

## Physikalisches Anfängerpraktikum II

### Sommersemester 2023

Versuch 251

Tutor: Leonard Bender

### Statistik des radioaktiven Zerfalls

## 1 Einleitung

### 1.1 Ziel des Versuchs

Atome sind im Allgemeinen stabil, aber einige sind instabil und können spontan zerfallen und radioaktive Strahlung aussenden. Das Zerfall-Verhalten von Atom ist zwar individuell unvorhersagbar aber kollektiv von Statistik analysiert werden. Die **Halbwertszeit** eines radioaktiven Isotops ist die benötigte Zeit, um die Hälfte der Atome zu zerfallen. In diesem Experiment sollen wir deswegen das Statistik-Verhalten des radioaktiven Zerfalls weitergehend untersuchen und uns besser mit dem Geiger-Müller Zählrohr sowie seiner Kennlinie vertraut machen.

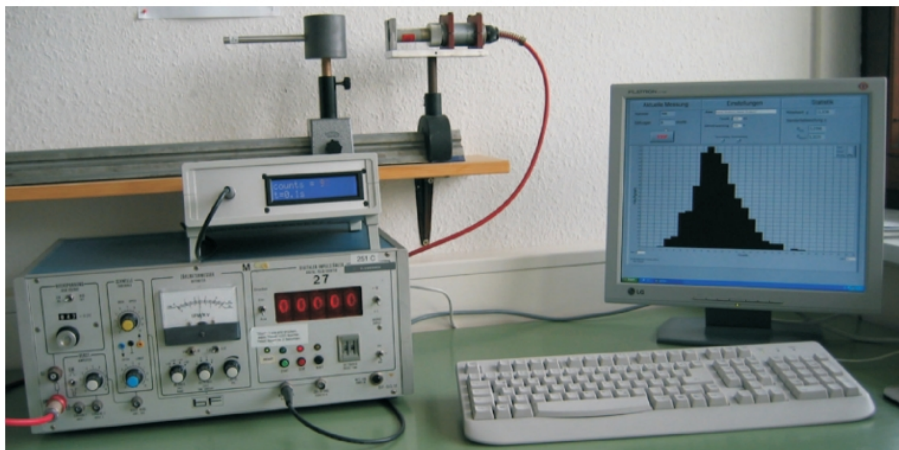


Abbildung 1: Versuchsaufbau

### 1.2 Das Geiger-Müller Zählrohr

Das Geiger-Müller-Zählrohr erkennt ionisierende Strahlung, wie  $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\gamma$ - und Röntgenstrahlen. Es besteht aus einem Metallzylinder mit einem Anodendraht, der mit einem Gasgemisch gefüllt ist und eine Spannung angelegt wird. Wegen äußerer Strahlung entstehen durch Ionisation des Gases freie Elektronen und positive Ionen, die durch das elektrische Feld beschleunigt, zum Anodendraht wandern und dort einen messbaren Strom erzeugen, der elektronisch verstärkt und gezählt wird. Der Primärstrom kann weiterer Sekundärstrom anregen, was zu einer Gasentladung führt, die jedoch bei entsprechender Detektoreinstellung nach etwa  $10^{-5}$  Sekunden wieder erlischt.

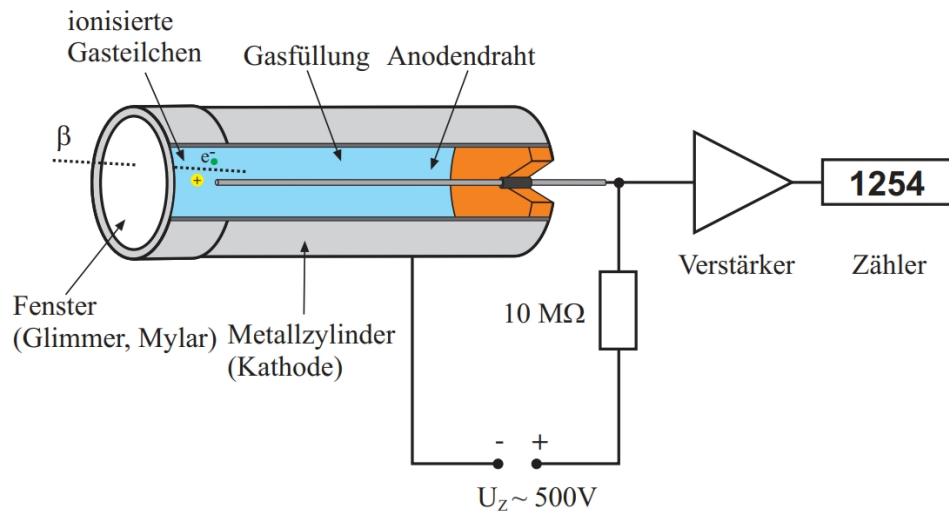


Abbildung 2: Aufbau von dem Geiger-Müller Zählrohr<sup>1</sup>

Ionisierende Strahlung im Zählrohr erzeugt primäre Ladungsträger proportional zur Energie. Bei niedriger Spannung erreicht nur ein Teil der Elektronen den Anodendraht, während der Rest durch Rekombination verloren geht. Mit steigender Spannung erreichen fast alle Elektronen die Anode, die Primärelektronen können selbst auch weitere ionisierte Elektronenlawine hervorrufen, was den Proportionalitätsbereich markiert, in dem der Strom zur Strahlungsenergie proportional ist. Weitere Spannungserhöhung führt zur Bildung von Sekundärelektronen und schließlich zum Plateaubereich, in dem jedes Teilchen ein gleich großes Signal erzeugt.

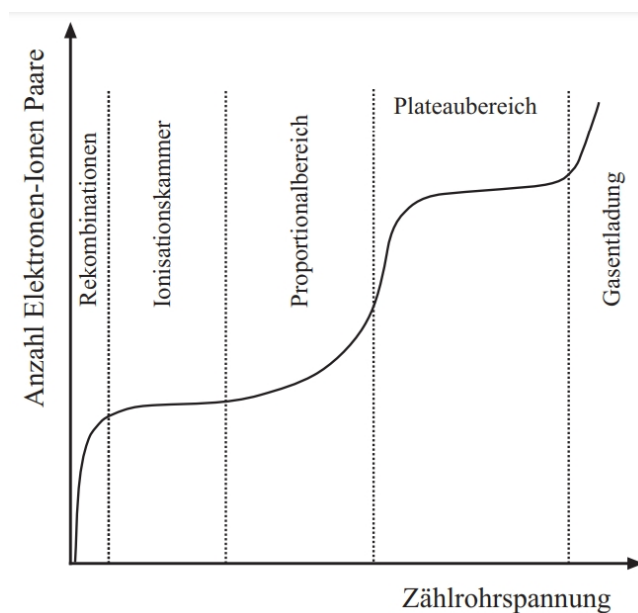


Abbildung 3: Kennlinie des Zählrohrs<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Quelle: Dr. J.Wagner - Physikalisches Anfängerpraktikum - V. 1.1 B.Sc. Stand 10/2012

Im Plateaubereich des Zählrohrs ist der erzeugte Stromimpuls unabhängig von der Energie der Strahlung. Jedes eintreffende ionisierende Teilchen erzeugt das gleiche Ausgangssignal, das als Triggersignal für einen elektronischen Zähler dient.

## 1.3 Wahrscheinlichkeitsverteilung

Nehmen wir an, dass die einzelnen Zerfallsprozesse völlig unabhängig voneinander stattfinden, dann können wir nach zahlreichen Zerfall-Ereignissen eine bestimmte statistische Verteilung für die gemessenen radioaktive Zerfälle pro Zeiteinheit herausfinden.

