

# Physikalisches Anfängerpraktikum II

## Sommersemester 2023

Versuch 243

Tutor: Johanna Feuerstein

### Messung der Boltzmannkonstante Teil II: Thermisches Rauschen

## 1 Einleiung

### 1.1 Ziel des Versuchs

Die Präzision elektrischer Messungen wird oft durch Rauschen beeinträchtigt. Durch das Verständnis seiner Ursachen kann ein Experiment optimiert werden, um das Rauschen im Vergleich zu den Signalen zu minimieren. Darüber hinaus können viele praktische Anwendungen entstehen, wenn solche Störungen gezielt genutzt werden. Dies verdeutlicht die Bedeutung der Untersuchung von thermischem Rauschen: In diesem Experiment sollen die physikalischen Ursachen des thermischen Rauschens untersucht und die Boltzmannkonstante präziser bestimmt werden. Dazu werden die Rauschspannung von sechs verschiedenen Widerständen bei Zimmertemperatur gemessen sowie das Eigenrauschen des Verstärkers analysiert, der Frequenzgang der Messelektronik bestimmt und die Rauschspannung eines Widerstands als Funktion der Temperatur gemessen.

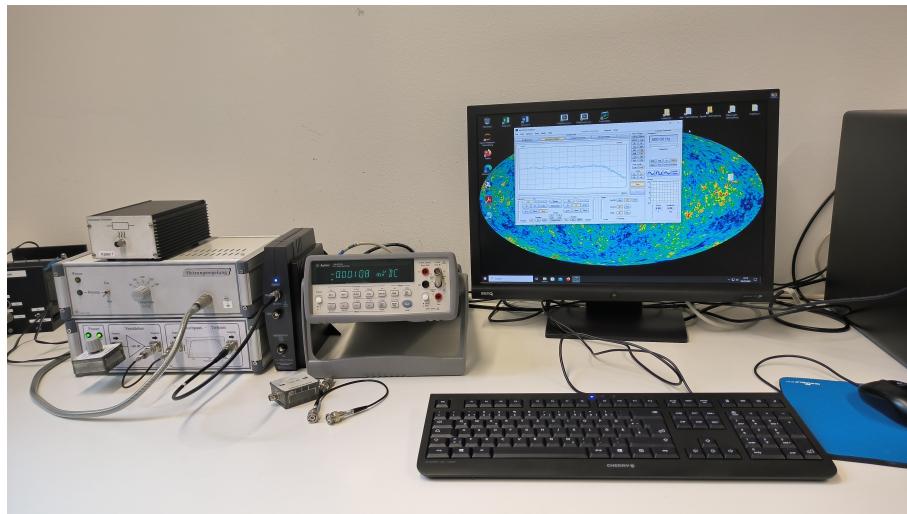


Abbildung 1: Versuchsaufbau

### 1.2 Thermisches Rauschen

Wegen der Brownschen Bewegung der Ladungsträger tritt immer ein Thermisches Rauschen auf, selbst wenn keine äußere Spannung angewendet wird, weil sie eine Temperatur größer als 0K hat. Solche thermische Bewegung der Ladungsträger führt zu

einem statistisch variierenden elektrischen Potenzial im Leiter, das von einem empfindlichen Oszilloskop gemessen werden kann, was eine statistische Schwankung  $U_R$  um den Mittelwert  $\langle U_R \rangle$  darstellt:

$$\langle U_R \rangle = \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{1}{t'} \int_0^{\infty} U_R(t) dt = 0 \quad (1)$$

Aufgrund der ungerichteten Bewegung der Ladungsträger ergibt sich das Integral 0. Um die Rauschspannung weiter zu charakterisieren nennen wir den Effektiv-wert  $\sqrt{\langle U_R^2 \rangle}$ , der ist

$$\sqrt{\langle U_R^2 \rangle} = \sqrt{\lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{1}{t'} \int_0^{\infty} U_R(t)^2 dt} \quad (2)$$

In Optik bezeichnet sich das thermische Rauschen auch als weißes Rauschen, da nach dem Frequenzspektrum von thermischen Rauschquellen alle Frequenzanteile bis in den THz-Bereich gleichermaßen vertreten sind, ganz ähnlich wie bei weißem Licht. Bei einem ohmschen Widerstand  $R$  der Temperatur  $T$  kann der quadratische Effektiv Wert  $\langle U_R^2 \rangle$  mit der Nyquist-Beziehung bestimmt werden:

$$\langle U_R^2 \rangle = 4kT\Delta f \quad (3)$$

Die Boltzmannkonstante wird durch  $k$  repräsentiert, während  $\Delta f$  die Bandbreite der Messelektronik darstellt. Frequenzen außerhalb dieser Bandbreite können entweder gar nicht oder nur mit einem großen Fehler gemessen werden. Da jedoch jeder Frequenzanteil gleichermaßen zum thermischen Rauschen beiträgt, vergrößert sich der Rauscheffekt bei wachsender Bandbreite.

Rosa Rauschen oder "1/f-Rauschen" hingegen beschreibt ein Rauschsignal, bei dem die **Leistungsdichte** (**Rauschdichte**  $U_R/\sqrt{\Delta f}$ ) mit zunehmender Frequenz abnimmt, die angibt, wie viel Rauschleistung pro Frequenzeinheit vorhanden ist. Beim weißen Rauschen ist die Leistungsdichte eine Konstante. Anders ausgedrückt bedeutet das, dass niedrigere Frequenzen mehr Energie beitragen als höhere Frequenzen.

### 1.3 Messprinzip

Um die Boltzmannkonstante zu ermitteln, brauchen wir anhand Gl.(3) nur den Effektivwert  $\langle U_R^2 \rangle$ , den Widerstand  $R$ , die Temperatur  $T$  und die Bandbreite  $\Delta f$  zu bestimmen. Die Schwierigkeiten liegen an die Messung der extrem kleinen Rauschspannung, weshalb ein 1000-facher Verstärker notwendig ist. Jedoch ist der Verstärker selbst auch eine Rauschquelle, die gemessene Rauschspannung soll eigentlich als ein gesamtes Teil betrachtet werden. Verwenden wir die Gl.(1)  $\langle U_R \rangle = \langle U_V \rangle = 0$  dann bekommen wir die Relation:

$$\sqrt{\langle U_{R+V}^2 \rangle} = \sqrt{\langle (U_R + U_V)^2 \rangle} = \sqrt{\langle U_R^2 \rangle + \langle U_V^2 \rangle + 2 \langle U_R \rangle \langle U_V \rangle} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \langle U_{R+V}^2 \rangle = \langle U_R^2 \rangle + \langle U_V^2 \rangle \quad (5)$$

Durch eine sogenannte Nullmessung von dem Verstärkerrauschen und dann Substrahieren können wir leicht den Effektivwert  $\langle U_R^2 \rangle$  bekommen.

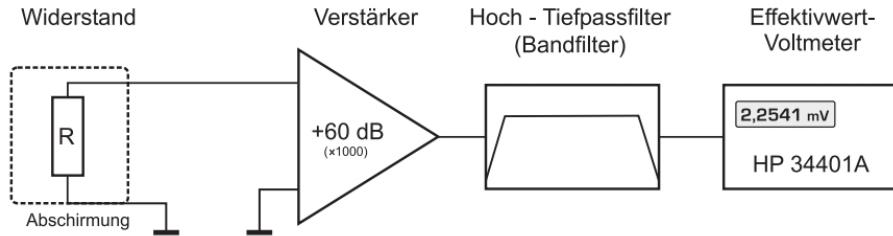


Abbildung 2: Effektivwert Messung durch Verstärker<sup>1</sup>

Außerdem wird ein Bandfilter benötigt, der aus einem Hoch- und Tiefpassfilter zusammensetzt, da die Bandbreite des Voltmeters und des Verstärkers bei hohen Frequenzen nicht scharf begrenzt ist und Störsignale mit niedrigen Frequenzen wie vor allem das 50 Hz Netzbrummen und dessen eingekoppelten Harmonischen in dem Verstärker die Messungen verfälschen können. Aus diesem Grund soll ein Batterienetzteil statt einer netzgebundenen Stromversorgung benutzt werden.

