K. Wiegand, T. Stalljohann, T. Witt
Sommersemester 2025
Heidelberg, 15. April 2025

Grundlagen der Geometrie und Topologie

Übungsblatt 1

Stichworte: Mengentheoretische Topologie, Topologische und glatte Mannigfaltigkeiten

---

Zusatzaufgabe 0 *Nützliche Fakten aus der Topologie I* (1+1+1 Bonuspunkte)

a) Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ und eine Teilmenge $Y \subseteq X$ bezeichne $\mathcal{O}|_Y := \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{O}\}$ die Teilraumtopologie von Y bzgl. $(X, \mathcal{O})$. Zeigen Sie, dass für Teilmengen $Z \subseteq Y \subseteq X$ gilt

$$\mathcal{O}|_Z = (\mathcal{O}|_Y)|_Z \ .$$

Zeigen Sie ebenfalls, dass für eine Abbildung $f : \Omega \to X$ von einem topologischen Raum $(\Omega, \mathcal{T})$ nach X mit $f(\Omega) \subseteq Y$ gilt:

$$f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{O}) \text{ stetig } \iff f|^Y : (\Omega, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{O}|_Y) \text{ stetig } .$$

b) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $\mathcal{O}_d$ die zugehörige *metrische Topologie* definiert über

$$\mathcal{O}_d := \{U \subseteq X \mid \forall\, x \in U : \exists\, r > 0 : B_r^d(x) \subseteq U\} \ .$$

Zeigen Sie, dass für eine Teilmenge $Y \subseteq X$ gilt:

$$\mathcal{O}_{d|_{Y\times Y}} = \mathcal{O}_d|_Y \ .$$

c) Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Zeigen Sie

(i) X kompakt $\Longrightarrow f(X)$ kompakt

(ii) X zusammenhängend $\Longrightarrow f(X)$ zusammenhängend

(iii) X wegzusammenhängend $\Longrightarrow f(X)$ wegzusammenhängend

Aufgabe 1 *Nützliche Fakten aus der Topologie II* (2+2 Punkte)

a) Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung von einem kompakten Raum X in den Hausdorff-Raum Y. Zeigen Sie, dass f eine abgeschlossene Abbildung[1] ist. Folgern Sie, dass, wenn f zusätzlich injektiv ist, f eine topologische Einbettung[2] ist.
Hinweis: Benutzen Sie Zusatzaufgabe 0 c) und Aufgabe 2 der Präsenzaufgaben.

[1] d.h. für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ ist $f(A) \subseteq Y$ abgeschlossen

[2] d.h. die Einschränkung von f auf sein Bild ist ein Homöomorphismus, wobei das Bild von f mit der Unterraumtopologie von Y versehen ist

b) Beweisen Sie Lemma 1.5 aus der Vorlesung:

$$\begin{aligned} X \text{ wegzusammenhängend } &\Longrightarrow X \text{ zusammenhängend} \\ X \text{ zusammenhängend und lokal-euklidisch } &\Longrightarrow X \text{ wegzusammenhängend} \end{aligned}$$

Aufgabe 2 *Produkte* (1+1+1+1+1+1+1 Punkte)

a) Seien $(X_1, \mathcal{O}_1)$ und $(X_2, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Topologie auf $X_1 \times X_2$ gibt, sodass

$$\{U_1 \times U_2 \,|\, U_1 \in \mathcal{O}_1\,,\, U_2 \in \mathcal{O}_2\}$$

eine Basis dieser Topologie ist. Wir nennen die so definierte Topologie die *Produkttopologie* von $(X_1, \mathcal{O}_1)$ und $(X_2, \mathcal{O}_2)$.

Zeigen Sie weiterhin

b) Die Projektionen $\pi_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ sind stetig und offene Abbildungen[3].

c) *(Universelle Eigenschaft)* Für jeden topologischen Raum Z und beliebige Abbildungen $f_i : Z \to X_i\,,\, i = 1, 2\,,$ gilt:

$$f_1 \text{ und } f_2 \text{ sind stetig } \iff f_1 \times f_2 : Z \to X_1 \times X_2 \text{ ist stetig}$$

wobei $(f_1 \times f_2)(z) := (f_1(z), f_2(z))$ für $z \in Z$.

d) Sind M_1 und M_2 topologische Mannigfaltigkeiten, so ist $M_1 \times M_2$ mit der Produkttopologie ebenfalls eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim(M_1) + \dim(M_2)$.

e) Sind $(M_1, \mathcal{A}_1)$ und $(M_2, \mathcal{A}_2)$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten, so ist

$$\mathcal{A} := \{(U_1 \times U_2\,,\, (\varphi_1, \varphi_2)) \,|\, (U_1, \varphi_1) \in \mathcal{A}_1\,,\, (U_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}_2\}$$

ein Atlas. Das Produkt $M_1 \times M_2$ zusammen mit dem eindeutigen maximalen Atlas, der $\mathcal{A}$ enthält (siehe Lemma 1.11 aus der VL), heißt *Produktmannigfaltigkeit*.

