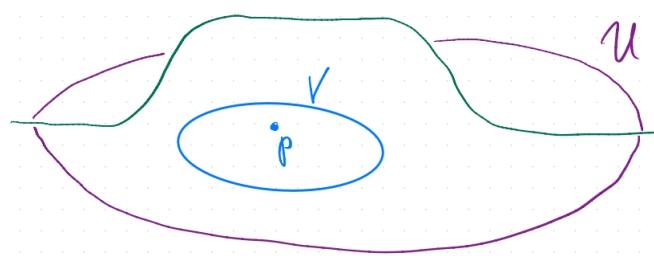
$$\text{Differentialoperator } d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M),$$

der den Bedingungen des Satzes genügt.

Zur Eindeutigkeit: Sei d' ein weiterer Operator wie im Satz. Sei (U, φ) eine Karte, $p \in U$. Es gilt lokal:

$$\omega|_{TU} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

Weiters sei $\chi \in C^\infty(M, [0, 1])$ eine Abschneidefunktion.



Setze durch Null auf ganz M fort:

$$\tilde{\omega}_{i_1, \dots, i_k} = \chi \cdot \omega_{i_1, \dots, i_k} \quad \tilde{x}_{i_j} := \chi \cdot x_{i_j} = \chi \cdot \text{Pr}_{i_j}(\varphi)$$

Dies definiert eine auf ganz M erklärte k -Form:

$$\tilde{\omega} := \sum_{i_1 < \dots < i_k} \tilde{\omega}_{i_1 \dots i_k} d\tilde{x}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\tilde{x}_{i_k}$$

Aus den Eigenschaften eines Differentialoperators wie im Satz beschrieben folgt:

$$d'\tilde{\omega} = \sum d\tilde{\omega}_{i_1 \dots i_k} \wedge d\tilde{x}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\tilde{x}_{i_k}$$

Da $d'|_{C^0(M)} = d|_{C^0(M)} = D$ und $\tilde{\omega}_{i_1, \dots, i_k}$ glatte Abbildungskoeffiziente sind. Außerdem gilt $d(dx^i) = d(d\varphi_i) = (d \circ d)(\varphi_i) = 0$.

Mit Schritt I und $\omega = \tilde{\omega}$ auf einer Umgebung $V \ni p$ (lokale Eindeutigkeit), folgt:

$$(d'\tilde{\omega})_p = (d_U \tilde{\omega})_p = (d_U \omega)_p$$

Wir wollen uns nun

$$(d'\tilde{\omega})_p = (d'\omega)_p$$

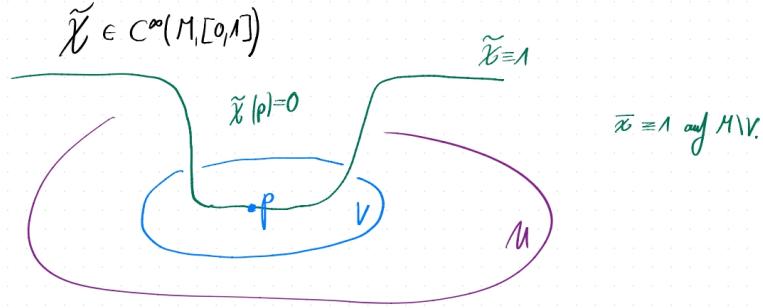
überlegen, dass dies dann

$$(d'\omega)_p = (d_U \omega)_p = (d\omega)_p$$

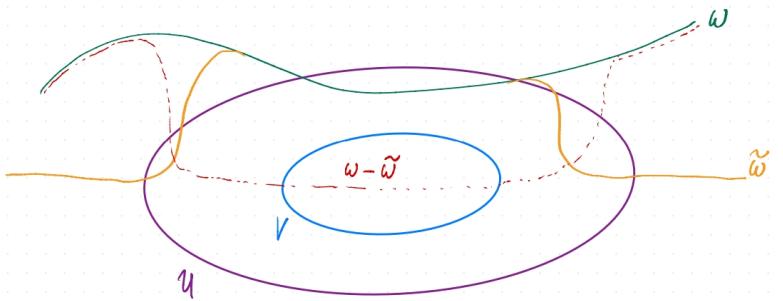
impliziert, also $d' = d$.

Abschneidefunktion: (Zum Beweis $(d'\tilde{\omega})_p = (d'\omega)_p$)

$$\tilde{\chi} \in C^\infty(M, [0, 1])$$



Da $\tilde{\omega}$ und ω auf V übereinstimmen, folgt: $\tilde{\chi}(\omega - \tilde{\omega}) = \omega - \tilde{\omega}$



$$\Rightarrow (d'\tilde{\omega})_p - (d'\omega)_p = (D\tilde{\chi})_p \wedge (\underbrace{\tilde{\omega} - \omega}_p + \underbrace{\tilde{\chi}(p)}_{=0} \cdot (d'(\tilde{\omega} - \omega))_p) = 0$$

□

Korollar 5.13 (Natürlichkeit):

Sei $f : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung.

Dann gilt für alle Differentialformen ω auf N :

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$$

Erinnerung: Das Pull-Back ist definiert als $(f^*\omega)_p(X_1, \dots, X_k) = \omega_{f(p)}(Df_p(X_1), \dots, Df_p(X_k))$ wobei $\omega \in \Omega^k(N)$ $f^*\omega \in \Omega^k(M)$

Beweis. Sei $\omega = g$, wobei $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion (0-Form) ist.
Dann ist die Behauptung eine Umformulierung der Kettenregel:

$$[f^*(dg)]_p(X) \stackrel{\text{Definiton.}}{=} (dg)_{f(p)}(Df_p(X)) \stackrel{0\text{-Form}}{=} (Dg)_{f(p)}Df_p(X)$$

$$\stackrel{\text{KR}}{=} D(g \circ f)_p(X) = d(g \circ f)_p(X) \stackrel{f^*g=g\circ f}{=} d(f^*g)_p(X)$$

Sei ω eine k -Form und (U, φ) eine Karte. Mit der Inklusionsabbildung $\iota : U \hookrightarrow N$ erhalten wir mit dem Beweis von Satz 5.12:

$$\iota^*(d\omega) = (d\omega)|_{TU} = d(\omega|_{TU}) = d(\iota^*\omega)$$

Also können wir $N = U$ und $f = f|_{f^{-1}(U)}$ annehmen. Damit:

$$\omega = \sum \omega_{i_1 \dots i_k} dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}$$

$$d\omega = \sum d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}$$

Anwenden von f^* gibt und mit Relation $f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)$ gilt:

$$f^*\omega = \sum f^*(\omega_{i_1 \dots i_k}) f^*(dy_{i_1}) \wedge \dots \wedge f^*(dy_{i_k})$$

$$f^*d\omega = \sum f^*(d\omega_{i_1 \dots i_k}) f^*(dy_{i_1}) \wedge \dots \wedge f^*(dy_{i_k})$$

Für die Koordinatenfunktionen gilt:

$$f^*(dy^i) \stackrel{\text{Schritt 1}}{=} d(f^*y_j) \Rightarrow d(f^*dy_i) \stackrel{d \circ d=0}{=} 0$$

Aus der Produktregel folgt schließlich:

$$d(f^*\omega) = \sum \underbrace{d(f^*\omega_{i_1 \dots i_k})}_{1. \text{ Schritt } f^*d\omega_{i_1, \dots, i_k}} \wedge f^*(dy_{i_1}) \wedge \dots \wedge f^*(dy_{i_k}) = f^*(d\omega)$$

□

Satz 5.14

a) Sei ω eine 1-Form und X, Y beliebige Vektorfelder, dann gilt:

$$d\omega(X, Y) = \mathcal{L}_X(\omega(Y)) - \mathcal{L}_Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$$

b) Sei ω eine k -Form und seien X_1, \dots, X_{k+1} beliebige Vektorfelder, dann gilt:

$$d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \mathcal{L}_{X_i} \left(\omega(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_{k+1}) \right)$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_{k+1})$$

Dabei bedeutet $\widehat{X_i}$, dass dieser Vektor ausgelassen wird.

Beweis. Übung.

□

5.8 Lie-Ableitung von Differentialformen

Sei X ein Vektorfeld mit lokalem Fluss φ_t , d.h. $\varphi_t : U \subset M \rightarrow M$, definiert durch:

$$\varphi_t(p) = \gamma_p(t), \quad \varphi_0(p) = p, \quad \dot{\varphi}_t(p) = X_{\varphi_t(p)}$$

(Integralkurve von X durch p)

Erinnerung: Die Lie-Ableitung einer Funktion $f \in C^\infty(M)$ ist gegeben durch:

$$\mathcal{L}_X(f)_p = Df(X_p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} ((\varphi_t^* f)(p)) \stackrel{\varphi_t^* f = f \circ \varphi_t}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f(\varphi_t(p)))$$

Die Lie-Ableitung eines Vektorfeldes $Y \in \Gamma(TM)$ ist gegeben durch:

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = [X, Y]_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} ((\varphi_t^* Y)_p) = D\varphi_{-t} Y_{\varphi_t(p)}$$

Definition 5.15 Die Lie-Ableitung einer Differentialform $\omega \in \Omega^k(M)$ nach einem Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ ist definiert durch:

$$\mathcal{L}_X \omega := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi_t^* \omega)$$

wobei

$$(\varphi_t^* \omega)_p(X_1, \dots, X_k) = \omega_{\varphi_t(p)}((D\varphi_t)_p(X_1), \dots, (D\varphi_t)_p(X_k))$$

Lemma 5.16 Die Lie-Ableitung von Formen hat folgende Eigenschaften:

i) Sei $\omega \in \Omega^1(M)$ und $X, Y \in \Gamma(TM)$, dann gilt:

$$(\mathcal{L}_X \omega)(Y) = \mathcal{L}_X(\omega(Y)) - \omega(\mathcal{L}_X Y) \quad \mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

ii) Sei $\omega \in \Omega^k(M)$ und $X, X_1, \dots, X_k \in \Gamma(TM)$, dann gilt:

$$(\mathcal{L}_X \omega)(X_1, \dots, X_k) = \mathcal{L}_X(\omega(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{i=1}^k \omega(X_1, \dots, \mathcal{L}_X X_i, \dots, X_k)$$

iii) $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X \beta)$ d.h. \mathcal{L}_X ist eine Derivation.

iv) $\mathcal{L}_X(d\omega) = d(\mathcal{L}_X \omega)$

Beweis. ad i)

$$\mathcal{L}_X(\underbrace{\omega(Y)}_{\text{eine Fkt}})(p) \stackrel{\text{Lie-Ableitung Fkt}}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi_t^*(\omega(Y))(p) \stackrel{\text{Pull-Back Differentialform}}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \omega_{\varphi_t(p)}((D\varphi_t)_p(Y_p))$$

$$\stackrel{\text{Integralkurve}}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \omega_{\varphi_t(p)}(Y_{\varphi_t(p)}) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \omega_{\varphi_t(p)} \left(\underbrace{D\varphi_t \circ D\varphi_{-t}}_{id}(Y_{\varphi_t(p)}) \right)$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\text{Def. Pullback VF}}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \omega_{\varphi_t(p)} [D\varphi_t(\varphi_t^* Y)_p] \stackrel{\substack{\text{Pullback} \\ \text{Differentialform}}}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi_t^* \omega)_p ((\varphi_t^* Y)_p) \\
& \stackrel{\substack{\text{Produktregel} \\ (\varphi_0^* \omega)_p = \omega_p, (\varphi_0^* Y)_p = Y_p}}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi_t^* \omega)_p (Y_p) + \underbrace{\omega_p \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi_t^* Y)_p \right)}_{= \mathcal{L}_X Y_p = [X, Y]_p} = (\mathcal{L}_X \omega)_p (Y_p) + \omega_p ([X, Y]_p)
\end{aligned}$$

ad ii) Analog zu Teil i).

ad iii)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi_t^*(\alpha \wedge \beta)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi_t^* \alpha) \wedge (\varphi_t^* \beta) \\
&\stackrel{\text{Produktregel}}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi_t^*(\alpha)) \wedge \beta + \alpha \wedge \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi_t^* \beta) \right) \\
&= (\mathcal{L}_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X \beta)
\end{aligned}$$

ad iv)

$$\mathcal{L}_X(d\omega) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi_t^*(d\omega) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d(\varphi_t^*\omega) \stackrel{\text{Diff linear}}{=} d \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi_t^*\omega \right) = d(\mathcal{L}_X \omega)$$

□

Definiton. 5.17 Sei $\omega \in \Omega^k(M)$, $X \in \Gamma(TM)$, dann ist die *Kontraktion* (oder das *innere Produkt*) von ω mit X folgendermaßen definiert:

$$(\iota_X \omega)(X_1, \dots, X_{k-1}) := \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1})$$

Wir schreiben auch $X \lrcorner \omega$ für $\iota_X \omega$.

D.h., wir haben eine Abbildung

$$\iota_X : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$$

Bemerkung:

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Dann definiert das Skalarprodukt einen Isomorphismus $V \rightarrow V^*$, $v \mapsto v^*$, definiert durch $v^*(u) := \langle v, u \rangle$.

Für jeden Vektor $v \in V$ ist dann

$$\iota_v : \Lambda^k V^* \rightarrow \Lambda^{k-1} V^*,$$

die zum Dachprodukt mit v , also zu $\beta \mapsto v^* \wedge \beta$ adjugierte Abbildung, d.h.:

$$\langle \iota_v \alpha, \beta \rangle_{\Lambda^{k-1} V^*} = \langle \alpha, v^* \wedge \beta \rangle_{\Lambda^k V^*}, \quad \text{für } \alpha \in \Lambda^k V^*, \beta \in \Lambda^{k-1} V^*.$$

Dabei ist das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\Lambda^k V$ durch die Wahl der Orthonormalbasis festgelegt:

$$e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$$

wobei $\{e^i\}$ eine fixierte Orthonormalbasis von V ist.

Für die Vektoren e_i^* der dualen Basis schreiben wir auch e^i .

Lemma 5.18: Das innere Produkt ι_X hat folgende Eigenschaften:

- i) $\iota_X(f\omega) = f(\iota_X\omega)$ für alle $f \in C^\infty(M)$
- ii) $\iota_X(\alpha \wedge \beta) = (\iota_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \iota_X\beta$ für $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^*(M)$
- iii) $\iota_X(Df) = Df(X)$ für alle $f \in C^\infty(M)$
- iv) $\iota_X^2 = 0$
- v) $\iota_X f = 0 \quad \forall f \in C^\infty(M)$

Satz 5.19 (Cartans magische Formel)

Sei $\omega \in \Omega^*(M)$ und $X \in \Gamma(TM)$. Dann gilt:

$$\mathcal{L}_X\omega = \iota_X d\omega + d\iota_X\omega$$

Beweis. 1. Fall: Gilt für 0-Formen. Sei $f \in C^\infty(M)$, dann ist

$$\mathcal{L}_X f = Df(X) = df(X), \quad \text{und} \quad \iota_X f = 0$$

Somit gilt:

$$\iota_X df + d(\underbrace{\iota_X f}_{=0}) = \iota_X df \stackrel{5.18 \text{ iii)}}{=} df(X) = \mathcal{L}_X f$$

2. Fall: Gilt auch für 1-Formen. Sei $\omega \in \Omega^1(M)$, dann ist:

$$\begin{aligned} (\iota_X d\omega + d\iota_X\omega)(Y) &\stackrel{\text{Def. } \iota_X}{=} (d\omega)(X, Y) + d(\omega(X))Y \\ &\stackrel{5.14 \text{ i)}}{=} \mathcal{L}_X(\omega(Y)) - \mathcal{L}_Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) + \mathcal{L}_Y(\omega(X)) \\ &= \mathcal{L}_X(\omega(Y)) - \omega([X, Y]) \stackrel{5.16 \text{ i)}}{=} (\mathcal{L}_X\omega)(Y) \end{aligned}$$

Sei nun $P_X(\omega) := \iota_X d\omega + d\iota_X\omega$. Wir zeigen, dass P_X ein Derivation ist, d.h.

$$P_X(\alpha \wedge \beta) = P_X(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge P_X(\beta)$$

für $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^*(M)$.

Da $P_X = \mathcal{L}_X$ auf 0- und 1-Formen, folgt daraus die Behauptung durch vollständige Induktion.

Sei also $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^*(M)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
P_X(\alpha \wedge \beta) &= \iota_X d(\alpha \wedge \beta) + d\iota_X(\alpha \wedge \beta) \\
&= \iota_X(d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta) + d(\iota_X \alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \iota_X \beta) \\
&= (\iota_X d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{k+1} d\alpha \wedge \iota_X \beta + (-1)^k \iota_X \alpha \wedge d\beta + (-1)^k (-1)^k \alpha \wedge \iota_X d\beta \\
&\quad + (d\iota_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^{k-1} \iota_X \alpha \wedge \beta + (-1)^k d\alpha \wedge \iota_X \beta + (-1)^k (-1)^k \alpha \wedge d\iota_X \beta \\
&= (\iota_X d\alpha + d\iota_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\iota_X d\beta + d\iota_X \beta) \\
&= P_X(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge P_X(\beta)
\end{aligned}$$

□

Für eine k -Form ω haben wir nach obigem Satz:

$$d\omega(X, X_1, \dots, X_k) = d(\iota_X(X_1, \dots, X_k)) = (\mathcal{L}_X \omega)(X_1, \dots, X_k) - \iota_X(d\omega(X_1, \dots, X_k))$$

Iteration dieses Arguments liefert einen weiteren Beweis für die Formel (5.14 b):

$$\begin{aligned}
d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \mathcal{L}_{X_i} \left(\omega(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_{k+1}) \right) \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_{k+1})
\end{aligned}$$

wobei X_1, \dots, X_{k+1} Vektorfelder auf M sind und $\widehat{X_i}$ bedeutet, dass der entsprechende Eintrag ausgelassen wird.

Beispiele:

i) Sei $\omega \in \Omega^1(M)$, so ist

$$d\omega(X, Y) = \mathcal{L}_X(\omega(Y)) - \mathcal{L}_Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$$

ii) Sei $\omega \in \Omega^2(M)$, so ist

$$d\omega(X, Y, Z) = \mathcal{L}_X(\omega(Y, Z)) - \mathcal{L}_Y(\omega(X, Z)) + \mathcal{L}_Z(\omega(X, Y)) - \omega([X, Y], Z)$$

$$+ \omega([X, Z], Y) - \omega([Y, Z], X) = \sum_{\sigma_{XYZ}} (\mathcal{L}_X(\omega(Y, Z)) - \omega([X, Y], Z))$$

wobei $\sum_{\sigma_{XYZ}}$ die zyklische Summe über X, Y, Z bezeichnet.

Ein kurzer Ausblick

- Differentialformen haben Informationen über die Topologie der Mannigfaltigkeit.

\rightsquigarrow De-Rham-Kohomologie $H_{\text{dR}}^*(M)$

Es gilt $H_{\text{dR}}^*(M) \cong H_{\text{sing}}^*(M)$ *singuläre Kohomologie* (für kompakte M)

- Auf orientierbaren (nächste Woche) Mannigfaltigkeiten M lässt sich mit $\dim(M)$ -Formen ein Integral definieren:

$$\omega \in \Omega^{\dim(M)}(M): \quad \int_M \omega$$

Auf Mannigfaltigkeiten mit Rand gilt der Satz von Stokes:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \quad \omega \in \Omega^{\dim(M)-1}(M)$$

$$\text{Insbesondere} \quad \int_M d\omega = 0 \quad \text{für } \partial M = \emptyset$$

$$\underbrace{\{\text{exakte Formen}\}}_{\text{im}(d)} \subseteq \underbrace{\{\text{geschlossene Formen}\}}_{\text{ker}(d)} \subseteq \{k\text{-Formen}\} \quad d^2 = 0$$

$$\omega \text{ mit } \omega = d\eta \quad \Rightarrow \quad \omega \text{ mit } d\omega = 0$$

Kohomologiegruppe: $\text{ker}(d)/\text{im}(d)$ (Faktorgruppe)

6 Orientierung

Erinnerung (Lineare Algebra): Eine Orientierung auf einem reellen Vektorraum V ist die Wahl einer Äquivalenzklasse von geordneten Basen

$$\{v_1, \dots, v_n\} \sim \{w_1, \dots, w_n\} \iff (\text{Übergangsmatrix hat positive Determinante})$$

$$\iff v_1^* \wedge \dots \wedge v_n^* = \lambda w_1^* \wedge \dots \wedge w_n^* \quad \text{für ein } \lambda > 0$$

Sprich: Diese Basen sind gleichorientiert.

Es gibt genau zwei Äquivalenzklassen. Die Basen in einer ausgezeichneten Äquivalenzklasse heißen positiv orientiert.

Die Standardorientierung auf \mathbb{R}^n , also or_{std} , ist gegeben durch die Äquivalenzklasse der kanonischen Standardbasis.

Eine lineare Abbildung $f : (V, or_V) \rightarrow (W, or_W)$ zwischen zwei orientierten Vektorräumen heißt orientierungserhaltend, falls f Basen in or_V auf Basen in or_W abbildet, also:

$$f_* or_V = or_W \iff \det(f) = \det(\mathcal{M}_{B_w}^{B_v}(f)) > 0.$$

Es ergibt sich nur Sinn, wenn f ein Isomorphismus ist, also f bijektiv.
 Sonst: orientierungsumkehrend.

Definition 6.1. Eine Orientierung auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist eine Familie $\{or_p\}_{p \in M}$ von Orientierungen auf den Tangentialräumen $T_p M$, so dass ein Atlas \mathcal{A} existiert mit

$$D\varphi_p : (T_p M, or_p) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, or_{std})$$

orientierungserhaltend für alle $p \in U$ und alle Karten $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$.

Eine Mannigfaltigkeit heißt orientierbar, falls eine solche Orientierung auf M existiert, und orientiert, falls eine Orientierung fixiert ist.

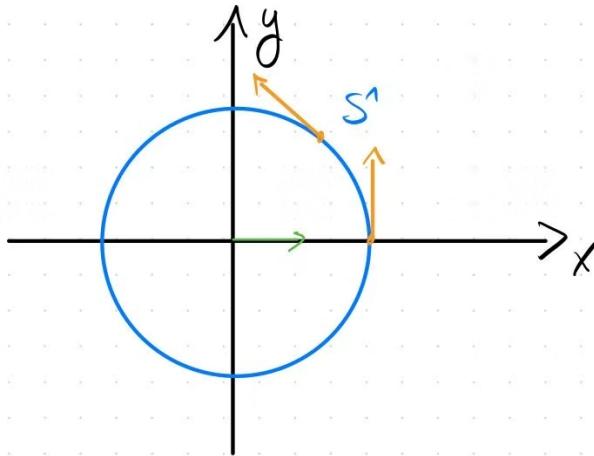
Definition 6.2. Eine differenzierbare Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen zwei orientierten Mannigfaltigkeiten heißt orientierungserhaltend, falls

$$Df_p : (T_p M, or_p) \longrightarrow (T_{f(p)} N, or_{f(p)})$$

für alle $p \in M$ orientierungserhaltend ist.

Beispiel: S^1

Idee: Orientiere jeden Tangentialraum $T_p S^1$ durch $(-p_2, p_1)$. Wir haben bereits die Karten gegeben durch die Projektion auf die x - bzw. y -Koordinate betrachtet.



Problem: Diese erfüllen die Bedingung (aus Definition 6.1) nicht. Standard Orientierung von \mathbb{R} ist z.B. das grüne Pfeil in der Abbildung, wenn wir Tangentialvektoren aus oberen rechten auf x -Achse projizieren ergibt sich die umgekehrte Richtung.

Betrachten daher die Karten:

$$(U_1, \varphi_1) = (S^1 \cap \{y > 0\}, (x, y) \mapsto -x)$$

$$(U_2, \varphi_2) = (S^1 \cap \{y < 0\}, (x, y) \mapsto x)$$

$$(U_3, \varphi_3) = (S^1 \cap \{x > 0\}, (x, y) \mapsto y)$$

$$(U_4, \varphi_4) = (S^1 \cap \{x < 0\}, (x, y) \mapsto -y)$$

Die Kartenabbildungen φ_i müssen so gewählt werden, dass die Übergangsfunktionen zwischen überlappenden Kartengebieten differenzierbar und orientierungserhaltend sind.

Satz 6.3. Eine Mannigfaltigkeit ist genau dann orientierbar, wenn ein Atlas existiert, sodass die Jacobi-Matrizen aller Kartenwechsel eine positive Determinante haben.

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei M orientiert und seien $(U, \varphi), (V, \psi)$ zwei orientierungserhaltende Karten. Dann sind die Ableitungen $D\varphi_p$ und $D\psi_p$ orientierungserhaltend.

Aus den Kettenregeln folgt, dass die Kartenwechselabbildung $D(\psi \circ \varphi^{-1}) = J(\psi \circ \varphi^{-1})$ orientierungserhaltend (bzgl. der Standardorientierung von \mathbb{R}) ist und besitzt daher eine positive Determinante hat.

„ \Leftarrow “: Gegeben sei ein Atlas \mathcal{A} , sodass für alle Karten $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\det(J(\psi \circ \varphi^{-1})) > 0.$$

Definiere eine Orientierung an einem Punkt $p \in M$ durch

$$or_p := \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right].$$

Dann ist auch jede andere Karte (V, ψ) orientierungserhaltend bzgl. or_p , weil die Übergangsabbildung eine positive Determinante hat.

Bleibt zu zeigen: Diese Orientierung ist wohldefiniert.

Sei (V, ψ) eine weitere Karte in \mathcal{A} mit $p \in V$. Dann gilt:

$$dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n = \det(J(\psi \circ \varphi^{-1})) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Voraussetzung: $\det(J(\psi \circ \varphi^{-1})) > 0$

\Rightarrow Die Basen $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ und $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} \right\}$ sind gleich-orientiert.

□

Beispiel: Mit dem Kriterium aus Satz 7.3 lässt sich zeigen, dass folgende Beispiele orientierbarer Mannigfaltigkeiten sind:

- i) Die Spähre S^n ist orientiert.
- ii) Das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit M ist orientierbar.
- iii) Sind M_1, M_2 zwei orientierte Mannigfaltigkeiten, so ist $M_1 \times M_2$ orientiert.
- iv) Komplexe Mannigfaltigkeiten sind orientiert.

n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten sind topologische Mannigfaltigkeiten, die Karten in \mathbb{C}^n haben, für die die Kartenwechsel biholomorphe Abbildungen sind. Die komplexen projektiven Räume sind Beispiele kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten.

Definition 6.4. Eine *Volumenform* auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist eine n -Form $\omega \in \Omega^n(M)$ ohne Nullstellen, d. h. $\omega_p \neq 0$ für alle $p \in M$.

Lemma 6.5. Auf M existiert genau dann eine Volumenform, wenn das Geradenbündel $\Lambda^n T^* M$ trivial ist, d. h. isomorph zu dem trivialen Geradenbündel $M \times \mathbb{R}$ ist.

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei ω eine Volumenform auf M . Definiere den trivialisierenden Homomorphismus

$$\Phi : \Lambda^n T^* M \rightarrow M \times \mathbb{R}$$

für $\alpha \in \Lambda^n T_p^* M$ durch

$$\Phi(\alpha) := (p, f(p)).$$

wobei $\alpha = f(p) \cdot \omega_p$, da α als n -dim Form $\{\omega_p\}$ einfach als Basis benutzen kann.

„ \Leftarrow “: Das Geradenbündel $\Lambda^n T^* M$ sei trivial und

$$\Phi : \Lambda^n T^* M \rightarrow M \times \mathbb{R}$$

sei ein entsprechender Bündel-Isomorphismus. Definiere eine Volumenform ω auf M durch $\omega_p := \Phi^{-1}(p, 1)$.

Dann ist ω glatt und verschwindet nirgends, also eine Volumenform. \square

Satz 6.6. Eine Mannigfaltigkeit M ist genau dann orientierbar, wenn eine Volumenform auf M existiert.

Beispiele:

i) Jede Lie-Gruppe ist orientierbar.

Wähle eine Basis $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ in $\mathfrak{g}^* = T_e^* G$ und definiere für $g \in G$ eine n -Form durch

$$\omega_g := r_{g^{-1}}^*(\mu_1 \wedge \cdots \wedge \mu_n),$$

wobei r_g die Rechtstranslation ist.

$\Rightarrow \omega$ ist eine global definierte Form ohne Nullstellen, also eine Volumenform, die eine Orientierung auf G definiert.

ii) Parallelisierbare Mannigfaltigkeiten mit trivialem Tangentialbündel sind orientierbar.

Ist das Tangentialbündel trivial, so ist es isomorph zu $M \times \mathbb{R}^n$, und jedes k -Formen-Bündel ist ebenfalls trivial.

\Rightarrow Es existiert eine Volumenform.

iii) Auf der Sphäre lässt sich leicht eine explizite Volumenform hinschreiben.

Ist $p \in S^n$ und $v_1, \dots, v_n \in T_p S^n = p^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$, dann definieren wir

$$\Omega_p(v_1, \dots, v_n) := \det(p, v_1, \dots, v_n),$$

Wählen wir die Vektoren v_1, \dots, v_n als Ergänzung von p zu einer orthonormalen Basis von \mathbb{R}^{n+1} (genauer von $(\mathbb{R}^{n+1}, \text{or}_{\text{std}})$), dann ist der Wert von Ω_p auf diesen Vektoren gleich +1.

$\Rightarrow \Omega$ ist damit eine Volumenform auf S^n .

Beweis von Satz 6.6, Richtung „ \Leftarrow “. Sei ω eine Volumenform auf M .

Behauptung 1: Zu jedem $p \in M$ gibt es eine Karte (U, φ) mit $p \in U$ und

$$\omega|_U = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \quad \text{mit } f \in C^\infty(U), f > 0. \quad (*)$$

Begründung: Sei (U, φ) eine beliebige Karte um p , ohne Einschränkung sei U zusammenhängend. Dann schreibt sich die Volumenform $\omega|_U$ als

$$\omega|_U = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \quad \text{für eine glatte Funktion } f.$$

Da ω auf U keine Nullstellen hat, gilt dies auch für f . Also gilt entweder $f > 0$ auf ganz U , oder $f < 0$ auf ganz U , da U zusammenhängend ist.

Im zweiten Fall definieren wir eine neue Karte $(U, \tilde{\varphi})$ mit

$$\tilde{\varphi}(q) := (\varphi_2(q), \varphi_1(q), \varphi_3(q), \dots, \varphi_n(q)),$$

Bezüglich dieser neuen Karte hat ω positive Koeffizientenfunktion auf U (Kartenwechsel von φ nach $\tilde{\varphi}$ ergibt sich ein Minus Zeichen).

Damit erfüllt die Karte die Bedingung aus Satz 7.3 und definiert somit eine wohldefinierte Orientierung.

Nun seien (U, φ) , (V, ψ) zwei Karten um p , welche die Bedingung (*) erfüllen.

Behauptung 2: Die Jacobi-Matrix des Kartenwechsels hat positive Determinante.

Begründung: Auf $U \cap V$ gilt für die Volumenform ω :

$$\omega|_{U \cap V} = f_1 dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = f_2 dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n, \quad \text{mit } f_1, f_2 > 0.$$

$$\Rightarrow dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \frac{f_2}{f_1} dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n \stackrel{\text{Kartenwechsel}}{=} \det(J(\psi \circ \varphi^{-1})) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$$

Die Jacobi-Matrix des Kartenwechsels hat somit positive Determinante. Nach 6.3 ist M dann orientierbar.

Richtung „ \Rightarrow “ Sei M orientierbar, und sei $\{(U_i, \varphi_i)\}$ ein Atlas von M mit

$$\det(D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})) > 0 \quad \text{für alle } i, j. \quad (6.3)$$

Auf den offenen Mengen $\varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Standard-Volumenform

$$\omega_0 := de_1 \wedge \cdots \wedge de_n.$$

Sei $\{\chi_i\}$ eine der Überdeckung $\{U_i\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins, d. h. die χ_i sind glatte Funktionen auf M mit:

- i) $\chi_i(x) \in [0, 1]$ für alle i und $x \in M$,
- ii) $\text{supp}(\chi_i) \subset U_i$,
- iii) Für alle $x \in M$ existiert eine Umgebung V_x von x , sodass nur endlich viele χ_i auf V_x nicht verschwinden,
- iv) $\sum_i \chi_i(x) = 1$ für alle $x \in M$.

Mithilfe der Funktionen χ_i , der Pullbacks $\varphi_i^* \omega_0$ und der Summation konstruieren wir eine globale glatte n -Form ohne Nullstellen auf M , also eine Volumenform.

Wir definieren die n -Form ω durch

$$\omega := \sum_i \chi_i \cdot \varphi_i^*(\omega_0),$$

wobei $\omega_0 = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ die Standard-Volumenform auf \mathbb{R}^n ist.

Behauptung 3: Diese Form ist die gesuchte Volumenform.