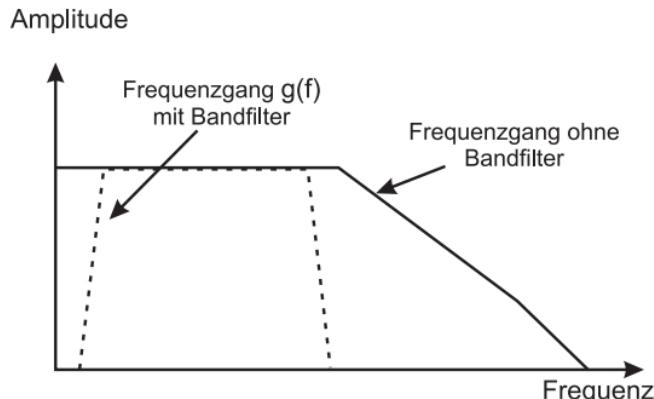


Abbildung 3: Frequenzgang mit und ohne Bandfilter<sup>2</sup>

Um aus dem verstärkten und gefilterten Signal die Boltzmannkonstante zu bestimmen definieren wir den Frequenzgang  $g(f)$  der Messelektronik:

$$g(f) = \frac{U_{aus}}{U_{ein}}|_f \quad (6)$$

Hierbei ist  $U_{aus}$  die Ausgangsspannung am Ausgang des Bandfilters und  $U_{ein}$  die eingehende Spannung, welche der Rauschspannung  $U_R$  entspricht. Benutzen wir wieder Nyquist- Beziehung aus Gl.(3) für  $U_{aus}$ :

$$d \langle U_{aus}^2 \rangle = g(f)^2 d \langle U_R^2 \rangle = 4kT R g(f)^2 df \quad (7)$$

<sup>1</sup>Quelle: Dr. J.Wagner - Physikalisches Anfängerpraktikum - V. 1.1 B.Sc. Stand 10/2012

<sup>2</sup>Quelle: Dr. J.Wagner - Physikalisches Anfängerpraktikum - V. 1.1 B.Sc. Stand 10/2012

Nach Integration und mit Rücksicht auf Gl.(5) ergibt sich:

$$\langle U_{aus}^2 \rangle = \langle U_V^2 \rangle + 4kTR \int_0^\infty g(f)^2 df = 4kTRB + \langle U_V^2 \rangle \quad (8)$$

$$B \equiv \int_0^\infty g(f)^2 df \quad (9)$$

wobei B als ***äquivalente Rauschbandbreite*** des Messsystems bezeichnet und numerisch ermittelt werden kann. Damit ist die Boltzmannkonstante:

$$k = \frac{\langle U_{aus}^2 \rangle - \langle U_V^2 \rangle}{4TRB} \quad (10)$$

Schließlich soll nur der Frequenzgang bestimmt werden, indem wir ein Funktionsgenerator und ein Oszilloskop benutzen, das die Ausgangsspannung  $U_{aus}$  hinter dem Bandfilter misst. Der Computer erzeugt am Funktionsgenerator ein Sinussignal mit der Frequenz  $f$  und einer konstanten Effektivspannung  $U_{eff}$ . Es folgt dann:

$$g(f) = \frac{1}{D} \sqrt{\frac{\langle U_{aus}^2 \rangle}{\langle U_{ein}^2 \rangle}} = \frac{\sqrt{\langle U_{aus}^2 \rangle}}{\sqrt{\langle U_{ein}^2 \rangle}} \quad (11)$$

da ein Dämpfungsglied das Signal des Funktionsgenerators um das 1000-fache ab schwächt aber der Verstärker das Signal wieder verstärkt hat, um das Signal nicht zu verzerren.

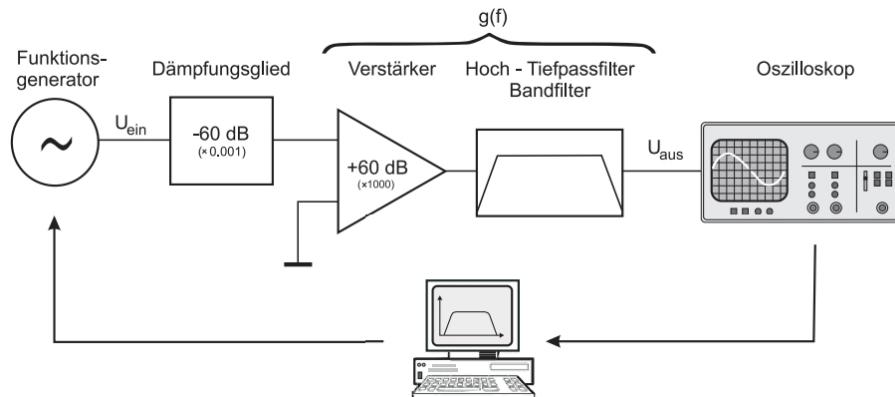


Abbildung 4: Messaufbau zur Messung des Frequenzgangs<sup>3</sup>

## 2 Versuchsdurchführung

Versuchsaufbau, Versuchsdurchführung und Messprotokoll siehe folgende Seiten.

---

<sup>3</sup>Quelle: Dr. J.Wagner - Physikalisches Anfängerpraktikum - V. 1.1 B.Sc. Stand 10/2012

# Versuch 2f3: Bestimmung der Boltzmannkonstante mit Hilfe von thermischen Prozessen

06.05.2024 14:00 ~ 17:00

Yulai Shi Yufeng Shi

- Messgeräte:
- Batterienetzteil
  - Zimmerthermometer
  - Ohmsche Widerstände in einem Gehäuse
  - Reorschärmer Verstärker mit  $1\text{M}\Omega$ -facher Verstärkung und zuschaltbarem Bandpassfilter
  - Heizungsnetzteil mit integrierter Regeltechnik für den beheizbaren Widerstand
  - Oszilloskop mit Spektrumanalysator
  - Funktionsgenerator
  - Dämpfungsglied  $1/1000$  - fach
  - Beheizbarer Widerstand  $4\text{k}\Omega$  bei  $0^\circ\text{C}$  (Pt  $4000$  - Widerstand)
  - Multimeter Agilent HP34401A • PC

Aufgabe 1: Qualitative Untersuchung des Reorschpektrums eines ohmschen Widerstands  
 Stelle das Gehäuse direkt auf den Verstärkereingang und wähle den kleinsten Widerstandswert. Schließe den Verstärkerausgang an Kanal I des Oszilloskops an. Beobachte die Reorschspannungen mit Oszilloskop für unterschiedliche Widerstände.

→ Umschalte den Ausgang auf den Spektrumanalysator. (ohne Bandfilter)

Einstellungen: Freq. Scale: LOG ; Frequency range: 0.6 MHz

Coupling: AC ; Volts/Div.: 5 mV

Options: RMS-Average

Jetzt mit Bandfilter, drucken das Spektrum aus.

Aufgabe 2: Messung der Reorschspannung als Funktion des ohmschen Widerstands

Auschließen: Gehäuse  $\xrightarrow{\text{direkt}}$  Eingang des Verstärkers — Ausgang  $\xrightarrow{\text{kurz}}$  Eingang Bandfilter —  $\xrightarrow{\text{kabel}}$   
 Ausgang — Voltmeter

①

Starten den Program "Effektivwert" um die relevanten Werte zu messen.

Für 6 Widerstände  $\in [5\text{k}\Omega, 30\text{k}\Omega]$  in Schritten von  $5\text{k}\Omega$  messen wir die Reorschspannung, bei jeder Messung 100 Einzelmessungen + Mittelwert  $\sqrt{\langle U_h^2 \rangle}$  + Standardabweichung  $s$ , der Fehler  $\Delta \sqrt{\langle U_h^2 \rangle} = \frac{s}{\sqrt{N}}$ ,  $N = \# \text{ Messungen}$

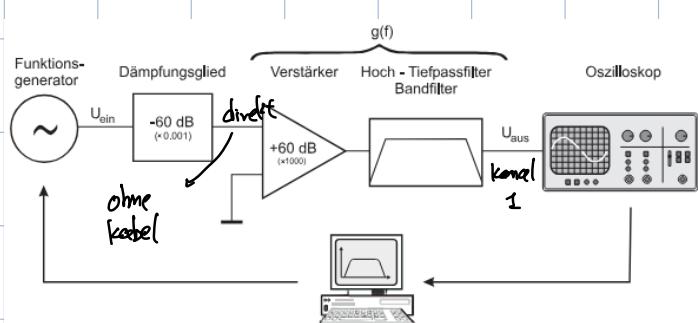
② Eigenrauschen des Verstärkers: kurzschließen Verstärkerereingang mit Widerstand  $\geq 50\Omega$

Tabelle 1: Die Rauschspannungen bei verschiedenen Widerständen

Nr.	R [Ω]	N	$\delta$ [mV]	$\sqrt{\langle \delta^2 \rangle}$ [mV]	$\Delta \sqrt{\langle \delta^2 \rangle}$ [mV]
1	0	102	0.00573	1.3335	0.0006
2	5	99	0.00964	2.3095	0.0010
3	10	97	0.0112	2.4870	0.0011
4	15	102	0.0119	3.5329	0.0012
5	20	102	0.0162	4.0073	0.0016
6	25	102	0.0165	4.4444	0.0016
7	30	102	0.0180	4.8354	0.0018

Zimmertemperatur:  $T = (296.05 \pm 0.10) \text{ K}$ ; Fehler der Widerstände < 0.5%  
 Messgenauigkeit des Voltmeters: 0.3 %

### Aufgabe 3: Messung des Frequenzgangs des Verstärkers und des Baufilters



Starten die Oszilloskopsoftware.