### 1.3.1 Binomial-Verteilung

Sie beschreibt die Anzahl der Erfolge in einer Serie von gleichartigen und unabhängigen Versuchen, die jeweils genau zwei mögliche Ergebnisse haben („Erfolg“ oder „Misserfolg“). Falls ein Ereignis A bei n voneinander unabhängigen Versuchen genau k-mal eintritt, mit der Wahrscheinlichkeit p für Eintritt, dann ist die Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$B(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad (1)$$

Weitere Eigenschaften von Binomial-Verteilung:

$$\sum_{k=0}^n B(k; n, p) = 1 \quad \langle k \rangle = \sum_{k=0}^n k B(k; n, p) = np \quad (2)$$

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^n k^2 B(k; n, p) - \langle k \rangle^2 = np(1 - p) \quad \sigma = \sqrt{np(1 - p)} \quad (3)$$

p hängt tatsächlich auch vom Beobachtungszeitraum ab:

$$p = 1 - e^{-\lambda t} \quad (4)$$

wobei die Zerfallskonstante  $\lambda$  eine für das Isotop charakterische Größe darstellt.

### 1.3.2 Poisson-Verteilung

Bei geringen Zerfallswahrscheinlichkeiten ( $p \rightarrow 0$ ) und einer großen Anzahl von radioaktiven Atomen ( $n \rightarrow \infty$ ) kann die Binomialverteilung durch die Poissonverteilung approximiert werden. Es ist jedoch erforderlich sicherzustellen, dass der Mittelwert  $\mu \equiv \langle k \rangle = np$  endlich bleibt:

$$p(k; \mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} \quad (5)$$

---

<sup>2</sup>Quelle: Dr. J.Wagner - Physikalisches Anfängerpraktikum - V. 1.1 B.Sc. Stand 10/2012

Weitere Eigenschaften von Poisson-Verteilung:

$$\sum_{k=0}^n p(k; \mu) = 1 \quad \langle k \rangle = \sum_{k=0}^n kp(k; \mu) = \mu \quad (6)$$

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^n k^2 p(k; \mu) - \langle k \rangle^2 = \mu \quad \sigma = \sqrt{\mu} \quad (7)$$

### 1.3.3 Gauss-Verteilung

Für  $n \gg k \gg 1$  kann die Poissonverteilung durch eine Gaußglocke approximiert werden. Da die Ereignisse schon sehr zahlreich sind, ist die diskrete Poisson-Verteilung immer dichter wird, bis zu der kontinuierlichen Gauss-Verteilung. Die allgemeine Form dieser ist:

$$G(k; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2\sigma^2}} \quad (8)$$

Eigenschaften von Gauss-Verteilung lauten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(k; \mu, \sigma) dk = 1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} kG(k; \mu, \sigma) dk = \mu \quad (9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k^2 G(k; \mu, \sigma) dk - \langle k \rangle^2 = \sigma^2 \quad (10)$$

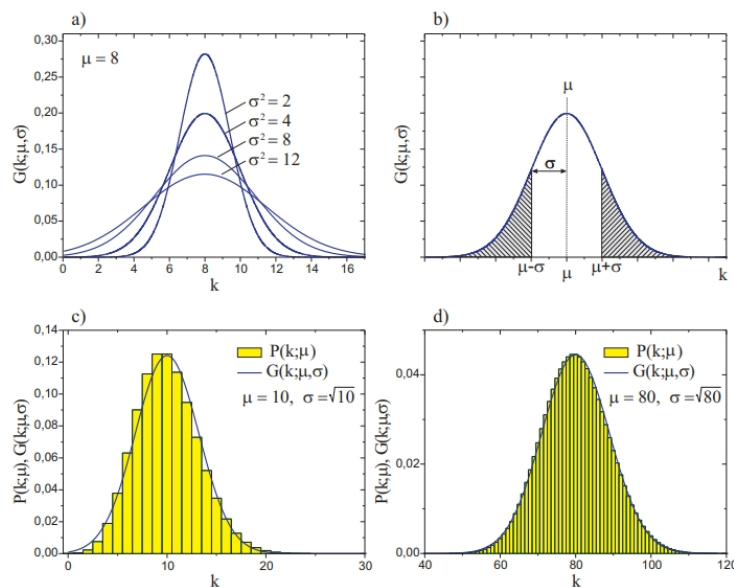


Abbildung 4: Poisson-Näherung und Gauss-Verteilung<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Quelle: Dr. J.Wagner - Physikalisches Anfängerpraktikum - V. 1.1 B.Sc. Stand 10/2012

Unser Experiment ist ein Spezialfall der Zählstatistik ( $\mu = \sigma^2$ ). Je größer die Standardabweichung  $\sigma$ , desto breiter ist die Verteilung. In Abbildung 4b) ist eine Gauß-Verteilung dargestellt, wobei die Flächen unter der Kurve im Bereich  $k > \mu + \sigma$  und  $k < \mu - \sigma$  schraffiert sind. Diese schraffierte Fläche gibt die Wahrscheinlichkeit  $P_\sigma$  an, dass  $k$  um mehr als eine Standardabweichung vom Mittelwert  $\mu$  abweicht:

$$P_\sigma = 1 - \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} G(k; \mu, \sigma) dk \approx 31,73\% \quad (11)$$

So können wir die sogenannte  $\sigma$ -Abweichung von dem Mittelwert bekommen:

Eine Abweichung von $\mu$ um mehr als	$\pm\sigma$	$\pm 2\sigma$	$\pm 3\sigma$
hat die Wahrscheinlichkeit	31,73%	4,55%	0,27%

Abbildung 5: Sigma-Abweichung<sup>4</sup>

Es gibt auch eine wichtige Beziehung *full width at half maximum*:

$$\text{FWHM} \approx 2,4\sigma \quad (12)$$

## 1.4 Statistik und Messfehler

In der Praxis ist der Mittelwert  $\mu$  normalerweise nicht gegeben sondern nur die Treffzahl  $k$  bei einzelner Messung. Da  $k$  und  $\mu$  nicht stark voneinander abweichen schätzen wir den Erwartungswert durch  $k$  ab, und ebenso die Varianz durch  $\sqrt{k}$ . Dann können wir anhand Abbildung 5 behaupten, dass der Mittelwert mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% in  $k \pm \sqrt{k}$  und 95% in  $k \pm 2\sqrt{k}$  liegt usw..

Wenn wir zwei Zählergebnisse  $k_1$  und  $k_2$  bekommen, können wir dann auch die gemeinsame statistische Schwankung vorhersagen, indem wir Gauss-Fehlerfortpflanzung benutzen:

$$\Delta_0 = k_1 - k_2 \quad \sigma_1 = \sqrt{k_1} \quad \sigma_2 = \sqrt{k_2} \quad (13)$$

$$\sigma_\Delta = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{k_1 + k_2} \quad (14)$$

$$\Delta = \Delta_0 \pm \sigma_\Delta = (k_1 - k_2) \pm \sqrt{k_1 + k_2} \quad (15)$$

Möchte man feststellen, ob eine Differenz aufgrund von statistischen Schwankungen oder einer tatsächlichen Ursache entsteht, wird die Standardabweichung  $\sigma_\Delta$  betrachtet. Wenn die Abweichung  $\Delta$  um mehr als 3 Standardabweichungen von 0 abweicht, ist der Fehler signifikant und eine statistische Ursache ist unwahrscheinlich.

## 2 Versuchsdurchführung

Versuchsaufbau, Versuchsdurchführung und Messprotokoll siehe folgende Seiten.