Begründung:

- ω ist global definiert.
- ω hat keine Nullstellen: Betrachte ω auf der Kartenumgebung U_k . Dort gilt:

$$\begin{aligned} (\varphi_k^{-1})^* \omega &= \sum_i (\chi_i \circ \varphi_k^{-1}) \cdot (\varphi_k^{-1})^* \varphi_i^*(\omega_0) \\ &= \sum_i (\chi_i \circ \varphi_k^{-1}) \cdot (\varphi_i \circ \varphi_k^{-1})^* \omega_0 \\ &= \sum_i \underbrace{(\chi_i \circ \varphi_k^{-1})}_{\in [0,1]} \cdot \underbrace{\det(J(\varphi_i \circ \varphi_k^{-1}))}_{>0} \cdot \omega_0 \\ &= f \omega_0 \end{aligned}$$

Für eine Funktion f mit $f > 0$ sind die Koeffizienten $\det(J(\varphi_i \circ \varphi_k^{-1}))$ positiv. Die Funktionen $\chi_i \circ \varphi_k^{-1} \geq 0$ sind nicht-negativ, wobei mindestens eine nicht identisch Null ist (da $\sum_i \chi_i(p) = 1$ für alle $p \in M$).

$$\Rightarrow f := \sum_i \chi_i \circ \varphi_k^{-1} \cdot \det(\varphi_i \circ \varphi_k^{-1})$$

ist positiv.

$\Rightarrow \omega$ ist eine global definierte n -Form ohne Nullstellen, also eine Volumenform. \square

Bemerkung: Seien M, N orientierte Mannigfaltigkeiten mit Volumenformen vol_M und vol_N .

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ ist genau dann orientierungserhaltend, wenn

$$f^* \text{vol}_N = \lambda \cdot \text{vol}_M,$$

für eine positive Funktion $\lambda \in C^\infty(M)$.

Beispiel: Sei Ω die Volumenform aus Beispiel (iii) auf S^n , und

$$\tau : S^n \rightarrow S^n$$

die Antipodenabbildung, also $\tau(x) = -x$.

Dann gilt:

$$\tau^* \Omega = (-1)^{n+1} \Omega,$$

d. h. $\tau : S^n \rightarrow S^n$ ist genau dann orientierungserhaltend, wenn n ungerade ist.

Für welche n ist \mathbb{RP}^n orientierbar?

Betrachten wir folgende Situation: Sei $\tau : N \rightarrow N$ eine fixpunktfreie Involution, d. h. $\tau^2 = \text{id}$ (Involution) und $\tau(p) \neq p$ für alle $p \in N$ (Fixpunktfrei).

Dann ist der Quotientenraum $M = N/\tau$ eine glatte Mannigfaltigkeit (Beweis mit Godement-Kriterium). Die differenzierbare Struktur ist eindeutig durch die Bedingung bestimmt, dass die kanonische Projektion $\pi : N \rightarrow M$ ein lokaler Diffeomorphismus ist.

Für $N = S^n$ und $\tau : S^n \rightarrow S^n$, $x \mapsto -x$, erhalten wir $\mathbb{RP}^n = S^n/\tau$.

Der Beweis für den allgemeinen Fall ist analog zu dem für \mathbb{RP}^n .

Satz 6.7. Sei N eine orientierte Mannigfaltigkeit und $\tau : N \rightarrow N$ eine fixpunktfreie Involution. Dann ist $M = N/\tau$ genau dann orientierbar, wenn τ orientierungserhaltend ist.

Korollar 6.8. Der reell-projektive Raum \mathbb{RP}^n ist genau dann orientierbar, wenn n ungerade ist.

Beweis. Es gilt $\mathbb{RP}^n = S^n/\tau$, wobei τ die Antipodenabbildung ist, also eine fixpunktfreie Involution. Wie zuvor gesehen, ist die Antipodenabbildung genau dann orientierungserhaltend, wenn n ungerade ist. Satz 6.7 liefert dann die behauptete Aussage. \square

Satz 6.9. Eine n -dimensionale zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist genau dann orientierbar, wenn die Menge

$$\Lambda^n T^* M \setminus \{\text{Nullschnitt}\}$$

zwei Zusammenhangskomponenten besitzt. Dabei ist der Nullschnitt die Menge aller Nullvektoren der einzelnen Fasern, betrachtet als Teilmenge im Totalraum des Bündels. (Gegenbeispiel: Bei Möbiusband besitzt dieser Menge nur ein Zusammenhangskomponenten)

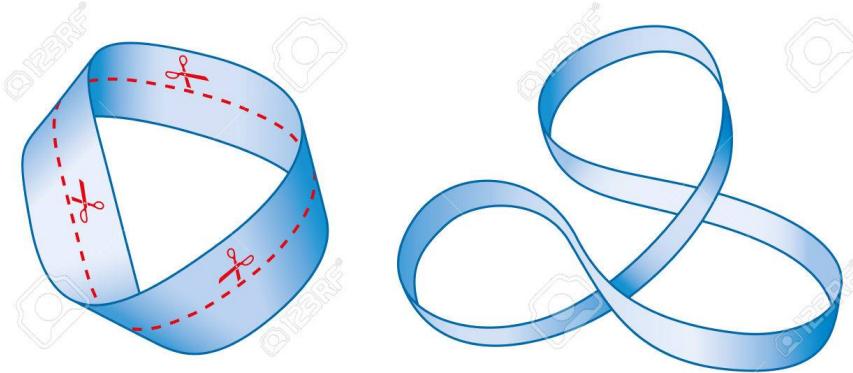


Abbildung 31: Schneiden Möbius-Band

Auf der Menge $\Lambda^n T^* M \setminus \{\text{Nullschnitt}\}$ führen wir eine Äquivalenzrelation ein: Zwei n -Formen α und β sind äquivalent, falls es eine positive reelle Zahl λ gibt, sodass

$$\beta = \lambda \cdot \alpha.$$

In diesem Fall liegen α und β in derselben Faser über M .

Wir definieren den Bündelraum der (nichtverschwindenden) Volumenformen bis auf positive Skalierung:

$$\widetilde{M} := (\Lambda^n T^* M \setminus \{\text{Nullschnitt}\}) / \sim .$$

Satz 6.10. Die Menge \widetilde{M} (aus Satz 6.9) ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Weiter gilt:

- i) Die Mannigfaltigkeit \widetilde{M} ist orientierbar.
- ii) Die kanonische Projektion $\widetilde{M} \rightarrow M$ ist eine 2-fache Überlagerung (die sogenannte *Orientierungsüberlagerung* von M).
- iii) Die Mannigfaltigkeit M ist genau dann orientierbar, wenn die Orientierungsüberlagerung trivial ist, also \widetilde{M} diffeomorph $M \times \mathbb{Z}_2$.

Beispiel:

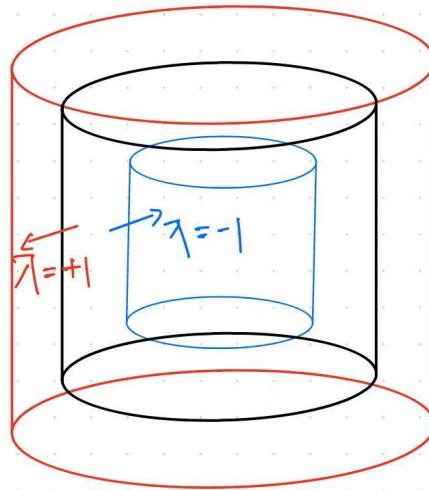
$$Z := ([0, 1] \times \mathbb{R}) / \sim_Z, \quad \text{mit } (0, p) \sim_Z (1, p) \cong S^1 \times \mathbb{R} \quad (\text{der Zylinder})$$

$$M := ([0, 1] \times \mathbb{R}) / \sim_M, \quad \text{mit } (0, p) \sim_M (1, -p) \quad (\text{das Möbiusband})$$

Dann gilt:

$$\tilde{Z} = Z \times \{\pm 1\}, \quad \tilde{M} = ([0, 2] \times \mathbb{R}) / \sim_Z$$

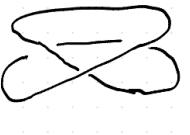
mit geeigneter Äquivalenzrelation.



Die Projektionen lauten:

$$\pi_Z : \tilde{Z} \rightarrow Z, \quad (p, \pm 1) \mapsto p$$

$$\pi_M : \tilde{M} \rightarrow M, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} (x \bmod \mathbb{Z}, y), & \text{falls } x \in [0, 1) \\ (x \bmod \mathbb{Z}, -y), & \text{falls } x \in [1, 2) \end{cases}$$

<u>Skizze</u>	\tilde{M} in Z : $\pi_Z^{-1}(S^1 \times \{0\})$ $=$ 	M $\pi_M^{-1}([0,1] \times \{0\} / \sim_M)$ $=$ 
---------------	--	--

Korollar 6.11. Einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten sind orientierbar.

Beweis. Überlagerungen von einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten sind trivial. \square

Bemerkung:

- i) Die Orientierungsüberlagerung \widetilde{M} ist die Menge aller Orientierungen aller Tangentialräume. Die 2-elementige Menge $\tilde{\pi}^{-1}(p)$ (λ positiv oder nicht positiv) entspricht den beiden Orientierungen auf dem Tangentialraums $T_p M$.
- ii) Eine Orientierung auf M ist ein Schnitt in dem Bündel $\widetilde{M} \rightarrow M$, also eine glatte Abbildung $M \rightarrow \widetilde{M}$, die in jedem p eine Orientierung auf $T_p M$ zuordnet.
- iii) Bis auf Übergang zur Orientierungsüberlagerung \widetilde{M} können wir also immer annehmen, dass eine Mannigfaltigkeit orientierbar ist.
- iv) Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist M genau dann orientierbar, wenn es ein glattes Normalenfeld ohne Nullstellen gibt, d. h.

$$T_{\iota(p)} \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \cdot \nu_p \oplus D\iota(T_p M),$$

wobei ι ein Immersions- oder Inklusionsabbildung ist.

- v) Sei c ein regulärer Wert einer differenzierbaren Abbildung $f : M \rightarrow N$. Ist M orientierbar, dann ist auch die Mannigfaltigkeit $M_c := f^{-1}(c)$ orientierbar.

7 Fundamentalgruppe und Überlagerung

Ausgangsfrage: Wie entscheiden wir, ob zwei topologische Räume (nicht) homöomorph sind?

- Für eine positive Antwort: Gib einen Homöomorphismus an.
- Für eine negative Antwort: Zeige es gibt keine solche Abbildung.

Dafür nutzen wir häufig topologische Invarianten, also Eigenschaften, die unter Homöomorphismen erhalten bleiben:

- Kompaktheit
- Zusammenhang (Zusammenhangskomponenten)
- Zweitabzählbarkeit
- Hausdorff-Eigenschaft (T2)
- **neu:** Fundamentalgruppe

Beispiel: Die Intervalle $(0, 1)$ und $[0, 1]$ sind nicht homöomorph.

Was ist mit \mathbb{R} und \mathbb{R}^2 ? (Peano-Kurve)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ein Homöomorphismus. Dann ist auch jede Einschränkung

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$$

ebenfalls ein Homöomorphismus. Aber: $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist zusammenhängend, während $\mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$ nicht. Analoges für $[0, 1]$ und der Einheitskreis S^1 sind ebenfalls nicht homöomorph.

Dieser Trick (durch Entfernen eines Punktes den Zusammenhang zu testen) funktioniert nicht für kompliziertere Räume, z.B. $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3; S^2, T^2$ und $T^2, T^2 * T^2$ (Zusammensetzung von zwei Tori)

Dafür führen wir den Begriff der *einfachen Zusammenhangseigenschaft* ein.

Große Idee: Ein topologischer Raum X ist **einfach zusammenhängend**, wenn jede geschlossene Kurve (d.h. stetige Abbildung $S^1 \rightarrow X$) sich in einem Punkt zusammenziehen lässt — also homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

7.1 Homotopie von Wegen

Definition 7.1

Seien $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen. Man sagt, f_0 ist homotop zu f_1 , falls es eine stetige Abbildung

$$\mathcal{F} : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

gibt mit

$$\mathcal{F}(x, 0) = f_0(x), \quad \mathcal{F}(x, 1) = f_1(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Die Abbildung \mathcal{F} heißt eine Homotopie zwischen f_0 und f_1 . Man schreibt $f_0 \simeq f_1$, falls f_0 homotop zu f_1 ist. Ist $f_0 \simeq f_1$ und f_1 die konstante Abbildung, dann nennt man f_0 nullhomotop.

Anschaufung

Eine Homotopie ist eine einparametrische Familie von Abbildungen von X nach Y . Dabei stellen wir uns vor, dass $t \in [0, 1]$ die Zeit darstellt. Dann beschreibt die Homotopie \mathcal{F} eine stetige *Verformung* der Abbildung f_0 zur Abbildung f_1 , wobei t von 0 bis 1 läuft.

Wir wollen nun einen wichtigen Spezialfall betrachten: Wege (oder: Pfade) in einem topologischen Raum X .

Für eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$, nennen wir γ einen Pfad (oder Weg) von x_0 nach x_1 .

- Der Punkt x_0 heißt Startpunkt (auch: Anfangspunkt) des Pfades γ .

- Der Punkt x_1 heißt Endpunkt des Pfades γ .

Definition 7.2

Zwei Wege $f_0, f_1 : [0, 1] \rightarrow X$ heißen weghomotop (also homotop relativ der Endpunkte), wenn sie denselben Startpunkt x_0 und denselben Endpunkt x_1 besitzen, und es eine stetige Abbildung

$$\mathcal{F} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

gibt, sodass

$$\mathcal{F}(s, 0) = f_0(s),$$

$$\mathcal{F}(0, t) = x_0,$$

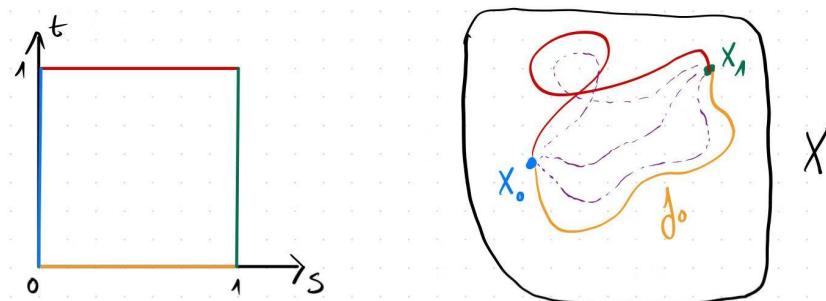
$$\mathcal{F}(s, 1) = f_1(s) \quad (*)$$

$$\mathcal{F}(1, t) = x_1 \quad (**)$$

für alle $s, t \in [0, 1]$ gilt.

Die Abbildung \mathcal{F} heißt eine Weghomotopie (Homotopie relativ der Endpunkte) zwischen f_0 und f_1 . f_0 ist weghomotop zu f_1 . Man schreibt dann

$$f_0 \simeq_p f_1 \quad (\text{rel. Endpunkte})$$



- ① besagt: \mathcal{F} ist eine Homotopie zwischen f_0 und f_1 .
- ② bedeutet: Die Kurve $f_t(s) := \mathcal{F}(s, t)$ ist für jedes feste t ein Weg von x_0 nach x_1 .

Das heißt: \mathcal{F} deformiert f_0 stetig zu f_1 und hält dabei die Randpunkte x_0 und x_1 fest.

Lemma 7.3.

Die Relationen \simeq (Homotopie) und \simeq_p (Weghomotopie) sind Äquivalenzrelationen. Ist f ein Weg, so bezeichnen wir die Weghomotopie-Äquivalenzklasse von f mit $[f]$.

Beweis. Wir zeigen, dass \simeq_p eine Äquivalenzrelation ist:

1. (Reflexivität): $f \simeq_p f$, denn wir können die konstante Homotopie $\mathcal{F}(x, t) := f(x)$ verwenden.

2. (Symmetrie): Angenommen $f \simeq_p f'$ via $\mathcal{F}(x, t)$. Dann definiert

$$\mathcal{F}'(x, t) := \mathcal{F}(x, 1 - t)$$

eine Weghomotopie von f' zu f , da Anfangs- und Endpunkte ebenfalls erhalten bleiben.

3. (Transitivität): Sei $f_0 \simeq_p f_1$ und $f_1 \simeq_p f_2$.

Sei \mathcal{F}_0 eine Weghomotopie von f_0 zu f_1 , und \mathcal{F}_1 eine Weghomotopie von f_1 zu f_2 .

Definiere

$$G : X \times [0, 1] \rightarrow Y, \quad \text{durch}$$

$$G(x, t) := \begin{cases} \mathcal{F}_0(x, 2t) & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \mathcal{F}_1(x, 2t - 1) & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

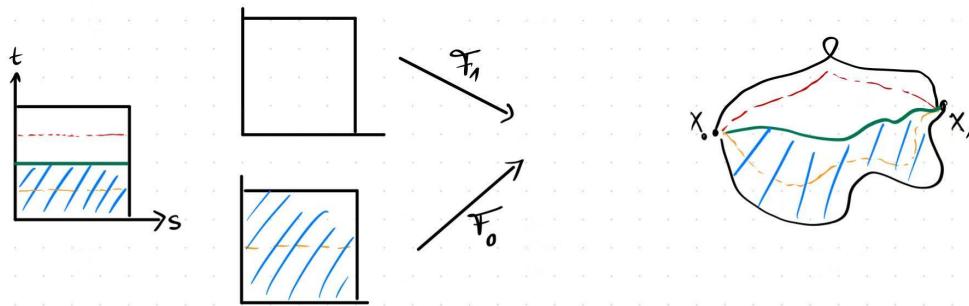
G ist wohldefiniert, denn für $t = \frac{1}{2}$ gilt:

$$\mathcal{F}_0(x, 1) = f_1(x) = \mathcal{F}_1(x, 0)$$

G ist stetig auf den abgeschlossenen Mengen $X \times [0, \frac{1}{2}]$ und $X \times [\frac{1}{2}, 1]$

$\Rightarrow G$ ist stetig auf $X \times [0, 1]$

□



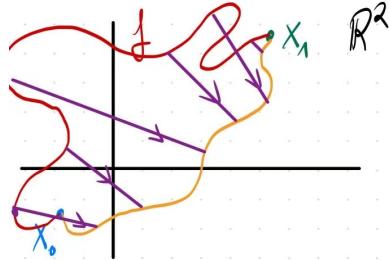
Beispiel 1:

Seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetige Abbildungen. Dann sind f und g homotop; denn die Abbildung

$$\mathcal{F}(x, t) := (1 - t) \cdot f(x) + t \cdot g(x)$$

ist eine Homotopie zwischen ihnen. Diese nennt man eine Geraden-Linien-Homotopie, da sie $f(x)$ und $g(x)$ entlang der Geraden zwischen den beiden Punkten verbindet.

Sind f und g zusätzlich Wege von x_0 nach x_1 , so ist \mathcal{F} eine Weghomotopie.



Bemerkung: Diese Konstruktion funktioniert allgemein für konvexe Zielräume wie \mathbb{R}^n , da in konvexen Mengen die Verbindungsstrecken zwischen zwei Punkten stets enthalten sind.

Beispiel 2

Sei $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, also die *gelochte Ebene*. Dann sind zwei Wege f und $g : [0, 2] \rightarrow X$ gegeben mit

$$f(s) = \begin{pmatrix} \cos(\pi s) \\ \sin(\pi s) \end{pmatrix}, \quad g(s) = \begin{pmatrix} \cos(\pi s) \\ -\sin(\pi s) \end{pmatrix}.$$

weghomotop. Aber: f ist *nicht* weghomotop zu

$$h(s) = (\cos(-\pi s), \sin(-\pi s)) = (\cos(\pi s), -\sin(\pi s))$$

über die Geraden-Linien-Homotopie, da h die x -Achse durchläuft und damit das Loch im Ursprung berührt. f lässt sich nicht stetig in h deformieren, ohne den Ursprung zu durchqueren.

Fazit: Der Bildraum ist entscheidend für die Frage, ob zwei Abbildungen homotop sind. Die gleiche Formel kann auf verschiedenen Zielräumen unterschiedliche Homotopieeigenschaften haben.

Definition 7.4

Sei f ein Weg von x_0 nach x_1 , und g ein Weg von x_1 nach x_2 . Dann definieren wir das Produkt (oder die Verkettung) $f * g$ (pass auf Reihenfolge, anders als Abbildung-Verkettung) von f und g als den Weg $h : [0, 1] \rightarrow X$, gegeben durch

$$h(s) := \begin{cases} f(2s) & \text{für } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s - 1) & \text{für } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Die Abbildung h ist

- wohldefiniert (da $f(1) = x_1 = g(0)$),
- stetig (beide Stücke sind stetig, und sie stimmen bei $s = \frac{1}{2}$ überein),

- ein Weg von x_0 nach x_2 .

Idee: Die erste Hälfte von h ist f , die zweite Hälfte ist g .

Diese Produktoperation induziert eine wohldefinierte Operation auf den Weghomotopieklassen durch:

$$[f] * [g] := [f * g]$$

Dies bildet die Grundlage für die Definition der **Fundamentalgruppe** im nächsten Abschnitt.

Beobachtung:

Für $f_0 \simeq_p f_1$ und $g_0 \simeq_p g_1$ gilt:

$$f_0 * g_0 \simeq_p f_1 * g_1$$

Dazu betrachten wir eine Weghomotopie \mathcal{F} von f_0 zu f_1 , und eine Weghomotopie \mathcal{G} von g_0 zu g_1 .

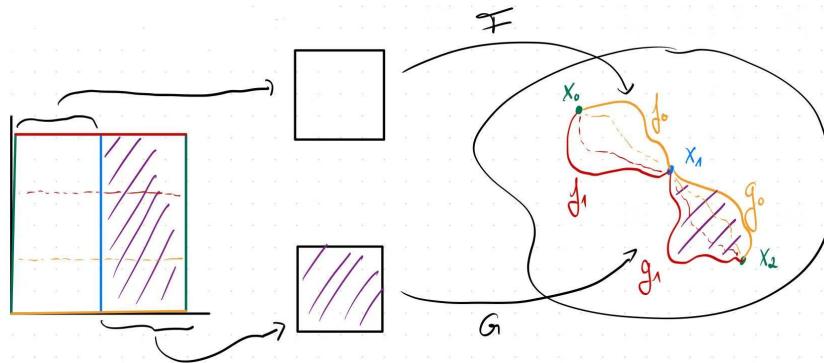
Definiere:

$$H(s, t) := \begin{cases} \mathcal{F}(2s, t) & \text{für } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \mathcal{G}(2s - 1, t) & \text{für } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Da $\mathcal{F}(1, t) = x_1 = \mathcal{G}(0, t)$ für alle $t \in [0, 1]$, ist H wohldefiniert und stetig.

Folglich: H ist eine Weghomotopie von $f_0 * g_0$ nach $f_1 * g_1$, also gilt:

$$[f_0] * [g_0] = [f_1] * [g_1]$$



Die Operation $*$ erfüllt Eigenschaften, die denen einer Gruppe ähnlich sind. Wir nennen sie die *Gruppoid-Eigenschaften* der Wegverkettung. Ein wichtiger Unterschied zu Gruppen besteht darin, dass $[f] * [g]$ nicht für alle Klassen $[f], [g]$ definiert ist, sondern nur dann, wenn $f(1) = g(0)$ gilt.

Satz 7.5.

Die Operation $*$ auf den Weghomotopieklassen hat folgende Eigenschaften:

(i) **(Assoziativität)**

Für drei kompatible Wegeklassen gilt:

$$[f] * ([g] * [h]) = ([f] * [g]) * [h]$$

sofern beide Seiten definiert sind (d.h. Endpunkt von f = Startpunkt von g , etc.).

(ii) **(Rechts- und Linksneutrales Element)**

Für jeden Punkt $x \in X$ sei $e_x : I \rightarrow X$ der konstante Weg $e_x(t) = x$. Dann gilt für jeden Pfad f mit Anfangs- bzw. Endpunkt x :

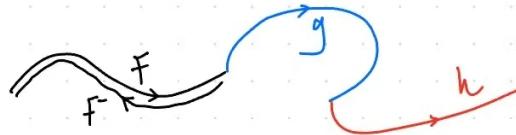
$$[f] * [e_{x_1}] = [f], \quad [e_{x_0}] * [f] = [f]$$

wenn $f : x_0 \rightarrow x_1$ ist.

(iii) **(Inverse)**

Für einen Weg $f : x_0 \rightarrow x_1$ sei der Umkehrweg f^- definiert durch $f^-(s) := f(1-s)$. Dann gilt:

$$[f] * [f^-] = [e_{x_0}], \quad [f^-] * [f] = [e_{x_1}]$$



Der Beweis beruht auf zwei Beobachtungen

1. Sei $k : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, und sei \mathcal{F} eine Weghomotopie in X zwischen zwei Wegen f_0 und f_1 . Dann ist

$$k \circ \mathcal{F}(s, t)$$

eine Weghomotopie zwischen $k \circ f_0$ und $k \circ f_1$ in Y .

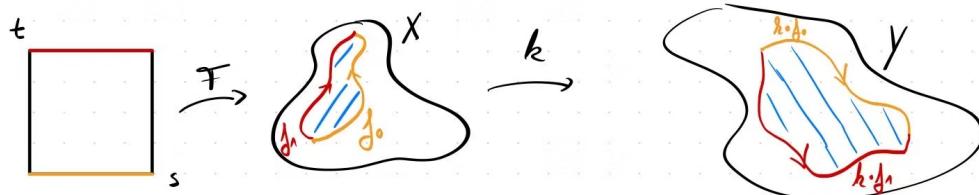


Abbildung 32: Die Homotopie wird durch die stetige Abbildung weitertransportiert

2. Sei $k : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und seien f, g Wege in X mit $f(1) = g(0)$. Dann gilt:

$$k \circ (f * g) = (k \circ f) * (k \circ g)$$

also erhält die Verkettung von Wegen unter k ihre Struktur.

Für den Beweis von (ii) und (iii) der Gruppoid-Eigenschaften lassen sich die Homotopien direkt konstruieren. Der Beweis von (i) ist schwieriger.

Satz 7.6.

Sei f ein Pfad in X , und sei $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$ eine Zerlegung des Intervalls $[0, 1]$. Definiere Teilstrecken

$$f_i := f \circ \lambda_i : [0, 1] \rightarrow X, \quad \text{für } 1 \leq i \leq n,$$

wobei λ_i die lineare Abbildung ist, die $[0, 1]$ auf das Teilintervall $[a_{i-1}, a_i]$ abbildet. Dann gilt:

$$[f] = [f_1] * [f_2] * \dots * [f_n]$$

Das ist eine Verallgemeinerung der Assoziativität der Wegverkettung.

Kurz gesagt: Für Weghomotopien ist es egal, wie wir das Intervall zerlegen.

Lemma 7.7.

Seien $h_0, h_1 : X \rightarrow Y$ homotop und $k_0, k_1 : Y \rightarrow Z$ homotop.

Dann sind auch die Verkettungen $k_0 \circ h_0$ und $k_1 \circ h_1 : X \rightarrow Z$ homotop.

Definition 7.8.

Ein topologischer Raum X heißt zusammenziehbar, falls die Identität nullhomotop ist, d.h. $\text{id}_X : X \rightarrow X$ homotop zur konstanten Abbildung $c : X \rightarrow X$, $c(x) = x_0$ (für ein festes $x_0 \in X$).

Beispiele und Bemerkungen:

- (i) Die Intervalle $[0, 1]$ und der Raum \mathbb{R}^n sind zusammenziehbar.
Eine Homotopie ist gegeben durch:

$$\mathcal{F}(x, t) = (1 - t) \cdot x + t \cdot x_0$$

für ein festes $x_0 \in X$, z.B. 0.

- (ii) Jeder zusammenziehbare Raum ist zusammenhängend.
- (iii) Ist Y zusammenziehbar, dann sind für jeden topologischen Raum X alle zwei stetigen Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ homotop.
- (iv) Ist X zusammenziehbar und Y weg-zusammenhängend, dann sind alle stetigen Abbildungen $X \rightarrow Y$ homotop.

7.2 Die Fundamentalgruppe

Wir möchten die Operation $*$ als Gruppenoperation zwischen Homotopieklassen von Pfaden auffassen.

Problem: Die Verkettung $*$ ist nicht zwischen allen Äquivalenzklassen von Pfaden wohldefiniert, da Anfangs- und Endpunkte übereinstimmen müssen.

Lösung: Wenn wir einen **Basispunkt** $x_0 \in X$ fixieren und nur Wege betrachten, die in x_0 beginnen und enden (also geschlossene Wege basierend in x_0), dann bildet die Menge der Homotopieklassen solcher Wege mit $*$ eine Gruppe. Diese Gruppe heißt die **Fundamentalgruppe** von X zum Basispunkt x_0 , geschrieben $\pi_1(X, x_0)$.

Ziel: Die Fundamentalgruppe ist eine topologische Invariante und erlaubt es, wesentliche Informationen über die Struktur von X zu extrahieren.

Definition 7.9.

Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein Punkt. Ein Weg $f : [0, 1] \rightarrow X$, der in x_0 beginnt und endet, also $f(0) = f(1) = x_0$, heißt Schlaufe mit Basispunkt x_0 .

Die Menge der Weghomotopieklassen von Schlaufen mit Basispunkt x_0 , zusammen mit der Verkettung $*$, heißt die Fundamentalgruppe von X bzgl. Basispunkt x_0 .

Wir schreiben: $\pi_1(X, x_0)$

Bemerkung:

(i) Aus Satz 7.5 folgt, dass $*$ auf dieser Menge (der Weghomotopieklassen von Schlaufen mit Basispunkt x_0) die Axiome einer Gruppe erfüllt.

Weiter ist $\pi_1(X, x_0)$ abgeschlossen unter $*$, das heißt: Sind f und g Schlaufen mit Basispunkt x_0 , so ist auch $f * g$ wieder eine Schlaufe mit Basispunkt x_0 .

(ii) Man nennt $\pi_1(X, x_0)$ auch die **erste Homotopiegruppe**.

(Es gibt auch höhere Homotopiegruppen, z.B. $\pi_n(X, x_0)$, für $n \geq 2$, wobei man hier nicht S^1 auf X abbildet, sondern allgemein S^n)

Beispiel:

$$\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{e_{x_0}\}$$

Analog: Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, so gilt ebenfalls $\pi_1(X, x_0) = \{e_{x_0}\}$.

Frage: Wie hängt die Fundamentalgruppe von der Wahl des Basispunktes ab?

Definition 7.10.

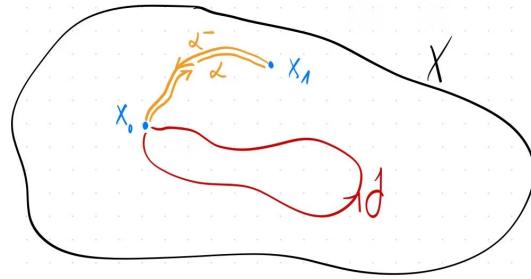
Sei α ein Weg in X von x_0 nach x_1 . Wir definieren eine Abbildung (Konjugation)

$$\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$$

durch

$$\hat{\alpha}([f]) := [\alpha^- * f * \alpha] = [\alpha^-] * [f] * [\alpha]$$

also: Weg entlang α^- zurück, dann entlang f , dann entlang α vorwärts.



Bemerkung: Die Abbildung $\hat{\alpha}$ (gesprochen: "α-pushforward") ist wohldefiniert, d.h. sie hängt nur von der Homotopieklass von α ab.

Satz 7.11.

Die Abbildung $\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$, definiert durch

$$\hat{\alpha}([f]) := [\alpha^- * f * \alpha]$$

ist ein **Gruppenisomorphismus**.

Beweis: Übungsaufgabe.

Korollar 7.12.

Ist X wegzusammenhängend und $x_0, x_1 \in X$, dann sind

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$$

Bemerkung:

- Sei $C \subseteq X$ eine wegzusammenhängskomponente von X , die x_0 enthält. Dann gilt:

$$\pi_1(C, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$$

D.h. die Fundamentalgruppe beschreibt nur die Informationen enthalten im Zusammenhangskomponent. Meistens beschränkt man sich bei der Untersuchung der Fundamentalgruppe auf wegzusammenhängende Räume.

- Ist X wegzusammenhängend, so sind alle Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x_0)$ für verschiedene $x_0 \in X$ zueinander isomorph. Daher schreibt man oft einfach $\pi_1(X)$, ohne den Basispunkt zu erwähnen. Aber der Isomorphismus zwischen $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ hängt im Allgemeinen vom gewählten Weg α zwischen den Basispunkten ab.
- Der Isomorphismus ist unabhängig vom gewählten Weg genau dann, wenn $\pi_1(X, x_0)$ abelsch ist. Man spricht dann von *kanonische Ähnlichkeit*.

Definition 7.13.

Ein topologischer Raum X heißt einfach zusammenhängend, falls

- X zusammenhängend ist und
- die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ für ein (und damit jedes) $x_0 \in X$ die triviale (eindeutige) Gruppe ist.

Man schreibt dann:

$$\pi_1(X, x_0) = 0$$

falls $\pi_1(X, x_0)$ die triviale Gruppe ist. Was bedeutet, dass alle Schlaufen (mit Basispunkt x_0) homotop zur konstanten Schlaufe sind.

Lemma 7.14.

In einem einfach zusammenhängenden Raum X sind je zwei Wege mit denselben Start- und Endpunkten weghomotop.

Beweis. Seien α, β zwei Wege von x_0 nach x_1 . Dann ist die in X geschlossene Schlaufe $\alpha * \beta^-$ eine Schlaufe mit Basispunkt x_0 . Da X einfach zusammenhängend ist, ist $\alpha * \beta^-$ weghomotop zur konstanten Weg e_{x_0} .