Gegeben seien nun differenzierbare Mannigfaltigkeiten $(M_1, \mathcal{A}_1)$ und $(M_2, \mathcal{A}_2)$. Im Folgenden betrachten wir die Produktmannigfaltigkeit $M_1 \times M_2$:

f) Man zeige, dass die Projektionen $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ Submersionen[4] sind.

g) Man zeige, dass für einen beliebigen Punkt $p_2 \in M_2$ die Teilmenge $M_1 \times \{p_2\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $M_1 \times M_2$ ist.

Aufgabe 3 *Sphäre* (1+1+2+2+1 Punkte)

Für die n-Sphäre $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ bezeichne $N := (0, \ldots, 0, 1)$ den Nordpol und $S := (0, \ldots, 0, -1)$ den Südpol. Es sei $p_N : U_N := \mathbb{S}^n \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^n$ die *stereografische Projektion vom Nordpol*, die $x \in \mathbb{S}^n \backslash \{N\}$ abbildet auf den eindeutigen Punkt $y \in \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass $(y, 0)$ auf der Gerade liegt, die N mit x verbindet.

a) Zeigen Sie, dass (wie in der VL behauptet) p_N gegeben ist durch

$$p_N(x) = p_N(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}\,(x_1, \ldots, x_n)$$

und beweisen Sie die analoge Formel für die stereografische Projetion p_S vom Südpol. Folgern Sie $p_S(x) = -p_N(-x)$ für $x \in U_S := \mathbb{S}^n \backslash \{S\}\,.$

[3] d.h. Bilder offener Mengen sind offen

[4] Eine Submersion ist eine glatte Abbildung, für die jeder Punkt regulär ist, siehe Def. 1.15.

b) Verifizieren Sie, dass $\mathcal{A} := \{(U_N, p_N)\,,\,(U_S, p_S)\}$ ein Atlas für $\mathbb{S}^n$ ist.
c) Für $i = 1, \ldots, n+1$ betrachte man

$$\begin{aligned} f_i^{\pm} &: \mathbb{R}^n \supseteq B_1(0) \to \mathbb{S}^n \\ y &= (y_1, \ldots, y_n) \mapsto (y_1, \ldots, y_{i-1},\, \pm\sqrt{1-|y|^2}\,, y_{i+1}, \ldots, y_n)\ . \end{aligned}$$

Sei $U_i^{\pm} := f_i^{\pm}(B_1(0))$ das Bild von f_i. Zeigen Sie, dass U_i offen ist (in der Teilraumtopologie von $\mathbb{S}^n$ bzgl. der Standardtopologie von $\mathbb{R}^{n+1}$) und dass

$$\mathcal{A}_1 := \{(U_i, (f_i^+)^{-1})\}_{i=1,\ldots,n+1} \cup \{(U_i, (f_i^-)^{-1})\}_{i=1,\ldots,n+1}$$

ein Atlas für $\mathbb{S}^n$ ist. Zeigen Sie weiterhin, dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_1$ im selben Maximalatlas liegen. (Also sind die induzierten differenzierbaren Strukturen auf $\mathbb{S}^n$ gleich.)
d) $\mathbb{S}^n$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ und die differenzierbare Struktur von $\mathbb{S}^n$, die es als Untermannigfaltigkeit erbt, stimmt mit der von $\mathcal{A}$ (bzw. $\mathcal{A}_1$) induzierten differenzierbaren Struktur überein.
e) Die antipodale Abbildung $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $x \mapsto -x$ ist ein Diffeomorphismus.

Zusatzaufgabe 4 *Torus* (4 Bonuspunkte)

Geben Sie eine endliche Familie an Karten an, die den Torus $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$ überdecken. Versuchen Sie die Anzahl zu minimieren. Ist es möglich, dass eine einzige Karte den Torus überdeckt?

Abgabe bis Dienstag, 22. April 2025, 13:00 Uhr im MaMpf in Zweiergruppen. Abgabe zu dritt ist erlaubt.