UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

K. Wiegand, T. Stalljohann, T. Witt
Sommersemester 2025
Heidelberg, 1. Juli 2025

Grundlagen der Geometrie und Topologie

Übungsblatt 12

Stichworte: Anwendungen der Fundamentalgruppe π_1

Aufgabe 1 *Berühmte Sätze* (2+2+2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Nicht-Trivialität in $\pi_1(S^1)$ von Schleifen der Form $S^1 \longrightarrow S^1, z \longmapsto z^n, n \neq 0$ die folgenden Aussagen impliziert:

(a) Jedes nichtkonstante Polynom $p(z) = z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + ... + a_0 \in \mathbb{C}[z]$ besitzt eine Nullstelle $z \in \mathbb{C}$.

(b) Jede stetige Abbildung $h : D^2 \longrightarrow D^2$ besitzt einen Fixpunkt $x = h(x) \in D^2$. Hierbei bezeichnet $D^2 = \{|x| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$.

(c) Zu jeder stetigen Abbildung $f : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lässt sich ein Paar von antipodalen Punkten $\pm x \in S^2$ finden, so dass $f(x) = f(-x)$.

Tipp: Argumentieren Sie jeweils durch Widerspruch.

(a) Betrachten Sie das Limit $|z| \longrightarrow +\infty$

(b) Definieren Sie eine stetige Abbildung $h : D^2 \longrightarrow S^1$*, indem Sie die Verbindungslinie von* $h(x)$ *nach* x *bis zu ihrem Schnittpunkt mit* $S^1 = \partial D^2$ *verlängern.*

(c) Betrachten Sie $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{|f(x)-f(-x)|} \in S^1$

Aufgabe 2 *EH-Argument* (2+2 Punkte)

(a) Sei X eine Menge mit zwei Operationen $\bullet, *$ (d.h. Abbildungen $\bullet, * : X \times X \longrightarrow X$), so dass erstens $\exists\, 1_\bullet, 1_* \in X : \forall x \in X : 1_\bullet \bullet x = x = x \bullet 1_\bullet,\ 1_* * x = x = x * 1_*$ und zweitens $\forall a, b, c, d : (a * b) \bullet (c * d) = (a \bullet c) * (b \bullet d)$.
Zeigen Sie: Die Operationen $\bullet = *$ stimmen überein, sind kommutativ und assoziativ.

(b) Im Folgenden sei G ein *H-Raum*, also ein topologischer Raum mit einer stetigen Operation $\bullet : G \times G \longrightarrow G$ und einem "neutralen Element" $e \in G$, so dass

i) $e \bullet e = e$

ii) es stetige Homotopien $L, R : [0, 1] \times G \longrightarrow G$ gibt mit

$$L(\cdot, e) = e = R(\cdot, e)$$

$$L(1, \cdot) = R(1, \cdot) = \mathrm{id}_G$$

$$L(0, x) = e \bullet x, \;\; R(0, x) = x \bullet e$$

Zeigen Sie: $\pi_1(G, e)$ ist abelsch (d.h. kommutativ).

Tipp: Vergleichen Sie die punktweise Multiplikation $(f_1 \bullet f_2)(t) := f_1(t) \bullet f_2(t)$ *und Konkatenation* $(f * g)(t)$ *von Pfaden* $(S^1, 1) \longrightarrow (G, e)$. *Drücken Sie Ihre Relationen in* $\pi_1(G, e)$ *aus.*

Aufgabe 3 *Das Pair-of-pants ist keine Lie-Gruppe* (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe von $X = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ nicht-abelsch (d.h. nicht-kommutativ) ist. Schlussfolgern Sie mit Aufgabe 2b, dass X zwar eine parallelisierbare Mannigfaltigkeit ist, aber niemals der zugrundeliegende Raum einer Lie-Gruppe sein kann.

Tipp: Konstruieren Sie eine Deformationsretraktion von X *auf die Einpunktverklebung ('Wedge-Summe')* $Y = S^1 \vee S^1$ *und beschreiben Sie die universelle Überlagerung von* Y.

Abgabe bis Dienstag, 8. Juli 2025, 13:00 Uhr im MaMpf in Zweiergruppen. Abgabe zu dritt ist erlaubt.