Also gilt:

$$[\alpha] = [\alpha] * [e_{x_1}] = [\alpha] * [\beta^- * \beta] = [\alpha * \beta^- * \beta] = [\alpha * \beta^-] * [\beta] = [e_{x_0}] * [\beta] = [\beta]$$

Daraus folgt:

$$[\alpha] = [\beta]$$

□

Sei $h : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung mit $h(x_0) = y_0$.

Wir schreiben dann kurz:

$$h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$$

Ist f eine Schlaufe in X mit Basispunkt x_0 , so ist die Verkettung $h \circ f : I \rightarrow Y$ eine Schlaufe in Y mit Basispunkt y_0 .

Durch $f \mapsto h \circ f$ wird eine Abbildung

$$\pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

induziert.

Definition 7.15

Sei $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ eine stetige Abbildung. Dann definiert man:

$$h_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0), \quad [f] \mapsto [h \circ f]$$

Diese Abbildung h_* heißt der von h induzierte Homomorphismus auf den Fundamentalgruppen bzgl. des Basispunkts x_0 .

Die Abbildung h_* ist wohldefiniert, denn: Ist \mathcal{F} eine Weghomotopie zwischen f_0 und f_1 , so ist $h \circ \mathcal{F}$ eine Weghomotopie zwischen $h \circ f_0$ und $h \circ f_1$.

Die Tatsache, dass h_* ein Gruppenhomomorphismus ist, folgt aus:

$$h_*([f * g]) = [h \circ (f * g)] = [(h \circ f) * (h \circ g)] = h_*([f]) * h_*([g])$$

Bemerkung:

Der Homomorphismus h_* hängt nicht nur von der Abbildung $h : X \rightarrow Y$ ab, sondern auch von der Wahl des Basispunkts $x_0 \in X$ durch h ab (Sobald x_0 gewählt ist, ist y_0 durch h bestimmt).

Daraus ergeben sich Schwierigkeiten für die Notation: Sind x_0 und x_1 verschiedene Basispunkte in X , können wir nicht denselben Ausdruck h_* für beide induzierten Homomorphismen verwenden, denn:

$$h_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0), \quad \text{versus} \quad \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

Selbst wenn X wegzusammenhängend ist und die Gruppen isomorph sind, handelt es sich nicht um dieselbe Gruppe.

In solchen Fällen schreibt man explizit:

$$(h_{x_0})_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \quad (\text{bzw. } (h_{x_1})_*)$$

Wenn wir nur einen festen Basispunkt betrachten, können wir zur Vereinfachung wieder einfach h_* schreiben.

Satz 7.16 (Funktorielle Eigenschaften):

Seien $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ und $k : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ stetige Abbildungen. Dann gilt:

$$(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$$

Ist zudem $\text{id}_{(X, x_0)} : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ die Identität auf, dann ist $(\text{id}_{(X, x_0)})_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$ der Identitätshomomorphismus

Korollar 7.17.

Ist $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ein Homöomorphismus, dann ist der induzierte Homomorphismus

$$h_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $k : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ die Inverse von h . Dann gilt: $k_* \circ h_* = (k \circ h)_* = (\text{id}_X)_*$, wobei id_X die Identität von X ist. Weiter gilt $h_* \circ k_* = (h \circ k)_* = (\text{id}_Y)_*$ für die Identität id_Y von Y .

Da $(\text{id}_X)_*$ und $(\text{id}_Y)_*$ die Identität auf $\pi_1(X, x_0)$ bzw. $\pi_1(Y, y_0)$ sind sehen wir, dass k_* die Inverse zu h_* ist. \square

7.3 Überlagerungen

Motivation:

Überlagerungen bieten ein Hilfsmittel zur Berechnung von Fundamentalgruppen. Gleichzeitig liefern sie eine geometrische Interpretation von Untergruppen der Fundamentalgruppe.

Definition 7.18:

Sei B ein topologischer Raum. Eine Überlagerung von B ist eine stetige, surjektive Abbildung

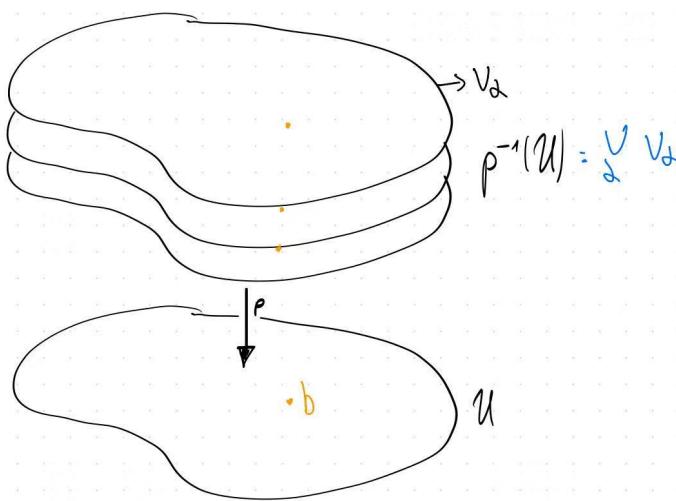
$$p : E \rightarrow B,$$

sodass es für jeden Punkt $b \in B$ eine Umgebung $U \subseteq B$ gibt, für die gilt:

- $p^{-1}(U)$ ist eine disjunkte Vereinigung offener Mengen $V_\alpha \subseteq E$,
- für jede solche Menge V_α ist $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$ ein Homöomorphismus.

Bezeichnungen:

- E heißt der Überlagerungsraum,
- p heißt die Überlagerungsabbildung,
- die Mengen V_α heißen Blätter,
- die (diskrete) Teilmenge $p^{-1}(x)$ heißt die Faser über x .



Bemerkung:

- Sei $p : E \rightarrow B$ eine Überlagerungsabbildung. Für alle $b \in B$ trägt der Teilraum $p^{-1}(b) \subseteq E$ die **diskrete Topologie**.

Das bedeutet: Jedes Blatt $V_\alpha \subseteq E$ ist offen und schneidet die Faser $p^{-1}(b)$ nur in einem Punkt, daher ist dieser Punkt offen in $p^{-1}(b)$.

- Die Überlagerungsabbildung $p : E \rightarrow B$ ist eine **offene Abbildung**, d.h. das Urbild offener Mengen (z.B. die Blätter V_α) sind ebenfalls offen.

Beispiel: Triviale Überlagerung

Sei X ein topologischer Raum.

- Die Identität $\text{id}_X : X \rightarrow X$ ist eine Überlagerungsabbildung.
- Allgemeiner: Sei

$$E = X \times \{1, \dots, n\}$$

die disjunkte Vereinigung von n Kopien des Raumes X .

Dann ist die Abbildung

$$p : E \rightarrow X, \quad (x, i) \mapsto x$$

eine Überlagerung. Anschaulich stellen wir uns vor, dass der Raum X mehrfach „übereinandergelegt“ wird.

Um solche trivialen Beispiele zu vermeiden, verlangt man in vielen Anwendungen zusätzlich, dass der Überlagerungsraum E **wegzusammenhängend** ist.

Satz 7.19

Die Abbildung

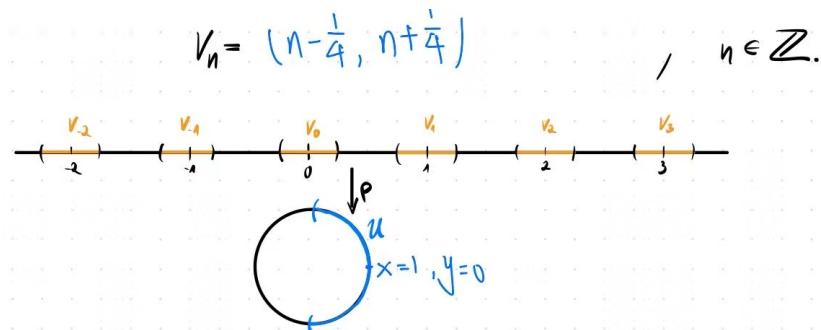
$$p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad x \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

ist eine Überlagerungsabbildung.

Anschaulich: Wir „wickeln“ \mathbb{R} um den Einheitskreis. Dabei wird jedes Intervall $[n, n+1]$ surjektiv auf S^1 abgebildet. Die Zahl $n \in \mathbb{Z}$ zählt also die „Umdrehungen“.

Beweis. Wir benutzen die Eigenschaften von Sinus und Kosinus.

Betrachte eine offene Umgebung $U = S^1 \cap \{x > 0\}$. Dann ist das Urbild $p^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}$ die disjunkte Vereinigung offener Intervalle



Beschränke p auf das abgeschlossene Intervall $\overline{V_n} := [n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}]$.

Dort ist p injektiv, da auf diesem Intervall die Funktion $x \mapsto \sin(2\pi x)$ streng monoton

ist. Weiterhin bildet p das Intervall $\overline{V_n}$ bzw. V_n surjektiv auf den Abschluss \overline{U} bzw. U ab (nach dem Zwischenwertsatz).

Da $\overline{V_n}$ kompakt ist und \overline{U} Hausdorff, ist

$$p|_{\overline{V_n}} : \overline{V_n} \rightarrow \overline{U}$$

ein Homöomorphismus. Insbesondere ist die Einschränkung $p|_{V_n} : V_n \rightarrow U$ ein Homöomorphismus zwischen V_n und U .

Ein ähnliches Argument gilt für die offenen Mengen $S^1 \cap \{x < 0\}$, $S^1 \cap \{y > 0\}$, $S^1 \cap \{y < 0\}$. Diese offenen Mengen überdecken S^1 , und jedes ihrer Urbilder ist eine disjunkte Vereinigung von Intervallen V_n , auf denen p ein Homöomorphismus ist.

Daher ist $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ eine Überlagerungsabbildung. \square

Ist $p : E \rightarrow B$ eine Überlagerungsabbildung, dann ist p ein **lokaler Homöomorphismus** von E nach B , d.h. jeder Punkt $e \in E$ besitzt eine Umgebung $U \subseteq E$, sodass $p|_U : U \rightarrow p(U) \subseteq B$ ein Homöomorphismus ist.

Aber: Die Umkehrung gilt nicht! Ein lokaler Homöomorphismus ist nicht notwendigerweise eine Überlagerung:

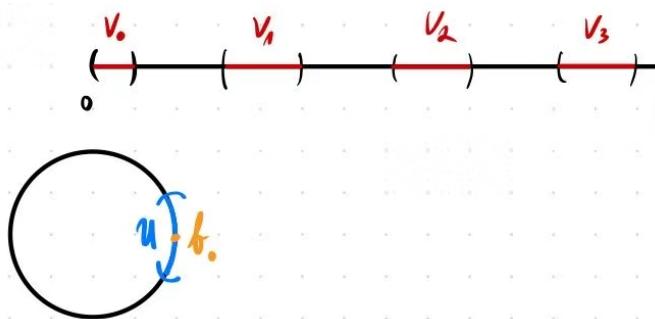
Beispiel 7.20:

Betrachte die Abbildung

$$p : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow S^1, \quad x \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

Diese Abbildung ist:

- surjektiv,
- lokal ein Homöomorphismus,
- aber **keine Überlagerung**.



Betrachte den Punkt $b_0 = (1, 0) \in S^1$. Jede kleine Umgebung $U \subseteq S^1$ von b_0 sollte durch p überdeckt werden.

Das Urbild $p^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ ist eine Vereinigung von Intervallen V_n , wobei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und

$$V_n = (n - \varepsilon, n + \varepsilon)$$

Diese Intervalle V_n werden jeweils homöomorph auf U abgebildet, aber für $V_0 = (0, \varepsilon)$ ist die Einschränkung nicht mehr homöomorph, da $\mathbb{R}_{>0}$ keinen Punkt unterhalb von $n = 0$ enthält, das Intervall nach links ist einfach abgeschnitten.

Beispiel

Die reellen Zahlen \mathbb{R} sind nicht die einzige zusammenhängende Überlagerung von S^1 . Man kann S^1 selbst als Teilmenge von \mathbb{C} betrachten, dann ist für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$p : S^1 \rightarrow S^1, \quad z \mapsto z^n$$

eine n -fache Überlagerungsabbildung. (Intuitiv wird n -mal umgewickelt)

Im Beispiel 7.20 haben wir gesehen, dass die Einschränkung einer Überlagerungsabbildung nicht automatisch wieder eine Überlagerung ist. Aber:

Satz 7.21 Sei $p : E \rightarrow B$ eine Überlagerungsabbildung.

Ist $B_0 \subseteq B$ ein Teilraum und $E_0 = p^{-1}(B_0)$, dann ist die Einschränkung

$$p_0 := p|_{E_0} : E_0 \rightarrow B_0$$

ebenfalls eine Überlagerungsabbildung.

Beweis. Sei $b_0 \in B_0$.

Da p eine Überlagerung ist, gibt es eine offene Menge $U \subseteq B$, sodass $b_0 \in U$ und $p^{-1}(U) = \bigsqcup_\alpha V_\alpha$, wobei jedes $V_\alpha \subseteq E$ offen ist und $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist.

Setze $U_0 := U \cap B_0$, dann ist $U_0 \subseteq B_0$ offen bzgl. der Teilraumtopologie.

Die Mengen $V'_\alpha := V_\alpha \cap E_0$ sind offen in E_0 , disjunkt, und

$$p|_{V'_\alpha} : V'_\alpha \rightarrow U_0$$

ist ein Homöomorphismus.

Also ist $p|_{E_0} : E_0 \rightarrow B_0$ eine Überlagerung. □

Satz 7.22

Sind $p : E \rightarrow B$ und $p' : E' \rightarrow B'$ Überlagerungsabbildungen, dann ist auch

$$p \times p' : E \times E' \rightarrow B \times B'$$

eine Überlagerungsabbildung.

Beweis. Sei $b \in B$, $b' \in B'$ und $U \subseteq B$, $U' \subseteq B'$ offene Umgebungen von b bzw. b' , die von p bzw. p' überlagert werden.

Seien $\{V_\alpha\}$ die Zerlegung von $p^{-1}(U)$ in Blätter von p , und $\{V'_\beta\}$ die Zerlegung von $p'^{-1}(U')$ in Blätter von p' .

Dann ist das Urbild der offenen Menge $U \times U' \subseteq B \times B'$ unter $p \times p'$ die Vereinigung der Mengen

$$\{V_\alpha \times V'_\beta\}$$

Diese sind offen, disjunkt, und bilden eine Überdeckung von $(p \times p')^{-1}(U \times U')$. Jede Einschränkung

$$(p \times p)|_{V_\alpha \times V'_\beta} : U_\alpha \times V'_\beta \rightarrow U \times U'$$

ist ein Homöomorphismus, da Produkte von Homöomorphismen Homöomorphismen sind. \square

Beispiel: Überlagerung des Torus durch die Ebene \mathbb{R}^2

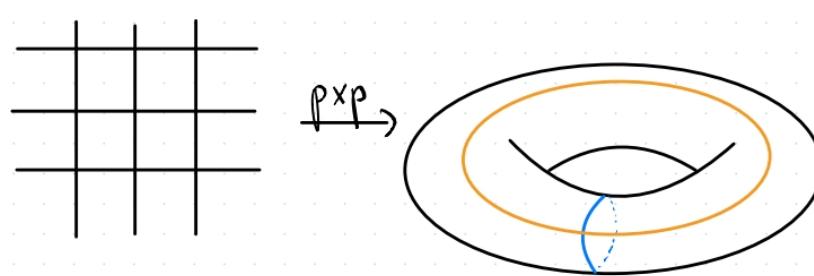
Betrachte den Torus $T = S^1 \times S^1$. Die Produktabbildung

$$p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \times S^1$$

ist eine Überlagerung des Torus durch die Ebene \mathbb{R}^2 , wobei p die Abbildung aus Satz 7.19 ist, also

$$p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)).$$

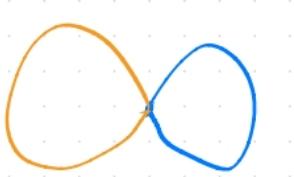
Jedes Einheitsquadrat $[n, n+1] \times [m, m+1]$ im Gitter \mathbb{R}^2 wird durch $p \times p'$ surjektiv und lokal homöomorph auf den Torus abgebildet.



Beispiel: Betrachte die Abbildung $p \times p$ aus dem vorherigen Beispiel. Sei $b_0 = p(0) \in S^1$ und

$$B_0 := \{(x, y) \in S^1 \times S^1 \mid x = b_0 \text{ oder } y = b_0\} \subseteq S^1 \times S^1.$$

Dann ist B_0 die Vereinigung von zwei Kreisen mit einem gemeinsamen Punkt – die sogenannte *Figure-Eight*.



Die Menge $E_0 = (p \times p)^{-1}(B_0) \subseteq \mathbb{R}^2$ ist das sogenannte „unendliche Gitter“:

$$E_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z} \text{ oder } y \in \mathbb{Z}\} = (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}).$$

(vgl. Bild oben) Die Einschränkung $p_0 = (p \times p)|_{E_0} : E_0 \rightarrow B_0$ ist eine Überlagerungsabbildung.

Beispiel: Die Abbildung

$$p \times \text{id} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}_{>0}$$

ist eine Überlagerung nach Satz 7.22.

Verwenden wir nun den Homöomorphismus (Skalierung des Einheitsvektors x mit dem Faktor t)

$$S^1 \times \mathbb{R}_{>0} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad (x, t) \mapsto tx,$$

dann ergibt die Verkettung eine Überlagerung

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \quad (x, t) \mapsto t(\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)).$$

7.4 Die Fundamentalgruppe des Kreises

Wir wollen den Zusammenhang zwischen der Fundamentalgruppe und (zusammenhängende) Überlagerungen untersuchen.

Definition 7.23

Sei $p : E \rightarrow B$ eine Abbildung. Sei $f : X \rightarrow B$ eine stetige Abbildung. Eine Anhebung von f ist eine Abbildung $\tilde{f} : X \rightarrow E$, sodass das $p \circ \tilde{f} = f$, also das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow j & \end{array}$$

Im Allgemeinen ist nicht klar, ob zu einer gegebenen Abbildung $f : X \rightarrow B$ eine Anhebung existiert oder in wie weit diese eindeutig ist.

Wir wollen diese Fragen untersuchen, falls p eine Überlagerung ist.

Beispiel: Sei $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ die Überlagerung definiert durch

$$p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)).$$

Der Weg $f : [0, 1] \rightarrow S^1$ startet bei $b_0 = (1, 0)$, gegeben durch

$$f(s) = (\cos(\pi s), \sin(\pi s)),$$

Eine Anhebung \tilde{f} von f , die bei $0 \in \mathbb{R}$ startet und endet bei $\frac{1}{2}$, ist

$$\tilde{f}(s) = \frac{s}{2}.$$

Im Allgemeinen gilt:

$$\tilde{f}_n(s) = \frac{s}{2} + n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

sind ebenfalls Anhebungen von f , aber mit anderem Endpunkt.

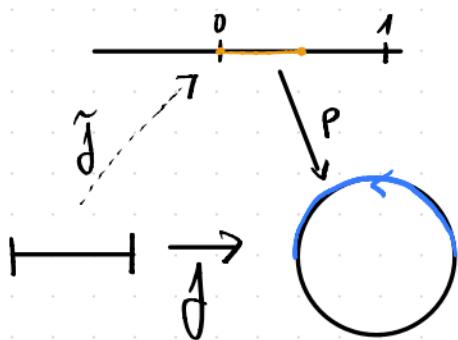
Weitere Beispiele:

- $g(s) = (\cos(\pi s), -\sin(\pi s))$ mit Anhebung $\tilde{g}(s) = -\frac{s}{2}$
- $h(s) = (\cos(4\pi s), \sin(4\pi s))$ mit Anhebung $\tilde{h}(s) = 2s$

Bemerkung: Die Identität $\text{id}_{S^1} : S^1 \rightarrow S^1$ hebt *nicht* zu einer Abbildung

$$\tilde{\text{id}} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

an – denn es existiert keine stetige Rückanhebung des gesamten Kreises.



Lemma 7.24 Sei $p : E \rightarrow B$ eine Überlagerung, sei $p(e_0) = b_0$. Jeder Weg $f : [0, 1] \rightarrow B$, der in b_0 beginnt, hat eine eindeutige Anhebung \tilde{f} zu einem Weg in E , der in e_0 beginnt. (Basispunkt fixiert)

Beweis. Überdecke B durch offene Mengen U , die durch p überdeckt werden. Zerlege $[0, 1]$ in $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$ so, dass $f([s_i, s_{i+1}]) \subseteq U$ für jede i in einer der Mengen U liegt. (Die Existenz einer solchen Zerlegung (schafft in endlichen Schritten) garantiert durch das *Lebesgue-Zahl-Lemma* (Da $[0, 1]$ kompakt)).

Wir definieren die Anhebung \tilde{f} stückweise.

Zunächst definieren wir $\tilde{f}(0) = e_0$. Ist $\tilde{f}(s)$ bereits für alle $0 \leq s \leq s_i$ definiert, so definieren wir \tilde{f} auf dem Intervall $[s_i, s_{i+1}]$ wie folgt:

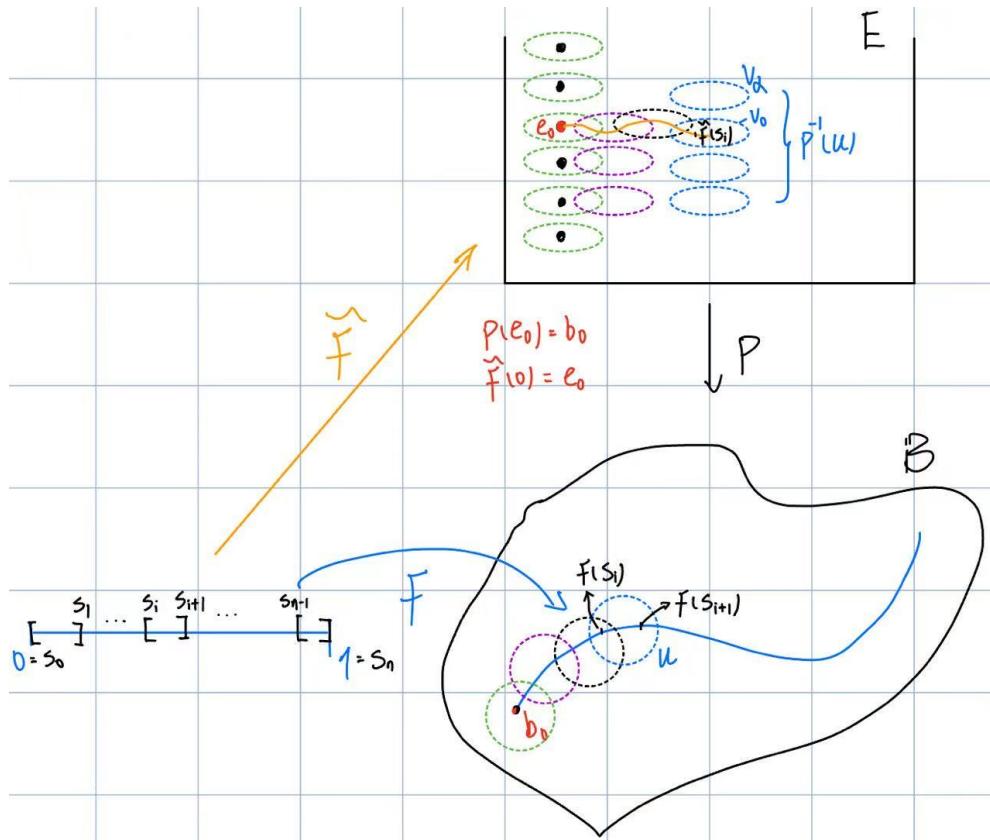
Die Menge $f([s_i, s_{i+1}])$ liegt in einer offenen Menge U , die durch p überdeckt wird. Sei $\{V_\alpha\}$ eine Zerlegung von $p^{-1}(U)$ in Blätter, d.h. jede dieser Mengen V_α wird durch p homöomorph auf U abgebildet.

Jetzt liegt $\tilde{f}(s_i)$ in einer der Mengen V_α sagen wir V_0 . Dann definieren wir $\tilde{f}(s)$ für $s \in [s_i, s_{i+1}]$ durch

$$\tilde{f}(s) := (p|_{V_0})^{-1}(f(s)).$$

Da $p|_{V_0} : V_0 \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist, ist \tilde{f} stetig auf $[s_i, s_{i+1}]$.

Fahren wir so fort, können wir \tilde{f} auf $[0, 1]$ definieren. Stetigkeit von \tilde{f} folgt, da \tilde{f} stetig auf $[s_i, s_{i+1}]$ und $[s_j, s_{j+1}] \cap [s_i, s_{i+1}]$ abgeschlossenen ist. Aus unserer Definition von \tilde{f} folgt, dass $p \circ \tilde{f} = f$



Zur Eindeutigkeit von \tilde{f} : Annahme: \tilde{f} ist eine Anhebung von f , die bei e_0 beginnt.
 Also $\tilde{f}(0) = e_0 = f(0)$: Wir nehmen an, dass $\tilde{f}(s) = f(s)$ für alle $0 \leq s \leq s_i$.
 Sei V_0 wie oben, dann ist \tilde{f} für $s \in [s_i, s_{i+1}]$ durch

$$\tilde{f}(s) := (p|_{V_0})^{-1}(f(s))$$

gegeben.

Was ist $\tilde{f}(s)$? Da \tilde{f} eine Anhebung von f ist, muss es das Intervall $[s_i, s_{i+1}]$ nach $p^{-1}(U) \cup V_\alpha$ abbilden.

Die Blätter V_α sind offen und disjunkt. Da $\tilde{f}([s_i, s_{i+1}])$ zusammenhängend ist (Bild von stetiger Abbildung unter zusammenhängendem Urbild), muss es vollständig in V_0 liegen.

$$\Rightarrow \text{Für } s \in [s_i, s_{i+1}] \text{ gilt also: } \tilde{f}(s) = y \text{ für ein } y \in V_0 \cap p^{-1}(f(s))$$

Aber es gibt nur ein solcher Punkt, nämlich $(p|_{V_0})^{-1}(f(s))$:

$$\Rightarrow \tilde{f}(s) = \tilde{f}(s) \quad \text{für alle } s \in [s_i, s_{i+1}]$$

□

Lemma 7.25 Sei $p : E \rightarrow B$ eine Überlagerung und $p(e_0) = b_0$. Sei

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow B$$

eine stetige Abbildung mit $F(0, 0) = b_0$. Dann gibt es eine eindeutige Anhebung von F zu einer stetigen Abbildung

$$\tilde{F} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow E$$

sodass $\tilde{F}(0, 0) = e_0$. Ist F eine Homotopie von Wegen, dann auch \tilde{F} .

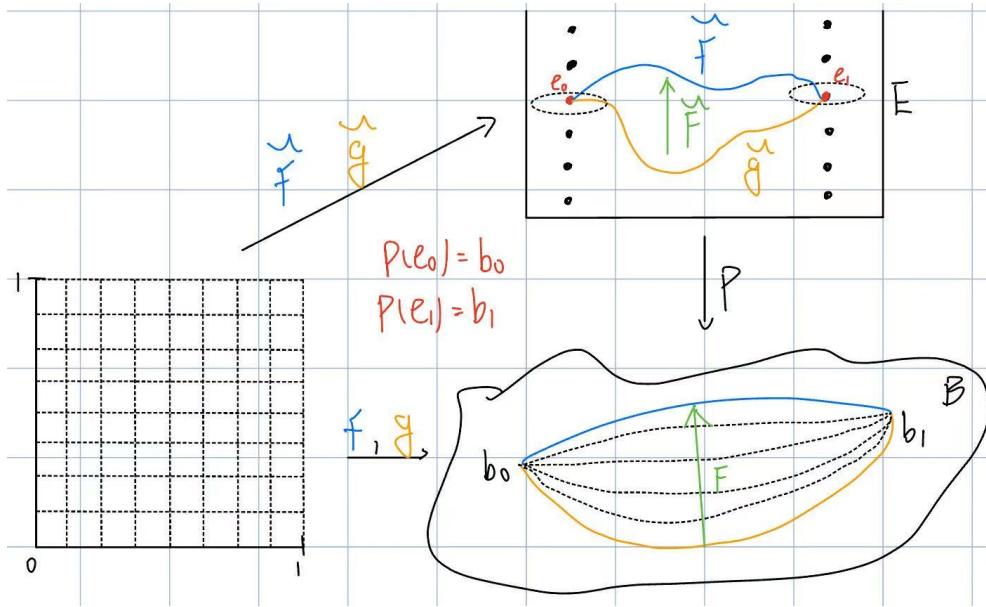
Beweis. Analog mit 7.24

□

Satz 7.26 Sei $p : E \rightarrow B$ eine Überlagerung, sei $p(e_0) = b_0$.

Seien f und g zwei Wege in B von b_0 nach b_1 . Weiter seien \tilde{f} und \tilde{g} ihre Anhebungen zu Wegen in E , die in e_0 starten.

Sind f und g weghomotop, so enden \tilde{f} und \tilde{g} am selben Punkt von E und sind weghomotop.



Beweis. Sei $\mathcal{F} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow B$ eine Weghomotopie zwischen f und g . Dann gilt $\mathcal{F}(0, 0) = b_0$.

Sei $\tilde{\mathcal{F}} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow E$ die Anhebung von \mathcal{F} zu E mit $\tilde{\mathcal{F}}(0, 0) = e_0$.

Aufgrund des vorherigen Lemmas ist $\tilde{\mathcal{F}}$ eine Weghomotopie, sodass

$$\tilde{\mathcal{F}}(0 \times [0, 1]) = e_0 \quad \text{und} \quad \tilde{\mathcal{F}}(1 \times [0, 1]) = e_1.$$

Die Einschränkung von $\tilde{\mathcal{F}}$ auf $[0, 1] \times \{0\}$ ist ein Weg in E , der in e_0 beginnt und $F|_{[0,1] \times 0}$ anhebt, aufgrund der Eindeutigkeit von Weganhebungen folgt

$$\tilde{\mathcal{F}}(s, 0) = \tilde{f}(s).$$

Ähnlich folgt

$$\tilde{\mathcal{F}}(s, 1) = \tilde{g}(s).$$

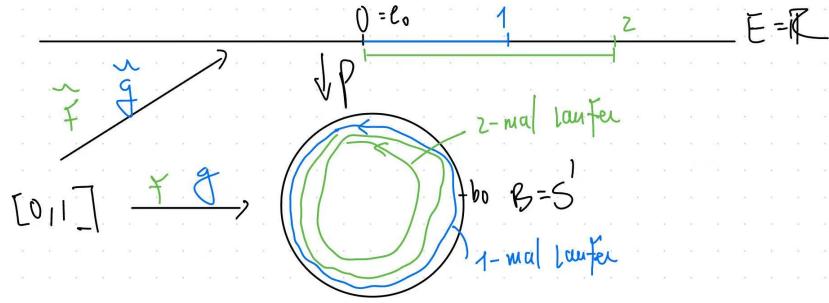
Daher enden \tilde{f} und \tilde{g} im selben Punkt e_1 , und $\tilde{\mathcal{F}}$ ist eine Weghomotopie. \square

Definition 7.26 1/2

Sei $p : E \rightarrow B$ eine Überlagerung, $b_0 \in B$. Wähle $e_0 \in E$ mit $p(e_0) = b_0$. Gegeben $[f] \in \pi_1(B, b_0)$, sei \tilde{f} eine Anhebung von f zu einem Weg in E , der in e_0 beginnt. Bezeichne den Endpunkt $\tilde{f}(1)$ von \tilde{f} mit $\phi([f])$. Dann ist ϕ eine wohldefinierte Abbildung zwischen den Mengen

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \longrightarrow p^{-1}(b_0).$$

Wir nennen ϕ die Anhebungskorrespondenz abgebildet von der Überlagerungsabbildung p . Diese hängt natürlich von der Wahl von e_0 ab.



Theorem 7.27 Sei $p : E \rightarrow B$ eine Überlagerung, sei $p(e_0) = b_0$. Ist E wegzusammenhängend, dann ist die Anhebungskorrespondenz

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \longrightarrow p^{-1}(b_0)$$

surjektiv. Ist E zusätzlich einfach zusammenhängend, dann ist die Abbildung bijektiv.

Beweis. Sei E wegzusammenhängend. Gegeben $e_1 \in p^{-1}(b_0)$, dann gibt es einen Weg \tilde{f} in E von e_0 nach e_1 . Dann ist $f = p \circ \tilde{f}$ ein Schlaufe in B mit Basispunkt b_0 und $\phi([f]) = e_1$ per Definition.

Sei E zusätzlich einfach zusammenhängend. Seien $[f], [g]$ zwei Elemente von $\pi_1(B, b_0)$ mit $\phi([f]) = \phi([g])$. Dann sind die Anhebungen \tilde{f}, \tilde{g} von f bzw. g Wege in E , die in e_0 beginnen, dann gilt $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$. Da E einfach zusammenhängend ist, gibt es eine Weg-Homotopie \tilde{F} zwischen \tilde{f} und \tilde{g} . Dann ist $H = p \circ \tilde{F}$ eine Weg-Homotopie in B zwischen f und g , also $[f] = [g]$. \square

Satz 7.28 Die Fundamentalgruppe von S^1 ist isomorph zu $(\mathbb{Z}, +)$.