<sup>4</sup>Quelle: Dr. J.Wagner - Physikalisches Anfängerpraktikum - V. 1.1 B.Sc. Stand 10/2012

# Versuch 2a1: Statistik des radioaktiven Zerfalls

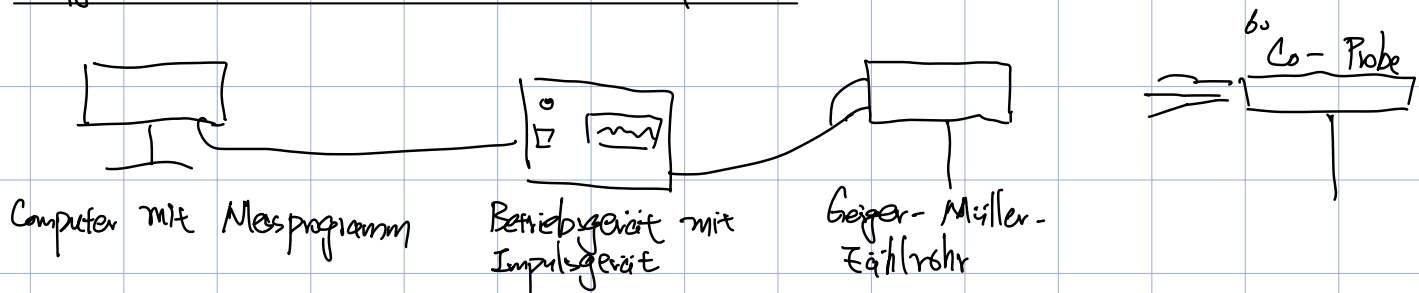
27.05.2024 14:00 ~ 17:00

Yuki Shi Yuting Shi

Messgeräte: • Geiger-Müller-Zählrohr mit Betriebsgerät

- Externer Impulzzähler • PC • Präparatehalterung mit Bleiabschirmung
- Radioaktives Präparat ( $^{60}\text{Co}$ )

## Aufgabe 1: Skizze des Versuchsaufbaus



## Aufgabe 2: Messung der Zählrohrcharakteristik

Erhöhe die Spannung des Zählrohrs bis dieses die Strahlung detektiert. Es wird nun die Spannung weiter langsamer nach oben variiert, und jeweils die Ereignisse über gewisse Zeiträume aufgezeichnet.

Nr.	Spannung [V]	Counts
1	500	1169
2	525	1740
3	550	1841
4	575	1843
5	600	1860
6	625	1841
7	650	1857
8	675	1815
9	700	1795
10	725	1832
11	750	1821
12	775	1821
13	800	1868
14	825	1858

## Tabelle 1: Verlauf der Counts

$U_0$ : Mittelspannung des Plateaus (Python)  
 $= 675 \text{ V} \pm 10 \text{ V}$

$\sigma$ : Fehler der Counts  $N$   
 $= \sqrt{N}$

1892

### Aufgabe 3: Untersuchung des Plateaueanstiegs

Die  $^{60}\text{Co}$ -Probe wird sehr nah an das Zählrohr gebracht, und Messungen durchgeführt

Tabelle 2: Spannungen des Plateaus

Spannungen [V]	Counts bei 1 min	Counts bei 3 min
$U_0 = 675$	9189	27734
$U_0 + 10 \text{ V} = 775$	9290	27803

### Aufgabe 4: Verifizierung der statistischen Natur des radioaktiven Zerfalls

Die Zählrohrspannung wird wieder auf  $(675 \pm 10) \text{ V}$  eingestellt. Die  $^{60}\text{Co}$ -Probe wird auf eine Entfernung zum Zählrohr gebracht, bei der etwa 140 bis 150 Zerfälle pro Sekunde gezählt werden. Am an den Zähler angeschlossenen Computer wird das Messprogramm "Versuch-251-252" gestartet. Totzeit = 500 ms

Der Abszissenbereich für das angezeichnete Histogramm wird nach intuitiver Messung von 50 Werten angepasst.

Es werden 5000 Messungen durchgeführt.

### Aufgabe 5: Vergleich der Poisson- und Gauß-Verteilung bei sehr kleinen Zählraten.

Die Probe wird so weit von dem Zählrohr aufgestellt, dass etwa 40 bis 50 Zerfälle pro Sekunde gezählt werden. Die Totzeit = 100 ms  
5000 Messungen wurden durchgeführt.

Bender

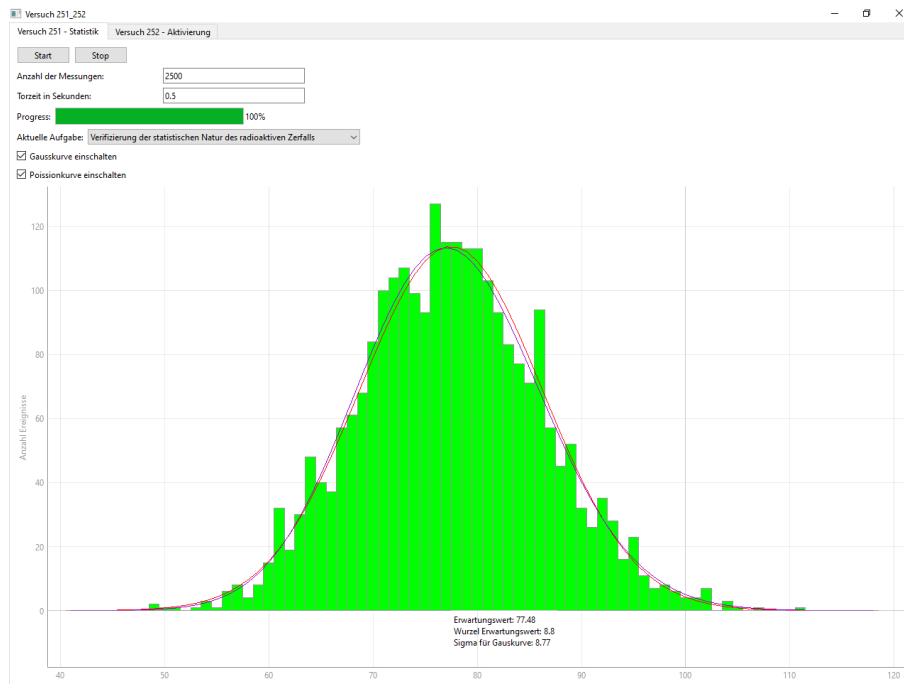


Abbildung 6: Verteilung der zählraten bei hoher mittlerer Ereignisse

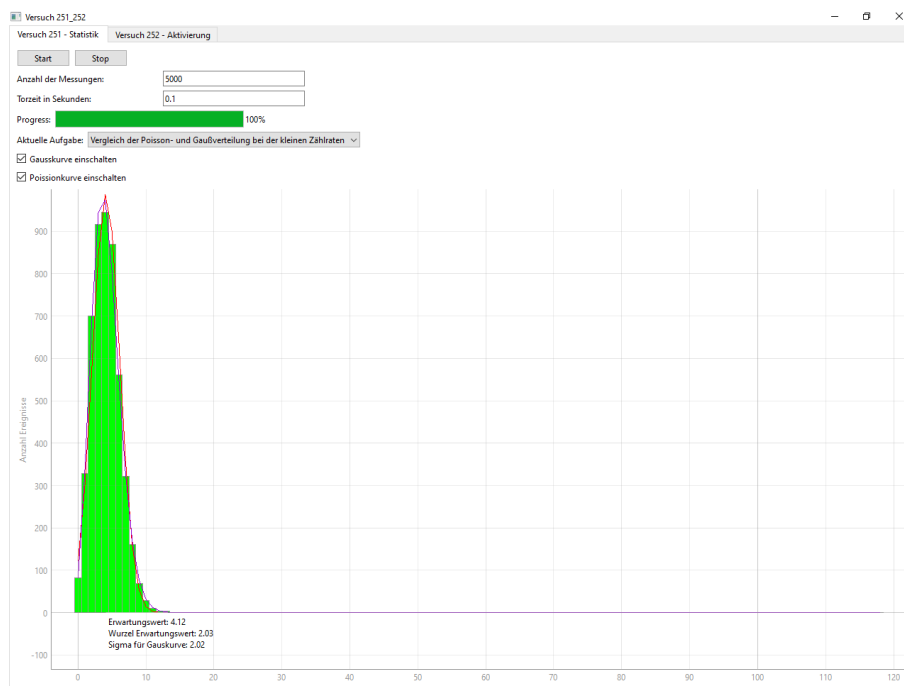


Abbildung 7: Verteilung der Zählraten bei kleiner mittlerer Ereignisse



## 3 Auswertung

### 3.1 Messung der Zählrohrcharakteristik

Es wurde zuerst die Zählrohrcharakteristik mithilfe von einem internen Zähler gemessen und der Plateaubereich bestimmt. Nach Mittelwertsmethode wird die Eichspannung ermittelt in weiterem Experiment eingesetzt:

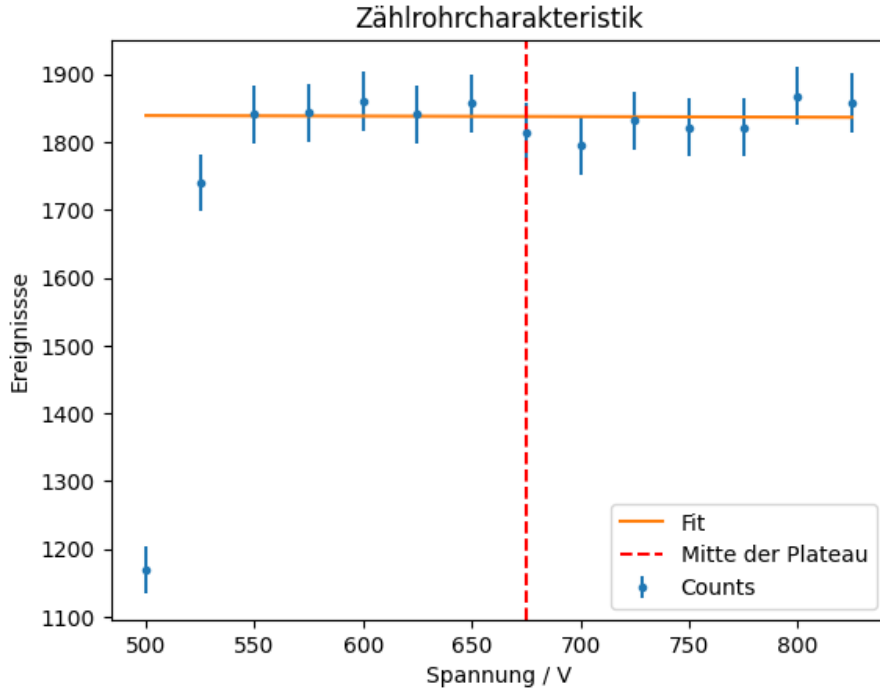


Abbildung 8: Counts als Funktion der Rohrspannung im Plateaubereich

Mit Jupyter-Notebook<sup>5</sup> ergibt sich die Steigung der Fitkurve sowie die Anzahl der Ereignisse an der Stelle der Eichspannung:

$$a = (-0.01 \pm 0.07) V^{-1} \approx 0 \quad n(U_0) = 1843 \pm 53 \quad (16)$$

### 3.2 Plateaubereich des Zählrohrs

Die Plateauanstiege ( $n(U_0 + 100 V) - n(U_0)$ ) wurden bei den jeweiligen Messzeiten ausgewertet. Der absolute Anstieg ergibt sich:<sup>6</sup>

$$P_1 = n_1(U_0 + 100V) - n_1(U_0) = 101 \pm 136 \quad (17)$$

$$P_2 = n_2(U_0 + 100V) - n_2(U_0) = 69 \pm 235 \quad (18)$$

wobei der Fehler sich aus der Fehler  $\Delta n = \sqrt{n}$  und der Gauss-Fehlerfortpflanzung ausrechnen lässt. Für beide Zeitintervalle wurde außerdem der prozentuale Anstieg

<sup>5</sup>Python Code 1

<sup>6</sup>Python Code 2

$\frac{(n(U_0+100V)-n(U_0))}{n(U_0)}$  der Zählrate pro 100 V, einschließlich der zugehörigen statistischen Fehler, berechnet:

$$P_{\%1} = \frac{n_1(U_0 + 100V) - n_1(U_0)}{n_1(U_0)} = 1.13\% \pm 1.49\% \quad (19)$$

$$P_{\%1} = \frac{n_2(U_0 + 100V) - n_2(U_0)}{n_2(U_0)} = 0.26\% \pm 0.85\% \quad (20)$$

wobei der Fehler  $\Delta P_{\%} = P_{\%} \sqrt{(\frac{P}{\Delta P})^2 + (\frac{n(U_0)}{\Delta n(U_0)})^2}$  beträgt. Die Abweichung lautet für die beiden Fälle:

$$\frac{P_1}{\Delta P_1} \approx 1.34\sigma \quad \frac{P_2}{\Delta P_2} \approx 3.4\sigma \quad (21)$$

Beiden Abweichungen befinden sich innerhalb von  $3\sigma$  und sind somit nicht signifikant.

Nun soll bestimmt werden, wie lange eine Messung angesetzt werden muss, um den Plateauanstieg auf 1% genau zu kennen. Dazu wird zunächst der relative Fehler des Plateaubereichs berechnet:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\sqrt{(\Delta n(U_1))^2 + (\Delta n(U_0))^2}}{n(U_1) - n(U_0)} \quad (22)$$

Beachtet man dabei  $\Delta n(U) = \sqrt{nt}$ , deswegen vereinfacht sich die Gl.(22) zu:

$$0.01 = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\sqrt{n(U_1) + n(U_0)}}{n(U_1) - n(U_0)} \implies t \approx 135 \text{ s} \quad (23)$$

Zuletzt soll bestimmt werden, welche prozentuale Variation der Zählrate bei einer Spannungserhöhung um 100 V möglich bei einem Vertrauensniveau von ca. 68% ( $1\sigma$ ) und von ca. 95% ( $2\sigma$ ) ist. Für den 1-sigma Bereich gilt:

$$P_{\%1,max} = P_{\%1} \pm \Delta P_{\%1} \approx 2.62\% \quad (24)$$

$$P_{\%2,max} = P_{\%2} \pm \Delta P_{\%2} \approx 1.11\% \quad (25)$$

Für den 2-sigma Bereich gilt:

$$P'_{\%1,max} = P_{\%1} \pm 2\Delta P_{\%1} \approx 4.11\% \quad (26)$$

$$P'_{\%2,max} = P_{\%2} \pm 2\Delta P_{\%2} \approx 1.96\% \quad (27)$$

### 3.3 Auswertung der Daten mit hoher mittlerer Ereigniszahl

Es werden nun die Messdaten in Verteilung der Zählrate bei hoher Ereigniszahl graphisch aufgetragen und eine Poisson- und Gauss-Fitkurve angelegt. <sup>7</sup> Hierbei wird der Wertebereich, auf den gefittet wird, auf den Bereich eingeschränkt, in dem die

---

<sup>7</sup>Python Code 3

Häufigkeit ungleich 0 ist. Dies ist notwendig, da nur in diesem Bereich die statistischen Näherungen durch Poisson- und Gaußverteilung gerechtfertigt sind.

