UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

K. Wiegand, T. Stalljohann, T. Witt
Sommersemester 2025
Heidelberg, 3. Juni 2025

Grundlagen der Geometrie und Topologie

Übungsblatt 8

Stichworte: Differentialformen und deRham-Kohomologie

Aufgabe 1 *Distributionen und duale 1-Formen* (1+2+2+1 Punkte)
Eine k-dimensionale Distribution auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine Familie $\mathcal{D} = \bigsqcup_{p \in M} \mathcal{D}_p$ von Unterräumen $\mathcal{D}_p \subset T_pM$, so dass man auf hinreichend kleinen Umgebungen $U \subset M$ glatte, punktweise linear unabhängige Vektorfelder findet mit

$$\mathcal{D}_p = span(X_1(p), ..., X_k(p)) \quad \forall p \in U$$

Die Distribution heißt *involutiv*, wenn für Vektorfelder mit $Y(p), Z(p) \in \mathcal{D}_p \, \forall p \in M$ stets $[Y, Z](p) \in \mathcal{D}_p \, \forall p \in M$ gilt.

a) Seien Y, Z Vektorfelder und $\alpha \in \Omega^1(M)$ eine 1-Form. Zeigen Sie, dass sich die äußere Ableitung $\mathrm{d}\alpha = \partial_i \alpha_j(x) \, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$ berechnen lässt als

$$\mathrm{d}\alpha(Y, Z) = Y\alpha(Z) - Z\alpha(Y) - \alpha([Y, Z])$$

b) Sei $\mathcal{D} \subset TM$ eine k-dimensionale Distribution auf einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Zeigen Sie: Auf hinreichend kleinen Umgebungen $U \subset M$ kann man **glatte**, punktweise linear unabhängige 1-Formen $\alpha_1, ..., \alpha_{m-k} \in \Omega^1(U)$ finden, so dass

$$\mathcal{D}_p = \ker \alpha_1(p) \cap ... \cap \ker \alpha_{m-k}(p) \;\; \forall \, p \in U$$

c) Sei $\alpha \in \Omega^1(M)$ eine nirgends verschwindende 1-Form. Zeigen Sie, dass für die $(k = m-1)$-dimensionale Distribution $\mathcal{D} = \ker \alpha$ gilt:

$$\mathcal{D} \text{ involutiv} \iff \alpha \wedge \mathrm{d}\alpha = 0$$

d) Eine (k=m-1)-dimensionale Distribution wird auch als *Hyperebenenfeld* bezeichnet. Im Allgemeinen haben wir Darstellungen der Form $\mathcal{D} = \ker \alpha_U$ nur lokal mit $\alpha_U \in \Omega^1(U)$ über Umgebungen $U \subset M$. Zeigen Sie:

Es gibt eine global def. 1-Form $\alpha \in \Omega^1(M)$ mit $\mathcal{D} = \ker \alpha$	$\iff$	Es gibt ein Vektorfeld X auf M, so dass $\forall \, p \in M : \; X(p) \notin \mathcal{D}_p$

In diesem Fall nennen wir das Hyperebenenfeld $\mathcal{D}$ *koorientierbar*.
(*Tipp: Partition der Eins wie auf ÜB5 definiert*)

Aufgabe 2 *Nach Cartan benannte Aussagen* (1+2+1 Punkte)

Sei M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

a) *(Cartans magische Formel)* Für die Lie-Ableitung einer Differentialform $\alpha \in \Omega^p(M)$ nach einem Vektorfeld X gilt
$$\mathcal{L}_X \alpha = \mathrm{d}(\iota_X \alpha) + \iota_X \, \mathrm{d}\alpha$$

b) Sei $X_1, ..., X_m$ ein glatter Rahmen über einer Umgebung $U \subset M$ (d.h. eine Familie von glatten Vektorfeldern, die an jedem Punkt $p \in U$ eine Basis von T_pM bilden) und $\theta_1, ..., \theta_m \in \Omega^1(U)$ ein dazu dualer Rahmen für das Kotangentialbündel T^*M, der $\theta^i(X_j) = \delta^i_j$ erfüllt. Dann treten in
$$[X_i, X_j] = c^k_{ij} \, X_k \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\theta^k = -\frac{1}{2} c^k_{ij} \, \theta^i \wedge \theta^k$$
die gleichen Koeffizienten $c^k_{ij} \in C^\infty(U)$ auf. *(Hinweis: Wir verwenden stets die Summenkonvention, d.h. über doppelt auftretende Indizes wird summiert.)*