Beweis. Sei $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ die Überlagerung $p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$, mit $e_0 = 0 \in \mathbb{R}$ und $b_0 = p(e_0)$. Dann gilt $p^{-1}(b_0) = \mathbb{Z}$. Da \mathbb{R} einfach zusammenhängend ist, ist die Abbildung (Anhebungskorrespondenz)

$$\phi : \pi_1(S^1, b_0) \longrightarrow \mathbb{Z} = p^{-1}(b_0)$$

bijektiv nach 7.27.

Wir zeigen, dass ϕ ein Homomorphismus ist. Seien $[f], [g] \in \pi_1(S^1, b_0)$, und seien \tilde{f} und \tilde{g} die zugehörigen Anhebungen, die in $0 \in \mathbb{R}$ beginnen. Sei

$$n = \tilde{f}(1), \quad m = \tilde{g}(1), \quad \text{also } \phi([f]) = n, \quad \phi([g]) = m$$

Sei nun \tilde{g} definiert durch

$$\tilde{g}(s) = n + \tilde{g}(s)$$

Da $p(n + x) = p(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist \tilde{g} eine Anhebung von g , die in n beginnt. Damit ist das Produkt $\phi([\tilde{f} * \tilde{g}])$ definiert und eine Anhebung von $f * g$ ($n+m$ mal rumgelaufene Kurve), die in 0 beginnt.

Der Endpunkt ist $\tilde{g}(1) = n + m$. Aus der Definition folgt also:

$$\phi([f] * [g]) = n + m = \phi([f]) + \phi([g])$$

Also ist ϕ ein Gruppenhomomorphismus. Da ϕ bijektiv ist, folgt daraus, dass

$$\pi_1(S^1, b_0) \cong \mathbb{Z}.$$

□

Satz 7.29 Sei $p : E \rightarrow B$ eine Überlagerung und $p(e_0) = b_0$.

1. Der Homomorphismus

$$p_* : \pi_1(E, e_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0)$$

ist injektiv.

2. Sei $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$. Die *Anhebungskorrespondenz* ϕ induziert eine injektive Abbildung

$$\Phi : \pi_1(B, b_0)/H \longrightarrow p^{-1}(b_0),$$

wobei $\pi_1(B, b_0)/H$ die Menge der Rechtsnebenklassen von H bezeichnet.

Die Abbildung ist bijektiv, falls E wegzusammenhängend ist.

3. Ist $[f] \in \pi_1(B, b_0)$, so gilt

$$[f] \in H \Leftrightarrow f \text{ hebt sich zu einer Schlaufe mit Basispunkt } e_0 \text{ in } E \text{ an.}$$

7.5 Äquivalenz von Überlagerungen

Vorbereitung: Sei $p : E \rightarrow B$ eine Überlagerung.

Wir nehmen an, dass B lokal wegzusammenhängend ist. Zerlegen wir B in die wegzusammenhängenden Komponenten B_α , so ist die Einschränkung von p auf $p^{-1}(B_\alpha) \rightarrow B_\alpha$ ebenfalls eine Überlagerung (siehe Satz 7.21). Daher beschränken wir uns auf wegzusammenhängend B .

Ist E_α eine Weg-Zusammenhangskomponente von E , dann ist die Einschränkung von p auf $E_\alpha \rightarrow B$ eine Überlagerung (siehe unten Lemma 7.37).

Daher sind alle Überlagerungen des lokal wegzusammenhängenden Raumes B bestimmt durch die wegzusammenhängenden Überlagerungen der weg-zusammenhangs-komponenten von B .

Konvention: Für die folgenden Kapitel nehmen wir für eine Überlagerung $p : E \rightarrow B$ an, dass E und B

- wegzusammenhängend
- lokal wegzusammenhängend

sind (wenn nichts anderes gesagt wird).

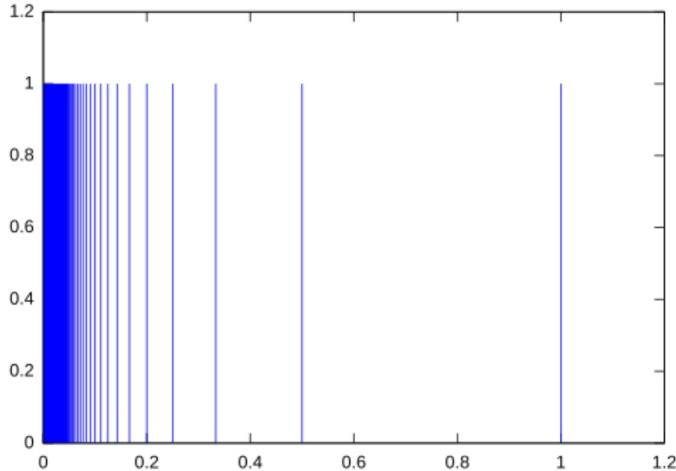


Abbildung 33: Topologischer Kamm: wegzusammenhängend aber nicht lokal-wegzusammenhängend

Erinnerung: Ist $p : E \rightarrow B$ eine Überlagerung mit $p(e_0) = b_0$, dann ist der induzierte Homomorphismus

$$p_* : \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$$

injektiv. Setze $H_0 := \text{im}(p_*) = p_*(\pi_1(E, e_0))$. H_0 ist eine Untergruppe von $\pi_1(B, b_0)$, welche isomorph zu $\pi_1(E, e_0)$ ist.

Ziel: H_0 bestimmt die Überlagerung $p : E \rightarrow B$ bis auf Äquivalenz.

Für sinnvoll gewählte Räume B bestimmt jede Untergruppe von $\pi_1(B, b_0)$ eine Überlagerung. (*morgen*)

Idee: Das ist das Prinzip der algebraischen Topologie: Übersetze ein topologisches Problem in ein algebraisches.

Wir werden Satz 7.29 benutzen.

Definition 7.30: Seien $p : E \rightarrow B$ und $p' : E' \rightarrow B$ Überlagerungen. Wir sagen, dass sie äquivalent sind, falls es einen Homöomorphismus

$$h : E \rightarrow E'$$

mit $p' \circ h = p$ gibt. Der Homöomorphismus heißt eine Äquivalenz von Überlagerungsabbildungen oder ein Äquivalenz von Überlagerungsräumen.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & E' \\ \searrow p & & \swarrow p' \\ & B & \end{array}$$

Seien $p : E \rightarrow B$ und $p' : E' \rightarrow B$ Überlagerungen, so dass

$$H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0)) = p'_*(\pi_1(E', e'_0)) =: H'_0.$$

Ziel: Zeige: Die Überlagerungen sind äquivalent. Dafür brauchen wir

Lemma 7.31 (Das allgemeine Anhebungsschema)

Sei $p : E \rightarrow B$ eine Überlagerung und $p(e_0) = b_0$. Sei $f : Y \rightarrow B$ eine stetige Abbildung mit $f(y_0) = b_0$. Zusätzlich sei Y wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann besitzt die Abbildung f genau dann eine Anhebung

$$\tilde{f} : Y \rightarrow E \quad \text{mit} \quad \tilde{f}(y_0) = e_0,$$

wenn die induzierte Abbildung $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0))$ gilt.
Diese Anhebung ist dabei eindeutig (falls es existiert).

Beweis. \Rightarrow : Wenn eine Anhebung existiert, dann gilt $f = p \circ \tilde{f}$.

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) = p_* \left(\tilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0)) \right) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0))$$

Zusatz (Eindeutigkeit): Sei $y_1 \in Y$, wähle einen Weg α in Y von y_0 nach y_1 .
Bilde den Weg $f \circ \alpha$ in B und hebe diesen zu einem Weg γ in E , der in e_0 beginnt.
Falls es eine Anhebung $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ von f gibt, dann muss

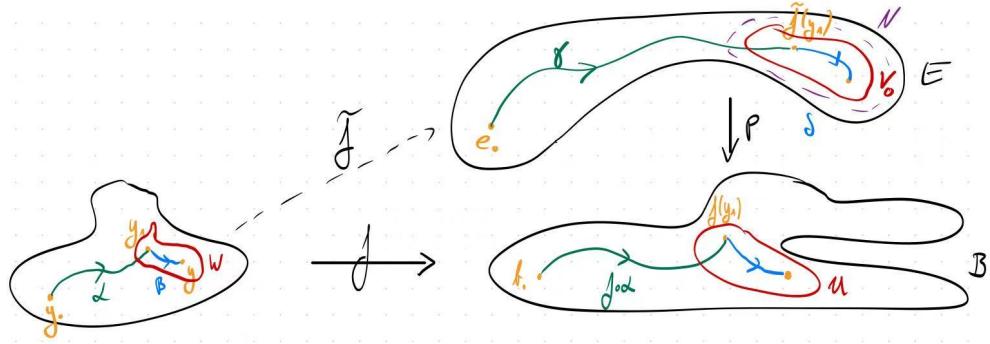
$$\tilde{f}(y_1) = \gamma(1)$$

gelten, da $\tilde{f} \circ \alpha$ ein Anhebung von $f \circ \alpha$ ist, das in e_0 beginnt.
Solche Weganhebungen sind eindeutig.

\Leftarrow : Der Eindeutigkeitsbeweis gibt uns eine Idee, was zu tun ist.

Sei $y_1 \in Y$, wähle einen Weg α in Y von y_0 nach y_1 . Bilde den Weg $f \circ \alpha$ und hebe diesen zu einem Weg γ in E , der in e_0 beginnt. Definiere dann:

$$\tilde{f}(y_1) := \gamma(1),$$



Die Wohldefiniertheit von \tilde{f} , also die Unabhängigkeit von der Wahl des Weges α , ist etwas Arbeit. Sobald dies bewiesen ist, können wir die Stetigkeit von \tilde{f} herleiten.

Stetigkeit: In $y_1 \in Y$. Wir zeigen: Gegeben eine Umgebung N von $\tilde{f}(y_1)$, dann gibt es eine Umgebung W von y_1 derart, dass $\tilde{f}(W) \subseteq N$.

Wir schaffen dies, indem wir eine wegzusammenhängende Umgebung U von $f(y_0)$ wählen, die von p überlagert wird.

Zerlege $p^{-1}(U)$ in Blätter und sei V_0 das Blatt, das $\tilde{f}(y_1)$ enthält. Durch Ersetzen von U durch eine kleinere Umgebung von $f(y_1)$, können wir $V_0 \subseteq N$ annehmen. Sei $p_0 : V_0 \rightarrow U$ die Einschränkung von p , dann ist p_0 ein Homöomorphismus.

Weil f stetig in y_1 ist und Y lokal wegzusammenhängend, gibt es eine wegzusammenhängende Umgebung W von y_1 , so dass $f(W) \subseteq U$. Wir zeigen jetzt $\tilde{f}(W) \subseteq V_0$, was unsere Behauptung zeigt.

Gegeben $y \in W$, wähle einen Weg β in W von y_1 nach y . Da \tilde{f} wohldefiniert ist, erhalten wir $\tilde{f}(y)$, indem wir den Weg $\alpha * \beta$ von y_0 nach y betrachten, den Weg $f \circ (\alpha * \beta)$ zu einem Weg in E anheben und $\tilde{f}(y)$ als den Endpunkt des angehebenen Weges definieren

Sei γ eine Anhebung die in e_0 beginnt.

Da der Weg $f \circ \gamma$ vollständig in U liegt ist der Weg $\delta = p_0^{-1} \circ f \circ \beta$ eine Anhebung die in $\tilde{f}(y_1)$ beginnt. Dann ist $\gamma * \delta$ eine Anhebung von $f \circ (\alpha * \beta)$, die in e_0 beginnt, und endet in $\delta(1) \in V_0$
 $\Rightarrow \tilde{f}(W) \subseteq V_0$.

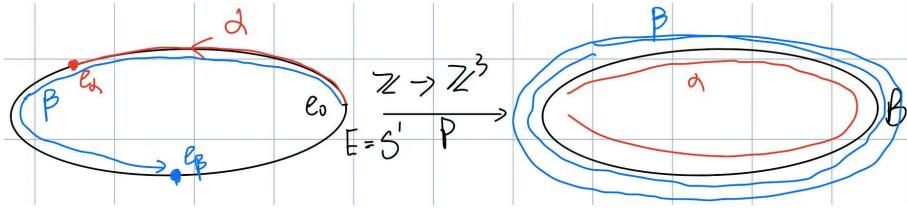


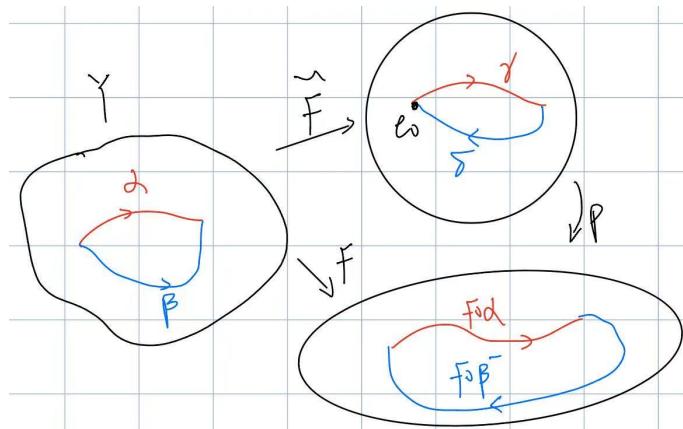
Abbildung 34: verhinderte Situation: nach Anhebung enden zwei Kurven nicht in demselben Punkt

Wohldefiniertheit: Seien α und β zwei Wege in Y von y_0 nach y_1 .

Wir müssen zeigen: Heben wir die Wege $f \circ \alpha$ und $f \circ \beta$ zu Wegen in E an, die in e_0 beginnen, dann enden die Anhebungen im selben Punkt.

Hebe $f \circ \alpha$ zu einem Weg γ in E und der in e_0 beginnt, dann haben wir $f \circ \beta^-$ zu einem Weg δ an der in $\gamma(1)$ beginnt.

Dann ist $\gamma * \delta$ eine Anhebung der Schlaufe $f \circ (\alpha * \beta^-)$.



Laut Annahme gilt:

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

$$\Rightarrow [f \circ (\alpha * \beta^-)] \in \text{im}(p_*)$$

Nach Satz 7.29 ist die Anhebung $\gamma * \delta$ eine Schleife in E .

$\Rightarrow \tilde{f}$ ist wohldefiniert, denn δ^- ist eine Anhebung von $f \circ \beta$ die in e_0 beginnt, und γ ist eine Anhebung von $f \circ \alpha$ die in e_0 beginnt und beide Anhebungen endet in selbe Punkt in E . \square

Satz 7.32:

Seien $p : E \rightarrow B$ und $p' : E' \rightarrow B$ Überlagerungen mit $p(e_0) = b_0 = p'(e'_0)$. Dann gibt es eine Äquivalenz $h : E \rightarrow E'$ mit $h(e_0) = e'_0$ genau dann, wenn die Gruppen

$$H_0 := p_*(\pi_1(E, e_0)), \quad H'_0 := p'_*(\pi_1(E', e'_0)).$$

gleich sind.

Falls h existiert, ist es eindeutig.

Beweis. (\Rightarrow): Sei h gegeben. Da h ein Homöomorphismus ist, gilt:

$$h_*(\pi_1(E, e_0)) = \pi_1(E', e'_0) \quad (*)$$

Da $p = p' \circ h$, folgt

$$H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0)) = (p' \circ h)_*(\pi_1(E, e_0)) \stackrel{(*)}{=} p'_*(\pi_1(E', e'_0)) = H'_0$$

(\Leftarrow): Sei $H_0 = H'_0$, wir wollen die Existenz von h zeigen. Dafür verwenden wir das vorherige Lemma (viermal).

Betrachte die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} E & & E' \\ \searrow p & & p' \swarrow \\ & B & \end{array}$$

Da p' eine Überlagerung ist und E wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist, gibt es eine Abbildung

$$h : E \rightarrow E' \quad \text{mit} \quad h(e_0) = e'_0,$$

welche p anhebt (d.h. $p = p' \circ h$).

Durch Vertauschen der Rollen von E und E' erhalten wir analog eine Abbildung

$$k : E' \rightarrow E \quad \text{mit} \quad k(e'_0) = e_0 \quad \text{s.d.} \quad p \circ k = p'.$$

Betrachte nun die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} E & & E \\ \searrow p & & p \swarrow \\ & B & \end{array}$$

Dann ist $k \circ h : E \rightarrow E$ eine Anhebung von p mit Anfangspunkt $k \circ h(e_0) = e_0$, denn

$$p \circ (k \circ h) = p' \circ h = p$$

Da aber die Identität id_E ebenfalls eine Anhebung von p mit Anfangspunkt e_0 ist und solche Anhebungen eindeutig sind, folgt

$$k \circ h = \text{id}_E.$$

Wiedehole das Argument für $h \circ k$ und $\text{id}_{E'}$ um den Beweis abzuschließen (h ist das gesuchte Homöomorphismus). □

Wir haben die Frage nach der Äquivalenz schön gelöst. Aber wir haben einen subtilen Punkt nicht diskutiert.

Satz 7.32 gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Äquivalenz $h : E \rightarrow E'$, welche e_0 auf e'_0 abbildet. Aber wir haben noch keine Bedingung für die generelle Existenz einer Äquivalenz gefunden. Es könnte sein, dass es keine Äquivalenz gibt, die e_0 auf e'_0 abbildet, wohl aber eine Äquivalenz, die e_0 auf einen anderen Punkt $e'_1 \in (p')^{-1}(b_0)$ abbildet.

Können wir diese Frage vielleicht auf H_0 und H'_0 zurückführen?

Erinnerung:

Sind H_1, H_2 Untergruppen von G , die Gruppen heißen *konjugiert*, falls es ein $\alpha \in G$ mit

$$H_2 = \alpha H_1 \alpha^{-1}$$

gibt. Mit anderen Worten: Sie sind konjugiert, falls der Gruppenautomorphismus

$$x \mapsto \alpha x \alpha^{-1}$$

die Gruppe H_1 auf H_2 abbildet.

Konjugation ist eine Äquivalenzrelation auf den Untergruppen von G .

Die Äquivalenzklasse der Untergruppe H heißt **Konjugationsklasse** von H .

Lemma 7.33:

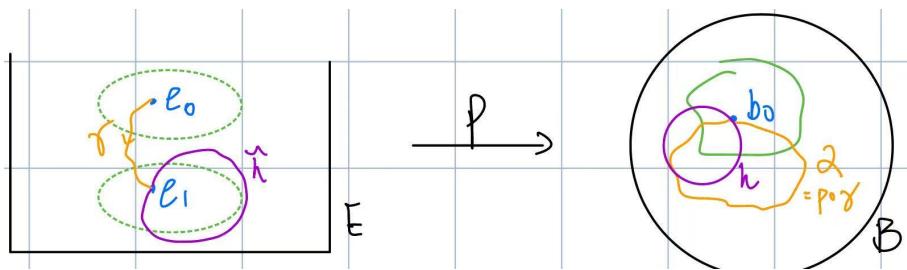
Sei $p : E \rightarrow B$ eine Überlagerung. Seien $e_0, e_1 \in p^{-1}(b_0)$ und $H_i := p_*(\pi_1(E, e_i))$.

- (i) Ist γ ein Weg in E von e_0 nach e_1 , und sei $\alpha := p \circ \gamma$ die Schlaufe in B , dann gilt die Gleichung:

$$H_0 = [\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1},$$

also sind H_0 und H_1 konjugiert in $\pi_1(B, b_0)$.

- (ii) Umgekehrt: Seien $e_0 \in E$ und $H \subseteq \pi_1(B, b_0)$ eine Untergruppe, die konjugiert zu H_0 ist, also Dann gibt es einen Punkt $e_1 \in p^{-1}(b_0)$, sodass $H_1 = H$.



Beweis. Zu (i): Zuerst zeigen wir

$$[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} \subseteq H_0.$$

Gegeben $[h] \in H_1$, es gilt

$$[h] = p_*([\tilde{h}])$$

für eine Schlaufe \tilde{h} in E mit Basispunkt e_1 .

Sei $\tilde{k} = (\gamma * \tilde{h}) * \gamma^-$, dies ist eine Schlaufe mit Basispunkt e_0 , und

$$\begin{aligned} p_*([\tilde{k}]) &= p_*\left([(\gamma * \tilde{h}) * \gamma^-]\right) \\ &= \left[(p \circ \gamma) * (p \circ \tilde{h}) * (p \circ \gamma^-)\right] \\ &= [\alpha * h * \alpha^{-1}] \\ &= [\alpha] * [h] * [\alpha]^{-1}. \end{aligned}$$

Zeige nun $H_0 \subseteq [\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1}$:

Beobachte: γ^- ein Weg in E von e_1 nach e_0 , und

$$\alpha^- := p \circ \gamma^-$$

Aus dem vorherigen Argument folgt:

$$[\alpha^-] * H_0 * [\alpha] \subseteq H_1. \implies H_0 \subseteq [\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1}$$

\Rightarrow Behauptung (i) ist gezeigt.

Zu (ii): Um die Umkehrung zu beweisen, seien $e_0 \in E$ und H konjugiert zu H_0 gegeben.

Dann gilt:

$$H_0 = [\alpha] * H * [\alpha]^{-1}$$

für eine Schleife α in B mit Basispunkt b_0 .

Sei γ eine Anhebung von α zu einem Weg in E , der in e_0 beginnt.

Setze $e_1 := \gamma(1)$.

a) impliziert:

$$H_0 = [\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1}$$

$$\Rightarrow H = H_1$$

□

Satz 7.34:

Seien $p : E \rightarrow B$ und $p' : E' \rightarrow B$ Überlagerungen mit $p(e_0) = b_0 = p'(e'_0)$.

Die Überlagerungen p und p' sind genau dann äquivalent, wenn die Untergruppen

$$H_0 := p_*(\pi_1(E, e_0)) \quad \text{und} \quad H'_0 := p'_*(\pi_1(E', e'_0))$$

von $\pi_1(B, b_0)$ konjugiert sind.

Beweis. Sei $h : E \rightarrow E'$ eine Äquivalenz mit $e'_1 = h(e_0)$ und $H'_1 = p'_*(\pi_1(E', e'_1))$.

$$\stackrel{7.32}{\Rightarrow} H_0 = H'_1$$

und nach dem vorherigen Lemma ist H'_1 zu H_0 konjugiert.

Umgekehrt: Seien H_0 und H'_1 konjugiert. Dann besagt Lemma 7.33, dass es ein $e'_1 \in E'$ gibt, sodass

$$H'_1 = H_0.$$

Nach Satz 7.32 existiert dann eine Äquivalenz $h : E \rightarrow E'$ mit $h(e_0) = e'_1$. \square

Beispiel 7.35:

Sei $B = S^1$. Dann ist $\pi_1(S^1, b_0) \cong \mathbb{Z}$ ist abelsch. Deswegen sind zwei Untergruppen von $\pi_1(S^1, b_0)$ konjugiert genau dann, wenn sie gleich sind.

$$H' = [\alpha] * H * [\alpha^-] = H * [\alpha] * [\alpha^-] = H$$

\Rightarrow Zwei Überlagerungen von S^1 sind genau dann äquivalent, wenn sie zur selben Untergruppe gehören.

Wir haben gesehen: $\pi_1(S^1, b_0) \cong (\mathbb{Z}, +)$

Die Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$ sind die Gruppen $G_n := \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Die Überlagerung $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi it}$, gehört zur trivialen Untergruppe $\{0\}$, da \mathbb{R} einfach zusammenhängend ist.

Für die Überlagerung $p : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$, wobei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, bildet p_* einen Erzeuger von $\pi_1(S^1, b_0)$ auf n mal diesen Erzeuger ab, also:

$$(p_n)_*(\pi_1(S^1, b_0)) = G_n.$$

Aus dem vorherigen Satz folgt: Jede wegzusammenhängende Überlagerung zu einer von diesen äquivalent ist.

7.6 Die universelle Überlagerung

Definition 7.36:

Sei $p : E \rightarrow B$ eine Überlagerung mit $p(e_0) = b_0$. Ist E einfach zusammenhängend, dann heißt E eine universelle Überlagerung von B .

Da $\pi_1(E, e_0)$ trivial ist, korrespondiert diese Überlagerung zur trivialen Untergruppe von $\pi_1(B, b_0)$.

Laut Satz 7.34 sind zwei universelle Überlagerungen von B äquivalent. Deshalb sprechen wir von *der* universellen Überlagerung.

Nicht jeder topologische Raum B besitzt eine universelle Überlagerung.

Für den Moment nehmen wir an, dass B eine universelle Überlagerung besitzt, und wollen einige Konsequenzen daraus sehen.

Lemma 7.37:

Sei B wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Sei $p : E \rightarrow B$ eine Überlagerung (wobei E nicht notwendigerweise wegzusammenhängend ist). Ist E_0 eine Wegzusammenhangskomponente von E , dann ist die Einschränkung

$$p_0 : E_0 \rightarrow B$$

von p eine Überlagerung.

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass p_0 surjektiv ist.

Da E lokal Homöomorph zu B ist und E lokal wegzusammenhängend ist, folgt:

$$\Rightarrow E_0 \text{ offen in } E \quad \Rightarrow p(E_0) \subseteq B \text{ ist offen}$$

Bleibt zu zeigen: $p(E_0) \subseteq B$ ist abgeschlossen. Dann folgt $p(E_0) = B$, da B zusammenhängend.

Sei nun $x \in \overline{p(E_0)}$ und U eine wegzusammenhängende Umgebung von x , die von p überlagert wird. Da U einen Punkt aus $p(E_0)$ enthält, gibt es ein Blatt $V_\alpha \subseteq p^{-1}(U)$, welche E_0 schneidet. Da V_α homöomorph zu U ist, ist V_α wegzusammenhängend ist, folgt $V_\alpha \subseteq E_0$.

$$\Rightarrow p(V_\alpha) \stackrel{\text{Def. ÜL}}{=} U \subseteq p(E_0) \text{ insbesonders } x \in p(E_0)$$

Es bleibt zu zeigen, dass $p_0 : E_0 \rightarrow B$ eine Überlagerung ist.

Sei $x \in B$, wähle eine Umgebung U wie oben. Ist V_α ein Blatt von $p^{-1}(U)$, dann ist V_α wegzusammenhängend und falls es E_0 schneidet, dann ist es in E_0 enthalten.

$\Rightarrow p_0^{-1}(U)$ ist die Vereinigung der Blätter V_α , die E_0 schneidet, jedes dieser Blätter ist offen in E_0 und wird durch p_0 homöomorph auf U abgebildet.

$\Rightarrow U$ wird von p_0 überlagert.

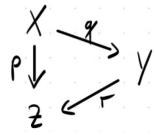
□

Lemma 7.38:

Seien p, q und r stetige Abbildungen mit

$$p = r \circ q$$

und folgendem kommutativen Diagramm:



(Es werde außerdem angenommen, dass X, Y, Z lokal wegzusammenhängend und wegzusammenhängend sind.)

- (i) Sind p und r Überlagerungen, dann auch q .
- (ii) Sind p und q Überlagerungen, dann auch r .

Beweis (nur für (i)). Sei $x_0 \in X$, setze $y_0 := q(x_0)$ und $z_0 := p(x_0)$. Wir nehmen also an, dass p und r Überlagerungen sind.

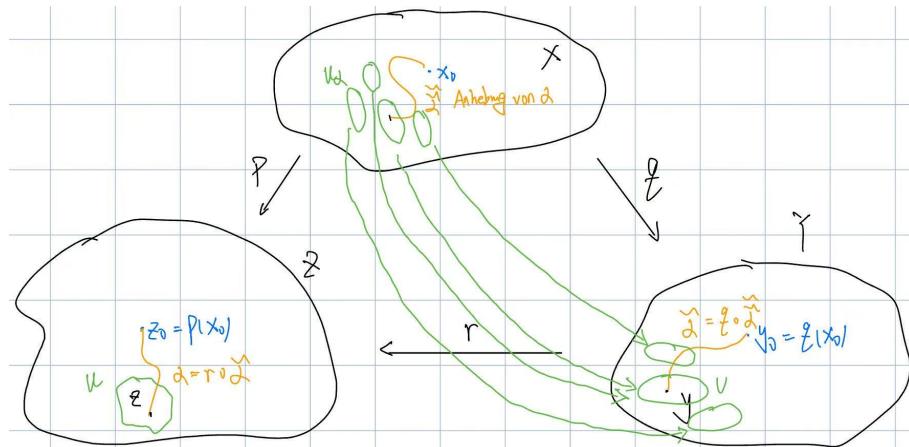
Zuerst zeigen wir, dass q surjektiv ist.

Sei $y \in Y$, wähle einen Weg $\tilde{\alpha}$ in Y von y_0 nach y . Dann ist $\alpha = r \circ \tilde{\alpha}$ ein Weg in Z , der in z_0 beginnt.

Sei $\tilde{\alpha}$ eine Anhebung von α zu einem Weg in X , der in x_0 beginnt. Dann ist $q \circ \tilde{\alpha}$ eine Anhebung von α nach Y , die in y_0 beginnt. Nach der Eindeutigkeit von Weghebungen folgt: $\tilde{\alpha} = q \circ \tilde{\alpha}$ auf den Endpunkt von $\tilde{\alpha}$ abbildet. Also ist q surjektiv.

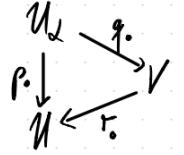
Gegeben $y \in Y$, wir suchen eine Umgebung von y , die von q überdeckt wird. Sei $z := r(y)$. Da p und r Überlagerungen sind, finden wir eine wegzusammenhängende Umgebung U von z , die von p und r überdeckt wird. Sei V das Blatt von $r^{-1}(U)$, das y enthält. Wir wollen zeigen: V wird von q überdeckt.

Sei $\{U_\alpha\}$ eine Sammlung der Blätter von $p^{-1}(U)$. Dann bildet q jede Menge U_α auf $r^{-1}(U)$ ab. Da U_α zusammenhängend ist, wird U_α auf ein einzelnes Blatt von $r^{-1}(U)$ abgebildet. Daher besteht $q^{-1}(V)$ aus der Vereinigung der Blätter U_α , die durch q auf V abgebildet werden.



Es ist leicht zu sehen, dass jedes U_α durch q homöomorph auf V abgebildet wird.

Seien p_0, q_0 und r_0 die Abbildungen, die wir durch Einschränken von p, q bzw. r erhalten:



Da p_0 und r_0 Homöomorphismen sind, so ist auch

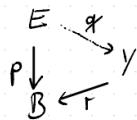
$$q_0 = r_0^{-1} \circ p_0$$

ein Homöomorphismus.

□

Satz 7.39:

Sei $p : E \rightarrow B$ eine Überlagerung, wobei E einfach zusammenhängend sei. Gegeben eine Überlagerung $r : Y \rightarrow B$, dann gibt es eine Überlagerung $q : E \rightarrow Y$ mit $r \circ q = p$.



Dieser Satz zeigt, warum wir E eine *universelle Überlagerung* nennen: E überlagert jede Überlagerung von B .

Beweis. Sei $b_0 \in B$, wähle e_0 und y_0 mit $p(e_0) = b_0 = r(y_0)$. Wir konstruieren q durch Lemma 7.31:

Die Abbildung r ist eine Überlagerung und die Bedingung

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) \subseteq r_*(\pi_1(Y, y_0))$$

ist erfüllt, da E einfach zusammenhängend ist.

⇒ Es gibt eine Abbildung $q : E \rightarrow Y$ mit $r \circ q = p$ und $q(e_0) = y_0$.

Laut dem vorherigem Lemma folgt, dass q eine Überlagerung ist. □

Lemma 7.40

Sei $p : E \rightarrow B$ eine Überlagerung mit $p(e_0) = b_0$. Ist E einfach zusammenhängend, dann besitzt b_0 eine Umgebung U , sodass die Inklusion $\iota : U \hookrightarrow B$ den trivialen Homomorphismus (also Nullabbildung)

$$\iota_* : \pi_1(U, b_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0)$$

induziert.

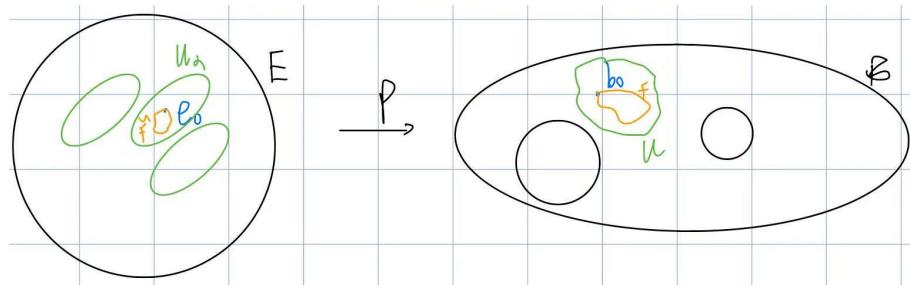
Beweis. Sei U eine Umgebung von b_0 , die von p überlagert wird, zerlege $p^{-1}(U)$ in Blätter. Sei U_α das Blatt, das e_0 enthält.

Sei f eine Schleife in U mit Basispunkt b_0 .

Da p ein Homöomorphismus zwischen U_α und U ist, hebt die Schlaufe f zu einer Schlaufe \tilde{f} in U_α mit Basispunkt e_0 an.