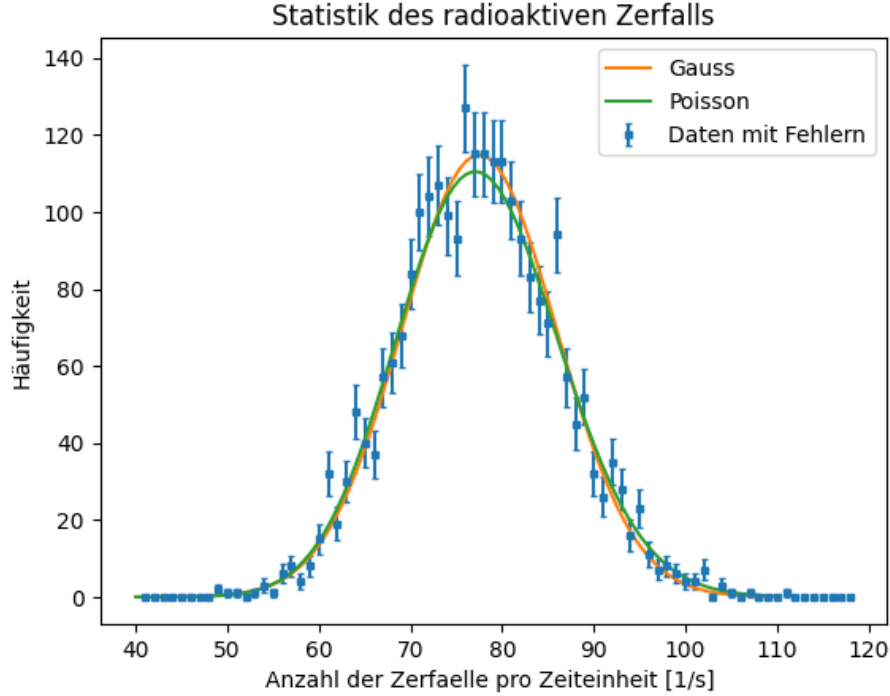


Abbildung 9: Verteilung der Zählraten bei hoher mittlerer Ereignisse mit Anpassung von Gauss- und Poisson-Verteilung

Der  $\chi^2$ -Fit funktioniert nur, wenn die Fehler "gaussverteilt" sind. Das ist nur dann in ausreichendem Maße der Fall, wenn die Häufigkeit mindestens zehn beträgt. Die Häufigkeiten unserer Messwerte bei sehr kleinen und sehr großen Raten sind jedoch zu gering, weshalb nach Anpassung der Fit nicht konvergieren würde, haben wir die ersten 12 und die letzten 13 Daten abgezogen. Als Parameter wird vorgeschlagen:

$$A_{gauss} = 2431 \pm 49, \mu_g = 77.49 \pm 0.17, \sigma = 8.44 \pm 0.13 \quad (28)$$

$$A_{poisson} = 2437 \pm 50, \mu_p = 77.57 \pm 0.18 \quad (29)$$

Des Weiteren soll die Güte des Fits diskutiert werden. Dazu werden die  $\chi^2$ -Summe, die reduzierte  $\chi^2$ -Summe sowie die Fitwahrscheinlichkeit berechnet. Im Allgemeinen gilt:

$$\chi^2 = \sum_i \left( \frac{\text{Funktionswert}_i - \text{Messwert}_i}{\text{Fehler}_i} \right)^2 \quad (30)$$

Außerdem gilt die  $\chi^2_{red}$ -Summe:

$$\chi^2_{red} = \frac{\chi^2}{\text{Freiheitsgrad}} \quad (31)$$

Der Freiheitsgrad lässt sich aus der Anzahl der Messwerte abzüglich der Zahl der Fit-Parameter ermitteln. Es ergibt sich deswegen:<sup>8</sup>

$$\chi_G^2 = 61 \quad \chi_{G,red} = 1.33 \quad (32)$$

$$\chi_P^2 = 59 \quad \chi_{P,red} = 1.27 \quad (33)$$

Dabei ergibt sich ein Wert, der zeigt, wie gut das Modell zu den Daten passt. Werte von  $\chi_{red}^2$  nahe 1 deuten auf eine gute Anpassung hin, während höhere Werte auf eine Überanpassung oder eine schlechte Modellanpassung hindeuten. Die Poisson-Näherung ist somit besser als die Gauss-Anpassung. Außerdem möchten wir die Fitwahrscheinlichkeit  $P$  berechnen, dass man bei einer Wiederholungsmessung einen Chi-Quadrat-Wert ( $\chi^2$ ) erhält, der gleich oder größer ist als der Chi-Quadrat-Wert des aktuellen Fits:

$$P_g = 7.0\% \quad P_p = 11.0\% \quad (34)$$

### 3.4 Auswertung der Daten mit kleiner Ereigniszahl

Analog wie das letzte Auswertungsteil wird die Text-Datei ebenso in Python importiert. Hierbei konzentrieren wir uns hauptsächlich auf die Daten, bei denen die Häufigkeit  $n \neq 0$  ist. Erneut werden sowohl ein Poisson- als auch ein Gaußfit durchgeführt. Die Messwerte werden in einem halblogarithmischen Diagramm dargestellt.<sup>9</sup>

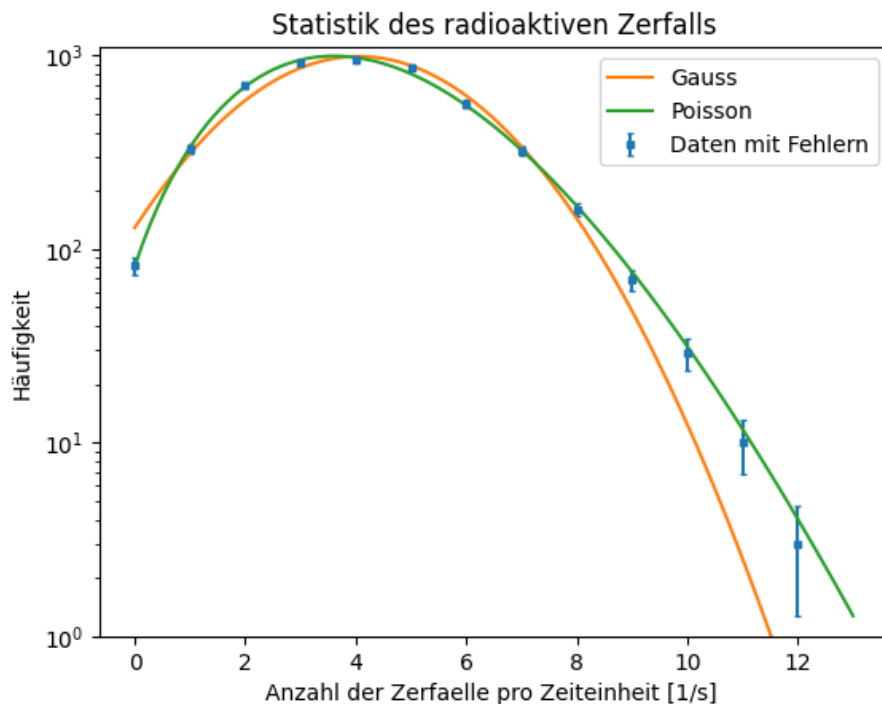


Abbildung 10: Verteilung der Zählraten bei niedriger mittlerer Ereignisse mit Anpassung von Gauss- und Poisson-Verteilung

<sup>8</sup>Python Code 4

<sup>9</sup>Python Code 5

Für den Fit werden jeweils die Parameter vorgeschlagen:

$$A'_{gauss} = 4966 \pm 71, \mu'_g = 4.06 \pm 0.03, \sigma' = 2.01 \pm 0.02 \quad (35)$$

$$A'_{poisson} = 4988 \pm 71, \mu'_p = 4.12 \pm 0.03 \quad (36)$$

Analog werden auch die Chi-Summe sowie deren Fitwahrscheinlichkeit ins Betracht gezogen:

$$\chi_G'^2 = 85 \quad \chi'_{G,red} = 8.48 \quad P'_g = 0.0\% \quad (37)$$

$$\chi_P'^2 = 9.35 \quad \chi'_{P,red} = 0.85 \quad P'_p = 59.0\% \quad (38)$$

Um die Verteilung der zählraten bei niedriger mittlerer Ereignisse anzupassen ist Poisson-Verteilung offensichtlich ein besseres Angebot.