Am Funktionsgenerator: Sinussignal mit  $f = 100 \text{ Hz}$  und Amplitude von  $0.2 \text{ V}_{\text{rms}}$

Starten den "Circuit-Analyzer".

Einstellungen: Vertical Scale: 5 dB/div  
 V-Range: 0.3V Frequency range: 1 MHz

Frequenz Start: 100 Hz; Frequenzschritte: 20 %; Option: Automatic Voltage scale.

Abschwächung  $D = (0.001 \pm 0.2\%)$ ;  $U_{\text{lin}} = (0.2 \text{ V}_{\text{rms}}) \text{ V}$

Starten die Frequenzgang und speichern die Messreihen.

### Aufgabe 4: Messung der Rauschspannung als Funktion der Temperatur

Schließlich werden noch Messungen am beheizten Widerstand vorgenommen. Es wird auf gleiche Weise wie zuvor der Wert der Rauschspannung aufgenommen. Der Widerstand wird mit Hilfe des Multimeters gemessen und die Temperatur aufgezeichnet.

Tabelle 2: Die Rauschspannungen, Temperaturen und Widerstände am Heizwiderstand

Nr.	T [K]	R [ $\Omega$ ]	N	$\delta$ [mV]	$\sqrt{\langle \delta^2 \rangle}$ [mV]	$\Delta \sqrt{\langle \delta^2 \rangle}$ [mV]
1	323.35	4779.3	102	0.00843	2.3573	0.0008
2	374.81	5565.6	102	0.00975	2.6173	0.0010
3	425.31	6325.4	102	0.0101	2.8812	0.0010
4	477.07	7092.1	102	0.0108	3.1544	0.0011
5	527.83	7831.2	105	0.0127	3.4263	0.0012

Programm: Widerstand neu am R und T zu messen.

Programm: Effektivwert um die Rauschspannungen zu messen

$$\Delta T = 0.2 \text{ K}, \Delta R = 0.3 \Omega$$

JK 06.05.2024

### 3 Auswertung

#### 3.1 Qualitative Untersuchung des Rauschspektrums eines ohmschen Widerstands

In erster Aufgabe soll die Rauschspannung sowie ihr Verhalten unter verschiedenen Widerständen und Bandpassfilter qualitativ beobachtet werden. Dazu wurden zwei Bilder von Oszilloskop für die Rauschspannung und das Spektrum genommen:

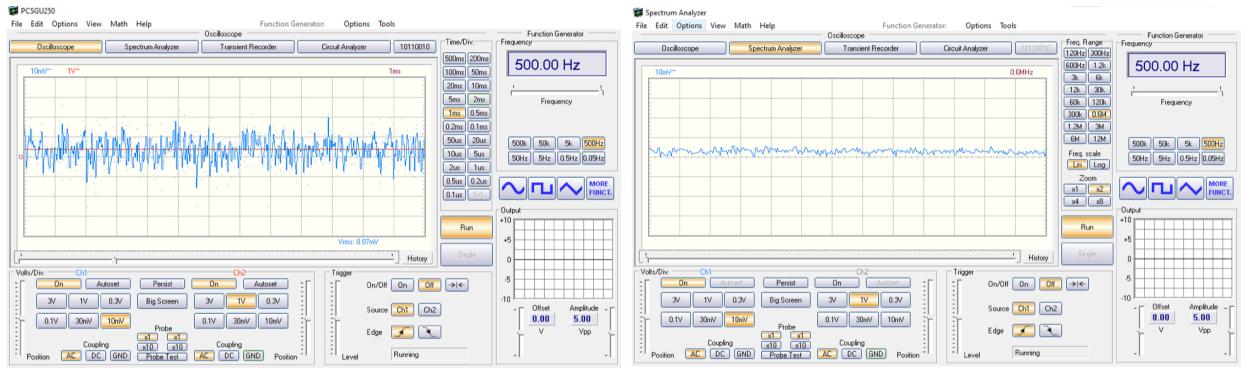


Abbildung 5: Links: Rauschspannung des Widerstands; Rechts: RMS Average unter Spektrum

Aufgrund der unregelmäßigen thermischen Bewegung der Ladungsträger in einem Leiter (ohmscher Widerstand), liegt an diesem eine fluktuiierende Spannung (Rauschspannung) an, wobei der zeitliche Mittelwert verschwindet. Rechts werden Frequenzen gegen Amplituden aufgetragen, wobei die Rauschamplituden für alle Frequenzen gleichermaßen vertreten sind, was einer weißen Rauschung entspricht. Stellen wir den Widerstand ein und fügen noch zusätzlich ein Bandpassfilter hinzu, so kommt heraus:

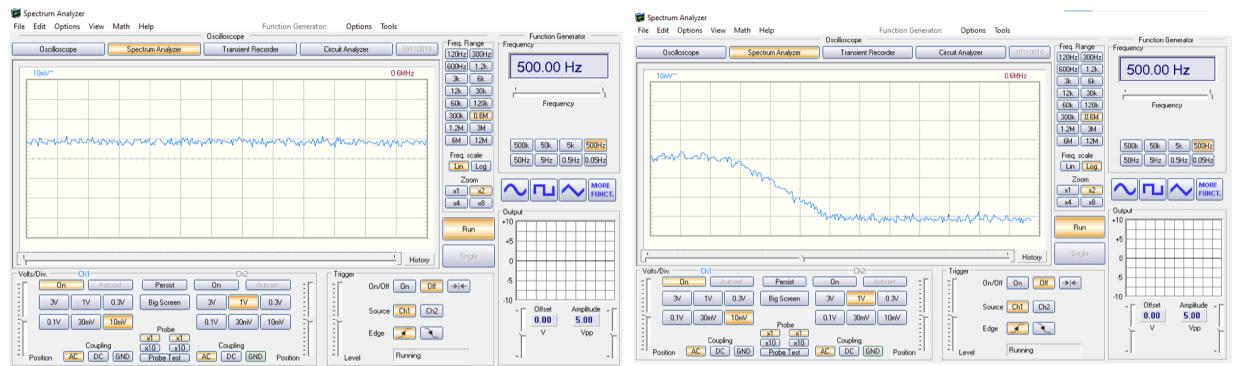


Abbildung 6: Links: Spektrum des größeren Widerstands; Rechts: Spektrum mit Bandpassfilter

Nun bekommen wir ein nach oben verschobenes Spektrum falls der Widerstand größer

ist, da mehr Joule-Wäremen produziert wird und deswegen die thermische Bewegung stärker erscheint. Mit einem Bandpassfilter sieht man, dass das Spektrum bei hohen Frequenzen stark abfällt wegen dem zugeschalteten Tiefpassfilter und damit können wir die effektive Bandbreite beschränken.

### 3.2 Messung des Frequenzgangs des Verstärkers und des Bandfilters

Die Daten von Frequenzgang unter Sinussignal werden nun in Jupyter Notebook importiert und graphisch dargestellt. Die Funktion  $g(f)$  ist der Frequenzgang, welcher sich wie folgt berechnet:

$$g(f) = \frac{1}{D} \frac{U_{aus}}{U_{ein}} \quad (12)$$

$U_{aus}$  entspricht der gemessenen Ausgangsspannung,  $U_{ein} = 0,2V$  der angelegten Eingangsspannung und D dem Dämpfungsfaktor. Dabei lässt sich der Frequenzgang  $g(f)$  approximieren, indem man den Frequenzgang des Verstärkers mit einem Hochpassfilter kombiniert, dem ein Tiefpassfilter der n-ten Ordnung nachgeschaltet ist. Hierfür wird der folgende Näherung verwendet:

$$g(f) = \frac{V}{\sqrt{1 + 1/(f/\Omega_1)^{2n_1}} \sqrt{1 + (f/\Omega_2)^{2n_2}}} \quad (13)$$

$\Omega_1$  ist die Grenzfrequenz des Hochpassfilters,  $\Omega_2$  die Grenzfrequenz des Tiefpassfilters und  $n_1$  und  $n_2$  sind die jeweiligen Filterordnungen.