Da E einfach zusammenhängend ist, gibt es eine Homotopie \tilde{F} in E zwischen \tilde{f} und der konstanten Schlaufe e_0 .

$\Rightarrow p \circ \tilde{F}$ ist eine Weg-Homotopie zwischen f und der konstanten Schleife b_0 .



□

Beispiel. Sei X der Hawaiianische Ohrring. Ist C_n ein Kreis mit Radius $\frac{1}{n}$ in der Ebene mit Mittelpunkt $(\frac{1}{n}, 0)$, dann ist X die Vereinigung der Kreise C_n .

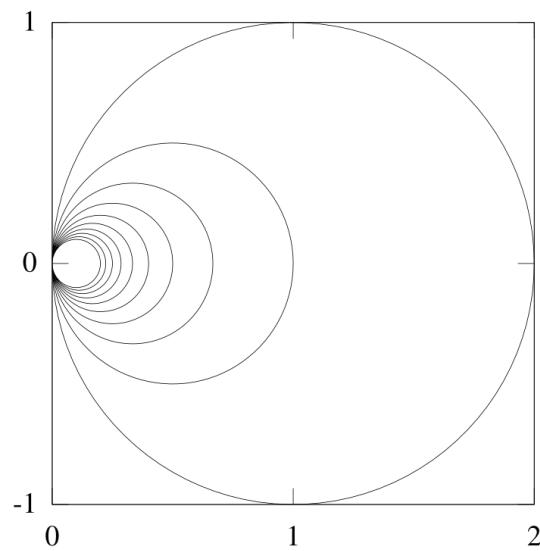


Abbildung 35: Hawaiian earring

Sei $b_0 = (0, 0)$. Für jede Umgebung U von b_0 gibt es Schleifen in U , die nicht homotop zu einer konstanten Schleife in X sind, also nicht in $\ker(\iota_*)$ liegen. (Jede Umgebung enthält unendlich viele infinitesimal kleine Kreise, die nicht nullhomotop sind!)

Das bedeutet: Der Inklusionshomomorphismus

$$\iota_* : \pi_1(U, b_0) \rightarrow \pi_1(X, b_0)$$

ist nicht injektiv.

Sei n mit $C_n \subseteq U$, dann gilt für die Inklusionen

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(C_n, b_0) & \xrightarrow{j^*} & \pi_1(X, b_0) \\ & \searrow k_* & \nearrow \iota_* \\ & \pi_1(U, b_0) & \end{array}$$

j_* injektiv $\Rightarrow \iota_*$ ist nicht trivial.

7.7 Existenz von Überlagerungen

Wir haben gesehen: Jede Überlagerung $p : E \rightarrow B$ definiert eine Konjugationsklasse von Untergruppen von $\pi_1(B, b_0)$, weiterhin sind zwei solche Überlagerungen genau dann äquivalent, wenn sie zur selben Konjugationsklasse korrespondieren.

D.h. wir haben eine injektive Beziehung:

Äquivalenzklassen von Überlagerungen von $B \rightarrow$ Konjugationsklassen von Untergruppen von $\pi_1(B, b_0)$.

Wir haben bereits gesehen, dass diese Abbildung im Allgemeinen nicht surjektiv ist. Im Lemma 7.40 haben wir eine notwendige Bedingung für die Existenz einer universellen Überlagerung gesehen.

Wir formalisieren diese Bedingung.

Definition 7.41: Der topologische Raum B heißt *semilokal einfach zusammenhängend*, falls es für alle $b \in B$ eine Umgebung U von b gibt, so dass der Homomorphismus

$$\iota_* : \pi_1(U, b) \longrightarrow \pi_1(B, b),$$

der von der Inklusion induziert wird, trivial ist.

Anderes gesagt: Jeder Punkt $b \in B$ hat eine Umgebung U , so dass jede Schleife in U (mit Basispunkt b) nullhomotop in B ist (also in ganz B , nicht nur in U). U muss nicht einfach zusammenhängend sein, denn es wird erlaubt, dass die Homotopie, welche die stetige Verformung der Schleife zu einem Punkt vornimmt, zeitweise auch außerhalb von U verlaufen darf.

Bemerkung:

- Wenn U die Bedingung erfüllt, dann auch jede kleinere Umgebung von b , also hat b eine „beliebig kleine“ Umgebung, welche die Bedingung erfüllt.
- Die Hawaiianische Ohrringe ist weder einfach zusammenhängend, noch lokal einfach zusammenhängend, noch semilokal einfach zusammenhängend. (*pathologisch*)
- Diese Forderung ist schwächer als *lokal einfach zusammenhängend*, was heißen würde, dass es in jeder Umgebung von b eine Umgebung von b gibt, die einfach zusammenhängend ist. (Beispiel: Cone über Hawaiianische Ohrringe)

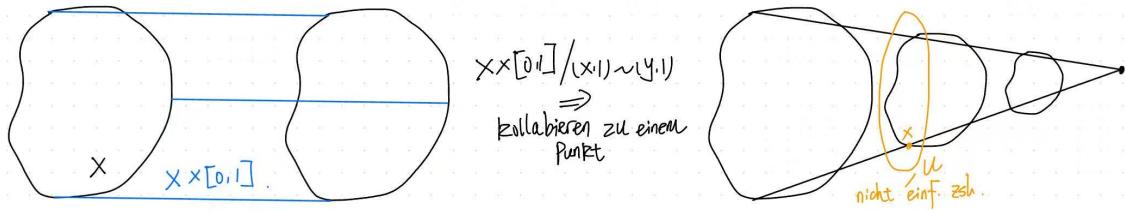


Abbildung 36: Cone (rechts) ist einfach zusammenhängend und damit semilokal einfach zusammenhängend, aber nicht lokal einfach zusammenhängend. Der wesentliche Unterschied zwischen der normalen Hawaiian Ohrringe und dem sogenannten Shrinking Wedge of Circles ist Topologie: hier benutzt man coproduct-topology (ganz abstrakt) während normale Hawaiian Ohrringe mit \mathbb{R}^2 -Teilraum Topologie versehen wird.

- Semilokal einfach zusammenhängend ist eine notwendige und hinreichende Bedingung an B , damit es zu jeder Konjugationsklasse von Untergruppen von $\pi_1(B, b_0)$ eine geeignete Überlagerung von B gibt.

Notwendigkeit haben wir in Lemma 7.40 gesehen. Das ist hinreichend wollen wir nun zeigen

Theorem 7.42: Sei B wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend. Sei $b_0 \in B$. Gegeben eine Untergruppe H von $\pi_1(B, b_0)$, dann gibt es eine Überlagerung $p : E \rightarrow B$ und einen Punkt $e_0 \in p^{-1}(b_0)$, so dass

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) = H.$$

Korollar 7.43: Der topologische Raum B besitzt eine universelle Überlagerung genau dann, wenn B wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend ist.

Beweis. Hinrichtung folgt einfach aus Lemma 7.40. Für die Rückrichtung gilt zunächst Theorem 7.42, insbesondere muss auch für $H = \{0\} \subseteq \pi_1(B, b_0)$ gelten, was $\pi_1(E, e_0) = 0$ bedeutet da p_* injektiv nach Satz 7.29 ist also muss $\ker(p_*) = 0$. \square

Der Beweis von Theorem 7.42 ist relativ lang und besteht aus sieben Schritten.

1. Konstruktion E (als Menge) und p
2. Gebe E eine Topologie
3. Die Abbildung $p : E \rightarrow B$ ist stetig und offen
4. Jeder Punkt von B hat eine Umgebung die von p überlagert wird
5. Anheben eines Weges in B
6. p ist eine Überlagerung (d.h. E wegzusammenhängend)
7. $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$

Anmerkung: Basis einer Topologie

Definition 1.2: Ein Mengensystem $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(M)$ heißt *Basis der Topologie* \mathcal{O}_M , falls die offenen Mengen aus \mathcal{O}_M genau die Vereinigungen der Mengen aus \mathcal{B} sind, insbesondere $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}_M$

In der Topologie benutzt man eine andere:

Definition: Ist X eine Menge, eine *Basis* für eine *Topologie* auf X ist ein Mengensystem \mathcal{B} aus Teilmengen von X , so dass:

- Für alle $x \in X$ gibt es (mindestens) ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$.
- Für $x \in B_1 \cap B_2$ mit $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, gibt es ein $B_3 \in \mathcal{B}$ mit

$$x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2.$$

Unter diesen Annahmen definieren wir die von \mathcal{B} erzeugte Topologie \mathcal{T} als:
Eine Menge $U \subseteq X$ ist *offen* (bezüglich \mathcal{T}), falls es für alle $x \in U$ ein $B \in \mathcal{B}$ gibt mit

$$x \in B \subseteq U.$$

Bemerkung: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$.

Beweis. Wir führen nun den Beweis für Theorem 7.42:

Schritt 1: Konstruiere E

Sei \mathcal{P} die Menge aller Wege in B , die in b_0 beginnen. Definiere eine Äquivalenzrelation auf \mathcal{P} durch

$$\alpha \sim \beta \iff \begin{cases} \alpha \text{ und } \beta \text{ enden im selben Punkt} \\ [\alpha * \beta^-] \in H \subseteq \pi_1(B, b_0) \end{cases}$$

Tatsächlich ist \sim eine Äquivalenzrelation, und wir bezeichnen die Äquivalenzklasse eines Weges α mit $\alpha^\#$.

Sei nun E die Menge aller Äquivalenzklassen und definiere

$$p : E \longrightarrow B \quad \text{durch} \quad p(\alpha^\#) = \alpha(1) \quad (\text{identifizieren mit Endpunkt}).$$

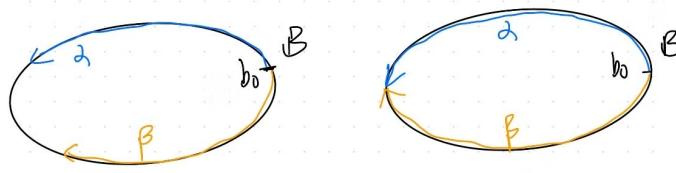


Abbildung 37: rechts zwei Kurven äquivalent aber links nicht

Da B wegzusammenhängend ist, ist p surjektiv.

Wir wollen E mit einer Topologie versehen, die p zu einer Überlagerung macht.
Vorher halten wir zwei Beobachtungen fest.

1. Ist $[\alpha] = [\beta]$ (d.h. α weghomotop zu β), dann $\alpha^\# = \beta^\#$.
2. Ist $\alpha^\# = \beta^\#$, dann $(\alpha * \delta)^\# = (\beta * \delta)^\#$ für jeden Weg δ in B , der in $\alpha(1)$ beginnt.

Zu 1:

$$[\alpha] = [\beta] \Rightarrow [\alpha * \beta^-] = [e_{b_0}] \in H.$$

Zu 2:

$\alpha * \delta$ und $\beta * \delta$ enden im selben Punkt, und

$$[(\alpha * \delta) * (\beta * \delta)^-] = [(\alpha * \delta) * (\delta^- * \beta^-)] = [\alpha * \beta^-] \in H.$$

Schritt 2: Gib E eine Topologie.

1. Möglichkeit: Gib \mathcal{P} die kompakt-offene Topologie und E die Quotiententopologie.
2. Möglichkeit: Direkte Konstruktion.

Sei $\alpha \in \mathcal{P}$ und U eine wegzusammenhängende Umgebung von $\alpha(1)$. Definiere

$$\mathcal{B}(U, \alpha) := \{(\alpha * \delta)^\# \mid \delta \text{ ist ein Weg in } U, \text{ der in } \alpha(1) \text{ beginnt}\}.$$

Wir halten fest: $\alpha^\# \in \mathcal{B}(U, \alpha)$, denn für $b := \alpha(1)$ gilt

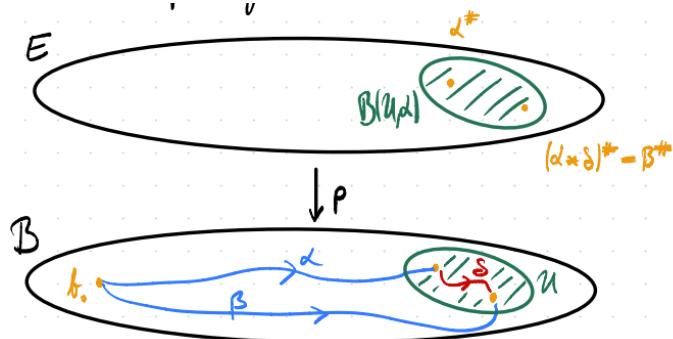
$$\alpha^\# = (\alpha * e_b)^\#$$

und das ist ein Element in $\mathcal{B}(U, \alpha)$.

Wir behaupten, dass die Mengen $\mathcal{B}(U, \alpha)$ die Basis einer Topologie auf E definieren.

Zunächst zeigen wir: Falls $\beta^\# \in \mathcal{B}(U, \alpha)$, dann gilt $\alpha^\# \in \mathcal{B}(U, \beta)$ und $\mathcal{B}(U, \alpha) = \mathcal{B}(U, \beta)$. Ist $\beta^\# \in \mathcal{B}(U, \alpha)$, dann schreiben wir $\beta^\# = (\alpha * \delta)^\#$ für einen Weg δ in U . Dann:

$$(\beta * \delta^-)^\# \stackrel{\text{laut } 2)}{=} ((\alpha * \delta) * \delta^-)^\# \stackrel{\text{laut } 1)}{=} \alpha^\# \Rightarrow \alpha^\# \in \mathcal{B}(U, \beta) \text{ per Definition.}$$



Wir zeigen $\mathcal{B}(U, \beta) \subseteq \mathcal{B}(U, \alpha)$. Ein Element in $\mathcal{B}(U, \beta)$ hat die Form $(\beta * \gamma)^\#$ für einen Weg γ in U . Dann gilt

$$(\beta * \gamma)^\# = ((\alpha * \delta) * \gamma)^\# = (\alpha * (\delta * \gamma))^\#$$

und liegt also (per Definition) in $\mathcal{B}(U, \alpha)$, da $\delta * \gamma$ eine Kurve in U mit $\alpha(1)$ beginnt. Das symmetrische Argument zeigt $\mathcal{B}(U, \alpha) \subseteq \mathcal{B}(U, \beta)$.

Schließlich zeigen wir, dass die $\mathcal{B}(U, \alpha)$ eine Basis bilden. Sei

$$\beta^\# \in \mathcal{B}(U_1, \alpha_1) \cap \mathcal{B}(U_2, \alpha_2).$$

Wir wählen eine wegzusammenhängende Umgebung V von $\beta(1)$, die in $U_1 \cap U_2$ enthalten ist. Die Inklusion

$$\mathcal{B}(V, \beta) \subseteq \mathcal{B}(U_1, \beta) \cap \mathcal{B}(U_2, \beta)$$

folgt aus der Definition. Laut der vorherigen Überlegung stimmt die rechte Seite mit $\mathcal{B}(U_1, \alpha_1) \cap \mathcal{B}(U_2, \alpha_2)$ überein.

Schritt 3: Die Abbildung p ist stetig und offen.

(i) Offenheit:

Das Bild eines Basiselements $\mathcal{B}(U, \alpha)$ ist die offene Menge $U \subseteq B$.

Denn: Sei $x \in U$ und wähle einen Weg δ in U von $\alpha(1)$ nach x . Dann gilt $(\alpha * \delta)^\# \in \mathcal{B}(U, \alpha)$ und

$$p((\alpha * \delta)^\#) = (\alpha * \delta)(1) = x.$$

(ii) Stetigkeit:

Sei $\alpha^\# \in E$ und W eine Umgebung von $p(\alpha^\#)$. Wähle eine wegzusammenhängende

Umgebung U von $p(\alpha^\#) = \alpha(1)$, die in W enthalten ist. Dann ist $\mathcal{B}(U, \alpha)$ eine Umgebung von $\alpha^\#$, die von p nach W abgebildet wird:

$$p(\mathcal{B}(U, \alpha)) \subseteq W$$

Daher ist p stetig in $\alpha^\#$.

Schritt 4: Jeder Punkt von B hat eine Umgebung, die von p überlagert wird.
Sei $b_1 \in B$, wähle eine wegzusammenhängende Umgebung von b_1 , für die der Homomorphismus

$$\pi_1(U, b_1) \xrightarrow{\iota^*} \pi_1(B, b_1)$$

trivial ist.

Wir zeigen: U wird von p überlagert.

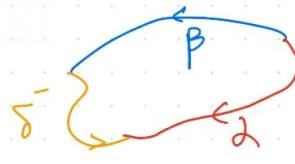
Zunächst zeigen wir, dass $p^{-1}(U)$ die Vereinigung der Mengen $\mathcal{B}(U, \alpha)$ ist, wobei α alle Wege $b_0 \rightarrow b_1$ durchläuft. Da p jede Menge $\mathcal{B}(U, \alpha)$ surjektiv auf U abbildet, ist klar, dass $p^{-1}(U)$ die Vereinigung enthält.

Andererseits: Sei $\beta^\# \in p^{-1}(U)$, dann gilt $\beta(1) \in U$. Wähle einen Weg δ in U von b_1 nach $\beta(1)$ und sei α der Weg $\beta * \delta^-$ von b_0 nach b_1 .

Dann gilt

$$[\beta] = [\alpha * \delta], \quad \text{also} \quad \beta^\# = (\alpha * \delta)^\# \in \mathcal{B}(U, \alpha)$$

$\Rightarrow p^{-1}(U)$ ist in der Vereinigung enthalten.



Weiter sind die Mengen $\mathcal{B}(U, \alpha)$ disjunkt.

Denn ist $\beta^\# \in \mathcal{B}(U, \alpha_1) \cap \mathcal{B}(U, \alpha_2)$, dann $\mathcal{B}(U, \alpha_1) = \mathcal{B}(U, \beta) = \mathcal{B}(U, \alpha_2)$ aus Betrachtung in Schritt 2.

Zuletzt zeigen wir, dass p eine bijektive Abbildung zwischen $\mathcal{B}(U, \alpha)$ und U ist.
Daraus folgt, dass $p|_{\mathcal{B}(U, \alpha)}$ ein Homöomorphismus ist, denn es ist bijektiv, stetig und offen. Wir wissen bereits, dass die Abbildung surjektiv ist. Für die Injektivität sei

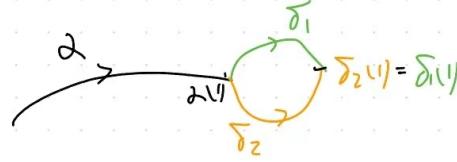
$$p((\alpha * \delta_1)^\#) = p((\alpha * \delta_2)^\#),$$

wobei δ_1 und δ_2 Wege in U sind. Also gilt $\delta_1(1) = \delta_2(1)$.

Da der Homomorphismus

$$\pi_1(U, b_1) \xrightarrow{\iota^*} \pi_1(B, b_1)$$

trivial ist, ist $\delta_1 * \delta_2^-$ in B homotop zur konstanten Schlaufe.



Damit gilt

$$[\alpha * \delta_1] = [\alpha * \delta_2] \quad \text{somit} \quad (\alpha * \delta_1)^\# = (\alpha * \delta_2)^\#.$$

Da Abbildung p ist also eine Überlagerung im Sinne von Definition 7.18. Wir müssen noch zeigen, dass E wegzusammenhängend ist.

Schritt 5: Anheben eines Weges in B

Sei e_0 die Äquivalenzklasse des konstanten Weges mit Basispunkt b_0 ; dann gilt

$$p(e_0) = b_0 \quad \text{per Definition.}$$

Gegeben ein Weg α in B , der in b_0 beginnt. Wir berechnen die Anhebung des Weges zu einem Weg in E , der in e_0 beginnt, und zeigen, dass die Anhebung in $\alpha^\#$ endet.

Zunächst sei $c \in [0, 1]$ und

$$\alpha_c: [0, 1] \rightarrow B \quad \text{der Weg} \quad \alpha_c(t) = \alpha(t \cdot c) \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1.$$

α_c ist der „Teil“ von α zwischen $\alpha(0)$ und $\alpha(c)$. Sei α_0 der konstante Weg mit Basispunkt b_0 , und $\alpha_1 = \alpha$. Wir definieren $\tilde{\alpha}(c) := (\alpha_c)^\#$ und zeigen, $\tilde{\alpha}$ ist stetig. Dann ist $\tilde{\alpha}$ eine Anhebung von α , denn

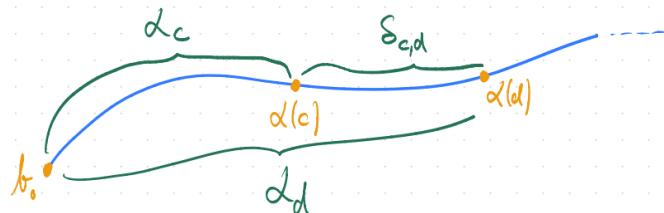
$$p(\tilde{\alpha}(c)) = \alpha_c(1) = \alpha(c),$$

weiter

$$\tilde{\alpha}(0) = (\alpha_0)^\# = e_0, \quad \text{und} \quad \tilde{\alpha}(1) = (\alpha_1)^\# = \alpha^\#.$$

Um die Stetigkeit zu zeigen, führen wir eine neue Notation ein.

Gegeben $0 \leq c < d \leq 1$, es bezeichne $\delta_{c,d}$ den Weg, gegeben durch die positive Gerade von $[0, 1]$ auf $[c, d]$, gefolgt von α . Wir stellen fest, dass die Wege α_d und $\alpha_c * \delta_{c,d}$ weghomotop sind, denn sie sind Reparametrisierungen voneinander.



Wir zeigen die Stetigkeit von $\tilde{\alpha}$ in $c \in [0, 1]$. Sei W ein Basiselement der Topologie von E , welches $\tilde{\alpha}(c)$ enthält. Dann ist W gleich der Umgebung $B(U, \alpha_c)$ für eine wegzusammenhängende Umgebung U von $\alpha(c)$.

Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass für $|c - t| < \varepsilon$ die Punkte $\alpha(t)$ in U liegen.

Behauptung: Für $d \in [0, 1]$ und $|c - d| < \varepsilon$ gilt $\tilde{\alpha}(d) \in W$. Was dann die Stetigkeit von $\tilde{\alpha}$ in c zeigt.

Sei $|c - d| < \varepsilon$. Betrachte zunächst den Fall $d > c$. Setze $\delta = \delta_{c,d}$, dann

$$[\alpha_d] = [\alpha_c * \delta] \quad \text{also} \quad \tilde{\alpha}(d) = (\alpha_d)^\# = (\alpha_c * \delta)^\#$$

Da δ in U liegt, gilt $\tilde{\alpha}(d) \in B(U, \alpha_c)$ wie behauptet.

Für $d < c$, betrachte $\delta = \delta_{d,c}$ und verfahre ähnlich.

Schritt 6: Die Abbildung $p: E \rightarrow B$ ist eine Überlagerung.

Wir müssen nur noch zeigen, dass E wegzusammenhängend ist. Sei $\alpha^\# \in E$, dann ist die Abhebung $\tilde{\alpha}$ des Weges α ein Weg in E von e nach $\alpha^\#$ nach Konstruktion in Schritt 5.

Schritt 7: $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$

Sei α eine Schlaufe in B mit Basispunkt b_0 . Sei $\tilde{\alpha}$ die Anhebung in E , die in e_0 beginnt.

$$[\alpha] \in p_*(\pi_1(E, e_0)) \stackrel{(\text{Satz 7.29})}{\iff} \tilde{\alpha} \text{ eine Schlaufe in } E$$

Der Endpunkt von $\tilde{\alpha}$ ist $\alpha^\#$ und

$$\alpha^\# = e_0 \Leftrightarrow \alpha \sim e_0 \Leftrightarrow [\alpha * e_{b_0}^-] \in H \Leftrightarrow [\alpha] \in H$$

□

7.8 Höhere Homotopiegruppen

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ heißt auch erste Homotopiegruppe. Wir haben sie durch Äquivalenzklassen von Wegen $f: [0, 1] \rightarrow X$ mit fixierten Endpunkten definiert,

$$f(0) = x_0 = f(1).$$

Die fixierten Endpunkte wurden von den *Weghomotopien* respektiert.

Da $[0, 1]/\{0, 1\} \cong S^1$, hätten wir auch *Homotopien von Abbildungen*

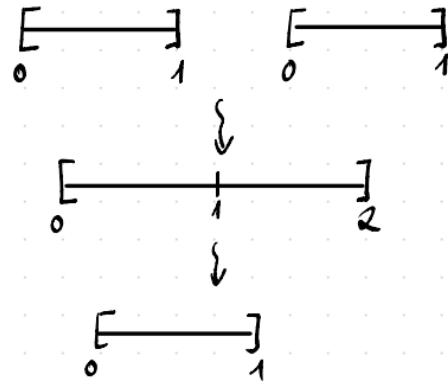
$$(S^1, 1) \longrightarrow (X, x_0)$$

betrachten können und wären zu demselben Ergebnis gekommen.

Der Nachteil ist, dass sich die Gruppenverknüpfung etwas ungewöhnlich definiert. (bei $f: [0, 1] \rightarrow X$ definiert man die Gruppenwirkung einfach durch Kurvenzusammensetzung $f * g$). Man möchte zwei Schleifen $\gamma_1, \gamma_2: S^1 \rightarrow X$ so verknüpfen, dass sie „hintereinander“ durchlaufen werden. Dazu definiert man:

- Zerlege S^1 in zwei Halbkreise (z. B. obere und untere Hälften),
- auf der ersten Hälfte läuft man γ_1 ,
- auf der zweiten Hälfte läuft man γ_2 ,
- glätte die Übergänge und parametriere zurück auf ganz S^1 .

Man kann das formal über eine geeignete Verklebung und Reparametrisierung realisieren – aber es ist technisch deutlich komplizierter als bei Wegen.



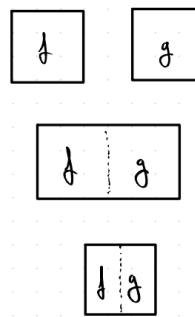
Diese Sichtweise führt zu einer möglichen Verallgemeinerung

$$[0, 1]^n / \partial([0, 1]^n) \cong S^n$$

Die n -te Homotopiegruppe ist die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen

$$f : S^n \longrightarrow X$$

die den Basispunkt von S^n auf den Basispunkt x_0 abbilden.



Wir bezeichnen diese Gruppe mit

$$\pi_n(X, x_0).$$

Fakten:

- $\pi_n(X, x_0)$ ist abelsch für $n \geq 2$.
 - Eine Überlagerung $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ induziert einen Isomorphismus
- $$p_* : \pi_n(E, e_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0), \quad n \geq 2.$$

		$\pi_i(S^n)$											
		$i \rightarrow$											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n	1	\mathbb{Z}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
\downarrow	2	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{12}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_3	\mathbb{Z}_{15}	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
	3	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{12}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_3	\mathbb{Z}_{15}	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
	4	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_3$	\mathbb{Z}_{15}	\mathbb{Z}_2
	5	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{30}
	6	0	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2
	7	0	0	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	0	0
	8	0	0	0	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	0

Beispiel.: Die Hopf-Faserung (3. Homotopiegruppe von S^2)

$$\mathbb{C}^2 \supset S^3 \xrightarrow{p} S^2 \cong \mathbb{CP}^1, \quad (z, w) \mapsto [z : w]$$

$$S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$$

Es gilt: $p^{-1}(q) \cong S^1$ für alle $q \in S^2$.

$$p_* : \pi_3(S^3, \text{id}) \longrightarrow \pi_3(S^2, \tilde{b})$$

Theorem (Hopf):

$$p_*([\text{id}_{S^3}]) \neq 0, \quad \text{sogar mehr: } \pi_3(S^2) = ([\tilde{b}], p_*[\text{id}_{S^3}]).$$

8 Homologie

8.1 Zell-Komplexe

Wir haben gesehen, dass der Torus T^2 durch Verkleben gegenüberliegender Seiten aus dem Quadrat entsteht.



Allgemeiner kann eine orientierbare Fläche Σ_g mit Geschlecht g aus einem Polygon mit $4g$ Seiten (Kanten) durch Identifikationen von Paaren von Seiten konstruiert werden. Aus den $4g$ Seiten werden $2g$ Kreise in der Fläche, die sich in einem einzelnen Punkt schneiden. Das Innere des Polygons ist eine offene Scheibe (2-Zelle), die an die $2g$ -Kreise angeheftet wird.

Man könnte die Vereinigung der Kreise durch das Anbringen von $2g$ offenen Bögen (1-Zellen) an einem gemeinsamen Punkt versehen. Die Fläche entsteht also in Schritten: beginne mit einem Punkt, bringe die 1-Zellen an diesem Punkt an, dann bringe die 2-Zelle an.

Wir schauen uns das beispielhaft für $g = 1, 2, 3$ an.

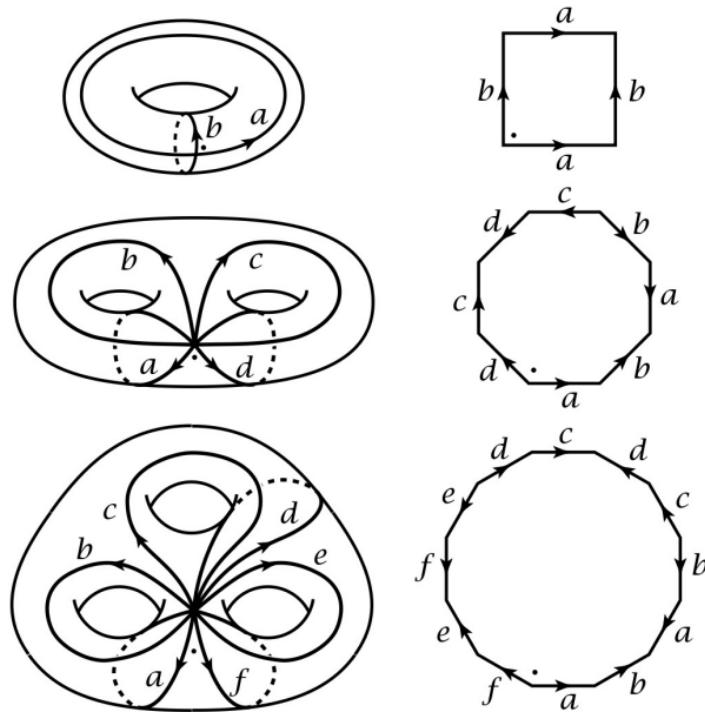


Abbildung 38: Hatcher, Algebraic Topology

Die natürliche Verallgemeinerung dieser Konstruktion ist das folgende Verfahren:

- Beginne mit einer diskreten Menge X^0 , deren Punkte wir als 0-Zellen auffassen.
- Induktiv bilden wir das n -Skelett X^n aus X^{n-1} durch Anheften von n -Zellen durch Abbildungen $\varphi_\alpha : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$.

Das heißt X^n ist der Quotientenraum der disjunkten Vereinigung

$$X^{n-1} \dot{\cup} \bigsqcup_{\alpha} D_{\alpha}^n \quad \text{unter der Identifikation } x \sim \varphi_{\alpha}(x) \text{ für } x \in \partial D_{\alpha}^n.$$

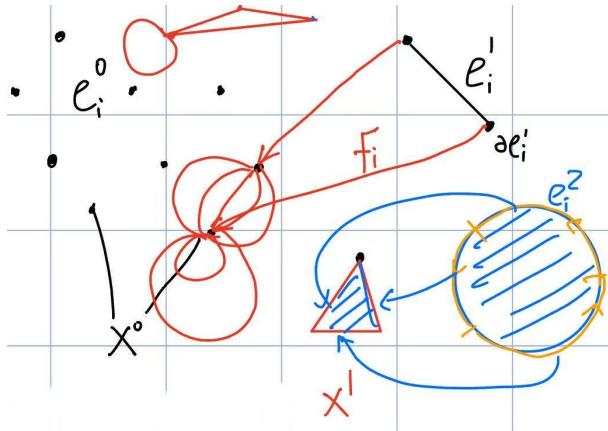
Als Menge ist $X^n := X^{n-1} \dot{\cup} \bigsqcup_{\alpha} e_{\alpha}^n$, wobei alle e_{α}^n offene Scheiben (n -Zellen) sind.

- Entweder hört man nach endlich vielen Schritten auf und setzt $X = X^n$ für ein $n < \infty$, oder man fährt unbegrenzt fort und setzt $X = \bigcup_n X^n$.

Im zweiten Fall geben wir X die schwache Topologie: $A \subseteq X$ ist offen (bzw. abgeschlossen) genau dann, wenn $A \cap X^n$ offen (bzw. abg.) für alle n .

Ein Raum X , der auf diesem Weg konstruiert wird, heißt Zell-Komplex oder CW-Komplex (Closure-finite, Weak).

Ist $X = X^n$ für ein n , dann heißt X endlich dimensional und das kleinste solche n ist die Dimension von X , also die maximale Dimension der Zellen von X .



Beispiel:

- Ein 1-dimensionaler Zell-Komplex $X = X^1$ wird Graph genannt.
Er besteht aus den Ecken (0-Zellen), an die Kanten (1-Zellen) angeheftet werden. Die zwei Enden einer Kante dürfen an derselben Ecke angeheftet werden.
- Die Sphäre S^n hat die Struktur eines Zell-Komplexes mit nur zwei Zelle e^0 und e^n . Die n -Zelle wird durch die konstante Abbildung $S^{n-1} \rightarrow e^0$ angeheftet. Diese Konstruktion ist äquivalent zur Definition von S^n als $D^n / \partial D^{n-1}$
- Der reell projektive Raum \mathbb{RP}^n ist gegeben als $S^n / (v \sim -v)$, d.h. die Sphäre bei der gegenüberliegende Punkte identifiziert werden.