## 4 Zusammenfassung und Diskussion

In diesem Experiment haben wir mithilfe von dem Geiger-Müller-Zählrohr die statistische Verteilung der zerfallenden Atome untersucht und ihre Konsistenz mit zwei verschiedenen Fit-Modellen betrachtet. In einem Bereich der Spannung  $U$  zwischen 500V und 700V wurden die Zählungen innerhalb von 30 Sekunden gemessen und die dann grafisch in Abbildung 8 dargestellt, wobei eine Eichspannung  $U_0$  von etwa 675 V als Mittelwertsspannung des Plateaubereichs abgeschätzt wurde, die aber leicht von dem Geräteparameter abweicht. Eine mögliche Erklärung dafür könnte sein, dass das radioaktive Präparat Co60 in der Stange bereits stark verbraucht ist, da erst ab einer Spannung von 500V eine Detektion möglich ist, was auf eine geringe Intensität der Radioaktivität hinweist.

Um den Plateaubereich genauer zu forschen wurden dazu die Zerfälle sowohl bei  $U_0$  als auch bei  $U_0 + 100V$  nach 1 Minute und nach 3 Minuten aufgezeichnet sowie der absolute und prozentuale Anstieg gemessen. Was uns auffällt, ist, dass der Fehler des absoluten Anstiegs bereits viel größer ist als der Anstieg selbst. Dies liegt daran, dass die Anzahl der Ereignisse bei  $n(U_0 + 100V)$  noch im Plateaubereich liegt und daher kaum von dem Wert  $n(U_0)$  abweicht. Diese Beobachtung lässt sich auch aus Abbildung 8 ableiten, da man wegen Beschränkung der Spannung am Ende unserer Messreihe nicht feststellen kann, ob der Plateaubereich bereits vollständig erreicht ist, da kein charakteristischer weiterer Anstieg erkennbar ist. Für die Zeit, bei der der prozentuale Anstieg 1% erreicht, beträgt  $t = 135 \text{ s}$ . Dieses Ergebnis ist sinnvoll, da der prozentuale Anstieg, der bei  $t_2 = 3 \text{ Minuten}$  gemessen wurde, bereits 0,26% beträgt und somit kleiner als 1% ist.

Anschließend wurde die Verteilung der gemessenen Zerfälle bei hoher Zählrate untersucht. Bei einer festen Torzeit von  $T_t = 1/2 \text{ Sekunden}$  wurden  $n = 2100$  Zerfälle gemessen. Diese Werte wurden grafisch dargestellt. Zusätzlich wurde eine Anpassung mit einer Gauss- und einer Poissonverteilung durchgeführt (siehe Abb.9). Nach der

Messung wurde ein Wert für die experimentell ermittelte und theoretisch zu erwartende Standardabweichung der Messwerte vom Computer berechnet (siehe Abb. 6, 7) und mit den experimentell ermittelten Werten verglichen, wobei eine Fehlerabweichung des Erwartungswerts von  $0.06\sigma$  und der Standardabweichung von  $2.54\sigma$  aufweist, die sich innerhalb von  $3\sigma$  befinden und nicht signifikant sind. Da die Abweichung zwischen diesen beiden Standardabweichungen nur 4% beträgt, wird angenommen, dass das Zählrohr nicht signifikant weniger als 100% der aufgenommenen Strahlung detektiert hat und somit die Zählrate dadurch nicht verfälscht wurde.

Die Güte des Fits kann quantitativ erfasst werden und wurde berechnet. Es ist kaum überraschend, dass die Poissonverteilung die Verteilung der Messdaten besser beschreibt, da die Gaußverteilung im Wesentlichen eine Approximation der Poissonverteilung für große  $k$  ist. Aber die beiden  $\chi^2_{red}$ -Summe liegen nah an 1 somit haben die zwei Möglichkeiten uns ein sehr gutes Anpassungsmodell zur Verfügung gestellt.

Es wurden unter ähnlichen Bedingungen, jedoch mit einer etwas weiter entfernten Probe,  $n = 5001$  Zerfälle bei einer Totzeit von  $t_T = 1/10$  s bei niedrigerer Zählrate aufgezeichnet. Die Daten sind erneut in Abbildung 10 grafisch dargestellt, wobei wiederum eine Gauss- und eine Poissonanpassung vorgenommen wurden. Diesmal wurden die Daten in einem halblogarithmischen Diagramm dargestellt. Wir sehen jetzt aber deutlich, wie sich die Gauss-Verteilung und die Poisson-Verteilung unterscheiden. Qualitativ liefert die Poisson-Verteilung eine viel bessere Anpassung und sogar quantitativ aus der Güte sowie Fitwahrscheinlichkeit. Das ist der Fall, da die Bedingung  $k \gg 1$ , die eine notwendige Voraussetzung für den Übergang von der Poisson- zur Gaußverteilung ist, hier nicht erfüllt wird.

## 5 Quelle

- Wagner, J. (April 2022). Physikalisches Praktikum PAP 2.2 für Studierende der Physik [Praktikumsanleitung]. Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg. Abgerufen am 05. April 2024, von <https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtung/en/AP/info/Corona/2.2.2022.pdf>

## 6 Anhang

# Python Code Versuch 251

May 27, 2024

## 0.0.1 Python Code Versuch 251 Statistik

Yuting Shi

```
[174]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import curve_fit
```

Python Code 1: Importieren und grafische Darstellung der Messdaten

```
[175]: #Zaehlrohrspannung:
U=np.array([500,525,550,575,600,625,650,675,700,725,750,775,800,825])
#gezaehlte Ereignisse
N=np.
    ↪array([1169,1740,1841,1843,1860,1841,1857,1815,1795,1832,1821,1821,1868,1858])
Fehler_N=np.sqrt(N)
Fehler_U=10 #Einheit V

plt.errorbar(U, N, Fehler_N, fmt=".", label='Counts')
plt.xlabel('Spannung / V')
plt.ylabel('Ereignisse')
plt.title('Zählrohrcharakteristik')

def linear(x,a,b):
    return a*x+b

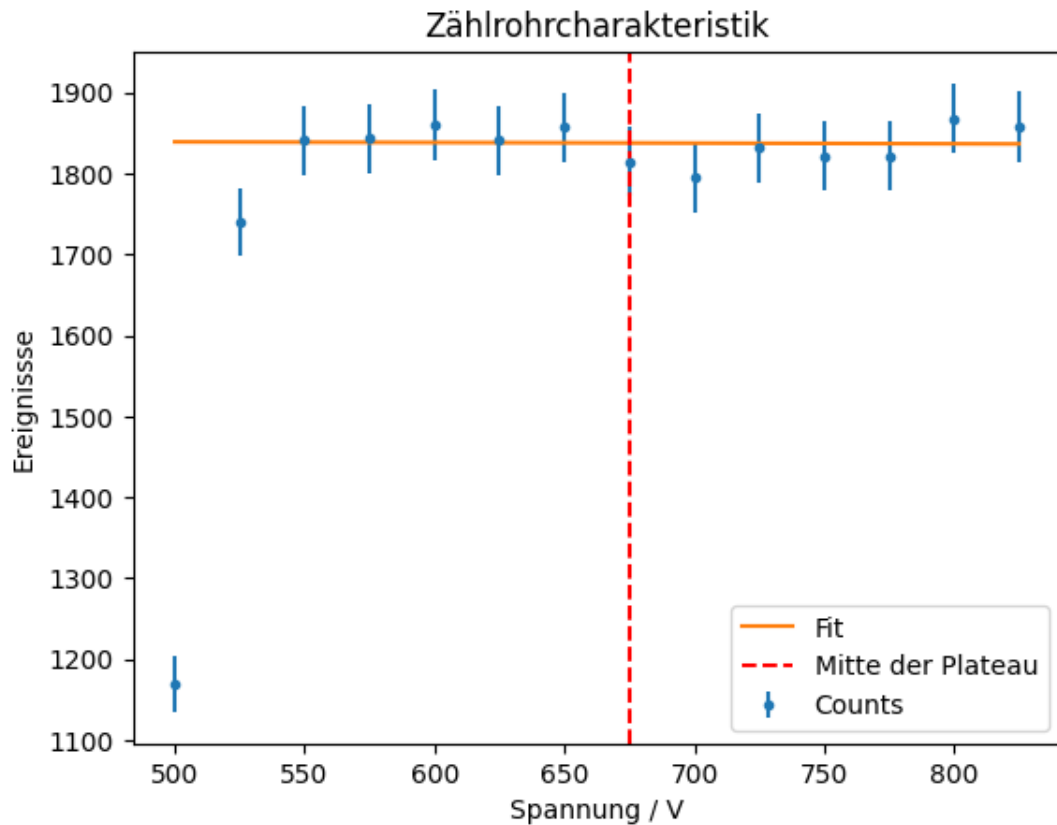
popt, pcov=curve_fit(linear, U[2:], N[2:])
plt.plot(U, linear(U, *popt), label='Fit')

U0=np.average(U[2:13])
print(U0)
plt.axvline(x=675.0, color='r', linestyle='--', linewidth=1.5, label='Mitte der_
    ↪Plateau')
plt.legend()

print("a =", popt[0], "+/-", pcov[0][0]**0.5)
print("b =", popt[1], "+/-", pcov[1][1]**0.5)
```

