UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

K. Wiegand, T. Stalljohann, T. Witt
Sommersemester 2025
Heidelberg, 27. Mai 2025

Grundlagen der Geometrie und Topologie

Übungsblatt 7

Stichworte: Lie-Gruppen, Lineare k-Formen

Aufgabe 1 *Eins-Komponente von Lie-Gruppen* (1+1+2 Punkte)
Sei G eine Lie-Gruppe. Zeigen Sie

a) Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe von G (im algebraischen Sinn). Ist H offen in G, so ist H auch abgeschlossen in G. Insbesondere ist $H = G$, falls G zusätzlich zusammenhängend ist.

b) Angenommen G sei zusätzlich zusammenhängend. Sei $U \subseteq G$ eine offene Umgebung des Einselements $e \in G$. Dann ist U ein Erzeugendensystem von G.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die von U erzeugte Untergruppe offen ist in G.

c) Sei $G_1 \subseteq G$ die Zusammenhangskomponente des Einselements e von G. Dann ist G_1 eine normale Untergruppe von G. Außerdem ist sie die einzige offene, zusammenhängende Untergruppe in G.[1]
Hinweis: Für die Eindeutigkeitsaussage benutzen Sie Teil b).

Aufgabe 2 *Alternierende multilineare Abbildungen* (3 Punkte)
Sei

$$\eta : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k\text{-mal}} \to \mathbb{R}$$

eine multilineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) η ist alternierend, d.h.

$$\eta(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\eta(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$$

für alle $1 \leq i < j \leq k$ und $v_1, \ldots, v_k \in V$.

(ii) Für alle $v_1, \ldots, v_k \in V$ gilt

$$v_1, \ldots, v_k \text{ linear abhängig} \quad \Longrightarrow \quad \eta(v_1, \ldots, v_k) = 0\ .$$

(iii) $\eta(v_1, \ldots, v_k) = 0$ falls $i \neq j$ existieren mit $v_i = v_j$.

(iv) $\eta(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, \eta(v_1, \ldots, v_k)$ für alle $v_1, \ldots, v_k \in V$ und Permutationen $\sigma \in \mathfrak{S}(k)$.

[1] d.h offen und zusammenhängend als Teilmenge und zugleich eine Untergruppe im algebraischen Sinn

Aufgabe 3 *Innere Multiplikation* (1+3 Punkte)

Die *innere Multiplikation* mit $v \in V$ ist definiert als die Abbildung $\iota_v : \bigwedge^k V^* \to \bigwedge^{k-1} V^*$ mit $\iota_v(\eta)(v_2, \ldots, v_k) := \eta(v, v_2, \ldots, v_k) \in \mathbb{R}$ für $\eta \in \bigwedge^k V^*$ und $v_2, \ldots, v_k \in V$.

a) Zeigen Sie, dass ι_v eine wohldefinierte $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist. Zeigen Sie weitherhin, dass

$$V \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\bigwedge^k V^*, \bigwedge^{k-1} V^*\right), \quad v \mapsto \iota_v$$

eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist und dass $\iota_v \circ \iota_v = 0$.

b) Für $\eta \in \bigwedge^k V^*$ und $\eta \in \bigwedge^\ell V^*$ zeigen Sie, dass

$$\iota_v(\eta \wedge \omega) = \iota_v \eta \wedge \omega + (-1)^k \eta \wedge \iota_v \omega .$$

Hinweis: Fixieren Sie eine Basis $e_1, \ldots, e_n$ von V. Sei $e^1, \ldots, e^n$ die zugehörige Dualbasis. Für Multi-Indices $I = (i_1, \ldots, i_k)$ mit $i_1 < \ldots < i_k$ und $J = (j_1, \ldots, j_\ell)$ mit $j_1 < \ldots < j_\ell$ sei $\mathbf{e}^I := e^{i_1} \wedge \ldots e^{i_k}$ und $\mathbf{e}^J := e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_\ell}$. Argumentieren Sie, dass es ausreicht, die Aussage für $\eta := \mathbf{e}^I$ und $\omega := \mathbf{e}^J$ zu zeigen, wobei $I = (i_1, \ldots, i_k)$ und $J = (j_1 \ldots, j_\ell)$ beliebig sind.

Aufgabe 4 *Zerlegbare Formen* (1+1+1+2 Punkte)

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum. Eine k-Form $\eta \in \bigwedge^k V^*$ heißt *zerlegbar*, wenn es 1-Formen $\eta_1, \ldots, \eta_k$ gibt mit $\eta = \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k$.

a) Es sei ω eine Volumenform auf V.[2] Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi : V \to \bigwedge^{n-1} V^*$, $\Phi(v) := \iota_v \omega$ ein linearer Isomorphismus ist.

b) Jede $(n-1)$-Form auf V ist zerlegbar.
Hinweis: Gegeben $\eta \in \bigwedge^{n-1} V^*$, ergänzen Sie $\Phi^{-1}(\eta)$ zu einer Basis von V.

c) Ist $\eta \neq 0$ eine zerlegbare k-Form, so ist

$$\operatorname{Ann}(\eta) := \{v \in V \mid \iota_v \eta = 0\}$$

ein Untervektorraum der Dimension $n - k$.

d) Ist $n \leq 3$, so ist jede k-Form auf V zerlegbar. Finden Sie eine nicht zerlegbare k-Form auf einem Vektorraum V der Dimension $n = 4$.
Hinweis: Um zu zeigen, dass Ihr Kandidat η nicht zerlegbar ist, betrachten Sie $\operatorname{Ann}(\eta)$.

Abgabe bis Dienstag, 03. Juni 2025, 13:00 Uhr im MaMpf in Zweiergruppen. Abgabe zu dritt ist erlaubt.

[2] d.h. $\omega \in \bigwedge^n V^*$ und $\omega \neq 0$