Das heißt \mathbb{RP}^n ist ein Quotient einer Hemisphäre D^n , bei der gegenüberliegende Punkte von ∂D^n *identifiziert* werden. Aber $\partial D^n \cong S^{n-1}$ mit der Identifikation gegenüberliegender Punkte ist \mathbb{RP}^{n-1} .

$\Rightarrow \mathbb{RP}^n$ entsteht aus \mathbb{RP}^{n-1} durch das Anbringen einer n -Zelle mit der Quotientenabbildung $S^{n-1} \rightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$ als Anheft-Abbildung.

Induktiv zeigt man, dass $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ eine Zell-Komplex Struktur $e^0 \cup e^1 \cup \dots \cup e^n$ mit einer Zelle e^i in jeder Dimension $i \leq n$ besitzt.

Bemerkung: Auf diese Weise lässt sich $\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty = \bigcup_n \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ definieren.

Jede Zelle e_α^n in einem Zellkomplex X hat eine charakteristische Abbildung $\Phi_\alpha : D_\alpha^n \rightarrow X$, welche die Anklebe-Abbildung φ_α zu einem Homöomorphismus zwischen \dot{D}_α^n und e_α^n macht. (durf nicht Abschluss nehmen, da zwei Randpunkte zu dem gleichen Punkt abgebildet werden können.)

Genau nehmen wir Φ_α als die Komposition

$$D_\alpha^n \hookrightarrow X^{n-1} \dot{\cup} \bigsqcup_\alpha D_\alpha^n \rightarrow X^n \hookrightarrow X,$$

wobei die zweite Abbildung die Quotientenabbildung ist, die X^n definiert.

Beispiel

- Für das Beispiel S^n von oben ist die charakteristische Abbildung der n -Zelle die Quotientenabbildung $D^n \rightarrow S^n$, welche ∂D^n zu einem Punkt zusammenschlägt.

$$S^n = D^n / \partial D^n$$

- Für $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ ist eine charakteristische Abbildung für die Zelle e^i die Quotientenabbildung $D^i \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^i \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty$, welche gegenüberliegende Punkte von ∂D^i identifiziert.

Definition 8.1 Ein Unterkomplex des Zellkomplexes X ist ein abgeschlossener Unterraum $A \subset X$, der aus einer Vereinigung von Zellen von X besteht.

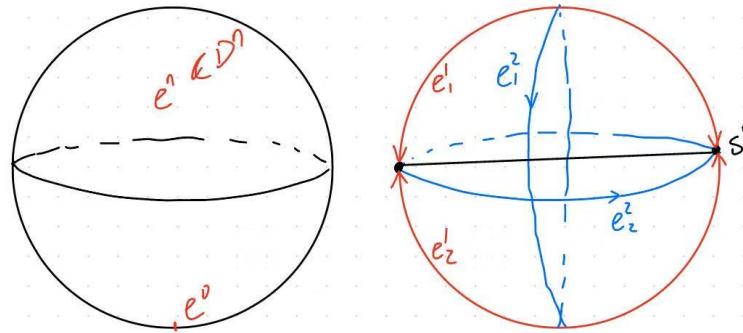
Bemerkung: Da A abgeschlossen ist, ist das Bild der charakteristischen Abbildung jeder Zelle in A , in A enthalten. Insbesondere ist das Bild der Anklebe-Abbildung jeder Zelle in A in A enthält, Das heißt A ist wieder ein Zell-Komplex.

Definition 8.2 Das Paar (X, A) , bestehend aus dem Zell-Komplex X und dem Unterkomplex A , heißt CW-Paar.

Beispiel

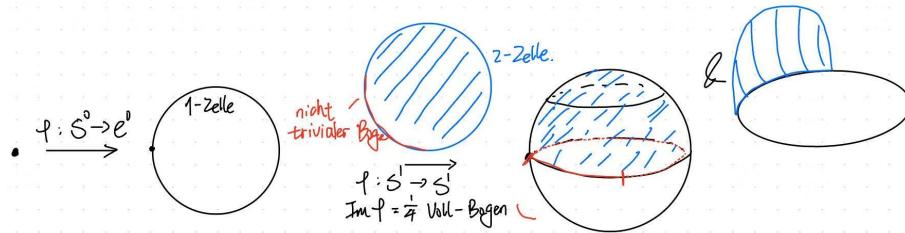
- Jedes Skelett X^n des Zell-Komplexes X ist ein Unterkomplex.
- Für $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ sind alle $\mathbb{R}\mathbb{P}^i \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ Unterkomplexe. Das sind auch die einzigen Unterkomplexe.
- Für S^n gibt es die natürlichen $S^0 \subset S^1 \subset \dots \subset S^n$, aber diese Sphären sind keine Unterkomplexe von S^n mit der Zellstruktur aus zwei Zellen von oben. Aber wir

können S^n eine Zellstruktur geben, in der jede der Sphären S^k ein Teilkomplex ist. Dabei wird S^k durch das Anbringen von zwei k -Zellen konstruiert.



Bemerkung: In den bisherigen Beispielen von Zell-Komplexen ist der Abschluss jeder Zelle ein Unterkomplex, allgemeiner ist der Abschluss jeder Ansammlung von Zellen ein Unterkomplex. In den meisten natürlichen Fällen stimmt das, aber im Allgemeinen ist das nicht der Fall.

Nehmen wir beispielsweise S^1 mit der minimalen Zellstruktur und bringen eine 2-Zelle durch eine Abbildung $S^1 \rightarrow S^1$ an, deren Bild ein nicht-trivialer Bogen von S^1 ist. Dann der Abschluss der 2-Zelle ist kein Unterkomplex, denn dieser enthält nur einen Teil der 1-Zelle.



Satz 8.3: Jede glatte, kompakte Mannigfaltigkeit besitzt eine CW-Struktur.

8.2 8.2. Die Idee hinter Homologie

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ ist nützlich, wenn wir niedrig dimensionale Räume untersuchen.

In der Sprache von CW-Komplexen: Ist X ein CW-Komplex, dann hängt $\pi_1(X, x_0)$ nur vom 2-Skelett von X ab. Insbesondere $\pi_n(S^i) = \pi_n(S^j)$ für alle $i, j \geq 2$. Das kann durch Betrachtung der höheren Homotopie-Gruppen gelöst werden.

Problem: Das Berechnen von π_n ist schwer.

Es gibt eine Alternative, die sich besser berechnen lässt: Die **Homologie-Gruppen** $H_n(X)$.

Vorteil: $H_n(X)$ hängt für einen CW-Komplex X nur vom $(n+1)$ -Skelett X^{n+1} ab.
Für Sphären:

$$H_i(S^n) \cong \pi_i(S^n) \quad \text{für } 1 \leq i \leq n, \quad H_i(S^n) = 0 \quad \text{für } i > n.$$

Nachteil: Die Definition von Homologie ist nicht so eingängig wie die Definition von Homotopie-Gruppen.

Unser Plan:

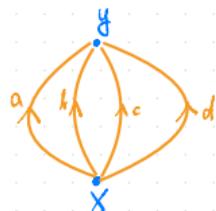
- Betrachte ein Beispiel (nicht stringent)
- Der vereinfachte Fall: Simpliziale Homologie
- Die allgemeine Theorie: Singuläre Homologie

Anmerkung: Häufig kennt man nur die Eigenschaften und nicht die Definition.

~~ Es soll einen axiomatischen Zugang zur Homologie geben. (Vorlesung Algebraische Topologie.)

Wir betrachten ein Beispiel, um die Idee zu veranschaulichen. Dazu betrachten wir den Raum X ,

- 2 Ecken: x, y
- 4 Kanten: a, b, c, d von x nach y .



Wir untersuchen die Fundamentalgruppe von X_1 , bzgl. des Basispunktes x_0 . Zum Beispiel die Schleife ab^{-1} , wobei der Exponent -1 heißt, dass wir b rückwärts durchlaufen. Oder komplizierter: $ac^{-1}d^{-1}ca^{-1}$. Die Kanten in anderer Reihenfolge durchlaufen gibt die Schleife $b^{-1}a$ mit Basispunkt y . Aber geometrisch beschreiben sie im wesentlichen denselben Kreis.

Wenn wir die Knotenstruktur abelsch machen, also $ab^{-1} = b^{-1}a$ verlangen, betrachten wir Schleifen ohne Basispunkt, sogenannte Zyklen. Dabei schreiben wir die Verknüpfung additiv, z. B. $a - b + c - d$. Solche linearen Kombinationen nennen wir Ketten von Kanten.

Manche Ketten können auf verschiedene Weisen in Zyklen zerlegt werden, z. B.

$$(a - c) + (b - d) = (a - d) + (b - c)$$

und aus algebraischer Sicht unterscheiden wir nicht zwischen diesen Zerlegungen.
Wir erweitern die Bedeutung des Begriffs Zyklus, nämlich jede Linearkombination von Kanten, für die ein Zerlegung in Zykel im geometrischen Sinne existiert.

Gibt es einfache Kriterien zu entscheiden, wann eine Kette ein Zyklus im algebraischen Sinne ist?

Ein *geometrischer Zykel*, gedacht als Weg, kommt an jeder Ecke genauso oft an wie er diese verlässt. Für eine Kette $ka + lb + mc + nd$, die Kette kommt $k + l + m + n$ mal bei y an, denn a, b, c und d kommen genau einmal bei y an. Ähnlich verlässt jede der Kanten a, b, c und d die Ecke x einmal. Die Gesamtzahl, die die Kette bei x ankommt, ist also $-k - l - m - n$ mal

$\Rightarrow ka + lb + mc + nd$ ist ein Zyklus, falls $k + l + m + n = 0$.

Wir beschränken dies auf eine Weise, das sich auf alle Graphen verallgemeinern lässt:
Sei C_1 die freie, abelsche Gruppe mit der Basis aus den Kanten a, b, c, d und C_0 die freie, abelsche Gruppe mit der Basis aus den Ecken x, y . Elemente von C_1 sind Ketten von Kanten, oder 1-dimensionalen Ketten. Elemente von C_0 sind linearkombinationen von Ecken, oder 0-dimensionalen Ketten.

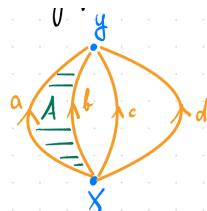
Wir definieren einen Kettenhomomorphismus $\partial : C_1 \rightarrow C_0$, indem wir jedes Basiselement a, b, c, d auf $y - x$ abbilden, die Spitze der Kante minus der Ausgangspunkt der Kante. D.h.

$$\partial(ka + lb + mc + nd) = (k + l + m + n)y - (k + l + m + n)x$$

und die Zykel sind der Kern von ∂ .

Eine einfache Rechnung zeigt $\ker(\partial) = \langle a - b, b - c, c - d \rangle_{\mathbb{Z}}$. Jeder Zyklus in X_1 ist eine eindeutige Linearkombination von den drei offensichtlichen Zykeln. Damit vermitteln wir die Information, dass X_1 drei sichtbare Löcher hat, den leeren Raum zwischen den vier Kanten.

Wir vergrößern den Graphen X_1 , durch Anbringen einer 2-Zelle A entlang des Zyklus $a - b$, wodurch der 2-dim Zellkomplex X_2 entsteht:



Wir orientieren die 2-Zelle A im Uhrzeigersinn, dann fassen wir den Rand von A als den Zyklus $a - b$ auf. Dieser Zyklus kann nun jetzt zu einem Punkt zusammengezogen werden, ist also trivial in Homotopie. Mit anderen Worten $a - b$ umschließt also Loch

in X_2 mehr ein.

Wir bilden die Quotienten $\ker(\partial)/\langle a - b \rangle$. In diesem Quotienten sind die Zykel $a - c$ und $b - c$ äquivalent, was damit zusammenpasst, dass sie in X_2 homotop sind.

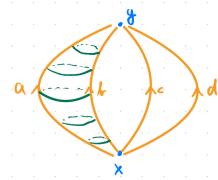
Algebraisch definieren wir ein Paar von Homomorphismen $C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$, wobei C_2 die unendlich zyklische Gruppe erzeugt von A ist und $\partial_2(A) = a - b$ (Randabbildung). Der Homomorphismus ∂_1 ist die Randabbildung aus dem vorherigen Beispiel.

Die für uns interessante Quotientengruppe ist $\ker \partial_1 / \text{im } \partial_2$, also die 1-dim. Zykel modulo denen, die Bilder von ∂_2 sind, also Vielfache von $a - b$. Diese Quotientengruppe ist die Homologiegruppe $H_1(X_2)$.

Das vorige Beispiel passt in dieses Schema, indem wir $C_2 = 0$ setzen, denn es gibt keine 2-Zellen in X_1 . In diesem Fall $H_1(X_1) = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2 = \ker \partial_1$, also die freie abelsche Gruppe in drei Erzeugern.

Im aktuellen Beispiel ist $H_1(X_2)$ eine freie abelsche Gruppe in zwei Erzeugern, $b - c$ und $c - d$. Also die Tatsache widerspiegelt, dass wir durch das Einfüllen der 2-Zelle A die Anzahl der Löcher von drei auf zwei reduziert haben.

Wir vergrößern X_2 zu einem Raum X_3 , durch das Anfügen einer zweiten 2-Zelle B entlang des selben Zyklus $a - b$.



Damit besteht die 2-dimensionale Kettengruppe C_2 aus den Linearkombinationen von A und B , und die Randabbildung bildet A und B auf $a - b$ ab.

Die Homologiegruppe $H_1(X_3) = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2$ ist dieselbe wie für X_2 , aber ∂_2 hat nicht-trivialen Kern, die unendliche zyklische Gruppe erzeugt von $A - B$. Wir erhalten $A - B$ als den 2-dim. Zyklus, der die Homologiegruppe $H_2(X_3) = \ker(\partial_2) \cong \mathbb{Z}$ erzeugt.

Topologisch ist der Zyklus $A - B$ die Sphäre bestehend aus A , B und ihrem gemeinsamen Randkreis. Dieser sphärische Zyklus entdeckt ein „Loch“ in X_3 , das fehlende Innere der Sphäre. Aber dieses Loch wird von einer Sphäre gebildet und nicht von einem Kreis, es ist also von anderer Gestalt als die Löcher, die von $H_1(X_3) = \langle b - c, c - d \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ erkannt werden.

Wir gehen wieder einen Schritt weiter und konstruieren X_4 aus X_3 , durch Anfügen einer 3-Zelle C , entlang der 2-Sphäre, die durch A und B gebildet wird. Dadurch entsteht die Kettengruppe C_3 , erzeugt durch die 3-Zelle C , und wir definieren den Randhomomorphismus

$$\partial_3 : C_3 \rightarrow C_2 \quad \text{durch} \quad C \mapsto A - B.$$

Wir stellen uns vor, dass $A - B$ der Rand von C ist, in ähnlicher Weise wie der Zyklus $a - b$ der Rand von A ist.

Wir haben eine Sequenz aus drei Randhomomorphismen

$$\cdots \rightarrow C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$$

und der Quotient $H_2(X_4) = \ker(\partial_2)/\text{im}(\partial_3)$ ist trivial geworden.

Außerdem:

- $H_3(X_4) = \ker(\partial_3) = 0$
- $H_1(X_4) \cong H_1(X_3) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, das ist die einzige nicht-triviale Homologiegruppe von X_4 .

Der Muster wird erkennbar.

Für einen Zellkomplex X ist die Kettengruppe $C_n(X)$ die freie abelsche Gruppe deren Basis die n -Zellen von X sind. Weiter gibt es einen Rand-Homomorphismus

$$\partial_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X).$$

Damit definieren wir die Homologiegruppen

$$H_n(X) = \ker \partial_n / \text{im} \partial_{n+1}.$$

Das verbleibende Problem: Wie definieren wir ∂_n ?

- Für $n = 1$: Einfach. Der Rand einer orientierten Kante ist die Ecke wo sie endet minus die Ecke wo sie startet.
- Für $n = 2$: Machbar für Zellen, die entlang von Schlaufen von Kanten angebracht werden. Dann ist der Rand dieser Zelle der Zyklus, der aus diesen Kanten besteht.
- Für größere n : ?

Selbst für Zellkomplexe, die nur aus Polyhedra-Zellen mit guten Anklebeabbildung bestehen, bleibt die Frage der Orientierung.

Lösung 1: (Simpliziale Homologie)

Beobachtung: Beliebige Polyhedra können immer in besondere Polyhedra, sogenannte Simplizes, zerlegt werden. (z.B. 2-dim. Dreiecke; 3-dim. Tetraeder). Daher können wir ohne Einschränkung mit Simplizes statt mit allgemeinen Polyhedra arbeiten.

Vorteile: Können Orientierungen und RandAbbildung leicht definieren.

Nachteile:

- Verlieren Effizienz bei der Zerlegung
- Nur für wenige Räume anwendbar
- Zu starr, um damit zu arbeiten.

Lösung 2: (Singuläre Homologie)

Idee: Ignoriere die Darstellung von X als Zellkomplex. Betrachte alle stetigen Abbildungen definiert auf Simplizes mit Bild in X . Das sorgt für unglaublich große Kettengruppen $C_n(X)$, aber die Quotienten $H_n(X) = \ker(\partial_n)/\text{im}(\partial_{n+1})$ sind für hinreichend gute Räume X .

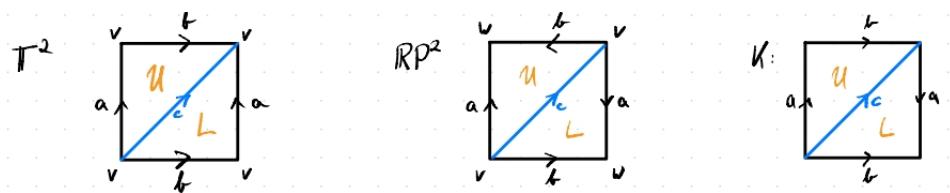
Für Räume wie in den obigen Beispielen stimmen die singulären Homologiegruppen mit den Gruppen überein, die wir aus den zellulären Ketten berechnet haben.

Wollen sehen: Singuläre Homologie erlaubt uns die Definition der zellulären Homologiegruppen für alle Zellkomplexe. Insbesonders löst sie die Frage nach der Randabbildung.

8.3 Δ -Komplexe

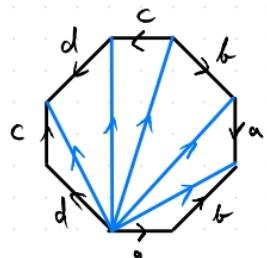
Beispiel 8.4:

- Der Torus, die reell projektive Ebene und die Kleinsche Flasche können durch Identifizieren von gegenüberliegenden Kanten eines Quadrats definiert werden.

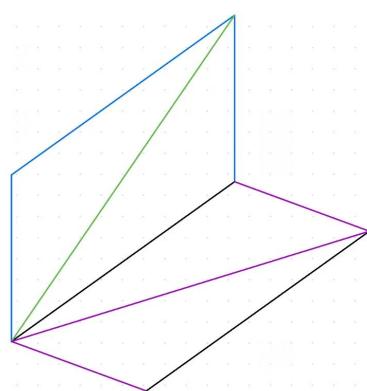


Schneiden entlang der Diagonalen zerlegt die Quadrate in Dreiecke. D.h. die Flächen können durch Zusammenkleben von Dreiecken gebaut werden.

- Ähnlich lässt sich jedes Polygon entlang von Diagonalen in Dreiecke zerlegen, d. h. jede Fläche entsteht durch das Zusammenkleben von Dreiecken.



⇒ Allgemein lassen sich noch viele andere 2-dimensionalen Räumen in Dreiecke zerlegen:



Definition 8.5:

Ein n -Simplex C in \mathbb{R}^m ist die konvexe Hülle von $n + 1$ Punkten u_0, \dots, u_n , so dass $u_1 - u_0, u_2 - u_0, \dots, u_n - u_0$ linear unabhängig sind (affin unabhängig). D.h.

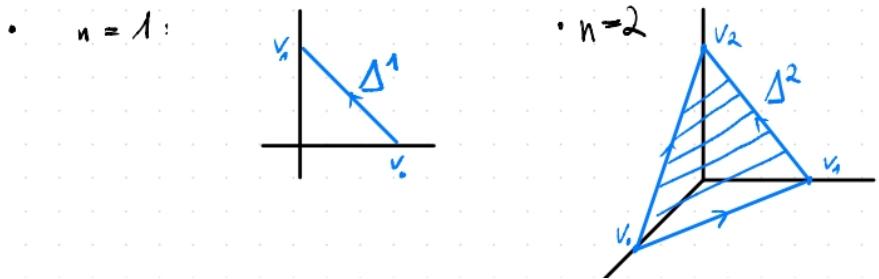
$$C = \left\{ \lambda_0 u_0 + \dots + \lambda_n u_n \mid \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

Die u_i heißen Ecken oder Vertices.

Beispiel: Der Standard- n -Simplex:

$$\Delta^n = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_i \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \forall i \right\}$$

Also $v_0 = e_0, v_1 = e_1, \dots, v_n = e_n$.



Bemerkung: Für Homologie ist die Reihenfolge der Ecken wichtig, d.h. ein n -Simplex heißt eigentlich „ n -Simplex mit einer *Ordnung der Ecken*“.

- Durch die Ordnung erhalten wir eine Orientierung auf den Kanten $[v_i, v_j]$.
- Wir orientieren von kleineren zum größeren Index.
- Durch die Ordnung erhalten wir einen Homöomorphismus des Standard-Simplex Δ^n auf jeden n -Simplex $[v_0, \dots, v_n]$, welcher die Orientierung erhält, nämlich die *Baryzentrischen Koordinaten*

$$(t_0, \dots, t_n) \mapsto \sum_{i=0}^n t_i v_i$$

- Nach Entfernen einer der $n + 1$ Ecken aus dem n -Simplex $[v_0, \dots, v_n]$ bilden die verbleibenden n Ecken ein $(n - 1)$ -Simplex, eine sogenannte Seite (*face*) von $[v_0, \dots, v_n]$.

Konvention: Die Ecken einer Seite (oder allgemein eines Unterkomplexes aufgespannt von Ecken) ordnen wir wie im größeren Simplex. (z.B. für Dreieck $[v_0, v_1, v_2]$, nach Entfernen v_1 ergibt $[v_0, v_2]$)

Definition 8.6:

- Die Vereinigung aller Seiten von Δ^n heißt der *Rand* von Δ^n : $\partial\Delta^n$.
- Der offene Simplex $\mathring{\Delta}^n$ ist das Innere von Δ^n , $\mathring{\Delta}^n = \Delta^n \setminus \partial\Delta^n$.
- Eine Δ -Komplex Struktur auf einem Raum X ist eine Sammlung von Abbildungen $\sigma_\alpha: \Delta^n \rightarrow X$, wobei n von α abhängt, so dass:
 - i) Die Einschränkung $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$ ist *injektiv* und jeder Punkt von X liegt im Bild von genau einer Einschränkung $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$.
 - ii) Die Einschränkung von σ_α auf eine Seite von Δ^n ist eine der Abbildungen $\sigma_\beta: \Delta^{n-1} \rightarrow X$. Dabei identifizieren wir die Seite von Δ^n durch den kanonisch linearen Homöomorphismus mit Δ^{n-1} , so dass die Orientierung der Kanten erhalten bleibt.
 - iii) $A \subset X$ ist offen $\iff \sigma_\alpha^{-1}(A)$ ist offen für alle σ_α .

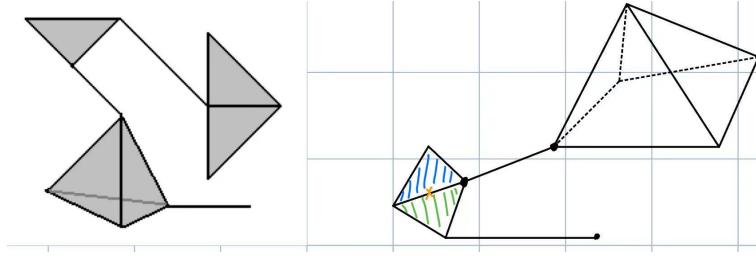


Abbildung 39: beide dreidimensionaler Simplexialkomplexe, da 3 Ecken enthalten

Bemerkung:

- Einschränkung auf jedem einzelnen Dreieck Δ^n aus Bedingung i) verhindert Situation z.B. aus 2. Beispiel oben (oranger Punkt, wo die Abbildungen dort nicht mehr injektiv sind).
- Bedingung (iii) verhindert, dass wir jeden Punkt in X zu einer Ecke machen.
- Die Beispiele aus 8.4 sind Δ -Komplexe für den Torus, projektiven Raum und die Kleinsche Fläche mit:
 - 2 Dreiecken, 3 Kanten und 1 oder 2 Ecken,
 - 6 σ_α 's für Torus und Kleinsche Fläche (2+3+1),
 - 7 σ_α 's für projektive Ebene (2+3+2).
- (iii) impliziert: X lässt sich als Quotientenraum von disjunkten Simplizes Δ_α^n auffassen. Einer für jedes $\sigma_\alpha: \Delta^n \rightarrow X$.

Der Quotientenraum entsteht durch Identifikation jeder Seite von Δ_α^n mit Δ_β^{n-1} , da der Einschränkung σ_β von σ_α gehört (Bedingung ii)).

Vorstellung: Wir bauen den Raum induktiv. Beginn mit einer diskreten Menge von Ecken, füge Kanten an um einen Graphen zu konstruieren, dann 2-Simplexe usw. D.h. ein Δ -Komplex kann kombinatorisch aus einer Sammlung von n -Simplizes Δ_α^n und Abbildungen auf den Seiten der n -Simplexe Δ_α^n , je einem $(n-1)$ -Simplex Δ_β^{n-1} zunehm.

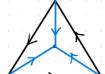
Beispiel



Identifikation der 3 Kanten in der angegebenen Richtung ergibt den sog. Eselsrücken.



Identifikation der 3 Kanten in der angegebenen Richtung gibt *keine* Δ -Komplex-Struktur.



Mit Triangulierung ergibt aber eine Δ -Komplex-Struktur auf dem Quotientenraum.

Bemerkung Aus der Auffassung als Quotientenraum folgt: X ist hausdorffsch.

Die Abbildung $\sigma_\alpha|_{\Delta^n}$ sind Homöomorphismen aufs Bild.

$\Rightarrow \sigma_\alpha(\Delta^n) \subseteq X$ ist offen und Zellen einer CW-Komplex-Struktur auf X mit Charakteristik Abbildung σ_α .

8.4 Simplexiale Homologie

Ziel: Definieren *Simplexialer Homologiegruppen* für Δ -Komplexe.

Definition 8.7 Sei X ein Δ -Komplex. Sei $\Delta_n(X)$ die freie abelsche Gruppe mit der Basis aus den offenen n -Simplexes e_α^n von X .

Die Elemente von $\Delta_n(X)$ heißen n -Ketten und können als endliche Summen

$$\sum_\alpha n_\alpha e_\alpha^n \quad \text{mit Koeffizienten } n_\alpha \in \mathbb{Z}$$

geschrieben werden.

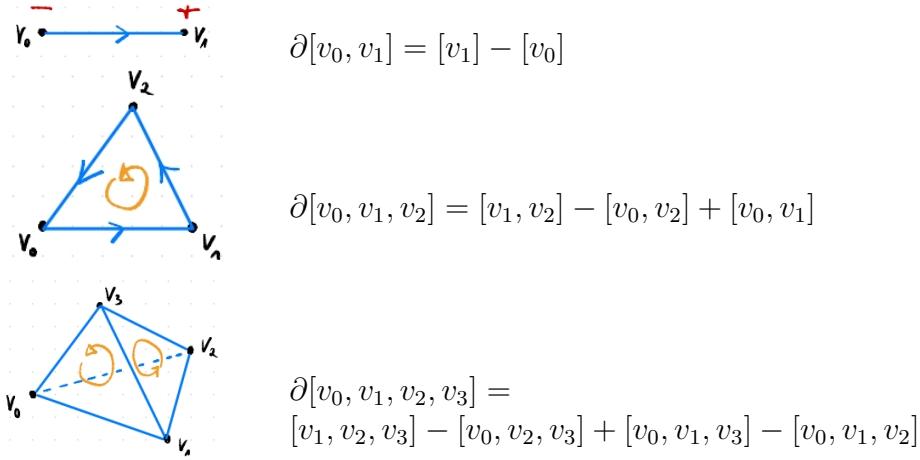
Bemerkung Wir könnten auch $\sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha$ mit $\sigma_\alpha: \Delta^n \rightarrow X$ schreiben, die σ_α sind die charakteristischen Abbildungen auf e_α^n mit Bild im Abschluss von e_α^n .

Der Rand eines n -Simplex $[v_0, \dots, v_n]$ besteht aus $(n-1)$ -Simplexes $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$, wobei $\hat{\cdot}$ bedeutet, dass der entsprechende Eintrag ausgelassen wird. Wollen wir dies als

Grundlage für den Randabbildung verwenden, so führen wir aus technischen Gründen Vorzeichen ein:

$$\partial([v_0, \dots, v_n]) = \sum_i (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$$

Heuristisch: Füge Vorzeichen ein, damit die Orientierung mit der Orientierung der UnterSimplexes übereinstimmt.



Definition 8.8:

Sei X ein Δ -Komplex. Der Randhomomorphismus ist die lineare Fortsetzung

$$\partial_n : \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_{n-1}(X)$$

von

$$\partial_n(\sigma_\alpha) = \underbrace{\sum_i (-1)^i \sigma_\alpha[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}_{\in \Delta_{n-1}(X), \text{ laut Bedingung (ii) ein } \Delta\text{-Komplex}}$$

Lemma 8.9

Die Komposition

$$\Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \Delta_{n-2}(X)$$

ist null.

Beweis.

$$\begin{aligned} \partial_n(\sigma) &= \sum_i (-1)^i \sigma[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] \\ \Rightarrow \partial_{n-1}(\partial_n(\sigma)) &= \sum_{i < j} (-1)^i (-1)^{j-1} \sigma[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n] \\ &\quad + \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j \sigma[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] \end{aligned}$$

Die beiden Summen heben sich auf, da nach Vertauschen von i und j die erste Summe mit anderem Vorzeichen erscheint. \square

Aus algebraischer Sicht: Wir haben eine Sequenz von Homomorphismen von abelschen Gruppen

$$\cdots C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

mit $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ für alle n .

Definition 8.10: Diese Sequenz heißt Kettenkomplex.

Bemerkung:

- Wir haben die Sequenz nach rechts um 0 und $\partial_0 := 0$ ergänzt.
- $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ bedeutet: $\text{Im}(\partial_{n+1}) \subseteq \ker(\partial_n)$.

Definition 8.11: Die n -te Homologiegruppe des Kettenkomplexes ist

$$H_n = \frac{\ker(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}.$$

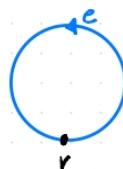
- Elemente von $\ker(\partial_n)$ heißen Zykel.
- Elemente von $\text{Im}(\partial_{n+1})$ heißen Ränder.
- Elemente von H_n heißen Homologieklassen.
- Zwei Zykel, die die gleiche Homologiekasse repräsentieren, heißen homolog.

Definition 8.12: Sei $C_n = \Delta_n(X)$, dann schreiben wir

$$H_n^\Delta(X) := \frac{\ker(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}$$

und nennen sie die n -te Simplexiale Homologiegruppe.

Beispiel 1: $X = S^1$, mit einer Ecke v und einer Kante e .
Dann gilt:



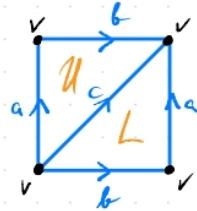
- $\Delta_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \cong \Delta_0(S^1)$
- $\partial_1 = 0$, denn $\partial_1(e) = v - v = 0$, $\ker \partial_1 = \Delta_1(S^1)$
- $\partial_0 = 0$ nach Definition, $\ker \partial_0 = \Delta_0(S^1)$

- $\Delta_n(S^1) = 0$, für $n \geq 2$
- $H_0^\Delta(S^1) = \frac{\ker(\partial_0)}{\text{im}(\partial_1)} \cong \frac{\mathbb{Z}}{0}$ $H_1^\Delta(S^1) = \frac{\ker(\partial_1)}{\text{im}(\partial_2)} \cong \frac{\mathbb{Z}}{0}$
 $\Rightarrow H_n^\Delta(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{für } n = 0, 1, \\ 0, & \text{für } n \geq 2 \end{cases}$

Beobachtung: Sind alle Randabbildungen gleich 0, so gilt

$$H_n^\Delta(X) \cong \Delta_n(X).$$

Beispiel 2: $X = T^2$ mit der Struktur von oben: 1 Ecke v ; 3 Kanten a, b, c ; 2 2-Simplexes U und L



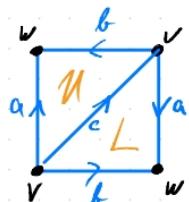
Es gilt:

- $\partial_1 = 0$ (jede Kante bilden immer von v nach v) $\Rightarrow H_0^\Delta(T^2) \cong \mathbb{Z}$
- $\partial_2 U = a + b - c = \partial_2 L$
- $\{a, b, a+b-c\}$ ist eine Basis von $\Delta_1(T^2)$ $\Rightarrow H_1^\Delta(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ mit Basis $[a], [b]$
 $(\frac{\ker \partial_1}{\text{im} \partial_2} = \frac{\Delta_1(T^2)}{[a+b-c]} \stackrel{(x_1, x_2, x_3 \text{ mod } x_3)}{=} [a] \times [b])$
- Keine 3-Simplexes $\Rightarrow H_2^\Delta(T^2) = \ker \partial_2$ ($\text{im} \partial_3 = 0$) = unendliche zyklische Gruppe erzeugt von $U - L \cong \mathbb{Z}$

$$\text{denn: } \partial_2(pU + qL) = (p+q)(a+b-c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = -q$$

$$\Rightarrow H_n^\Delta(T^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & n = 1 \\ 0 & n \geq 3 \end{cases}$$

Beispiel 3: $X = \mathbb{R}P^2$ mit der Zerlegung von oben: 2 Ecken v, w ; 3 Kanten a, b, c ; 2 2-Simplexes U, L .



