UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

K. Wiegand, T. Stalljohann, T. Witt
Sommersemester 2025
Heidelberg, 8. Juli 2025

Grundlagen der Geometrie und Topologie

Übungsblatt 13

Stichworte: Homologie, Kompakt-Offen-Topologie, Decktransformationen

---

Aufgabe 1 *Simpliziale Homologie berechnen* (4 Punkte)
Skizzieren Sie Triangulierungen des 2-Torus $\mathbb{T}^2$ und der Klein'schen Flasche K und berechnen Sie die (simpliziale) Homologie in allen Graden. Wie unterscheiden sich die beiden Beispiele?
Tipp: Stellen Sie K und $\mathbb{T}^2$ als Quadrate mit verklebten Seiten dar.

Aufgabe 2 *K.O.-Topologie* (2+2 Punkte)
Für topologische Räume X und Y betrachten wir die Menge $Y^X := \{f : X \longrightarrow Y \text{ stetig}\}$.
Zu $K \subset X$ kompakt und $U \subset Y$ offen assoziieren wir

$$M(K,U) := \{f \in Y^X \mid f(K) \subset U\}$$

Die Kompakt-Offen-Topologie ist die kleinste Topologie auf Y^X, für die alle Mengen der Form $M(K,U)$ offen sind. Beweisen Sie unter der Voraussetzung, dass X lokalkompakt ist:

(a) Die Evaluationsabbildung $e : Y^X \times X \longrightarrow Y$, $e(f,x) = f(x)$ ist stetig.

(b) $f : Z \times X \longrightarrow Y$ stetig $\iff$ $\hat{f} : Z \longrightarrow Y^X$, $\hat{f}_z(\cdot) = f(z,\cdot)$ stetig

Aufgabe 3 *Decktransformationen und Monodromiewirkung* (1+1+2+2+2 Punkte)
Im Folgenden seien alle Räume Hausdorff und wegzusammenhängend.
Sei $p : X \longrightarrow Y$ eine Überlagerung und $x_0 \in p^{-1}(y_0) =: F_0$ ein Basispunkt in der Faser.
Der Gruppenhomomorphismus $p_* : \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \pi_1(Y,y_0)$ liefert eine Untergruppe

$$J_{x_0} := p_*\Big(\pi_1(X,x_0)\Big) \subset \pi_1(Y,y_0).$$

Zu einer Untergruppe $H \subset G$ assoziieren wir die Normalisatorgruppe
$N(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ und nennen H normal, falls $N(H) = G$. Außerdem betrachten wir die Links- und Rechtsnebenklassen $G/H = \{gH \mid g \in G\}$ $\quad H\backslash G = \{Hg \mid g \in G\}$. Dies sind Gruppen sofern H normal.

(a) Zeigen Sie: Anheben von Pfaden liefert eine wohldefinierte Rechtswirkung $F_0 \curvearrowleft \pi_1(Y,y_0) \ni \alpha,\ x \longmapsto x \cdot \alpha$. Diese führt zu einer Bijektion

$$J_{x_0}\backslash\pi_1(Y,y_0) \xrightarrow{\sim} F_0, \quad J_{x_0}\alpha \longmapsto x_0 \cdot \alpha$$

Wir bezeichnen mit $Deck(p) = \{g : X \longrightarrow X \text{ Homeomorphismus} \mid p \circ g = p\}$ die Gruppe der Decktransformationen.

(b) Zeigen Sie: Wenn $g_1, g_2 \in Deck(p)$ mit $g_1(x_0) = g_2(x_0)$ an einem einzelnen Punkt $x_0 \in X$ übereinstimmen, so gilt bereits $g_1 = g_2$.

(c) Seien $x, x_0 \in p^{-1}(y_0)$. Beweisen Sie die folgende Kette von Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \exists D \in Deck(p) : D(x_0) = x& \\ &\Longleftrightarrow J_{x_0} = J_x \\ &\Longleftrightarrow \exists \alpha \in N(J_{x_0}) : x = x_0 \cdot \alpha \end{aligned}$$

Für $\alpha \in N(J_{x_0})$ können wir $D_\alpha \in Deck(p)$ als die eindeutige Decktransformation definieren, so dass $D_\alpha(x_0) = x_0 \cdot \alpha$. (*Diese Relation gilt für den fest gewählten Basispunkt $x_0 \in X$, für andere $x \in p^{-1}(y_0)$ aber nicht unbedingt.*)

(d) Zeigen Sie, dass $D : N(J_{x_0}) \longrightarrow Deck(p)$, $\alpha \longmapsto D_\alpha$ einen Gruppenisomorphismus $N(J_{x_0})/J_{x_0} \cong Deck(p)$ induziert.

Für X einfachzusammenhängend haben wir $J_{x_0} = \{1\}$ und $N(J_{x_0}) = \pi_1(Y, y_0)$. Somit erhalten wir zwei Gruppenwirkungen von $\pi_1(Y, y_0)$ auf der Faser F_0:

- die 'Monodromiewirkung' aus Teil (a)
- die von D induzierte Wirkung durch Decktransformationen

(e) Beweisen Sie:

$$\text{Die Wirkungen stimmen überein} \iff \pi_1(Y, y_0) \text{ ist abelsch (d.h. kommutativ)}$$

Tipp: (allgemein) Überzeugen Sie sich, dass die Wirkungen $D_\alpha(x \cdot \beta) = D_\alpha(x) \cdot \beta$ kommutieren.
(zu c:) Sie dürfen ohne Beweis den Anhebungssatz (Lifting Theorem) benutzen:
Seien $A \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{p} X$ stetige Abbildungen, p eine Überlagerung und $x \in p^{-1}(f(a))$. Dann haben wir eine Äquivalenz:

$$\begin{array}{l} f \text{ besitzt einen Lift } \bar{f} : A \longrightarrow X \\ \text{mit } f(a) = x \end{array} \iff f_*\big(\pi_1(A, a)\big) \subset p_*\big(\pi_1(X, x)\big)$$

Abgabe bis Dienstag, 15. Juli 2025, 13:00 Uhr im MaMpf in Zweiergruppen. Abgabe zu dritt ist erlaubt.