K. Wiegand, T. Stalljohann, T. Witt
Sommersemester 2025
Heidelberg, 10. Juni 2025

UNIVERSITÄT HEIDELBERG ZUKUNFT SEIT 1386

Grundlagen der Geometrie und Topologie

Übungsblatt 9

Stichworte: Differentialformen

Notation: Eine k-Form ω heißt *geschlossen*, wenn $d\omega = 0$. Eine $(k-1)$-Form η heißt *Primitive* für ω, wenn $d\eta = \omega$. Die Form ω heißt *exakt*, wenn es eine Primitive für ω gibt.

Aufgabe 1 *Rechnen mit Formen* (2+2 Punkte)

a) Definiere $F : (0, +\infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $(r, \varphi, z) \mapsto (r\,\cos\varphi\,,\ r\,\sin\varphi\,,\ z)$. Zeigen Sie, dass F ein Diffeomorphismus auf sein offenes Bild ist.[1] Für $\omega, \eta \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$, definiert durch $\omega_{(x,y,z)} := xy\,dx \wedge dy$ und $\eta_{(x,y,z)} := (x^2 + y^2 + z^2)\,dx \wedge dy$ für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, berechnen Sie $F^*\omega$ und $F^*\eta$. Sind $F^*\omega$ bzw. $F^*\eta$ geschlossene Formen?

b) Gemäß dem Poincaré-Lemma sind alle geschlossenen Formen auf $\mathbb{R}^2$ exakt. Gegeben die 1-Form $\omega = f\,dx + g\,dy$ auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass ω geschlossen ist, genau dann wenn $\partial_y f = \partial_x g$ auf $\mathbb{R}^2$. Finden Sie explizit eine Primitive für geschlossenes ω.

Aufgabe 2 *Äußeres Differential* (2+2 Punkte)

a) Sei $\omega \in \Omega^k(M)$ und $X_1, \dots, X_{k+1}$ Vektorfelder auf M. Zeigen Sie die in der VL behauptete Formel

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1}\, \mathscr{L}_{X_i}(\omega(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_{k+1})) \\ &+ \sum_{1 \le i < j \le k+1} (-1)^{i+j}\, \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_{k+1}) \ . \end{aligned}$$

($\widehat{\cdot}$ bedeutet wie üblich das Auslassen des entsprechenden Eintrags.)
Hinweis: Cartans magische Formel + Induktion

b) In $\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k(M)$ zeigen Sie, dass die geschlossenen Formen (genauer gesagt: $\bigoplus_{k=0}^{\infty} \{\omega \in \Omega^k(M) \mid d\omega = 0\}$) ein Unterring bezüglich des Wedge-Produkts sind. Zeigen Sie auch, dass die exakten Formen ein Ideal im Unterring der geschlossenen Formen sind.
Hinweis: Es genügt nachzurechnen, dass $d(\omega \wedge \eta) = 0$ für ω und η geschlossen und dass $\omega \wedge \eta$ und $\eta \wedge \omega$ exakt sind für ω geschlossen und η exakt.

---

[1] F^{-1} heißt auch *Zylinderkoordinaten.*

Aufgabe 3 *Linienintegrale* (1+1+1+1 Punkte)

Sei $\eta = f\,dt$ eine 1-Form auf dem Intervall $[a,b]$. Dann definieren wir

$$\int_{[a,b]} \eta := \int_a^b f(t)\,dt \ .$$

Fü $\omega \in \Omega^1(M)$ und einen glatten Pfad $\gamma : [a,b] \to M$ definieren wir $\int_\gamma \omega := \int_{[a,b]} \gamma^*\omega$.

a) Gegeben ein Diffeomorphismus $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ mit $\varphi(t_1) < \varphi(t_2)$ (bzw. $\varphi(t_2) > \varphi(t_1)$) für alle $t_1 < t_2$. Zeigen Sie, dass $\int_{\gamma\circ\varphi} \omega = \int_\gamma \omega$ (bzw. $\int_{\gamma\circ\varphi} \omega = -\int_\gamma \omega$).