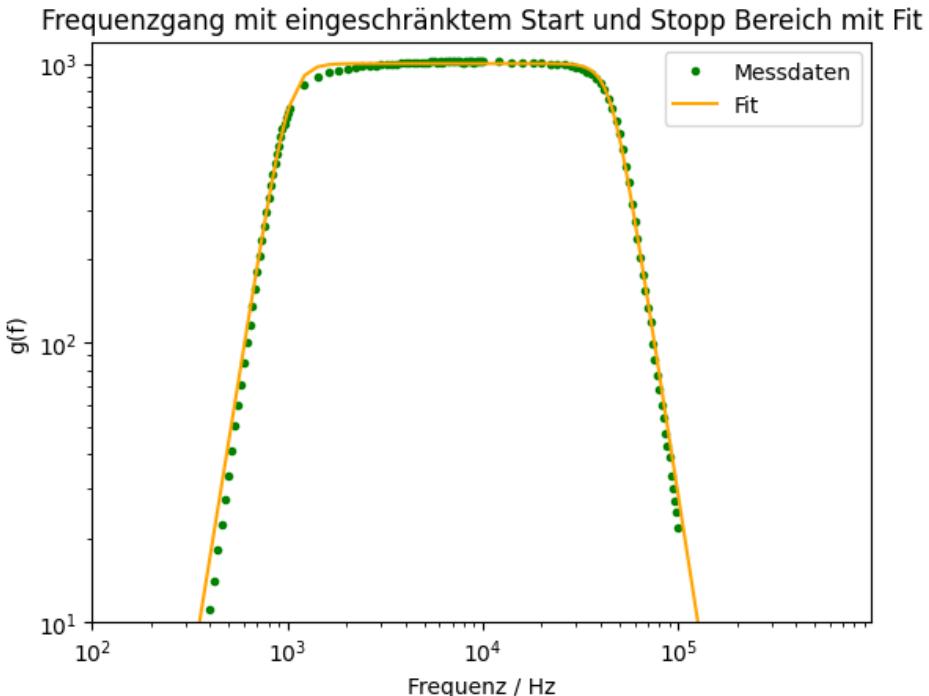


Abbildung 7: Frequenzgang  $g(f)$  mit Fit

Für die Verstärkung  $V$  kann aus dem Vektor  $\text{popt}$ , welcher nochmals im Anhang der Python Datei vermerkt ist, der folgende Wert abgelenzen werden. Der Fehler kann aus dem entsprechenden Diagonalelement der Kovarianzmatrix abgelesen werden:

$$V = 1000,7 \pm 2,3 \quad (14)$$

Aus dem gemessenen Frequenzgang  $g(f)$  ist das Integral zu berechnen:<sup>4</sup>

$$B = \int_0^{\infty} g(f)^2 df = (4,54 \pm 0,91) \cdot 10^{10} \quad (15)$$

Die Unsicherheit von  $B$  umfasst verschiedene Fehlerquellen, darunter Integrationsfehler, Fehler des Untergrunds, sowie Fehler in der Genauigkeit der Messinstrumente und des Verstärkungsfaktors. Um die Berechnung zu vereinfachen, setzen wir einen systematischen Fehler von 2% für  $B$  an.

### 3.3 Bestimmung der Boltzmannkonstante

Um die effektive Rauschspannung  $D$  zu ermitteln, wird die Eigenrauschung  $U_V^2$  von dem Verstärker vom Ausgangswert  $U_{Aus}^2$  subtrahiert. Die Werte für  $U_{Aus}^2$  werden aus Tabelle 1 des Messprotokolls entnommen, und anhand dieser Werte wird  $D$  für die jeweiligen Widerstände  $R$  berechnet:

$$D = U_{Aus}^2 - U_V^2 \quad (16)$$

Der Fehler von  $D$  wird durch die Gauss-Fehlerfortpflanzung berechnet. Wenn wir  $D$  als Funktion gegen die Widerstände  $R$  auftragen und mit einer linearen Fixfunktion auswerten, ergibt sich:<sup>5</sup> Aus Gl.(8), (9) ist es daher möglich, die Boltzmannkonstante zu ermitteln, indem wir die Steigung betrachten:

$$c = (7,178 \pm 0,013) \cdot 10^{-10} V^2/\Omega = 4kTB \quad (17)$$

woraus wir die Boltzmannkonstante berechnen als:

$$k = \frac{c}{4TB} = 1,347 \cdot 10^{-23} J/K \quad (18)$$

wobei  $T$  die absolute Temperatur bezeichnet und aus dem Messprotokoll ausgelesen wird. Der systematische Fehler von  $k$  wird durch  $B$  und  $T$  verursacht.

$$\Delta k_{sys} = \sqrt{\left(\frac{c\Delta B}{4TB^2}\right)^2 + \left(\frac{c\Delta T}{4T^2B}\right)^2} = 0,278 \cdot 10^{-23} J/K \quad (19)$$

Der dazu gehörige statistische wird durch  $c$  bestimmt:

$$\Delta k_{stat} = \frac{\Delta c}{4TB} = 0,003 \cdot 10^{-23} J/K \quad (20)$$

---

<sup>4</sup>Python Code 2

<sup>5</sup>Python Code 3

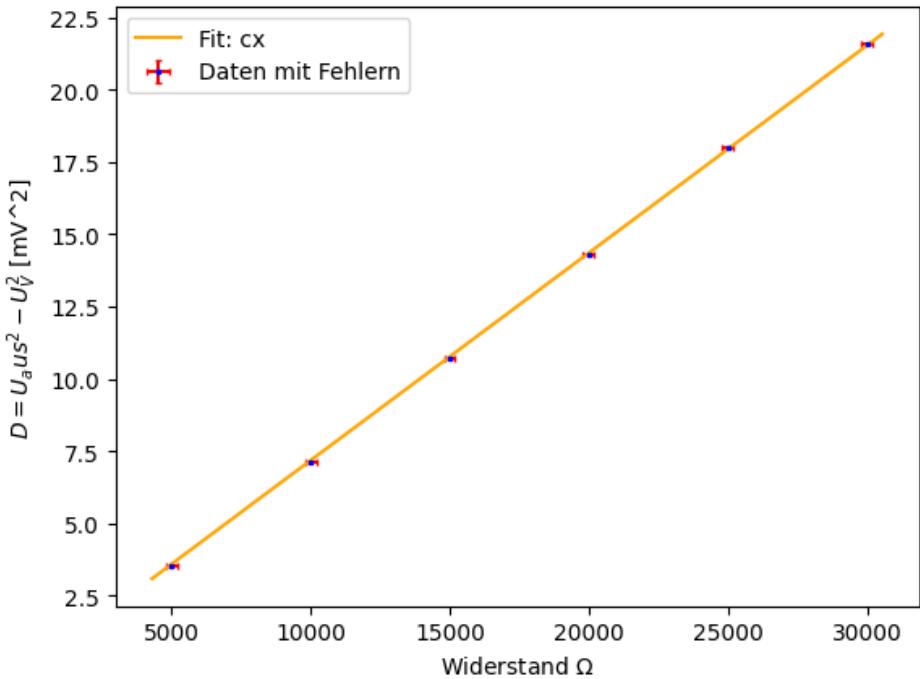


Abbildung 8: Lineare Kongression von D gegen R umgerechnet in mV

Das Resultat lässt sich in Form schreiben, also wenn statistische und systematische Fehler getrennt aufgeführt werden, kann man dann leichter strategisch planen, wie man die Unsicherheiten reduziert:

$$k = (1,347 \pm 0,003\text{stat.} \pm 0,278\text{sys.}) \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \quad (21)$$

Wir vergleichen diesen Wert mit dem Literaturwert  $k_{Lit} = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ :

$$\frac{|k_{Lit} - k|}{\Delta k} \approx 0,12 \quad (22)$$

Die Fehlerabweichung beträgt innerhalb von  $3\sigma$  und ist somit nicht signifikant.

