UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

K. Wiegand, T. Stalljohann, T. Witt
Sommersemester 2025
Heidelberg, 20. Mai 2025

Grundlagen der Geometrie und Topologie

Übungsblatt 6

Stichworte: Lie-Gruppen, Exponentialabbildung

Aufgabe 1 *Trotter-Produktformel* (1+2+1+1 Punkte)

Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g} = T_eG$ und Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$. Zeigen Sie:

a) Es gibt Umgebungen $\mathcal{U} \subset \mathfrak{g}$ von 0 und $exp(\mathcal{U}) \subset G$ von e, so dass $\exp : \mathcal{U} \longrightarrow \exp(\mathcal{U})$ ein Diffeomorphismus ist.

b) Zu vorgegebenen $X, Y \in \mathfrak{g}$ gibt es eine glatte Funktion $Z : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^d$, so dass

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp\Big(t(X+Y) + t^2 Z(t)\Big) \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$$

(*Tipp: Zu jeder glatten Funktion $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^d$ mit $\phi(0) = 0$ gibt es eine glatte Funktion φ, so dass $\phi(t) = t \cdot \varphi(t)$*)

c) In der Situation von b) haben wir bei festem $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ punktweise Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \left(\exp\left(\frac{t}{n}X\right) \exp\left(\frac{t}{n}Y\right)\right)^n = \exp\Big(t(X+Y)\Big)$$

d) Sei $H \subset G$ eine abgeschlossene Teilmenge, die zugleich (im algebraischen Sinne) eine Untergruppe von G ist. Dann ist die Menge

$$\mathfrak{h} = \Big\{ X \in \mathfrak{g} \,\Big|\, \exp(tX) \in H \;\; \forall t \in \mathbb{R} \Big\}$$

ein linearer Unterraum von $\mathfrak{g}$.

Aufgabe 2 *Automatische Abgeschlossenheit* (3 Punkte)

Sei G eine Lie-Gruppe und $H \subset G$ eine **eingebettete** Lie-Untergruppe (d.h. eine eingebettete Untermannigfaltigkeit, die im algebraischen Sinne eine Untergruppe von G ist).
Zeigen Sie, dass H als Teilmenge von G abgeschlossen ist.

(*Tipp: Die Identität $h_i h_j^{-1} = (h_i\, g^{-1}) \cdot (h_j\, g^{-1})^{-1}$ könnte nützlich sein.*)

In den folgenden Aufgaben benötigen wir den Begriff der *(Links-)Wirkung einer Lie-Gruppe G auf einer Mannigfaltigkeit M*. Dies ist eine glatte Abbildung $G \times M \longrightarrow M, (g, m) \longmapsto g \cdot m$, welche die algebraischen Relationen $g_1 \cdot (g_2 \cdot m) = (g_1 g_2) \cdot m$ und $e \cdot m = m$ erfüllt.

Wir nennen die Wirkung *transitiv*, wenn es für alle $p, q \in M$ ein $g \in G$ mit $p = g \cdot q$ gibt.

Eine Abbildung $F : M_1 \longrightarrow M_2$ heißt *äquivariant* bzgl. der jeweiligen Gruppenwirkungen, falls $F(g \cdot \bullet) = g \cdot F(\bullet)\ \forall g \in G$.

Aufgabe 3 *Äquivariante Abbildungen und konstanter Rang* (2+2 Punkte)

Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und G eine Lie-Gruppe.

a) Sei $F : N \longrightarrow M$ eine glatte Abbildung, welche äquivariant bzgl. einer transitiven G-Wirkung auf N und einer beliebigen G-Wirkung auf M ist.
Beweisen Sie: Die Abbildung F hat konstanten Rang.

b) Zeigen Sie, dass für eine beliebige Gruppenwirkung von G auf M gilt:
Die zu $p \in M$ assoziierte Orbitabbildung $\iota_p : G \longrightarrow M$, $g \longmapsto g \cdot p$ hat konstanten Rang.
Schlussfolgern Sie daraus:
Die zu $p \in M$ assoziierte Stabilisatorgruppe

$$G_p := \left\{ g \in G \,\middle|\, g \cdot p = p \right\}$$

ist eine eingebettete Untermannigfaltigkeit (und somit eine Lie-Untergruppe) von G.
(*Tipp: Rangsatz/Constant Rank Theorem*)

Aufgabe 4 *Quotienten unter Liegruppenwirkung* (4 Punkte)

Recherchieren Sie die Begriffe 'freie' und 'eigentliche' Gruppenwirkung ('free and proper group action'). Zeigen Sie: Wirkt eine Lie-Gruppe G frei und eigentlich auf einer Mannigfaltigkeit M, so trägt der Quotient $M/G = M/_{m \sim g \cdot m}$ eine differenzierbare Struktur, welche die Projektionsabbildung $\pi : M \longrightarrow M/G$ zu einer Submersion macht.

(*Tipp: Sie dürfen ohne Beweis das Godement-Kriterium ÜB2 Aufgabe 2 benutzen.*)

Abgabe bis Dienstag, 27. Mai 2025, 13:00 Uhr im MaMpf in Zweiergruppen. Abgabe zu dritt ist erlaubt.