- $\text{im}(\partial_1) = \langle w - v \rangle \Rightarrow H_0^\Delta(X) \cong \mathbb{Z}$ mit v oder w als Erzeuger
 $(\frac{\ker \partial_0}{\text{im } \partial_1} = \frac{\Delta_0 = \text{all points}}{\langle w - v \rangle} = \frac{\leq v \geq \leq w \geq}{\langle w - v \rangle} \approx \langle v \rangle + \langle w - v \rangle = \langle w \rangle \cong \mathbb{Z})$
- $\partial_2 U = -a + b + c, \partial_2 L = a - b + c \Rightarrow \partial_2$ ist injektiv $\Rightarrow H_2^\Delta(X) = 0$
- $\ker \partial_1 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ mit Basis $a - b$ und c (da $\partial_1(a - b) = 0, \partial_1(c) = 0$)
- $\text{im}(\partial_2)$ ist eine Index-2-Untergruppe von ∂_1 . Wähle $c, a - b + c$ als Basis von $\ker \partial_1$:

$$a - b + c = \partial_2 L, 2c = (a - b + c) + (-a + b + c) = \partial_2 L + \partial_2 U \text{ als Basis von } \text{im } \partial_2$$

$$\Rightarrow H_1^\Delta(X) = \frac{\langle a - b + c, c \rangle}{\langle a - b + c, 2c \rangle} \cong \mathbb{Z}_2$$

Δ -Komplex-Struktur auf S^1 : Zwei Kopien von Δ^n , deren Ränder mit der Identität identifiziert werden. Wir bezeichnen die n -Simplexes mit U und L :

$$\Rightarrow \ker \partial_n = \langle U - L \rangle_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}.$$

Offene Frage: Ist $H_n^\Delta(X)$ unabhängig von der gewählten Δ -Komplex-Struktur?

M.a.W.: Sei X homöomorph zu Y . Ist dann $H_n^\Delta(X)$ isomorph zu $H_n^\Delta(Y)$?

8.5 Singuläre Homologie

Definition 8.13: Ein singulärer n -Simplex in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $\sigma: \overline{\Delta^n} \rightarrow X$.

Bemerkung: „Singulär“ soll bedeuten, dass σ keine Einbettung sein muss, sondern Singularitäten haben darf (nicht injektive Abbildung erlaubt).

Definition 8.14: Sei $C_n(X)$ die freie abelsche Gruppe erzeugt von den singulären n -Simplexes in X . Elemente von $C_n(X)$, genannt (*singuläre*) n -Ketten, sind endliche formale Summen

$$\sum_i n_i \sigma_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad \sigma_i: \Delta^n \rightarrow X.$$

Die Randabbildung $\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ ist definiert durch

$$\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}.$$

Die singuläre Homologiegruppe ist

$$H_n(X) = \ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1}.$$

Bemerkung: Aus der Definition folgt sofort, dass homöomorphe Räume isomorphe Homologiegruppen H_n besitzen. (Im Gegensatz zu $H_n^\Delta(X)$.)

- Sei X ein Δ -Komplex mit endlich vielen Simplexes. Es ist nicht klar, ob $H_n(X)$ endlich erzeugt für alle n .
- Ebenso ist nicht klar, ob $H_k(X) = 0$ für $k > \dim(X)$.

Bemerkung: Singuläre Homologie kann als Spezialfall von Simplexialer Homologie aufgefasst werden.

Sei X ein beliebiger topologischer Raum, definieren den singulären Komplex $S(X)$ als den Δ -Komplex mit einem n -Simplex Δ_σ^n für jeden singulären n -Simplex $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$, wobei Δ_σ^n auf dem offensichtlichen Weg an den $(n-1)$ -Simplizes von $S(X)$ angeklebt wird, die den Einschränkungen von σ auf die $(n-1)$ -Simplizes von $\partial\Delta^n$ entsprechen.

$$\Rightarrow H_n^\Delta(S(X)) \cong H_n(X).$$

Bemerkung (Geometrische Interpretation von Zyklen):

Beobachtung: Eine singuläre n -Kette ξ kann immer in der Form

$$\xi = \sum_i \varepsilon_i \sigma_i$$

mit $\varepsilon_i = \pm 1$ geschrieben werden, wobei Abbildungen σ_i die n -Simplexe darstellen.

Gegeben n -Kette $\xi = \sum_i \varepsilon_i \sigma_i$, betrachten wir $\partial\xi$ als Summe von singulären $(n-1)$ -Simplizes mit Vorzeichen ± 1 . Dabei können Paare auftreten, die sich aufheben, d.h. zweimal der gleiche $(n-1)$ -Simplex mit entgegengesetzten Vorzeichen.

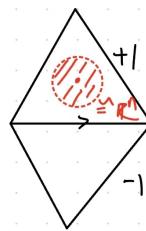
Wählen wir eine maximale Sammlung sich aufhebender Paare, können wir einen n -dimensionalen Δ -Komplex K_ξ aus der disjunkten Vereinigung von n -Simplizes Δ_i^n konstruieren, einen für jedes σ_i . Dabei identifizieren wir die Paare von $(n-1)$ -Simplizes aus der Sammlung.

Die σ_i induzieren eine Abbildung $K_\xi \rightarrow X$. Ist ξ ein *Zyklus*, d.h. alle $(n-1)$ -dim Seiten der Δ_i^n 's sind in identifizierten Paaren, dann ist K_ξ in einer Umgebung jedes Punktes, der nicht im $(n-2)$ -Skelett K_ξ^{n-2} von K_ξ liegt, homöomorph zu \mathbb{R}^n , also eine Mannigfaltigkeit.

Alle n -Simplexe von K_ξ können zusammenpassend orientiert werden, sodass

$$K_\xi^n / K_\xi^{n-2}$$

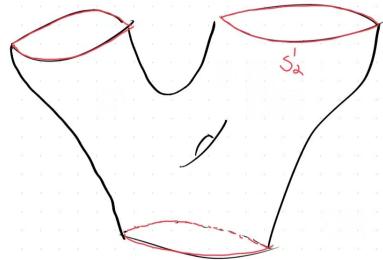
eine orientierte Mannigfaltigkeit ist.



Bemerkung. Elemente von $H_1(X)$ sind durch Sammlungen von orientierten Schleifen in X repräsentiert, und Elemente von $H_2(X)$ durch Abbildungen von geschlossenen, orientierten Flächen nach X .

Man kann zeigen: Ein orientierter 1-Zyklus $\coprod_{\alpha} S^1_{\alpha} \rightarrow X$ ist null in $H_1(X)$, genau dann, wenn es eine Fortsetzung zu einer Abbildung von einer kompakten, orientierten Fläche mit Rand $\coprod_{\alpha} S^1_{\alpha}$ gibt.

Die Aussage bleibt wahr für 2-Zyklen, aber nicht für höhere Dimensionen (In der Nähe von 2-Zykeln trifft keine Aussage über Mannigfaltigkeit). Der Zusammenhang zur Mannigfaltigkeit geht also verloren.



Proposition 8.15. Zerlegen wir X in seine Wegzusammenhangskomponenten X_{α} , dann ist

$$H_n(X) \cong \bigoplus_{\alpha} H_n(X_{\alpha}).$$

Beweis. Jeder singuläre Simplex hat wegzusammenhängendes Bild, d.h. $C_n(X)$ ist eine direkte Summe der Untergruppen $C_n(X_{\alpha})$. Die Randabbildung ∂_n erhält die direkte Summe, d.h. $\partial_n(C_n(X_{\alpha})) \subseteq C_{n-1}(X_{\alpha})$, d.h. auch $\ker \partial_n$ und $\text{im } \partial_{n+1}$ sind direkte Summen, also auch die Homologiegruppen:

$$H_n(X) \cong \bigoplus_{\alpha} H_n(X_{\alpha})$$

□

Proposition 8.16: Ist X nicht-leer und wegzusammenhängend, dann gilt $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. Für einen beliebigen Raum X ist $H_0(X)$ eine direkte Summe von \mathbb{Z} 's, ein \mathbb{Z} für jede Wegzusammenhangskomponente.

Beweis. Per Definition:

$$H_0(X) = \frac{\ker(\partial_0)}{\text{im}(\partial_1)} = \frac{C_0(X)}{\text{im}(\partial_1)}$$

denn $\partial_0 = 0$.

Wir definieren einen Homomorphismus

$$\varepsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \varepsilon \left(\sum_i n_i \sigma_i \right) := \sum_i n_i.$$

Für $X \neq \emptyset$ ist die Abbildung surjektiv.

Ziel: $\ker(\varepsilon) = \text{im}(\partial_1)$, falls X wegzusammenhängend.

1. $\text{im}(\partial_1) \subseteq \ker(\varepsilon)$, denn für jeden singulären 1-Simplex $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$ gilt

$$\partial_1(\sigma) = \sigma|_{[v_1]} - \sigma|_{[v_0]} \Rightarrow \varepsilon(\partial_1(\sigma)) = 1 - 1 = 0.$$

2. $\ker(\varepsilon) \subseteq \text{im}(\partial_1)$: Sei $\sum_i n_i \sigma_i \in \ker(\varepsilon)$, also $\sum_i n_i = 0$.

Die σ_i sind singuläre 0-Simplexes, also Punkte von X .

Wähle einen Weg $\alpha_i : [0, 1] \rightarrow X$ vom Basispunkt x_0 nach $\sigma_i(v_0)$, und sei τ_i der singuläre 0-Simplex mit Bild x_0 .

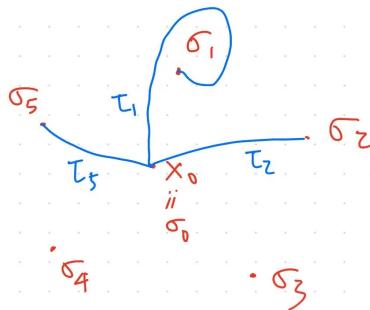
Wir betrachten τ_i als singulären 1-Simplex, es sei $\tau_i : [v_0, v_1] \rightarrow X$ und

$$\partial_1 \tau_i = \sigma_i - \sigma_0.$$

Also

$$\begin{aligned} \partial_1 \left(\sum_i n_i \tau_i \right) &= \sum_i n_i \partial_1 \tau_i = \sum_i n_i \sigma_i - \sum_i n_i \sigma_0 = \sum_i n_i \sigma_i - \underbrace{\left(\sum_i n_i \right)}_{=0} \sigma_0 = \sum_i n_i \sigma_i, \\ \Rightarrow \sum_i n_i \sigma_i &\text{ ist ein Rand, also } \ker(\varepsilon) \subseteq \text{im}(\partial_1). \end{aligned}$$

□



Proposition 8.17. Ist X ein Punkt, dann gilt

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, \\ 0 & n > 1. \end{cases}$$

Beweis. In diesem Fall gibt es genau einen n -Simplex σ_n für jedes n , und

$$\partial(\sigma_n) = \sum_i (-1)^i \sigma_{n-1},$$

eine Summe mit $n + 1$ Summanden, also 0 für n ungerade und σ_{n-1} für n gerade, $n \neq 0$. Das gibt den Kettenkomplex

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

⇒ Die Homologiegruppen sind trivial, außer für $H_0 \cong \mathbb{Z}$. □

Bemerkung (Reduzierte Homologie) Leichte Varianten der singulären Homologie für den Fall $H_n(\{*\}) = 0$ für alle n (insbesondere $n = 0$). Dafür definieren wir die reduzierte Homologie $\tilde{H}_n(X)$ als die Homologigruppen des erweiterten Kettenkomplexes

$$\dots \longrightarrow C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

wobei $\varepsilon(\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i$ (wie im Beweis von Prop. 8.16). Wir sollten $X \neq \emptyset$ fordern, damit wir keine nicht-triviale Homologie in Dimension -1 erzeugen.

Es gilt $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$, da ε verschwindet auf $\text{im } \partial_1 \Rightarrow \varepsilon$ induziert eine Abbildung

$$H_0(X) = \frac{\ker \varepsilon}{\text{im } \partial_1} \longrightarrow \mathbb{Z},$$

mit Kern $\tilde{H}_0(X)$

$$\Rightarrow H_0 \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$$

Offensichtlich: $H_n(X) \cong \tilde{H}_n(X)$ für $n > 0$.

Formal: Das zusätzliche \mathbb{Z} an den erweiterten Ketten-Komplex wird gedacht als erzeugt von der eindeutigen Abbildung

$$[\emptyset] \longrightarrow X,$$

wobei $[\emptyset]$ der leere Simplex ohne Ecken ist (mit Dimension -1). Die Abbildung ε ist dann die gewöhnliche Randabbildung:

$$\partial[\sigma_0] = [\sigma_1] - [\emptyset].$$

8.6 Eigenschaften der Homologie

Sei $f: X \rightarrow Y$ stetig, $C_n(X)$ die singulären n -Ketten von X . Dann definiert f eine Abbildung

$$f_{\#}: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$$

als lineare Fortsetzung der Abbildung $\sigma \mapsto f \circ \sigma$. D.h.

$$f_{\#} \left(\sum_i n_i \sigma_i \right) = \sum_i n_i f_{\#} \sigma_i = \sum_i n_i f_{\#} \circ \sigma_i.$$

Diese Abbildung erfüllt

$$f_{\#} \circ \partial = \partial \circ f_{\#}.$$

Daraus gilt:

$$f_{\#}(\ker \partial) \subseteq \ker \partial \quad \text{und} \quad f_{\#}(\text{im } \partial) \subseteq \text{im } \partial.$$

$\Rightarrow f$ induziert einen Homomorphismus

$$f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y).$$

Diese Abbildung hat zwei wichtige Eigenschaften:

(i) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ für Abbildungen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$.

(ii) $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{H_n(X)}$.

Satz 8.18: Sind $f, g: X \rightarrow Y$ stetig und homotop, dann induzieren sie den gleichen Homomorphismus:

$$f_* = g_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y).$$

Definition 8.19: Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt Homotopieäquivalenz, wenn es eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow X$ gibt, sodass $g \circ f$ homotop zur Identität auf X und $f \circ g$ homotop zur Identität auf Y ist. Die Abbildung g heißt Homotopieinverse von f (diese ist i.A. nicht eindeutig).

Korollar 8.20: Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz, dann sind die Abbildungen

$$f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$$

Isomorphismen (für alle n).

Beispiel: $\{0\}$ ist homotopieäquivalent zu \mathbb{R}^n :

$$\begin{array}{ccc} \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ 0 & \xrightarrow{f} & 0 \\ 0 & \xleftarrow{g} & x \end{array}$$

Bleibt zu zeigen: $f \circ g \simeq id_{\mathbb{R}^n}$ (da $g \circ f$ offensichtlich ist)

Beweis. Finde die Homotopie H :

$$H: (t, x) \mapsto (1-t)x: [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

□

Sei X ein Δ -Komplex, wir definieren eine Abbildung

$$\Delta_n(X) \rightarrow C_n(X)$$

indem wir jeden n -Simplex auf die charakteristische $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ schicken.

Satz 8.21: Der induzierte Homomorphismus

$$H_n^\Delta(X) \rightarrow H_n(X)$$

ist ein Isomorphismus.

Axiomatischer Blickpunkt

Eine Homologie-Theorie ordnet jedem (nicht-leeren) CW-Komplex X eine Folge von abelschen Gruppen $\tilde{h}_n(X)$ und jeder stetigen Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen CW-Komplexen eine Folge von Homomorphismen

$$f_*: \tilde{h}_n(X) \rightarrow \tilde{h}_n(Y)$$

zu, sodass $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ und $\text{id}_X = \text{id}$, und sodass die folgenden drei Axiome erfüllt sind:

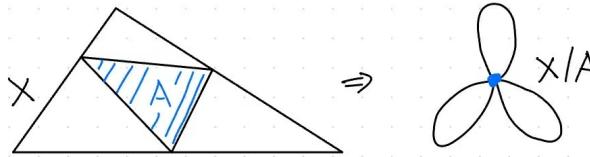
1. Ist f homotop zu g , dann gilt $f_* = g_*: \tilde{h}_n(X) \rightarrow \tilde{h}_n(Y)$.
2. Sei (X, A) ein CW-Paar, dann gibt es einen *Randhomomorphismus*

$$\partial: \tilde{h}_n(X/A) \rightarrow \tilde{h}_{n-1}(A),$$

welcher in die lange exakte Sequenz

$$\dots \xrightarrow{\partial} \tilde{h}_n(A) \xrightarrow{\iota_*} \tilde{h}_n(X) \xrightarrow{q_*} \tilde{h}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{h}_{n-1}(A) \xrightarrow{\iota_*} \dots$$

passt, wobei ι die Inklusion $A \rightarrow X$ und q die Quotientenabbildung ist.



Des Weiteren ist die Randabbildung auch natürlich: Sei $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, diese Abbildung definiert eine Abbildung

$$\bar{f}: X/A \rightarrow Y/B$$

auf den Quotienten. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{h}_n(X/A) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{h}_{n-1}(A) \\ \downarrow \bar{f}_* & & \downarrow f_* \\ \tilde{h}_n(Y/B) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{h}_{n-1}(B) \end{array}$$

3. Für eine Wedge-Summe $X = \bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$ mit Inklusionen $\iota_{\alpha}: X_{\alpha} \hookrightarrow X$ ist der direkte Summenabbildung

$$\bigoplus_{\alpha} \iota_{\alpha*}: \bigoplus_{\alpha} \tilde{h}_n(X_{\alpha}) \rightarrow \tilde{h}_n(X)$$

ein Isomorphismus, für alle n .

[Eilenberg–Steenrod–Axiome]

Bemerkung:

- Es gibt verschiedene Homologien, die obige Definition. erfüllen (d.h. nicht-isomorphe).
- Simpliziale/Singuläre Homologien erfüllen

$$H_n(\{\text{pt}\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für alle Homologien ist dies nicht der Fall.

Zusammenhang zur Fundamentalgruppe:

$\pi_1(X, x_0)$ und $H_1(X)$ sind durch Abbildungen $f : [0, 1] \rightarrow X$ definiert.

Ist $f : [0, 1] \rightarrow X$ ein Schleife, also $f(0) = f(1)$, dann ist der zugehörige singuläre 1-Simplex gegeben durch f , ein Zyklus, denn

$$\partial f = f(1) - f(0).$$

Satz 8.22:

Fassen wir Schleifen als singuläre 1-Zykel auf, erhalten wir einen Homomorphismus

$$h : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X).$$

Wenn X wegzusammenhängend ist, dann ist h surjektiv und der Kern ist die Kommutator-Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$:

$$\{aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in \pi_1(X, x_0)\} = \mathcal{K}(\pi_1(X)).$$

D.h. h induziert einen Isomorphismus zwischen der Abelsierung

$$\pi_1(X, x_0)/\mathcal{K}(\pi_1(X))$$

und $H_1(X)$.

Beweis. Wir schreiben $f \simeq g$ für homotope Wege mit festgehaltenem Endpunkt und $f \sim g$ für homologe Ketten, d.h. $f - g = \partial\sigma$ für ein 2-Kette σ .

Diese Relation erfüllt:

- Ist f der konstante Weg, dann gilt $f \sim 0$.

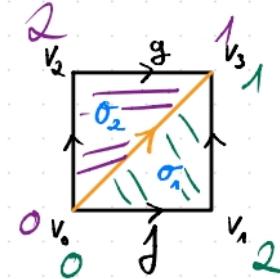
f ist ein Zyklus, denn es ist eine Schleife, und da $H_1(\text{pt}) = 0$, muss f ein Rand sein ($f \in \ker(\partial)$). Explizit: f ist der Rand des konstanten singulären 2-Simplex σ mit dem gleichen Bild wie f :

$$\partial\sigma = \sigma|_{[v_1, v_2]} - \sigma|_{[v_0, v_2]} + \sigma|_{[v_0, v_1]} = f - f + f = f.$$

ii) Ist $f \simeq g$, dann $f \sim g$.

Sei $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ eine Homotopie von f nach g .

Dann gibt es ein Paar von singulären 2-Simplexen σ_1 und σ_2 in X , welche das Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ in zwei Dreiecke $[v_0, v_1, v_3]$ und $[v_0, v_2, v_3]$ zerlegen.



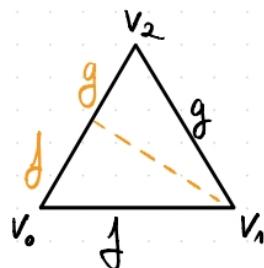
Wir berechnen

$$\begin{aligned}
 \partial(\sigma_1 - \sigma_2) &= \partial\sigma_1 - \partial\sigma_2 \\
 &= \sigma_1|_{[v_3, v_1]} - \sigma_1|_{[v_0, v_1]} + \sigma_1|_{[v_0, v_3]} - (\sigma_2|_{[v_3, v_2]} - \sigma_2|_{[v_0, v_2]} + \sigma_2|_{[v_0, v_3]}) \\
 &= \sigma_1|_{[v_3, v_1]} - \sigma_1|_{[v_0, v_1]} - \sigma_2|_{[v_3, v_2]} + \sigma_2|_{[v_0, v_2]} \\
 &= \text{const}(f(1)) - f - (-g) + \text{const}(f(0)) \\
 &\sim g - f
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad g - f \text{ ist ein Rand} \quad \Rightarrow \quad f \sim g$

iii) $f * g \sim f + g$, wobei $f * g$ die Verkettung von Wegen ist. Sei $\sigma : \Delta^2 \rightarrow X$ die orthogonale Projektion von $f * g$ auf $\sigma([v_0, v_2])$, dann

$$\partial\sigma = g - f * g + f \implies f + g \sim f * g$$



iv) $f^- \sim -f$, wobei f^- die Umkehr des Weges f .

Das folgt aus der vorigen Beobachtung:

$$f + f^- \sim f * f^- \sim 0.$$

Wenden wir (ii) und (iii) auf Schleifen an, erhalten wir einen wohldefinierten Homomorphismus

$$h : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X),$$

welcher die Homotopieklass von f auf die Homologieklasse des 1-Zyklus f abbildet.

1. Behauptung: X wegzusammenhängend $\Rightarrow h$ ist surjektiv.

Sei $\sum_i n_i \sigma_i$ ein Zyklus, der ein Element von $H_1(X)$ repräsentiert. Nach Umbenennung der σ_i können wir annehmen, dass $n_i = \pm 1$. Laut iv) können wir $n_i = +1$ annehmen, sodass wir den 1-Zyklus $\sum_i \sigma_i$ betrachten.

Ist ein σ_i keine Schleife, dann folgt aus $\partial(\sum_i \sigma_i) = 0$, dass es ein anderes σ_j gibt, sodass die Verkettung $\sigma_i * \sigma_j$ definiert ist. Laut (iii) können wir die Terme σ_i und σ_j zu einem einzigen Term $\sigma_i * \sigma_j$ zusammenfassen. Führen wir dies fort, enden wir mit dem Fall, in dem jedes σ_i eine Schleife ist.

Da X wegzusammenhängend ist, können wir einen Weg γ_i von x_0 zum Basispunkt von σ_i wählen. Dann gilt:

$$\gamma_i * \sigma_i * \gamma_i^- \sim \sigma_i \quad (\text{laut (iii) und (iv)}).$$

Wir können also annehmen, dass σ_i eine Schleife mit Basispunkt x_0 ist. Wir können alle σ_i 's zu einem einzigen σ zusammenfassen (siehe (ii)).

\Rightarrow d.h. das gegebene Element liegt im Bild von h .

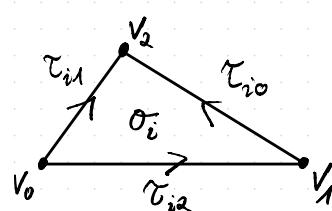
2. Behauptung: $\mathcal{K}(\pi_1(X, x_0)) = \ker(h)$

$\mathcal{K}(\pi_1(X, x_0)) \subseteq \ker(h)$, da $H_1(X)$ abelsch ist.

$$[h(aba^{-1}b^{-1}) = a + b - a - b = 0]$$

Für die umgekehrte Inklusion zeigen wir, dass alle Klassen $[f] \in \ker(h)$ in der Abelsierung $\pi_1(X, x_0)_{\text{ab}}$ trivial sind.

Sei $[f] \in \ker(h)$. Als 1-Zyklus ist f der Rand einer 2-Kette $\sum n_i \sigma_i$. Wieder können wir $n_i = \pm 1$ annehmen. Wir können die Kette $\sum \sigma_i$ einem 2-dimensionalen Δ -Komplex K zuordnen, indem wir für jedes σ_i einen simplizialen 2-Simplex wählen und bestimmte Paare von Kanten identifizieren.



Mit der üblichen Randformel

$$\partial\sigma_i = \tau_{i0} - \tau_{i1} + \tau_{i2} \Rightarrow f = \sum_i \partial\sigma_i = \sum_i (\tau_{i0} - \tau_{i1} + \tau_{i2})$$

Wir können alle außer einem τ_{ij} in Paare zusammenfassen, für die die Koeffizienten $(-1)^j n_i$ in jedem Paar $+1$ und -1 sind. Das verbleibende ist gleich f . Wir identifizieren Kanten der Δ_j^2 's, die zu den gepaarten τ_{ij} gehören, wobei wir die Orientierung der Kanten beibehalten \rightsquigarrow erhalten eine orientierte Fläche Σ mit Rand f .

Zusammenfassung der Abbildung σ_i gibt eine Abbildung $\Sigma \rightarrow X$.

Blackbox: Wir können σ deformieren, sodass der Rand, der zu f gehört, unverändert bleibt und jede Ecke auf den Basispunkt x_0 abgebildet wird.

Wir benutzen additive Notation auf der abelschen Gruppe $\pi_1(X)_{ab}$ und schreiben

$$\begin{aligned} [f] &= 0 && (\text{da } h([f]) = 0) \\ &= \left[\partial \sum_i \sigma_i \right] && (\text{da } f \text{ Rand einer 2-Kette ist}) \\ &= \sum_i [\partial\sigma_i] = 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ ist ein Produkt von Kommutatoren $\Rightarrow f \in \mathcal{K}(\pi_1(X, x_0))$

$$\Rightarrow \ker(h) \subseteq \mathcal{K}(\pi_1(X, x_0)) \Rightarrow \ker(h) = \mathcal{K}(\pi_1(X, x_0))$$

□

9 Ergänzende Themen

9.1 Quotientenmannigfaltigkeiten

Definition 9.1. Sei G eine Gruppe und \mathcal{M} eine Mannigfaltigkeit. Eine (Links-)Wirkung von G auf \mathcal{M} ist eine Abbildung

$$\theta : G \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \quad (g, p) \mapsto g \cdot p$$

die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot p) = (g_1 g_2) \cdot p \quad \forall g_1, g_2 \in G, p \in \mathcal{M},$$

$$e \cdot p = p \quad \forall p \in \mathcal{M},$$

wobei e das neutrale Element von G ist.

Ist G eine Lie-Gruppe, so sprechen wir von einer *glatten Wirkung*, falls θ eine glatte Abbildung ist.

Bemerkung.

- Häufig stellen wir uns vor, dass jedes $g \in G$ eine Abbildung $\theta_g = \theta(g, \cdot) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ definiert.

Mit dieser Schreibweise sind die Bedingungen:

$$\theta_{g_1} \circ \theta_{g_2} = \theta_{g_1 g_2}, \quad \theta_e = \text{id}_{\mathcal{M}}.$$

- Analog kann man Rechtswirkungen als Abbildungen $\mathcal{M} \times G \rightarrow \mathcal{M}$ definieren. Die erste Forderung wird dann zu

$$\theta_{g_2} \circ \theta_{g_1} = \theta_{g_1 g_2}.$$

- Für eine glatte Wirkung ist jedes θ_g ein Diffeomorphismus von \mathcal{M} , denn $\theta_{g^{-1}}$ ist eine glatte Inverse (bijektiv).
- Wir schreiben auch $G \curvearrowright \mathcal{M}$.

Beispiel:

1. G beliebige Lie-Gruppe, \mathcal{M} beliebige glatte Mannigfaltigkeit. Die triviale Wirkung von G auf \mathcal{M} ist gegeben durch

$$g \cdot p = p \quad \forall g \in G, p \in \mathcal{M}.$$

Die Wirkung ist glatt.

2. Die natürliche Wirkung von $GL(n, \mathbb{R})$ auf \mathbb{R}^n ist eine Linkswirkung gegeben durch Matrixmultiplikation

$$(A, x) \mapsto Ax.$$

Dies ist eine Wirkung, denn

$$\mathbb{I}x = x \quad \text{und} \quad (AB)x = A(Bx).$$

Die Wirkung ist glatt, denn Ax hängt polynomial von den Einträgen von A und x ab.

3. Jede Lie-Gruppe wirkt durch Linkstranslation glatt auf sich selbst.
Allgemein wirkt jede Lie-Untergruppe $H \subseteq G$ durch Linkstranslation auf G .
4. Jede Lie-Gruppe wirkt durch Konjugation

$$\theta(g, h) = ghg^{-1}$$

glatt auf sich selbst.

5. Die Wirkung einer diskreten Gruppe Γ auf einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ist glatt genau dann, wenn die Abbildung

$$p \mapsto g \cdot p$$

für jedes $g \in \Gamma$ eine glatte Abbildung auf \mathcal{M} ist. Z.B. ist die Wirkung von \mathbb{Z}^n auf \mathbb{R}^n glatt:

$$(m_1, \dots, m_n) \cdot (x_1, \dots, x_n) = (x_1 + m_1, \dots, x_n + m_n).$$

Definition 9.2

Sei $\theta : G \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ eine Linkswirkung der Gruppe G auf der Menge \mathcal{M} . (Für diese Definition sind weder Stetigkeit noch Differenzierbarkeit notwendig)

- Für alle $p \in \mathcal{M}$ ist die Orbit von p oder Bahn $G \cdot p$ die Menge

$$G(p) = G \cdot p = \{g \cdot p \mid g \in G\}.$$

(Also die Menge aller Bilder von p unter den Elementen von G .)

- Für jedes $p \in \mathcal{M}$ ist der Stabilisator oder die Isotropiegruppe von p , bezeichnet mit G_p , die Menge der Elemente von G , die p fixieren:

$$G_p = \{g \in G \mid g \cdot p = p\}.$$

G_p ist eine Untergruppe von G .

- Die Wirkung heißt transitiv, falls es für jedes Paar $p, q \in \mathcal{M}$ ein $g \in G$ mit $g \cdot p = q$ gibt.
(Äquivalent: Der einzige Orbit ist ganz \mathcal{M} .)

- Die Wirkung heißt frei, falls das einzige Element von G , das ein Element von \mathcal{M} festhält, die Identität ist, d. h.

$$g \cdot p = p \quad \text{für ein } p \in \mathcal{M} \Rightarrow g = e.$$

(Äquivalent: Alle Stabilisatoren sind trivial.)

Beispiele (Nummerierung wie oben):

1. G, M beliebig, $g \cdot p = p$. Dann gilt $G \cdot p = \{p\}$, $G_p = G$.
2. $\mathrm{GL}(n) \curvearrowright \mathbb{R}^n$: Für je zwei $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gibt es eine invertierbare lineare Abbildung A mit $Av = w$. Für $p = 0$ oder $p \neq 0$ in \mathbb{R}^n :
 $\Rightarrow G \cdot p = \{0\}$ oder $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
3. $G \curvearrowright G$, $(g, h) \mapsto gh$. Gegeben g_1, g_2 , dann gibt es genau eine Linkstranslation auf G , die g_1 auf g_2 abbildet (nämlich $g_2 g_1^{-1}$).
 \Rightarrow Die Wirkung ist *frei* und *transitiv*.
4. $\mathbb{Z}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n$ ist *frei*, aber nicht *transitiv*.

Seien E, M topologische Räume, $\pi : E \rightarrow M$ eine Überlagerung und $\theta : E \rightarrow E$ ein Homöomorphismus mit

$$\pi \circ \theta = \pi.$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\theta} & E \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

Wir bezeichnen mit $\mathrm{Aut}_\pi(E)$ die Menge aller solcher Homöomorphismen, die *Automorphismengruppe von π* mit der Komposition als Verknüpfung.

$\mathrm{Aut}_\pi(E)$ wirkt auf E .