675.0

$a = -0.007832167834367132 \pm 0.07608067758423324$   
 $b = 1843.0512820553006 \pm 52.71596635931216$



Python Code 2: Plateaubereich des Zählrohrs

Python Code 3: Auswertung der Daten mit hoher mittlerer Ereigniszahl

```
[176]: anzahl, haeufigkeit=np.loadtxt('C:\\Users\\shiy0\\OneDrive\\Dokumente\\PAP 2.
      ↪2\\Versuch 251\\shiversuch251\\data_aufgabe2.txt', delimiter=',', skiprows=
      ↪4, unpack=True)
      fehler=np.sqrt(haeufigkeit)
```

```
[177]: plt.errorbar(anzahl, haeufigkeit, fehler, capsize=1.5, ms=3,fmt='s',
      ↪label='Daten mit Fehlern')
      plt.xlabel('Anzahl der Zerfaelle pro Zeiteinheit [1/s] ')
      plt.ylabel('Häufigkeit')
      plt.title('Statistik des radioaktiven Zerfalls')

      #gaussian-Fit
      from numpy import exp, pi, sqrt
      def gaussian(x, A, mu, sig): #A: Flaeche der Gauss-Funktion
```



```

    return A/(sqrt(2*pi)*sig)*exp(-(x-mu)**2/(2*sig**2))

popt2, pcov2=curve_fit(gaussian,anzahl[12:-17], haeufigkeit[12:-17],
    ↪p0=[2200,76.5,8],sigma=fehler[12:-17], absolute_sigma=True)

#Poisson-Fit
from scipy.special import gamma
def poisson(x, A_p, mu_p):
    return A_p*exp(-mu_p)*mu_p**x/gamma(x+1)

popt3, pcov3 = curve_fit(poisson, anzahl[12:-17], haeufigkeit[12:-17],
    ↪p0=[2600, 77], sigma=fehler[12:-17], absolute_sigma=True)

#Plotten
x=np.linspace(40,110, 100)
plt.plot(x, gaussian(x,*popt2), label='Gauss')
plt.plot(x, poisson(x,*popt3), label='Poisson')
plt.legend()

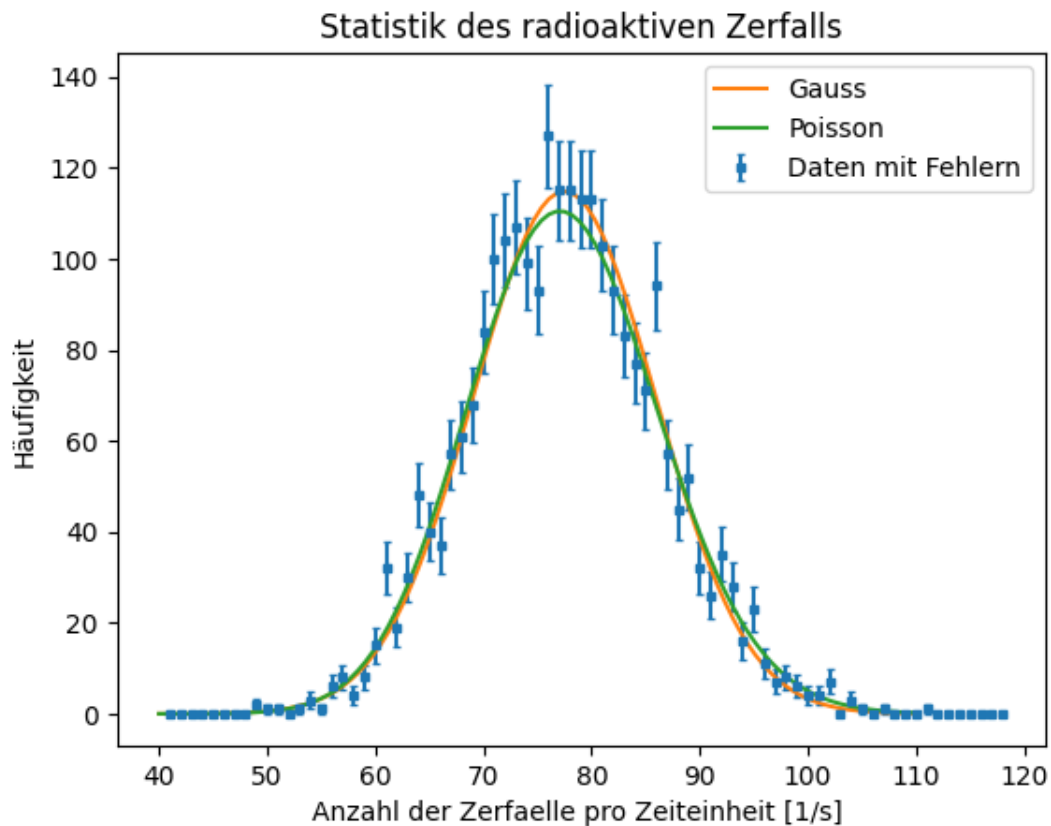
print("Gauss A =", popt2[0], "+/-", pcov2[0][0]**0.5)
print("Gauss mu =", popt2[1], "+/-", pcov2[1][1]**0.5)
print("Gauss sigma =", popt2[2], "+/-", pcov2[2][2]**0.5)
print("Poisson A =", popt3[0], "+/-", pcov3[0][0]**0.5)
print("Poisson mu =", popt3[1], "+/-", pcov3[1][1]**0.5)

```

```

Gauss A = 2431.1395603965802 +/- 49.41759221448685
Gauss mu = 77.48641035303373 +/- 0.17555267512661202
Gauss sigma = 8.44909213916397 +/- 0.13061574147851665
Poisson A = 2437.8113589889886 +/- 49.521441755480495
Poisson mu = 77.56915810987049 +/- 0.17804573010644675