b) Sei $F : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion (natürlich glatt). Zeigen Sie $\int_\gamma dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

c) Sei M zusammenhängend. Zeigen Sie, dass ω exakt ist genau dann wenn $\int_\gamma \omega = 0$ für alle geschlossenen Kurven $\gamma : [a,b] \to M$ (d.h. $\gamma(a) = \gamma(b)$).
Hinweis: Für die Rückrichtung definieren Sie eine Funktion $F : M \to \mathbb{R}$ wie folgt: Fixieren Sie $p_0 \in M$ und definieren Sie $F(p) := \int_\gamma \omega$ für einen beliebig gewählten Pfad $\gamma : [a,b] \to M$ mit $\gamma(a) = p_0$ und $\gamma(b) = p$. Argumentieren Sie, dass F wohldefiniert und eine Primitive von ω ist.

d) Betrachten Sie $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 - \{0\})$ definiert durch

$$\alpha_{(x,y)} := \frac{1}{x^2+y^2}\,(-y\,dx + x\,dy) \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\} \ .$$

Zeigen Sie, dass α geschlossen ist und nicht exakt.

Aufgabe 4 *Liouville 1-Form* (1+2+1 Punkte)

Sei M eine n-Mannigfaltigkeit und $T^*M = \bigsqcup_{p\in M} T_p^*M$ sein Kotangentialbündel.

a) Für eine fixierte Karte (U,q) von M mit induzierten 1-Formen $dq^1,\dots,dq^n$ definiere den Homöomorphismus $\Phi_{(U,q)} : T^*M|_U \to q(U) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ durch

$$\Phi^{-1}_{(U,q)}(a,b) = \Phi^{-1}_{(U,q)}(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n) := (q^{-1}(a)\,,\,\sum_{i=1}^n b_i\,(dq^i)_{q^{-1}(a)})$$

Zeigen Sie, dass $\{(T^*M|_U, \Phi_{(U,q)})\}_{(U,q)}$ ein glatter Atlas für T^*M ist, wobei die Indexmenge über alle Karten (im Maximalatlas) von M läuft.

Mit der obigen glatten Struktur wird $\pi : T^*M \to M$ (die offensichtliche Projektion) zum glatten Vektorbündel über M. Gegeben eine Karte $(U,q) = (U,(q^1,\dots,q^n))$ für M schreiben wir unpräzise[2] auch $(q^1,\dots,q^n,p^1,\dots p^n)$ für die Komponentenfunktionen der induzierten Karte $(T^*M|_U, \Phi_{(U,q)})$.

b) Definiere den (a priori nicht notwendigerweise glatten) Schnitt $\lambda : M \to T^*M$ durch

$$\lambda_{(x,\alpha)}(\xi) := \alpha(d\pi_{(x,\alpha)}(\xi)) \qquad \forall\,(x,\alpha) \in T^*M\,,\ \xi \in T_{(x,\alpha)}(T^*M) \ .$$

Zeigen Sie, dass λ ein glatter Schnitt ist und, gegeben eine fixierte Karte (U,q) von M, dass bezüglich der Koordinaten $(T^*M|_U, \Phi_{(U,q)}) = (T^*M|_U, (q,p))$ gilt

$$\lambda = \sum_{i=1}^n p^i\,dq^i \ .$$

λ heißt die *Liouville 1-Form* und $\omega := d\lambda \in \Omega^2(T^*M)$ die *kanonische symplektische Form.*

c) Zeigen Sie, dass ω^n eine Volumenform auf T^*M ist. Folgern Sie, dass T^*M orientierbar ist.

Abgabe bis Dienstag, 17. Juni 2025, 13:00 Uhr im MaMpf in Zweiergruppen. Abgabe zu dritt ist erlaubt.

[2] Das ist natürlich streng genommen falsch und ein klassisches Beispiel für *abuse of notation.*