Um die Gerechtigkeit zu prüfen, wird die Chi-Quadrat-Summe ( $\chi^2$ ) gemäß der Ver- suchsanleitung berechnet, um eine Aussage über die Güte des Fits zu treffen. Der reduzierte Chi-Quadrat-Wert ( $\chi^2_{red}$ ) wird ebenfalls berechnet, wobei "dof" (degrees of freedom) die Freiheitsgrade sind. Der reduzierte Chi-Quadrat-Wert wird folgendermaßen berechnet:<sup>6</sup>

$$\chi^2_{red} = \frac{\chi^2}{dof} \quad (23)$$

Dabei ergibt sich ein Wert, der zeigt, wie gut das Modell zu den Daten passt. Werte von  $\chi^2_{red}$  nahe 1 deuten auf eine gute Anpassung hin, während höhere Werte auf eine

---

<sup>6</sup>Python Code 4

Überanpassung oder schlechte Modellanpassung hindeuten. Außerdem möchten wir Fitwahrscheinlichkeit”  $P$  berechnen, dass man bei einer Wiederholungsmessung einen Chi-Quadrat-Wert ( $\chi^2$ ) erhält, der gleich oder größer ist als der Chi-Quadrat-Wert des aktuellen Fits. Die drei Werte ergeben sich als:

$$\chi^2 = 1213 \quad \chi_{\text{red}}^2 = 242 \quad P = 0\% \quad (24)$$

was eine schlechte Vorhersage liefert, da  $\chi_{\text{red}}^2$  viel weit entfernt von 1 ist. Der Grund werden wir dann in Diskussion weiter führen.

### 3.4 Messung der Rauschspannung als Funktion der Temperatur

Es wurden die Rausschspannungen des Widerstands unter verschiedenen Temperaturen gemessen und die Daten aus Tabelle 2 graphisch gegen das Verhältnis von D und die entsprechenden Widerstände R geplottet und ebenso durch eine lineare Funktion angenähert.<sup>7</sup> Hierbei wird genutzt dass:

$$\frac{U_{\text{aus}}^2 - U_{\text{ein}}^2}{R} = c'T \quad c' = 4kB \quad (25)$$

Als Steigung ergibt sich:

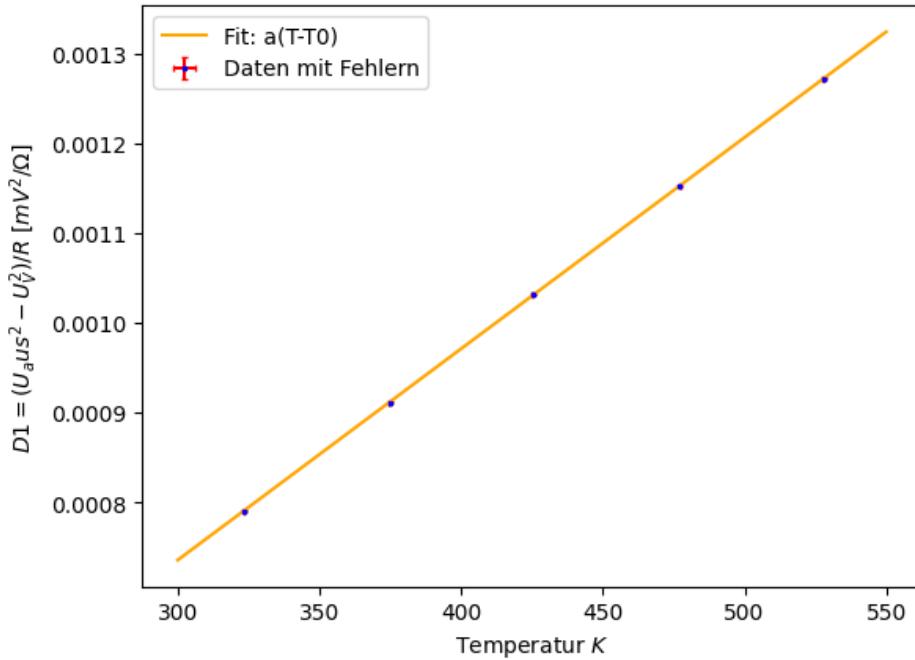


Abbildung 9: Lineare Kongression von  $(U_{\text{aus}}^2 - U_{\text{ein}}^2)/R$  gegen T umgerechnet in mV

$$c' = (2,3546 \pm 0,0028) \cdot 10^{-12} \text{ V}^2/\Omega = 4kB \quad (26)$$

---

<sup>7</sup>Python Code 5

Daher lässt sich die Boltzmannkonstante analog berechnen als:

$$k' = (1,297 \pm 0,260) \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \quad (27)$$

Dies liefert ebenso ein gutes Ergebnis da die Fehlerabweichung beträgt:

$$\frac{|k_{Lit} - k'|}{\Delta k'} \approx 0,32 \quad (28)$$

und sich innerhalb von  $3\sigma$  befindet, ist sie nicht signifikant.

Um die Zuverlässigkeit von dem Fit zu prüfen berechnen wir wieder die Chi-Quadrat sowie die Fitwahrscheinlichkeit der Funktion:<sup>8</sup>

$$\chi^2 = 4,69 \quad \chi^2_{red} = 0,94 \quad P = 45,0\% \quad (29)$$

Diesmal liegt der Wert von  $\chi^2_{red}$  sehr nah an 1, was die Kompatibilität der Fitfunktion mit unserer Messung gezeigt hat.

Zusätzlich kann man grob den absoluten Temperatur-Nullpunkt aus einem Diagramm ableiten, an dem die Eingangsrauschspannung gleich der Eigenrauschen des Gerätes ist. An diesem Punkt verschwindet die thermische Bewegung innerhalb des Widerstands, was den absoluten Nullpunkt definiert:

$$T_0 = (-12,41 \pm 0,53) \text{ K} \quad (30)$$

Dieser Wert ist wegen großem Wärmeverlust sowie andere Einflüsse wie Elektromagnetische Kopplung wenig wissenschaftlich überzeugbar, jedoch stellt diese Vorgehensweise eine ganz neue Messmethode zur Verfügung, mit der wir den absoluten Nullpunkt abschätzen und erforschen können.

## 4 Zusammenfassung und Diskussion

In diesem Experiment sollen wir theoretisch die Boltzmannkonstante durch die Nyquist-Beziehung ermitteln, indem wir zuerst die Bandbreite durch das Frequenzspektrum bestimmen und dann mithilfe entweder der linearen Kongression zwischen  $D = U_{aus}^2 - U_V^2$  und Widerständen R oder zwischen  $D1 = (U_{aus}^2 - U_V^2)/R$  und Temperaturen T die Steigung auswerten. Die experimentell bestimmten Werte  $k = (1,347 \pm 0,003stat. \pm 0,278sys.) \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$  und  $k' = (1,297 \pm 0,260) \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$  liegen alle innerhalb von  $3\sigma$  und zeigen keine signifikante Abweichung von dem Literaturwert, wobei der Literaturwert als exakt angenommen wird.

Die Beobachtung für die Rauschspannung gegen dem ohmschen Widerstand lässt sich bemerken, dass die Amplitude des Rauschens mit dem steigendem Widerstand zunahm. Wenn man das Frequenzspektrum eines Signals mit einem Spektrumanalysator

---

<sup>8</sup>Python Code 6

untersucht, fällt auf, dass im unteren Frequenzbereich jede Frequenz gleichermaßen zur Amplitude beiträgt, wie wir schon in qualitativer Beobachtung festgestellt haben. Betrachtet man jedoch das Spektrum bei höheren Frequenzen, nimmt der Beitrag zur Amplitude entgegen der anfänglichen Erwartung ab, zwar je höher die Frequenz ist. Konkret zeigt sich, dass dieser Abfall im logarithmischen Maßstab des Oszilloskops eine nahezu lineare Beziehung aufweist, was darauf hindeutet, dass die Amplitude in diesem Bereich proportional zu  $e^{-f}$  ist. Grund dafür ist einerseits die konstante Abschwächung pro Dekade in Tiefpass, andererseits aber auch die Geschwindigkeitsverteilung der Ladungsträger im Widerstand.

Bei Messung der effektiven Mittelwerte sollen allerdings beachtet werden, dass das Rauschen in Bandpassfiltern und Voltmessern vernachlässigt wurde. Zwar ist es im Vergleich zum vom Verstärker empfangenen Signal sehr gering, jedoch muss es für eine optimale Messung berücksichtigt werden. Auch Kabel sind anfällig für Rauschen und Interferenzen durch externe Störquellen. Durch Abschirmung z.B. separate Messung und rationale Abschätzung des Einflusses könnten sie wahrscheinlich bisschen kompensiert werden und ein besseres Ergebnis zur Verfügung stellen.