```



Python Code 4: Chi-Quadrat

```
[178]: #Gauss:
chi2_g=np.sum((gaussian(anzahl[12:-17],*popt2)
-haeufigkeit[12:-17])**2/fehler[12:-17]**2)
dof_g=len(anzahl[12:-17])-3 #dof:degrees of freedom, Freiheitsgrad
chi2_red_g=chi2_g/dof_g
print("chi2_g=", chi2_g)
print("chi2_red_g=",chi2_red_g)
#Poisson:
chi2_p=np.sum((poisson(anzahl[12:-17],*popt3)
-haeufigkeit[12:-17])**2/fehler[12:-17]**2)
dof_p=len(anzahl[12:-17])-2 #poisson hat nur 2 Parameter
chi2_red_p=chi2_p/dof_p
print("chi2_p=", chi2_p)
print("chi2_red_p=",chi2_red_p)

#Fitwahrscheinlichkeit
from scipy.stats import chi2
prob_g=round(1-chi2.cdf(chi2_g,dof_g),2)*100 #Gauss
```

```

prob_p=round(1-chi2.cdf(chi2_p,dof_p),2)*100  #Poisson
print("Wahrscheinlichkeit Gauss=", prob_g,"%")
print("Wahrscheinlichkeit Poisson=", prob_p,"%")

```

```

chi2_g= 61.0306977983835
chi2_red_g= 1.3267542999648587
chi2_p= 59.43405363657036
chi2_red_p= 1.2645543326929864
Wahrscheinlichkeit Gauss= 7.000000000000001 %
Wahrscheinlichkeit Poisson= 11.0 %

```

PYthon Code 5: Auswertung der Daten mit kleiner Ereigniszahl

```

[179]: anzahl, haeufigkeit=np.loadtxt('C:\\Users\\shiy0\\OneDrive\\Dokumente\\PAP 2.
      ↪2\\Versuch 251\\shiversuch251\\data_aufgabe3.txt', delimiter=',', skiprows=
      ↪4, unpack=True)
fehler=np.sqrt(haeufigkeit)

```

```

[180]: plt.errorbar(anzahl[0:13], haeufigkeit[0:13], fehler[0:13], capsize=1.5,
      ↪ms=3,fmt='s', label='Daten mit Fehlern')
plt.xlabel('Anzahl der Zerfaelle pro Zeiteinheit [1/s] ')
plt.ylabel('Häufigkeit')
plt.title('Statistik des radioaktiven Zerfalls')

#gaussian-Fit
popt2, pcov2=curve_fit(gaussian,anzahl[0:13], haeufigkeit[0:13],
      ↪p0=[5000,5,2],sigma=fehler[0:13], absolute_sigma=True)

#Poisson-Fit
popt3, pcov3 = curve_fit(poisson, anzahl[0:13], haeufigkeit[0:13], p0=[3000,
      ↪5], sigma=fehler[0:13], absolute_sigma=True)

#Plotten
x=np.linspace(0,13, 100)
plt.plot(x, gaussian(x,*popt2), label='Gauss')
plt.plot(x, poisson(x,*popt3), label='Poisson')

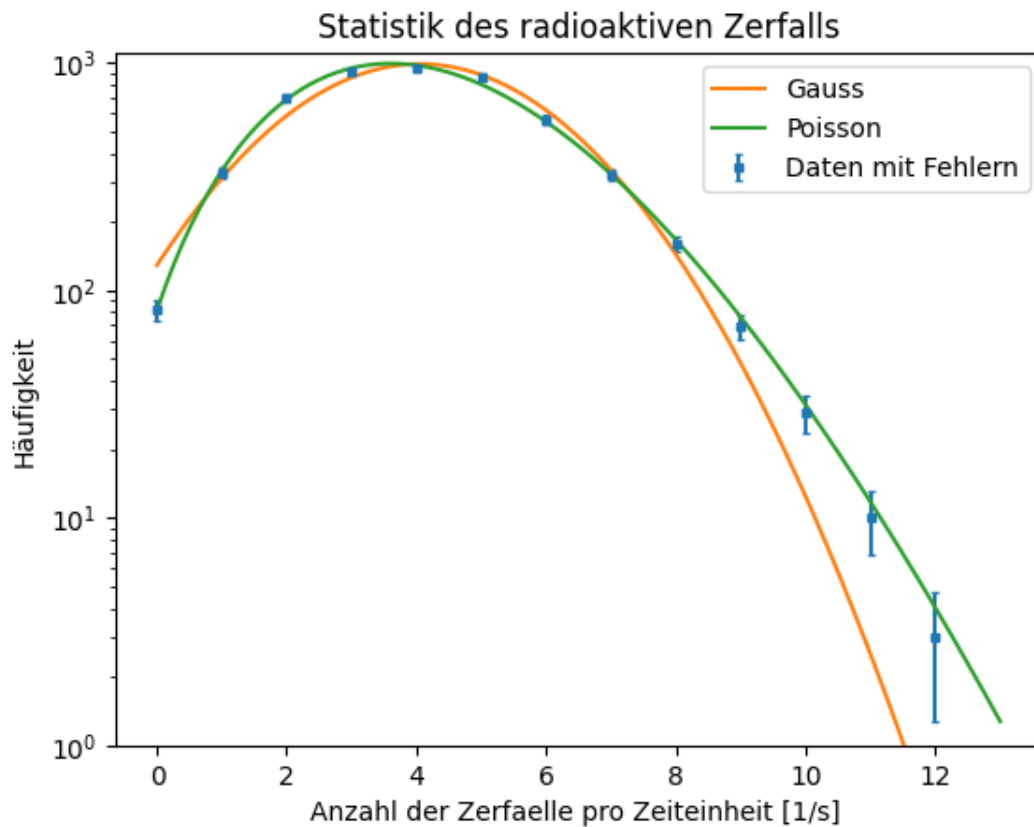
plt.yscale('log')
plt.ylim((1,1100))
plt.legend()

print("Gauss A =", popt2[0], "+/-", pcov2[0][0]**0.5)
print("Gauss mu =", popt2[1], "+/-", pcov2[1][1]**0.5)
print("Gauss sigma =", popt2[2], "+/-", pcov2[2][2]**0.5)
print("Poisson A =", popt3[0], "+/-", pcov3[0][0]**0.5)
print("Poisson mu =", popt3[1], "+/-", pcov3[1][1]**0.5)

```

Gauss A = 4965.831936308239 +/- 71.00671829658496

Gauss mu = 4.055306626703262 +/- 0.02972192506146329  
 Gauss sigma = 2.009244907743972 +/- 0.023776319680915124  
 Poisson A = 4988.440614208449 +/- 70.6416296976502  
 Poisson mu = 4.116740243190325 +/- 0.0284847034541257



```
[181]: #Gauss:
chi2_g=np.sum((gaussian(anzahl[0:13],*popt2)
-haeufigkeit[0:13])**2/fehler[0:13]**2)
dof_g=len(anzahl[0:13])-3 #dof:degrees of freedom, Freiheitsgrad
chi2_red_g=chi2_g/dof_g
print("chi2_g=", chi2_g)
print("chi2_red_g=",chi2_red_g)

#Poisson:
chi2_p=np.sum((poisson(anzahl[0:13],*popt3)
-haeufigkeit[0:13])**2/fehler[0:13]**2)
dof_p=len(anzahl[0:13])-2 #poisson hat nur 2 Parameter
chi2_red_p=chi2_p/dof_p
print("chi2_p=", chi2_p)
print("chi2_red_p=",chi2_red_p)
```

```
#Fitwahrscheinlichkeit
prob_g=round(1-chi2.cdf(chi2_g,dof_g),2)*100 #Gauss
prob_p=round(1-chi2.cdf(chi2_p,dof_p),2)*100 #Poisson
print("Wahrscheinlichkeit Gauss=", prob_g,"%")
print("Wahrscheinlichkeit Poisson=", prob_p,"%")
```

```
chi2_g= 84.78061366063214
chi2_red_g= 8.478061366063214
chi2_p= 9.344859657290606
chi2_red_p= 0.8495326961173277
Wahrscheinlichkeit Gauss= 0.0 %
Wahrscheinlichkeit Poisson= 59.0 %
```