c) *(Maurer-Cartan-Strukturformel)* Sei $M = G$ nun speziell eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g} = T_eG$ sowie $X_1, ..., X_m$ ein (globaler) linksinvarianter Rahmen für TG und $\theta^1, ..., \theta^m \in \Omega^1(G)$ der dazu duale Rahmen für T^*G. Dann definiert
$$\theta := X_i(e) \otimes \theta^i \in \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^1(G)$$
eine von der Wahl des (linksinvarianten) Rahmens unabhängige, Lie-Algebra-wertige 1-Form auf G, so dass
$$\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta] = 0$$
(Auf $\mathfrak{g} \otimes \Omega^\bullet(G)$ definiert man $[v \otimes \alpha, w \otimes \beta] = [v, w] \otimes \alpha \wedge \beta$ und $d(v \otimes \alpha) = v \otimes d\alpha$)

Aufgabe 3 *DeRham-Kohomologie und Homotopieinvarianz* (2+2+1+1 Punkte)

Seien $F_0, F_1 : M \longrightarrow N$ glatte Abbildungen zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Unter einer glatten Homotopie zwischen F_0 und F_1 verstehen wir eine glatte Abb. $H : (-\epsilon, 1+\epsilon) \times M \longrightarrow N$ mit $\epsilon > 0$ beliebig, so dass $H(0, \cdot) = F_0$ und $H(1, \cdot) = F_1$. Gibt es eine solche Homotopie so schreiben wir (im Rahmen dieser Aufgabe) "$F_0 \overset{H}{\Longrightarrow} F_1$". Im Folgenden betrachten wir zunächst zu jedem $t \in I = (-\epsilon, 1+\epsilon)$ die Inklusion $i_t : M \longrightarrow I \times M, \ q \longmapsto (t, q)$.

a) Zeigen Sie: Es gibt eine Folge von $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen
$$h = h_p : \Omega^{p+1}(I \times M) \longrightarrow \Omega^p(M), \ p \geq 0$$
so dass für jedes $\omega \in \Omega^{p+1}(I \times M)$ gilt: $i_1^*\omega - i_0^*\omega = d\,h(\omega) \, + \, h(\mathrm{d}\omega)$
(Tipp: Betrachten Sie auf $I \times M \ni (s, q)$ das Vektorfeld $X(s, p) = \frac{\partial}{\partial s}$ und untersuchen Sie den Ausdruck $\int_0^1 dt \Big[i_t^*[\iota_X \omega] \Big] \in \Omega^p(M)$. Ohne Beweis Dürfen Sie verwenden, dass für den von Y auf einer Mfkt. W erzeugten Fluss $\Psi_t : M \longrightarrow M$ die punktweise Formel $\frac{d}{dt}\Big[\Psi_t^* \alpha\Big] = \Psi_t^* \Big[\mathcal{L}_Y \alpha\Big]$ gilt.)

Wegen $d^2 = 0$ haben wir wohldefinierte Vektorräume $H^p_{dR}(M) := \frac{ker[d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)]}{d(\Omega^{p-1}(M))}$.
Elemente von $Z^p(M) := ker[d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)]$ heißen *geschlossene* und Elemente von $B^p(M) := d(\Omega^{p-1}(M))$ *exakte* Differentialformen.

b) Zeigen Sie: $H^1_{dR}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \neq 0$
(Tipp: Wählen Sie eine geeignete 1-Form $\alpha = \alpha_1(x, y)dx + \alpha_2(x, y)dy$ mit $d\alpha = 0$ und integrieren Sie diese längs eines Pfades $\gamma : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, um zu zeigen, dass α nicht exakt ist.)

c) Seien $F_0, F_1 : M \longrightarrow N$ durch eine glatte Homotopie $F_0 \overset{H}{\Longrightarrow} F_1$ verknüpft. Folgern Sie aus Teil a), dass die induzierten Abbildungen

$$F_i^* : H^p_{dR}(N) \longrightarrow H^p_{dR}(M),\ [\omega] \longmapsto [F_i^*\omega]$$

für $i = 0, 1$ übereinstimmen.

d) *(Poincaré-Lemma)* Seien $p, n \geq 1$. Zeigen Sie, dass $H^p_{dR}(\mathbb{R}^n) = 0$
(Tipp: Finden Sie eine Homotopie mit $H(0, \cdot) = id_{\mathbb{R}^n}$ and $H(1, \cdot) = 0$ und benutzen Sie Teil c).)

Abgabe bis Dienstag, 10. Juni 2025, 13:00 Uhr im MaMpf in Zweiergruppen. Abgabe zu dritt ist erlaubt.