Nun betrachten wir die Qualität der Güte von Fit, die einen Wert  $\chi^2_{red} = 242 \gg 1$  ist und mit einer Fitwahrscheinlichkeit von sogar 25% (Das bedeutet dass die Wahrscheinlichkeit so klein ist dass die in Python sogar nicht dargestellt werden kann.). Dies zeigt, dass zukünftige Messungen mit fast 100% Wahrscheinlichkeit zu kleineren mittleren Abständen der Fitkurve von den Messwerten führen würden, was uns die schlechte Zuverlässigkeit der Fitfunktion mitteilt. Auf einer Seite haben wir die Fehler zu konservativ abgeschätzt, da die Fehler im Vergleich zu unseren experimentellen Skalen graphisch fast nicht vernehmbar sind. (siehe Abbildung 8) Auf anderer Seite lässt sich auf die statistische Schwankung zurückführen, da bei manchen Messreihe nur weniger als 100 Messungen durchgeführt wurden, weshalb die große Abweichung der Ausgangsrauschspannung teilweise mit der Zufälligkeit zu tun hat. Im Gegensatz dazu haben wir bei der Näherung der lineare D1-Temperatur Beziehung einen sehr zufriedstellenden  $\chi^2_{red}$  Wert bekommen (0,94), mit einer Fitwahrscheinlichkeit von 55%, dass ein besseres Fit generiert werden könnte. Da der Platin-Widerstand sensibel gegen Temperaturänderung reagiert, ist es eher wahrscheinlicher, dass wir eine explizite Messung erhalten.

Aus der Versuchsanleitung sehen wir:

$$R(T) = R_0(1 + AT + BT^2) \quad (31)$$

wobei  $R_0$ , A und B Konstante sind. Die formel ist also quadratisch. Um aber eine genauere Messung der Temperatur des Pt-widerstands zu erreichen, wäre es sinnvoll, eine Näherungsformel höherer Ordnung in Betracht zu ziehen. Außerdem sollten vielleicht mehr Messpunkte über dem Heizwiderstand aufgenommen werden statt nur 5 Punkten zu betrachten. Um es zeitgünstiger zu gestalten können wir die Messung in einem tiefen Temperaturintervall durchführen, da die Erhitzung bei einem hohen

Temperatur unglaublich viel Aufwand erfordert.

## **5 Anhang**

# Python Code Versuch 243

May 7, 2024

## 0.0.1 Versuch 243 Python Code, Yuting Shi

Python Code 1: Importieren und grafische Darstellung der Messdaten

```
[1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import curve_fit

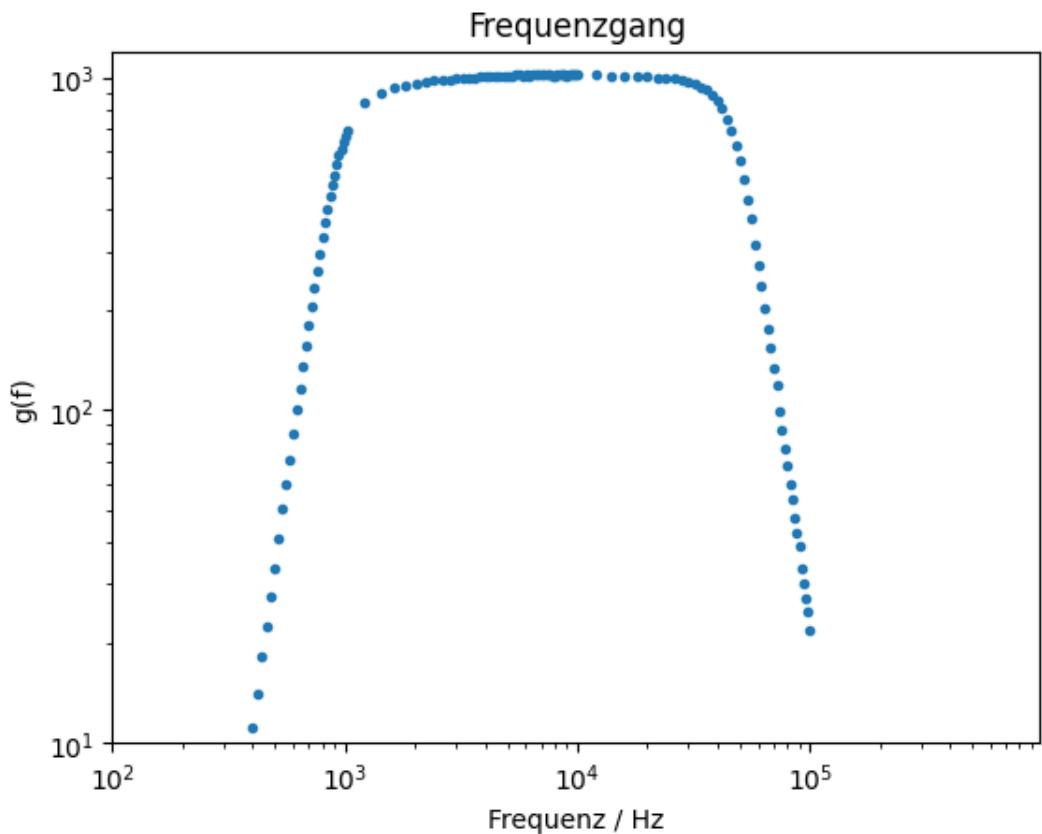
[2]: f, U_aus = np.loadtxt('C:\\\\Users\\\\shiy0\\\\OneDrive\\\\Dokumente\\\\PAP 2.2\\\\Versuch_243\\\\Versuch 243 Shi\\\\Aufgabe 3.txt', skiprows=1, usecols=(0,1), unpack=True)
```

Im nächsten Schritt müssen wir den Frequenzgang berechnen:  $g(f) = (1/D)(U_{aus}/U_{ein})$ , dabei ist  $U_{ein}$  die angelegte effektive Eingangsspannung und  $D$  die Abschwächung des Dämpfungsglieds.

```
[3]: D=1e-3
U_ein=1.7
g=U_aus/(U_ein*D)

plt.loglog(f,g, linestyle='None', marker='.')
plt.xlim(100, 980020)
plt.ylim(10,1200)
plt.xlabel('Frequenz / Hz')
plt.ylabel('g(f)')
plt.title('Frequenzgang')

[3]: Text(0.5, 1.0, 'Frequenzgang')
```



Wir möchten mit einer Funktion das Spektrum darstellen, dabei kann man den Frequenzgang  $g(f)$  ermitteln, indem man den Frequenzgang eines Verstärkers sowie eines Hochpassfilters betrachtet, der von einem Tiefpassfilter  $n$ -ter Ordnung gefolgt wird. (Gl.(13))

```
[4]: def fit_func(f,V,W1,W2,n1,n2):
    return V/(np.sqrt(1+1/(f/W1)**(2*n1))*np.sqrt(1+(f/W2)**(2*n2)))

V=1000      #Verstärkung
W1=1000     #untere Grenzfrequenz
W2=50000    #obere Grenzfrequenz
n1=5        #Fit Ordnung
n2=5

p0 = [1000 , 1000 , 50000 , 5 , 5]  #Startwerte
popt, pcov = curve_fit(fit_func, f[10:-43], g[10:-43],p0=p0)

#Fit Kurve plotten
plt.loglog(f[15:-42],g[15:-42], linestyle='None', marker='.', 
label='Messdaten', color='green')
plt.loglog(f, fit_func(f, *popt), label='Fit', color='orange')
```

