UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

K. Wiegand, T. Stalljohann, T. Witt
Sommersemester 2025
Heidelberg, 18. April 2025

Grundlagen der Geometrie und Topologie

Präsenzaufgaben 14.–17. April 2025

Stichworte: Wiederholung: Mengentheoretische Topologie

Aufgabe 1 *Teilraum-Topologie*

a) Sei $(M, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Sei $X \subset M$ eine beliebige Teilmenge und $\mathcal{O}_X$ die Teilraum-Topologie, d.h. für eine Teilmenge $V \subset X$ gilt $V \in \mathcal{O}_X$ genau dann, wenn es ein $U \in \mathcal{O}$ gibt, so dass $V = X \cap U$. Zeigen Sie, dass dies in der Tat eine Topologie auf X definiert.

b) Sei $\mathcal{O}$ die gewöhnliche Topologie auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, die auf $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ induzierte Teilraum-Topologie stimmt mit der gewöhnlichen Topologie von $\mathbb{R}$ überein.

Aufgabe 2 *Kompaktheit*

a) Sei M ein kompakter topologischer Raum. Zeigen Sie, dass alle abgeschlossenen Teilmengen von M kompakt sind.
b) Sei M ein Hausdorff-Raum. Zeigen Sie, dass alle kompakten Teilmengen von M abgeschlossen sind.
c) Finden Sie ein Beispiel für einen topologischen Raum, welcher nicht Hausdorffsch ist, in dem nicht alle kompakten Teilmengen abgeschlossen sind.

Aufgabe 3 *Z-Zusammenhang*

Sei Z ein zusammenhängender topologischer Raum. Wir sagen M ist Z-zusammenhängend, falls für jedes Paar $x, y \in M$ eine stetige Abbildung $\phi : Z \to M$ mit $x, y \in \phi(Z)$ gibt.

a) Zeigen Sie, dass Z-zusammenhängende Mengen zusammenhängend sind.

Für $Z = [0, 1]$ erhalten wir auf diese Weise den Begriff des Wegzusammenhangs zurück.

b) Gibt es ein zusammenhängendes Z, so dass Wegzusammenhang nicht dasselbe ist wie Z-Zusammenhang?