Bemerkung: $\text{Aut}_\pi(E)$ wirkt transitiv auf *jedes Faser* von π genau dann, wenn $\pi_*(\pi_1(E, q))$ ist eine *normale Untergruppe* von $\pi_1(M, \pi(q))$ für alle $q \in E$,

$$(\forall g \in G : g\mathcal{N}g^{-1} = \mathcal{N}).$$

Proposition 9.3.

Seien E, M Mannigfaltigkeiten und $\pi : E \rightarrow M$ eine Überlagerung. Versehen mit der diskreten Topologie ist die Automorphismengruppe $\text{Aut}_\pi(E)$ eine *nulldimensionale* Lie-Gruppe, die *glatt* und *frei* auf E wirkt.

Sei G eine Gruppe und M ein topologischer Raum, G wirke auf M , $(g, p) \mapsto g \cdot p$. Wir definieren eine Relation auf M durch $p \sim q$, falls es ein $g \in G$ gibt, sodass $g \cdot p = q$. Das ist eine Äquivalenzrelation auf M und die Äquivalenzklassen sind die *Orbits von G in M* . Die Menge der Orbits M/G versehen wir mit der Quotiententopologie und nennen sie den Orbitraum.

Lemma 9.4.

Für jede stetige Wirkung einer topologischen Gruppe G auf einem topologischen Raum M ist die Quotientenabbildung $\pi : M \rightarrow M/G$ eine *offene* Abbildung.

Es gibt viele Lie-Gruppen und Wirkungen, sodass M/G wieder eine *Mannigfaltigkeit* ist.

Beispiele: (Orbiträume für glatte Lie-Gruppen-Wirkungen)

1. G beliebige Gruppe, M Mannigfaltigkeit, $g \cdot p = p$ für alle $g \in G, p \in M$. Jeder Orbit besteht aus einem Punkt $\Rightarrow M/G = M$ ist Mannigfaltigkeit (altriviales Beispiel).
2. Einfaches nicht-triviales Beispiel: $G = \mathbb{R}^k$, $M = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, wirkt durch Translation in dem \mathbb{R}^k -Faktor:

$$v \cdot (x, y) = (v + x, y)$$

Die Orbits sind Unterräume parallel zu \mathbb{R}^k und der Orbitraum

$$\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n / \mathbb{R}^k$$

ist homöomorph zu \mathbb{R}^n .

Die Quotientenabbildung $\pi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine glatte Submersion.

3. Die Gruppe S^1 wirkt auf \mathbb{C} durch komplexe Multiplikation: $z \cdot w = zw$.
Die Orbits sind Kreise um den Ursprung oder $\{0\}$.
Der Orbitraum ist $[0, \infty)$, aber *keine* Mannigfaltigkeit.
Die Quotientenabbildung $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/S^1$, $z \mapsto |z|$.

4. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^n$: Zwei Orbits: $\{0\}$ und $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Offene Mengen im Quotienten: $\emptyset, \mathbb{R}^n / \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$
 \Rightarrow nicht hausdorffsch, also keine Mannigfaltigkeit.
5. $\mathrm{O}(n) \curvearrowright \mathbb{R}^n$ durch Matrixmultiplikation: Die Orbits sind Sphären um den Ursprung und $\{0\}$. Der Orbitraum ist $[0, \infty)$.
6. Entfernt man 0 aus den vorigen Beispielen, werden die Quotienten zu Mannigfaltigkeiten.

Beispiel 9.5

Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. \mathbb{R} wirke auf $T^2 = S^1 \times S^1$ durch

$$t \cdot (w, z) = (e^{2\pi i t} w, e^{2\pi i \alpha t} z).$$

Die Wirkung ist glatt, frei und hat dichte Orbits.

\Rightarrow Die einzigen offenen Mengen in T^2 / \mathbb{R} sind \emptyset und T^2 / \mathbb{R} .

Nicht hausdorffsch \Rightarrow Keine Mannigfaltigkeit.

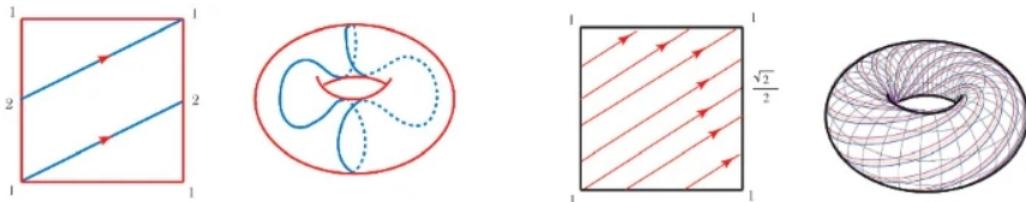


Abbildung 40: Alle Linien mit irrationaler Neigung können unendlich oft um den Torus gewickelt werden, ohne sich jemals zu schließen

Um solche Beispiele zu verhindern, müssen wir unsere Wirkungen beschränken.

Definition 9.6

Eine stetige Linkswirkung einer Lie-Gruppe G auf einer Mannigfaltigkeit M heißt eigentliche Wirkung, falls die Abbildung

$$\begin{aligned} G \times M &\longrightarrow M \times M \\ (g, p) &\longmapsto (g \cdot p, p) \end{aligned}$$

eigentlich ist (d.h. Urbilder kompakter Mengen sind kompakt).

Proposition 9.7

Wirkt die Lie-Gruppe G stetig und eigentlich auf der Mannigfaltigkeit M , dann ist der Orbitraum M/G hausdorffsch.

Proposition 9.8 (Charakterisierung eigentlicher Wirkungen:)

Sei M eine Mannigfaltigkeit und G eine Lie-Gruppe, die stetig auf M wirkt.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Die Wirkung ist eigentlich.
2. Ist (p_i) eine Folge in M und (g_i) eine Folge in G , sodass (p_i) und $(g_i \cdot p_i)$ konvergieren, dann hat (g_i) eine konvergente Teilfolge.
3. Für alle kompakten Teilmengen $K \subseteq M$ ist die Menge

$$G_K = \{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$$

kompakt.

Korollar 9.9

Jede stetige Wirkung einer kompakten Lie-Gruppe auf einer Mannigfaltigkeit ist eigentlich.

Beweis. Seien (p_i) und (g_i) wie in Bedingung (2) von Proposition 9.8, dann hat (g_i) eine konvergente Teilfolge, da jede Folge in G eine konvergente Teilfolge besitzt.

(Lie-Gruppe \Rightarrow Mannigfaltigkeit \Rightarrow metrischer Raum

Daher ist *Überdeckungskompaktheit* und *Folgenkompaktheit* äquivalent.) \square

Proposition 9.10 (Orbitsen eigentlicher Wirkungen)

Sei θ eine eigentliche glatte Wirkung der Lie-Gruppe G auf der Mannigfaltigkeit M . Für jeden Punkt $p \in M$ ist die Orbitabbildung

$$\theta^{(p)} : G \rightarrow M$$

eine *eigentliche* Abbildung, und der Orbit $G \cdot p = \theta^{(p)}(G)$ ist *abgeschlossen* in M . Ist zusätzlich $G_p = \{e\}$, dann ist $\theta^{(p)}$ eine glatte *Einbettung* und der Orbit ist eine *eigentlich eingebettete Untermannigfaltigkeit*.

Korollar 9.11

Wirkt eine Lie-Gruppe G eigentlich auf der Mannigfaltigkeit M , dann ist jeder Orbit eine abgeschlossene Teilmenge von M und jede Isotropiegruppe ist kompakt.

Beweis. Die erste Aussage folgt aus Proposition 9.10.

Die zweite aus Proposition 9.8, da die Isotropiegruppe eines Punktes p die Menge

$$G_K \text{ für } K = \{p\}$$

ist. \square

Beispiel: Die Wirkung \mathbb{R}^+ auf \mathbb{R}^n gegeben durch

$$t \cdot (x_1, \dots, x_n) = (tx_1, \dots, tx_n)$$

ist nicht eigentlich.

- 1. Möglichkeit: Die Isotropiegruppe von $0 \in \mathbb{R}^n$ ist \mathbb{R}^+ , also nicht kompakt.

- 2. Möglichkeit: Die anderen Orbits sind offene Strahlen, also nicht abgeschlossen in \mathbb{R}^n .

Theorem 9.12 (Quotientenmannigfaltigkeitstheorem)

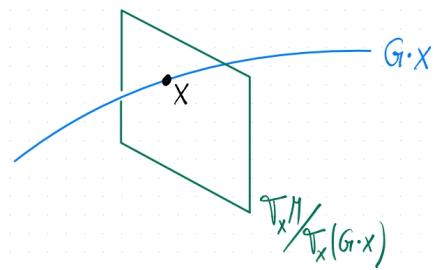
Sei G eine Lie-Gruppe, die glatt, frei und eigentlich auf der Mannigfaltigkeit M wirkt. Dann ist der Orbirraum M/G eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension

$$\dim M - \dim G,$$

und hat eine eindeutige glatte Struktur mit der Eigenschaft, dass die Quotientenabbildung

$$\pi : M \rightarrow M/G$$

eine glatte Submersion ist.



Beispiele:

$$1. \mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^* = S^{2n+1} / S^1$$

Dabei gilt: $\mathbb{C}^* \cong (0, \infty) \times S^1$

$$2. S^2 = \text{SO}(3)/S^1$$

$$3. \text{Triviale Wirkung: } G \curvearrowright M, \quad g \cdot p = p$$

\Rightarrow hat „falsche“ Dimension (erfüllt Theorem 9.12 nicht)

$$4. S^2/\mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{C}/\mathbb{Z}^3 \rightsquigarrow \text{Orbifolds}$$

9.2 Zerlegung der Eins

Lemma 3.4.

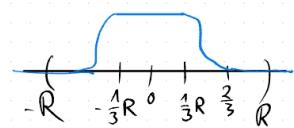
Sei $R > 0$, dann existiert ein glattes Feld $\chi_R : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ mit

$$\chi_R|_{\overline{B_{\frac{1}{3}R}(0)}} \equiv 1 \quad \text{und} \quad \chi_R|_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\frac{2}{3}R}(0)} \equiv 0.$$

Insbesondere: Diese Funktion ist

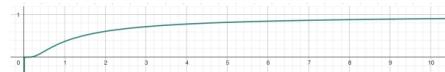
- glatt auf \mathbb{R}^n ,
- identisch 1 für $|x| \leq \frac{1}{3}R$,

- identisch 0 für $|x| \geq \frac{2}{3}R$.

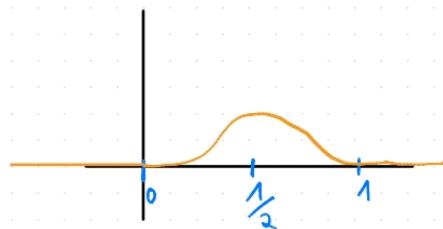


Es gibt eine alternative Konstruktion zu diesen Funktionen.
Dazu sei

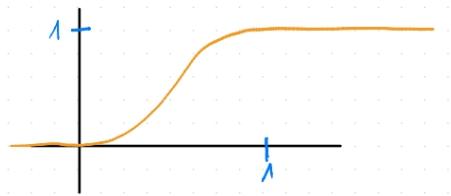
$$e_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad e_1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \end{cases}$$



$$e_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad e_2(t) = e_1(t) \cdot e_1(1-t)$$



$$e_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad e_3(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t e_2(s) ds \quad \text{mit} \quad C = \int_{-\infty}^{\infty} e_2(s) ds$$



Denn e_3 ist glatt und es gilt:

$$e_3(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \in (0, 1), & t \in (0, 1) \\ 1, & t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow e_3(1-t) = 1 - e_3(t)$$

Für $0 < a < b$ und $q \in \mathbb{R}^n$ definieren wir:

$$S_{a,b,q}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad S_{a,b,q}(x) = 1 - e_3 \left(\frac{|x - q| - a}{b - a} \right)$$

Dann gilt:

$$S_{a,b,q}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \overline{B_a(q)} \\ \in (0, 1), & x \in B_b(q) \setminus \overline{B_a(q)} \\ 0, & x \notin B_b(q) \end{cases}$$

Daraus können wir eine allgemeine Aussage ableiten:

Lemma 3.13.

Sei M eine Mannigfaltigkeit, $K \subseteq U \subseteq M$ mit K kompakt und U offen. Dann gibt es für alle $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt eine Funktion $\tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{f}|_K = f \quad \text{und} \quad \text{supp}(\tilde{f}) = \overline{\{p \in M \mid \tilde{f}(p) \neq 0\}} \subseteq U.$$

Ziel:

Gegeben sei eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ und eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Finde Funktionen $\tilde{f}_i: M \rightarrow \mathbb{R}$ mit:

- $\text{supp}(\tilde{f}_i) \subseteq U_i$
- $\sum_{i \in I} \tilde{f}_i = f \quad (\text{potenziell unendliche Indexmenge})$

Wohldefiniert:

Verlange, dass die Träger $\text{supp}(\tilde{f}_i)$ lokal endlich sind.

„Lokal endlich“ heißt: Jeder Punkt hat eine Umgebung, die nur mit endlich vielen der Mengen (nicht-leer) schneidet.

Bemerkung: Es reicht, diese Funktionen für $f \equiv 1$ zu finden. Für andere f setze dann $\tilde{f}_i := f \cdot \chi_i$.

Definition 3.14.

Eine Zerlegung der Eins ist eine Familie

$$\mathcal{S} = \{s_i: M \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in I}$$

von glatten Funktionen, so dass:

1. die Familie der Träger $\{\text{supp}(s_i)\}_{i \in I}$ eine lokal endliche Überdeckung von M ist,
2. $0 \leq s_i \leq 1$ für alle $i \in I$ und $1 = \sum_{i \in I} s_i$.

Bemerkung. Eigenschaft 2 $\Rightarrow \{\text{supp}(s_i)\}$ ist eine Überdeckung von M .

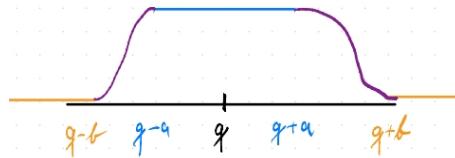
Beispiel:

$$\mathcal{M} = (0, \infty), \quad \mathcal{U} = \{\{k, k+2\}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$$

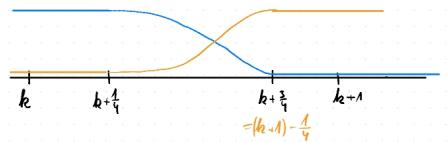
$$\mathbb{R} \setminus \left\{ S_{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, k+1} \right\}_{k \in \mathbb{N}_0} \cup \left\{ S_{\frac{5}{4}, \frac{7}{4}, 0} \right\}$$

mit

$$S_{a,b,q}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in B_a(q), \\ \in (0, 1) & \text{für } x \in B_b(q) \setminus \overline{B_a(q)}, \\ 0 & \text{für } x \notin B_b(q) \end{cases}$$



ist eine Zerlegung der Eins bezüglich \mathcal{U} .



Bemerkung:

- Dieses Beispiel zeigt, dass Träger nicht immer kompakt sind:

$$\text{supp} \left(S_{\frac{5}{4}, \frac{7}{4}, 0} \right) = \left(0, \frac{7}{4} \right]$$

- Aber man kann zeigen: maximal abzählbar viele der Träger sind nicht leer.

Satz 9.15

Sei M hausdorffsch mit präkompakter, abzählbarer Basis der Topologie \mathcal{B} .

(Präkompakt: Alle Elemente in \mathcal{B} haben kompakten Abschluss.)
Dann gilt: Für alle offenen Überdeckungen \mathcal{U} von M existiert eine Teilüberdeckung

$$\mathcal{U}' \text{ von } \mathcal{B} \text{ sodass } \overline{\mathcal{U}'} := \{\overline{B} \mid B \in \mathcal{U}'\}$$

eine lokal endliche Verfeinerung von \mathcal{U} ist.

(Verfeinerung: Für alle $B \in \mathcal{U}'$ existiert ein $U \in \mathcal{U}$ mit $\overline{B} \subseteq U$.)

Satz 9.16

Für alle offenen Überdeckungen $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ einer glatten Mannigfaltigkeit existieren Zerlegungen der Eins

$$\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^0 = \{\rho_j^0\}_{j \in J'} \quad \text{und} \quad \mathcal{R}_{\mathcal{U}}^1 = \{\rho_i^1\}_{i \in I}$$

mit

- für alle $j \in J'$ ist $\text{supp}(\varphi_j)$ kompakt und es gilt: $\exists i(j) \in I$ mit $\text{supp}(\varphi_j) \subseteq U_{i(j)}$.
- $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^1$ ist eine Zerlegung der Eins bezüglich \mathcal{U} .

(Keine Zerlegung bzgl. \mathcal{U} , da i nicht injektiv sein muss.)

Beweis. Man kann zeigen: Es gibt eine abzählbare Basis

$$\mathcal{B} = \{B_j := \varphi_j^{-1}(B_{2a_j}(q_j))\}_{j \in J}$$

von M , mit $V \subseteq B \in \mathcal{B}$ existiert eine Karte, die B auf eine offene Kugel in \mathbb{R}^n abbildet, und \mathcal{B} ist präkompakt.

(benutzt Zweitzählbarkeit von M)

Nach Satz 9.15: Es gibt eine Teilüberdeckung

$$\mathcal{B}' = \{B_j\}_{j \in J'} \quad \text{von } \mathcal{B}, \text{ sodass} \quad \overline{\mathcal{B}'} = \{\overline{B_j}\}_{j \in J'}$$

eine lokal endliche Verfeinerung von \mathcal{U} ist.

Definiere $\rho_j: M \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\rho_j(x) = \begin{cases} \rho_{a_j, 2a_j, q_j} \circ \varphi_j(x) & \text{für } x \in B_j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\text{supp}(\rho_j) = \overline{B_j}.$$

Definiere eine Funktion $\sigma: M \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\sigma := \sum_{j \in J'} \rho_j$$

Für alle $p \in M$ gilt: Es gibt eine Karte (U_p, φ_p) und eine Teilmenge $J'_p \subseteq J'$, sodass

- J'_p endlich ist und
- $\rho_j|_{U_p} = 0$ für alle $j \notin J'_p$ (denn $\overline{\mathcal{B}}$ ist lokal endlich).

Dann ist $\sigma|_{U_p} = \sum_{j \in J'_p} \rho_j$ eine (endliche) Summe glatter Funktionen.

$\Rightarrow \sigma$ ist glatt.

Behauptung: $\sigma(p) > 0$ für alle $p \in M$.

Sei $p \in M$. Da $\rho_j \geq 0$, genügt es zu zeigen, dass es ein ρ_j mit $\rho_j(p) > 0$ gibt.

\mathcal{B}' Überdeckung: Für $p \in M$ gilt:

$$p \in \varphi_{j_p}^{-1}(B_{2a_{j_p}}(q_{j_p}))$$

Dann ist

$$\rho_{a_{j_p}, 2a_{j_p}, q_{j_p}} \circ \varphi_{j_p} > 0 \quad (\text{in Umgebung von } p) \quad \Rightarrow \text{Beh.}$$

σ ist überall positiv, müssen noch normalisieren.

Wir setzen für $\rho_j^0: M \rightarrow \mathbb{R}$

$$\rho_j^0 := \frac{\rho_j}{\sigma}$$

Behauptung: $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^0 := \{\rho_j^0\}_{j \in J'}$ ist eine Zerlegung der Eins.

- $\overline{\mathcal{B}'} = \{\text{supp}(\rho_j) = \text{supp}(\rho'_j)\}_{j \in J'}$ ist lokal endliche Überdeckung, kompakt.
- $\sum_{j \in J'_p} \rho_j^0 = \sum_{j \in J'_p} \frac{\rho_j}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \sum_{j \in J'_p} \rho_j = \frac{\sigma}{\sigma} = 1$
- $\overline{\mathcal{B}'}$ ist Verfeinerung von \mathcal{U} : Für jedes $j \in J'$ gibt es ein $i(j) \in I$, sodass

$$\overline{B_j} \subseteq U_{i(j)}$$

Um aus $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^1$ eine Zerlegung der Eins *bezüglich* \mathcal{U} zu erhalten, modifizieren wir $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^0$.
(\rightarrow Ziel: Eine Zerlegung der Eins bezüglich \mathcal{U} zu erhalten.)

Die Familie der Träger von $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^0$ ist lokal endlich.

Setze

$$\rho_i^1: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \rho_i^1 := \sum_{\substack{j \in J' \\ i(j)=i}} \rho_j^0$$

Behauptung: $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^1 := \{\rho_i^1\}_{i \in I}$ ist eine Zerlegung der Eins bezüglich \mathcal{U} .

Nach Konstruktion gilt:

$$\sum_{i \in I} \rho_i^1 = \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in J' \\ i(j)=i}} \rho_j^0 = \sum_{j \in J'} \rho_j^0 = 1$$

Behauptung:

$$\text{supp}(\rho_i^1) = \bigcup_{\substack{j \in J' \\ i(j)=i}} \text{supp}(\rho_j^0)$$

Daraus folgt:

$$\{p \in M \mid \rho_i^1(p) \neq 0\} = \bigcup_{\substack{j \in J' \\ i(j)=i}} \{p \in M \mid \rho_j^0(p) \neq 0\}$$

Bei lokal endlichen Familien vertauschen Abschluss und Vereinigung.

$$\text{supp}(\rho_j^0) \subseteq U_{i(j)} = U_i \Rightarrow \text{supp}(s_i^1) \subseteq U_i$$

Behauptung: Die Familie $\{\text{supp}(\rho_i^1)\}_{i \in I}$ ist eine lokal endliche Familie.

Für alle $p \in M$ existieren eine Umgebung V_p von p und eine endliche Menge $J'_p \subseteq J'$ mit

$$\text{supp}(\rho_j^0) \cap V_p = \emptyset \quad \text{für alle } j \notin J'_p$$

Definiere die endliche Teilmenge:

$$I_p := \{i(j) \mid j \in J'_p\}$$

Wenn $i \notin I_p$, dann gilt:

$$\rho_i^1|_{V_p} = \sum_{\substack{j \in J' \\ i(j)=i}} \rho_j^0|_{V_p} = 0 \Rightarrow \text{supp}(\rho_i^1) \cap V_p = \emptyset$$

□

Topologische Anmerkung: Sei M topologischer Raum, $U \subseteq M$ offen, $S \subseteq M$. Dann gilt:

$$S \cap U \neq \emptyset \iff \overline{S} \cap U \neq \emptyset$$

und

$$S \cap U = \emptyset \iff \overline{S} \cap U = \emptyset$$

Korollar 9.17

Sei $U \subseteq M$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Dann:

- Für alle $C \subseteq M$ abgeschlossen mit $C \subseteq U$ existiert eine glatte Funktion $\tilde{f}_C: M \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\text{supp}(\tilde{f}_C) \subseteq U \quad \text{und} \quad \tilde{f}_C|_C = f|_C$$

- Es gibt eine Familie glatter Funktionen $\{f_i: M \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in I}$, sodass die Familie $\{\text{supp}(f_i)\}_{i \in I}$ eine lokal endliche Familie von kompakten Mengen ist, und

$$f = \sum_{i \in I} f_i$$

9.3 Vergleichsgeometrie

Euklidische Geometrie (von \mathbb{R}^2)

- Was ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten $x, y \in \mathbb{R}^2$?
- Gegeben: Gerade $L \subseteq \mathbb{R}^2$ und $x \notin L$ ein Punkt, der nicht auf L liegt.
Wie viele Geraden durch x gibt es, die L nicht schneiden?
- Was ist die Innenwinkelsumme eines Dreiecks?

Sphärische Geometrie (von S^2)

- Dieselben Fragen für $x, y \in S^2$.

Wir betrachten

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

die Einheitskugel (Radius 1) um den Ursprung O .

Beobachtung: Der Schnitt einer Ebene in \mathbb{R}^3 mit einer Sphäre ist entweder leer, ein Punkt oder ein Kreis. (Kein Oval.)

Definition 9.18: Alle Kreise auf der Sphäre S^2 , deren Mittelpunkt O ist, heißen *Großkreise*.

Bemerkung: Großkreise sind die Kreise, die durch Schnitte mit Ebenen durch O mit S^2 entstehen.

Definition 9.19

Zwei Punkte P, Q auf S^2 heißen diametral, wenn gilt:

$$\{P, Q\} = \ell \cap S^2$$

für eine Gerade ℓ durch O . (Man sagt auch: „P und Q liegen sich diametral gegenüber.“)

Satz 9.20

Jeder Kreis auf der Sphäre, der ein diametrales Punktpaar enthält, ist ein Großkreis.

Beobachtung: Der Abstand von zwei diametralen Punkten auf der Sphäre, gemessen in \mathbb{R}^3 , ist 2 (Zweimal der Radius).

Frage: Was ist der Abstand gemessen in S^2 ?

Idee: Betrachte alle Kurven in S^2 , welche zwei Punkte verbinden, berechne deren Länge und verwende die minimale Länge.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit. Für $x, y \in M$ definieren wir:

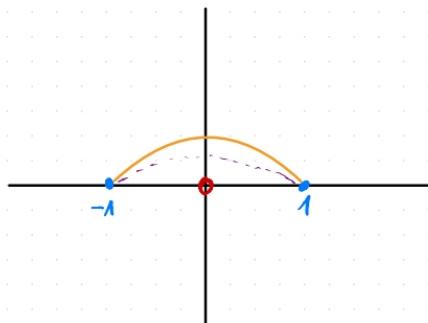
$$d_M(x, y) := \inf \{L(\gamma) \mid \gamma: [0, 1] \rightarrow M \text{ stetig}, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}$$

Dabei bezeichnet $L(\gamma)$ die (euklidische) Länge der Kurve γ .

Fakten:

- d_M ist eine Metrik auf M .
- Die metrische Topologie von d_M ist die Teilraumtopologie von M .
- Ist (M, d_M) vollständig (als metrischer Raum), dann ist das Infimum in der Definition von $d_M(x, y)$ ein Minimum.

Beispiel: Sei $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Dann ist $d_M = d_{\text{eucl.}}$, aber nicht vollständig.



Definition 9.21: Eine Geodätische γ in einem metrischen Raum (X, d) ist eine *stetige, abstandserhaltende* Abbildung

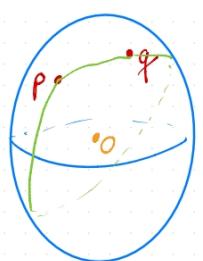
$$\gamma: I \rightarrow X,$$

wobei I eines der folgenden Teilintervalle in \mathbb{R} ist:

$$\mathbb{R}, \quad [a, b], \quad [a, \infty), \quad (-\infty, b]$$

Satz 9.22: Die Geodätische zwischen zwei nicht diametralen Punkten auf einer Sphäre ist der *kürzeste Bogen* des (eindeutigen) Großkreises durch die beiden Punkte. Für zwei diametrale Punkte ist jeder verbindende Halbkreisbogen eine Geodätische.

Beweis. Riemannsche Geometrie



Der Satz liefert: Eine (sphärische) Geodätische ist ein Stück eines Großkreises, das nicht mehr als zwei diametrale Punkte enthält. Sphärische Geodätische sind also isometrische Einbettungen von Intervallen der Länge höchstens

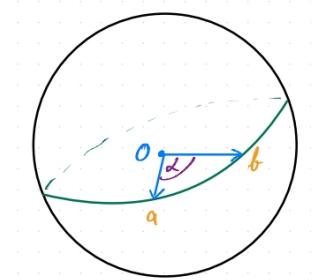
$$\frac{1}{2} \cdot (\text{Umfang der Sphäre}).$$

Insbesondere sind Geodätische zwischen diametralen Punkten *nicht eindeutig*.

Fakt: Großkreise sind genau die Bilder von lokalen Geodätischen auf der Sphäre.

Satz 9.23: Seien a, b zwei nicht-diametrale Punkte auf der Sphäre. Wir bezeichnen die Bogenlänge des kürzesten verbindenden Großkreisbogens als *sphärischen Abstand* $|ab|_S$ von a und b . Der sphärische Abstand zweier diametraler Punkte ist die halbe Länge des Umfangs eines Großkreises. Genauer:

$$|ab|_S = \angle aOb$$



Vergleich mit euklidischer Geometrie

	Euklidische Geometrie \mathbb{R}^2	Sphärische Geometrie S^2
Schnitt von Geraden	0, 1 oder unendlich viele Schnittpunkte	Immer 2 Schnittpunkte (außer identisch) (es gibt keine Parallelen)
Dreiecke	Innenwinkelsumme = 180°	Innenwinkelsumme $> 180^\circ$ (Großkreis-Dreiecke)

Definition 9.24: Das Maß des Winkels zwischen zwei Kurven $c_1, c_2: [0, 1] \rightarrow S^2$ auf S^2 mit $c_1(0) = c_2(0) = p$ ist das euklidische Winkelmaß zwischen den Tangentialvektoren v_1, v_2 an c_1, c_2 in p . Wir schreiben dafür:

$$\angle_p(c_1, c_2)$$

Definition 9.25: Sei $U \subseteq S^2$ offen. Eine Abbildung $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt winkeltreu, falls für alle Paare c_1, c_2 von Geodäten auf S^2 mit gemeinsamem Startpunkt $p \in U$ gilt:

$$\angle_p(c_1, c_2) = \angle_{f(p)}(f(c_1), f(c_2))$$

Satz 9.26: Die stereographische Projektion ist winkeltreu.

Hyperbolische Geometrie

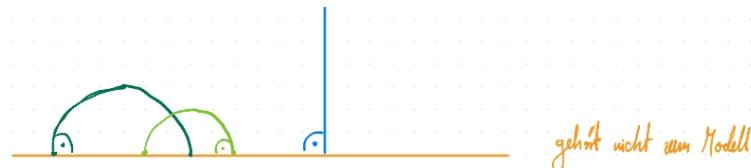
Gibt es auch eine 2-dimensionale Geometrie, bei der es zu viele „Parallelen“ gibt?

Definition 9.27 (Das Poincaré-Halbebenenmodell): Die Punktmenge der hyperbolischen Geometrie in diesem Modell ist gegeben durch

$$\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

Hyperbolische Geraden in \mathbb{H}^2 sind:

- die in \mathbb{H} liegenden Teile von Kreisen mit Mittelpunkt $p \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}(p) = 0$,
- sowie Mengen der Form $\{a + ib \mid b \in \mathbb{R}_{>0}\}$, d. h. euklidische Geraden, die senkrecht auf der Achse $\operatorname{Im}(z) = 0$ stehen.



Die Metrik auf \mathbb{H}^2 verhält sich so, dass Abstände von Punkten in der Ebene davon abhängen, wie nah diese an der reellen Achse sind. Je näher man an der reellen Achse (im euklidischen Sinne) kommt, desto mehr verändert sich die Metrik.

Satz 9.28: Zu je zwei verschiedenen Punkten p, q in der hyperbolischen Ebene existiert genau eine hyperbolische Gerade, die p und q enthält.

Bemerkung (Schnittpunkt im Unendlichen):

Sind zwei hyperbolische Geraden senkrecht zur reellen Achse, so schneiden sie sich in \mathbb{C} und auch in \mathbb{H}^2 nicht. Wir fügen daher einen abstrakten Schnittpunkt, genannt ∞ , im Rand hinzu, der auf all diesen Geraden liegt.

Es schneiden sich also zwei solche *hyperbolische Geraden im Punkt ∞* .

Ein zweiter *Ausnahmefall* sind Geraden, die die reelle Achse im selben Punkt schneiden. Solche Geraden schneiden sich ebenfalls im Grenzwert. Wir sagen in beiden Fällen, dass sich die hyperbolischen Geraden *im Unendlichen schneiden*.

Wir definieren einen tatsächlichen Schnittpunkt durch die erweiterte Menge:

$$\widehat{\mathbb{H}}^2 := \mathbb{H} \cup \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 0\}$$

Definition 9.29: Unter *hyperbolischen Dreiecken* verstehen wir die Figuren, die von drei hyperbolischen, sich paarweise schneidenden Geradenstücken begrenzt werden. Die Geradenschnittpunkte heißen *Ecken* des Dreiecks. Dabei sind Schnittpunkte im Unendlichen explizit erlaubt.

Definition 9.30: Der Winkel zwischen zwei sich in \mathbb{H}^2 schneidenden Geraden ist der Winkel zwischen den (euklidischen) Tangentialvektoren im Schnittpunkt. Der Winkel zwischen hyperbolischen Geraden der Form

$$\{a + ib \mid b \in \mathbb{R}_{>0}\} \quad \text{und} \quad \{c + id \mid d \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

ist 0 (per Definition).

Definition 9.31: Der Abstand zwischen Punkten $p, q \in \mathbb{H}^2$ ist gegeben durch

$$d(p, q) = \log \left(\frac{|p - \bar{q}| + |p - q|}{|p - \bar{q}| - |p - q|} \right)$$

$|\cdot|$: Betrag der komplexen Zahl, \bar{q} : komplex konjugiert von q .

Satz 9.32: Der obige Abstand ist eine Metrik auf \mathbb{H}^2 . Die Abbildungen

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ erhalten \mathbb{H}^2 als Menge und bilden hyperbolische Geraden auf hyperbolische Geraden ab. Diese Abbildungen heißen *Möbiustransformationen*, falls $ad - bc = 1$.