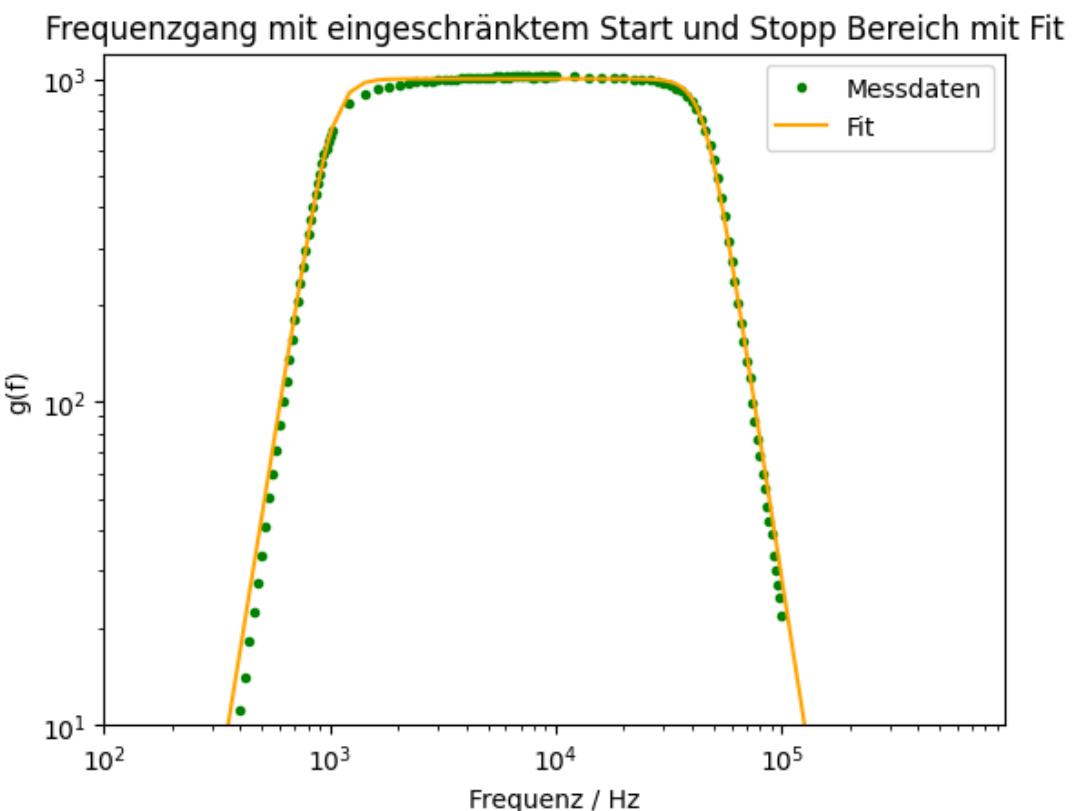
```

plt.xlabel('Frequenz / Hz')
plt.ylabel('g(f)')
plt.title('Frequenzgang mit eingeschränktem Start und Stopp Bereich mit Fit')
plt.legend(loc='best')
plt.xlim(100, 980020)
plt.ylim(10,1200)

print("V =", popt[0], "+/-", pcov[0, 0] ** 0.5)
print("W1 =", popt[1], "+/-", pcov[1, 1] ** 0.5)
print("W2 =", popt[2], "+/-", pcov[2, 2] ** 0.5)
print("n1 =", popt[3], "+/-", pcov[3, 3] ** 0.5)
print("n2 =", popt[4], "+/-", pcov[4, 4] ** 0.5)

```

$V = 1000.722928905629 \pm 2.2802870617360287$   
 $W_1 = 1023.4687155173319 \pm 4.515184679106635$   
 $W_2 = 45409.201838335175 \pm 193.20790536919046$   
 $n_1 = 4.337831802377743 \pm 0.0899214489588496$   
 $n_2 = 4.504702915621464 \pm 0.08354909799417429$



Python Code 2: Aus dem gemessenen Frequenzgang  $g(f)$  ist das Integral zu berechnen

```
[5]: import scipy.integrate as integrate
def fit_func_square(f,V,W1,W2,n1,n2):
    return fit_func(f,V,W1,W2,n1,n2)**2

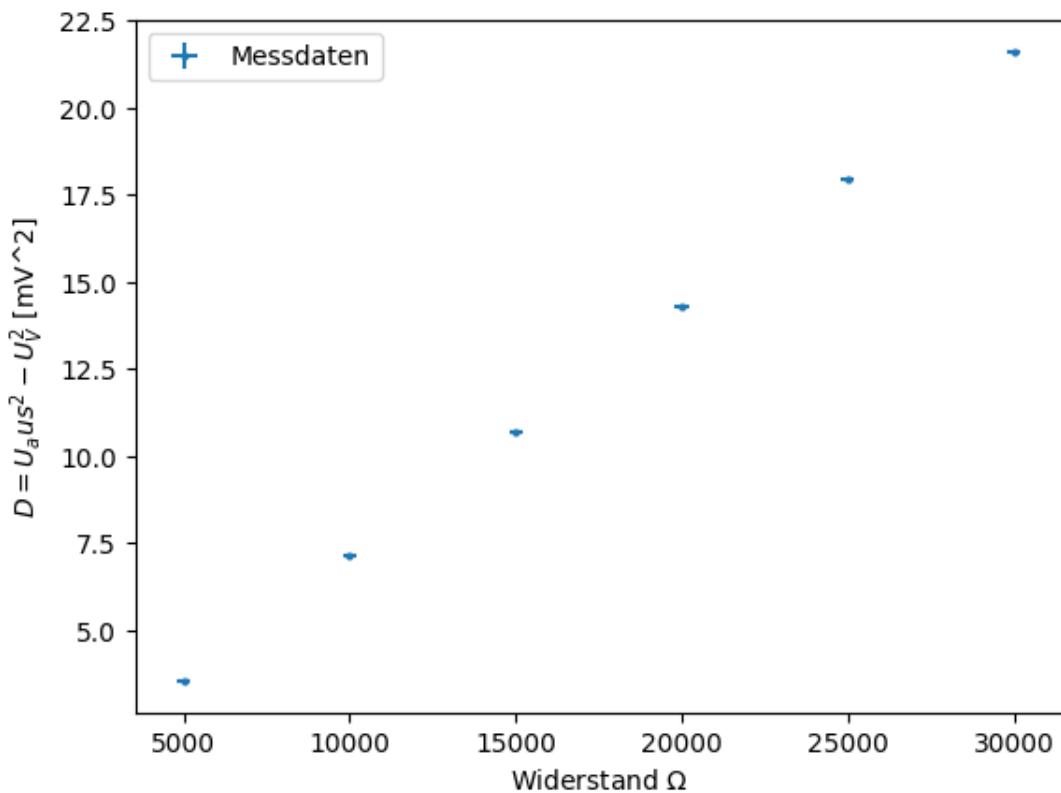
B=integrate.quad(fit_func_square, f[15], f[-43], args=tuple(po))
print('Das Integral betraegt: {value:.4e}'.format(value=B[0]))
```

Das Integral betraegt: 4.5361e+10

Python Code 3: Bestimmung der Boltzmannkonstante

```
[6]: R=np.array([5e3 , 10e3 , 15e3 , 20e3 , 25e3 , 30e3])
R_fehler=0.2e3
U_aus=np.array([2.3095, 2.9870, 3.5329, 4.0073, 4.4449, 4.8354]) #mV
fehler_U_aus=np.array([0.0010, 0.0011, 0.0012, 0.0016, 0.0016, 0.0018]) #mV
U_V=1.3335
fehler_V=0.0006
D=U_aus**2-U_V**2
fehler_D=D*np.sqrt((fehler_U_aus/U_aus)**2+(fehler_V/V)**2)
plt.errorbar(R, D, xerr=R_fehler, yerr=fehler_D, fmt='.', markersize=4, u
             ↓label='Messdaten')
plt.xlabel('Widerstand $\Omega$')
plt.ylabel('$D=U_{aus}^2-U_V^2$ [mV^2]') #Einheit mV^2
plt.legend()
```

[6]: <matplotlib.legend.Legend at 0x188899fd3d0>



Fit Funktion um zu approximieren:

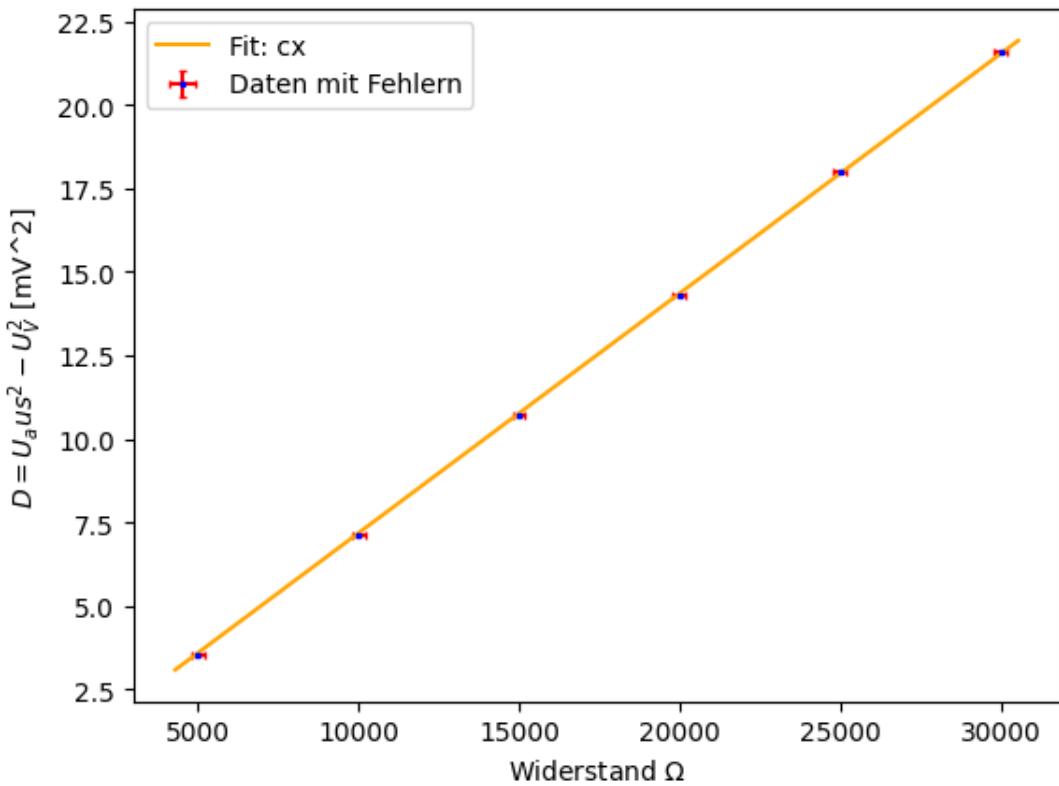
```
[7]: def linear(x,c):
    return c*x

popt, pcov = curve_fit(linear, R, D)

plt.errorbar(R, D, xerr=R_fehler, yerr=fehler_D, color='blue', ecolor='red',
             capsize=1.5, ms=2,fmt='s', label='Daten mit Fehlern')
xfine=np.linspace(4300, 30550, 30)
plt.plot(xfine, linear(xfine, popt),color='orange', label='Fit: cx')
plt.xlabel('Widerstand $\Omega$')
plt.ylabel('$D=U_{\text{aus}}^2-U_V^2$ [mV2]') #Einheit mV2

plt.legend()
print("c =", popt, "+/-", pcov**0.5)
```

c = [0.00071777] +/- [[1.2574236e-06]]



Python Code 4: Güte des Fits

```
[8]: chisquare=np.sum(((linear(R,popt)-D)**2/fehler_D**2))
dof=5 #degrees of freedom
chisquare_red=chisquare/dof
print('chi^2= ', chisquare)
print('chi^2_red=', chisquare_red)
```

```
chi^2= 1213.996413188812
chi^2_red= 242.79928263776242
```

Fitwahrscheinlichkeit" berechnen, dass man bei einer Wiederholungsmessung einen Chi-Quadrat-Wert  $X^2$  erhält, der gleich oder größer ist als der Chi-Quadrat-Wert des aktuellen Fits:

```
[9]: from scipy.stats import chi2
prob=round(1-chi2.cdf(chisquare,dof),2)*100
print("Wahrscheinlichkeit= "+str(prob)+"%)")
```

```
Wahrscheinlichkeit= 0.0%
```

Python Code 5: Temperatur Messung

```

[10]: T=np.array([323.35, 374.81, 425.31, 477.07, 527.83])
dT=0.2
R=np.array([4779.3, 5565.6, 6325.4, 7092.1, 7831.2])
dR=0.3
Uaus=np.array([2.3573, 2.6173, 2.8812, 3.1544, 3.4263])
dUaus=np.array([0.0008, 0.0010, 0.0010, 0.0011, 0.0012])
U_V=1.3335
fehler_V=0.0006
D1=(Uaus**2-U_V**2)/R
fehler_D1=D1*np.sqrt((dUaus/Uaus)**2+(fehler_V/V)**2+(dR/R)**2)

def linear2(T,a,T0):
    return a*(T-T0)

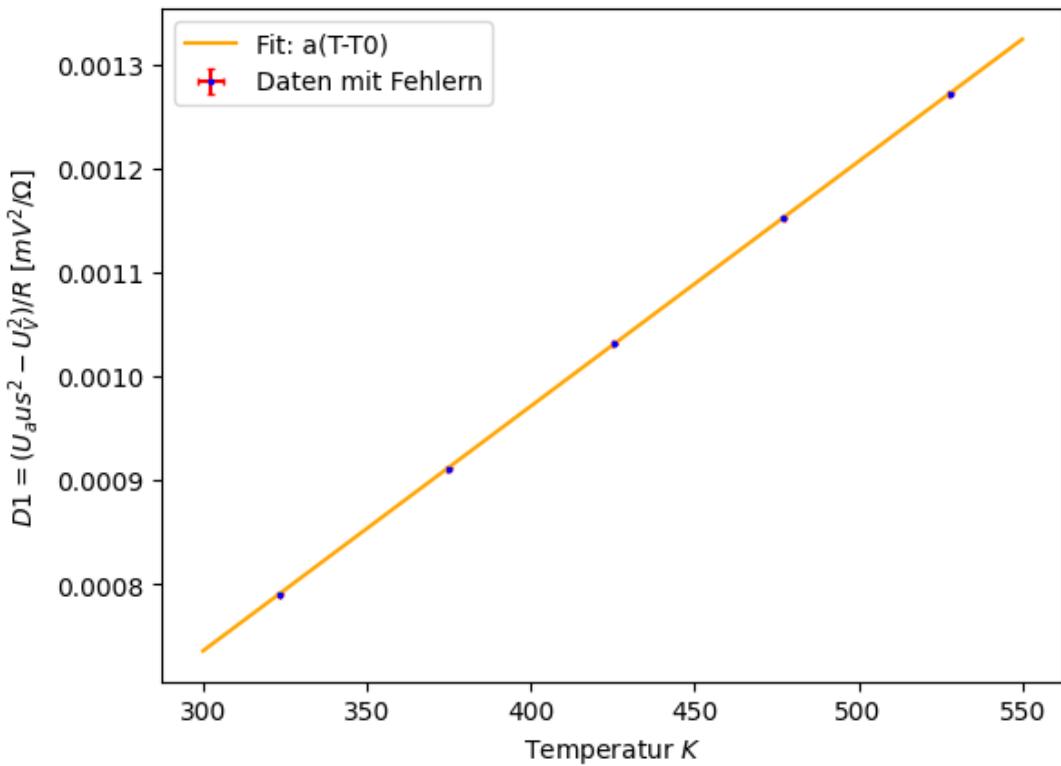
popt, pcov = curve_fit(linear2, T, D1)

plt.errorbar(T, D1, xerr=dT, yerr=fehler_D1, color='blue', ecolor='red', u
    ↪capsize=1.5, ms=2,fmt='s', label='Daten mit Fehlern')
xfine=np.linspace(300, 550, 20)
plt.plot(xfine, linear2(xfine, popt[0], popt[1]),color='orange', label='Fit: u
    ↪a(T-T0)')
plt.xlabel('Temperatur $K$')
plt.ylabel('$D1=(U_{aus}^2-U_V^2)/R$ [$mV^2/\Omega$]')      #Einheit mV^2

plt.legend()
print("a =", popt[0], "+/-", pcov[0][0]**0.5)
print("T0 =", popt[1], "+/-", pcov[1][1]**0.5)

```

a = 2.3545569134030278e-06 +/- 2.7929404221307613e-09  
T0 = -12.410325059037369 +/- 0.5266780092744614



Fitwahrscheinlichkeit

```
[11]: chisquare1=np.sum(((linear2(T, popt[0], popt[1])-D1)**2/fehler_D1**2))
dof=5 #degrees of freedom
chisquare_red1=chisquare1/dof
print('chi^2= ', chisquare1)
print('chi^2_red=', chisquare_red1)

from scipy.stats import chi2
prob=round(1-chi2.cdf(chisquare1,dof),2)*100
print("Wahrscheinlichkeit= "+str(prob)+"%")
```

```
chi^2= 4.689090115960499
chi^2_red= 0.9378180231920998
Wahrscheinlichkeit= 45.0%
```

## **6 Quelle**

- Wagner, J. (April 2022). Physikalisches Praktikum PAP 2.2 für Studierende der Physik [Praktikumsanleitung]. Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg. Abgerufen am 05. April 2024, von [https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/info/Corona/2\\_2\\_2022.pdf](https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/info/Corona/2_2_2022.pdf)