UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

K. Wiegand, T. Stalljohann, T. Witt
Sommersemester 2025
Heidelberg, 29. April 2025

Grundlagen der Geometrie und Topologie

Übungsblatt 3

Stichworte: Tangentialräume und Vektorbündel

Aufgabe 1 *Äquivalente Definitionen des Tangentialraums* (1+2+1 Punkte)

a) Bezeichne (wie in der VL) K_pM die Menge der Karten um p und V_pM die Menge der Abbildungen $v : K_pM \to \mathbb{R}^n$ mit

$$v(V,\psi) = J_{\varphi(p)}(\psi \circ \phi^{-1}) \cdot v(U,\varphi) \qquad \forall\,(U,\varphi)\,,\,(V,\psi) \in K_pM\ .$$

Vervollständigen Sie den Beweis aus der VL, dass der (geometrische) Tangentialraum T_pM isomorph ist zu V_pM. (D.h. geben Sie die Umkehrabbildung zu der in der VL angegebenen Abbildung an und überprüfen Sie Linearität.)

b) Finden Sie eine sinnvolle Definition für das Differential einer glatten Abbildung $f : M \to N$ zwischen den zugehörigen *algebraischen* Tangentialräumen. Überprüfen Sie Linearität und die Kettenregel. Bezeichne $T_pf : T_pM \to T_{f(p)}N$ das gewöhnliche (geometrische) Differential und $\mathcal{D}_pf : \mathcal{D}_pM \to \mathcal{D}_pN$ das algebraische Differential. Ferner seien $\Phi_p^M : T_pM \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_pM$ und $\Phi_{f(p)}^N : T_{f(p)}N \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{f(p)}N$ die Isomorphismen aus Satz 2.8 in der VL. Zeigen Sie, dass das folgendende Diagramm kommutiert[1]:

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "T_pf"] \arrow[d, "\Phi_p^M"'] & T_{f(p)}N \arrow[d, "\Phi_{f(p)}^N"] \\ \mathcal{D}_pM \arrow[r, "\mathcal{D}_pf"] & \mathcal{D}_{f(p)}N \end{tikzcd}$$

c) Rechnen Sie Bemerkung iv) aus VL 5 nach: Sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung. In entsprechenden Koordinaten/Karten um $p \in M$ und $q = f(p) \in N$ gilt

$$\mathcal{D}_pf\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right) = \sum_{j=1}^{\dim(N)} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)\ \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_q \quad .$$

Hinweis: Die Rechnung ist analog zu Bemerkung iii) aus VL 5.

---

[1] In der Sprache der Kategorientheorie zeigt dies das Folgende: Seien T und $\mathcal{D}$ die zugehörigen Funktoren von der Kategorie der punktierten Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der $\mathbb{R}$-Vektorräume. Dann ist $(M,p) \mapsto \Phi_p^M$ ein natürlicher Isomorphismus von T nach $\mathcal{D}$.

Aufgabe 2 *Spezielle Tangentialräume* (1+1+1+1+1 Punkte)

a) Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $M \times N$ die Produktmannigfaltigkeit (siehe UB 1). Zeigen Sie, dass $T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_pM \oplus T_qN$ für $p \in M \;\; q \in N$.

b) Sei M eine Mannigfaltigkeit und $N \subseteq M$ eine Untermannigfaltigkeit. Sei $i : N \hookrightarrow M$ die Inklusion und $p \in N$. Zeigen Sie, dass das Differential $D_pi : T_pN \to T_pM$ injektiv ist.

Gemäß Teil b) identifizieren wir deshalb von nun an den Tangentialraum T_pN einer Untermannigfaltigkeit $N \subseteq M$ mittels des Differentials der Inklusion $i : N \hookrightarrow M$ mit dem Unterraum $Di_p(T_pN) \subseteq T_pM$.

c) Sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung mit regulärem Wert $q \in N$. Sei $S := f^{-1}(q) \subseteq M$ die zugehörige Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie $T_pS = \ker(D_pf)$, wobei wir T_pS als Unterraum von T_pM auffassen, siehe Teil b).

d) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatt mit regulärem Wert $c \in \mathbb{R}$ und $S := f^{-1}(c)$ die zugehörige Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass T_pS gerade das orthogonale Komplement (bzgl. des Standard-Skalarproduktes) des Gradienten $\nabla f(p) \in \mathbb{R}^n$ ist, wobei wir T_pS als Unterraum von $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ auffassen.

e) Sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung und

$$\mathrm{Gr}(f) := \Big\{(p, f(p)) \,\Big|\, p \in M\Big\} \subseteq M \times N$$

der zugehörige Graph. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gr}(f)$ eine Untermannigfaltigkeit von $M \times N$ ist und bestimmen Sie den Tangentialraum.

Aufgabe 3 *Vektorbündel* (2+2 Punkte)

Im Folgenden sei $\pi : E \to B$ eine surjektive glatte Abbildung und auf jeder Faser $E_p := \pi^{-1}(p)$ sei eine Vektorraum-Struktur fixiert. Ferner sei $n = \dim(E_p)$ unabhängig von $p \in B$. Eine Familie $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ von n faserweise linear unabhängigen Schnitten

$$e_j : U \to E|_U := \pi^{-1}(U) \quad , \; j = 1, \ldots, n \; .$$

heißt *(lokaler) Rahmen über* U.

a) Zeigen Sie, dass es eine natürliche Bijektion zwischen Rahmen $\mathbf{e}$ über U und Trivialisierungen $\Phi : E|_U \to U \times \mathbb{R}^n$ über U gibt. Folgern Sie, dass (E, π) (mit der gegebenen Familie an Vektorraum-Strukturen) genau dann ein Vektorbündel ist, wenn es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von B gibt, sodass für jedes $i \in I$ ein Rahmen von E über U_i existiert.

Nun sei $\pi : E \to B$ eine surjektive Abbildung auf eine glatte Mannigfaltigkeit B. Ferner sei für jedes $p \in B$ eine Vektorraum-Struktur auf $E_p := \pi^{-1}(p)$ gegeben, die E_p zu einem n-dimensionalen Vektorraum macht, sowie folgende weitere Daten:

(i) Eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von B.

(ii) Eine Familie $(\Phi_i)_{i \in I}$ von bijektiven Abbildungen $\Phi_i : E|_{U_i} := \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^n$ mit $\mathrm{pr}_1 \circ \Phi_i = \pi|_{U_i}$, die faserweise lineare Isomorphismen $E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^n \;\; p \in U_i$, sind.

(iii) Eine Familie $(g_{ij})_{i,j}$ (mit Indexmenge den Tupeln $(i, j) \in I \times I$ mit $U_i \cap U_j \neq \varnothing$) von Abbildungen $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, sodass

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}(p, v) = (p\, , \, g_{ij}(p) \cdot v) \qquad \forall p \in U_i \cap U_j \, , \, v \in \mathbb{R}^n \; .$$

b) Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Topologie und glatte Struktur auf E gibt, sodass (π, E) (mit der gegebenen Vektorraumstruktur) ein Vektorbündel mit Trivialisierungen $(U_i\, , \, \Phi_i)_{i \in I}$ ist.

Zusatzaufgabe 4 *Vektorbündel II* (2+2 Bonuspunkte)

Benutzen Sie das *Vektorbündel-Konstruktions-Lemma* (Aufgabe 3 b)), um Folgendes nachzuweisen:

a) Gegeben seien Vektorbündel $\pi_1 : E_1 \to B$ und $\pi_2 : E_2 \to B$. Die *Whitney-Summe* $E_1 \oplus E_2 := \amalg_{p \in B} (E_1)_p \oplus (E_2)_p$ ist in natürlicher Weise ein Vektorbündel über B (mit Faser $(E_1)_p \oplus (E_2)_p$ über $p \in B$).

b) Sei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2$ definiert über

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x' = x + n \text{ und } y' = (-1)^n y \text{ für ein } n \in \mathbb{Z} .$$

Sei $M := \mathbb{R}^2 / \sim$ der Quotientenraum. Die Projektion auf die erste Komponente induziert eine Surjektion $\pi : M \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$. Zeigen Sie, dass (π, M) ein Vektorbündel über dem Kreis $\mathbb{S}^1$ ist, das sogenannte *Möbiusbündel.*

Zusatzaufgabe 5 *Tangentialbündel der Sphären* (2+2 Bonuspunkte)

Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}^1$ ein triviales Tangentialbündel hat. Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}^2$ kein triviales Tangentialbündel hat. (Für Letzteres recherchieren Sie zum „Satz vom Igel”, den Sie unbewiesen zitieren dürfen.)

Abgabe bis Dienstag, 6. Mai 2025, 13:00 Uhr im MaMpf in Zweiergruppen. Abgabe zu dritt ist erlaubt.