UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

K. Wiegand, T. Stalljohann, T. Witt
Sommersemester 2025
Heidelberg, 17. Juni 2025

Grundlagen der Geometrie und Topologie

Übungsblatt 10

Stichworte: Orientierung und Fundamentalgruppe

Aufgabe 1 *Orientierungsverlust durch zu viele Teilaufgaben* (1+1+1+1+1+1+1+1 Punkte)
Sei M im Folgenden stets eine zusammenhängende m-Mannigfaltigkeit. Beweisen Sie

a) M ist orientierbar genau dann wenn es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von M und eine Familie $(\mathbf{X}^i)_{i\in I} = ((X_1^i, \dots, X_m^i))_{i\in I}$ von Rahmen[1] über U_i , $i \in I$, gibt, sodass

$$\mathbf{X}^i(p) \sim \mathbf{X}^j(p) \qquad \forall\, i, j \in I\,,\ p \in U_i \cap U_j\ .$$

(∼ bezeichent, wie in der VL, die Gleichorientiertheit von Vektorraumbasen.)

b) Es gibt entweder keine oder genau zwei Orientierungen auf M.

c) Sei angenommen, dass es Rahmen $(U, \mathbf{X})$ und $(V, \mathbf{Y})$ auf M über zusammenhängenden offenen Mengen U und V gibt sowie $p_1, p_2 \in U \cap V$ mit $\mathbf{X}(p_1) \sim \mathbf{Y}(p_1)$ und $\mathbf{X}(p_2) \not\sim \mathbf{Y}(p_2)$. Dann ist M nicht orientierbar.

d) Seien $V_1, V_2 \subseteq V$ Untervektorräume eines endlich-dimensionalen Vektorraums V mit $V_1 \oplus V_2 = V$. Orientierungen auf V_1 und V_2 induzieren eine Orientierung auf V und umgekehrt induzieren Orientierungen auf V_1 und V eine Orientierung auf V_2 .

e) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ eine Untermannigfaltigkeit. Dann ist M orientierbar genau dann wenn es ein glattes Vektorfeld Y entlang von M [2] gibt, sodass $\|Y(p)\| = 1$ und $Y(p) \perp T_pM$ für alle $p \in M$.[3]

f) Sei M orientiert und N eine weitere orientierte Mannigfaltigkeit. Sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung mit regulärem Wert $c \in N$. Dann trägt $f^{-1}(c)$ eine natürliche Orientierung.

g) Beweisen Sie Satz 6.7 aus der VL: Ist M orientierbar und $\tau : M \to M$ eine fixpunktfreie Involution, dann ist M/τ genau dann orientierbar, wenn τ orientierungserhaltend ist.[4]

---

[1] Erinnerung: Ein Rahmen $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ von TM über $U \subseteq M$ ist eine Familie von Vektorfeldern, sodass $(X_1(p), \dots, X_m(p))$ eine Basis für T_pM ist für jedes $p \in U$.

[2] d.h. Y ist ein Schnitt des Pullback-Bündels $T\mathbb{R}^{m+1}|_M \to M$

[3] Das Skalarprodukt ist das euklidische Skalarprodukt und die Norm die vom euklidischen Skalarprodukt induzierte Norm.

[4] Analog zeigt man folgende Verallgemeinerung: Ist $\Phi : G \times M \to M$ eine freie und eigentliche glatte Gruppenwirkung einer diskreten Lie-Gruppe G auf der orientierbaren, zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M, so ist die Quotientenmannigfaltigkeit M/G genau dann orientierbar, wenn $\Phi(g, \cdot\,) : M \to M$ orientierungserhaltend ist für alle $g \in G$.

h) Der Totalraum $M = \mathbb{R}^2/\sim$ des Möbiusbündels (siehe Zusatzaufgabe 4 auf UB 3) ist nicht orientierbar.

Aufgabe 2 *Basispunktwechsel bei Fundamentalgruppe* (1+1+1+2+2+1 Punkte)
Gegeben ein topologischer Raum X und $x_0, x_1 \in X$ sowie ein stetiger Pfad $p : [0,1] \to X$ von x_0 nach x_1. Bezeichne mit $p^- : [0,1] \to X$, $p^-(t) := p(1-t)$, den inversen Pfad. Definiere $h_p : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$ durch $h_p([\gamma]_{x_1}) := [(p \star \gamma) \star p^-]_{x_0}$.

a) Zeigen Sie, dass dies ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist.

Zeigen Sie weiterhin

b) Für einen weiteren Pfad $p' : [0,1] \to X$ mit $p'(0) = x_1$ gilt $h_{p \star p'} = h_p \circ h_{p'}$.
c) Ist $p' : [0,1] \to X$ ein weiterer Pfad mit $p \simeq p'$ rel $\{0,1\}$, dann gilt $h_p = h_{p'}$.

Folgern Sie aus Teil a) und b), dass h_p ein Isomorphismus ist. Insbesondere ist die Fundamentalgruppe eines wegzusammenhängenden topologischen Raums bis auf Isomorphie unabhängig vom Basispunkt.

d) Für eine Gruppe G und $a \in G$ bezeichne $\mathrm{int}_a : G \to G$ die Konjugation mit a, d.h. $\mathrm{int}_a(g) := aga^{-1}$. Sei nun $p' : [0,1] \to X$ ein weiterer Pfad mit $p'(0) = x_0$ und $p'(1) = x_1$. Zeigen Sie, dass es ein $a \in \pi_1(X, x_0)$ gibt mit $\mathrm{int}_a \circ h_p = h_{p'}$.
e) Bezeichne $[\mathbb{S}^1, X]$ die *freie Homotopiegruppe* von X.[5] Auf $\pi_1(X, x_0)$ betrachten wir die Gruppenwirkung durch Konjugation

$$\pi_1(X,x_0) \times \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_0)\,, \quad ([p]_{x_0}\,,\,[\gamma]_{x_0}) \mapsto h_p([\gamma]_{x_0}) = [p]_{x_0} \cdot [\gamma]_{x_0} \cdot [p]_{x_0}^{-1}\,.$$

Zeigen Sie, dass die kanonische Abbildung $\pi_1(X, x_0) \to [\mathbb{S}^1, X]$, $[\gamma]_{x_0} \mapsto [\gamma]$ durch den Quotienten der Gruppenwirkung faktorisiert, d.h. eine wohldefinierte Abbildung

$$\pi_1(X,x_0)/\pi_1(X,x_0) \to [\mathbb{S}^1, X]$$

induziert.

Für den nächsten Aufgabenteil dürfen Sie den folgenden Fakt verwenden: Gegeben eine Homotopie $H : Y \times [0,1] \to X$ und fixes $y_0 \in Y$. Definiere den Pfad $p : [0,1] \to X$, $p(t) := H_t(y_0) = H(y_0, t)$. Dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(X, H_1(y_0)) \arrow[dd, "h_p"] \\
\pi_1(Y, y_0) \arrow[ur, "\pi_1(H_1)"] \arrow[dr, "\pi_1(H_0)"'] & \\
 & \pi_1(X, H_0(y_0))
\end{tikzcd}$$

f) Sei $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz[6] und $x_0 \in X$. Dann ist

$$\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$$

ein Isomorphismus.

[5]Dies ist die Menge der Äquivalenzklassen von Schleifen nach X, wobei zwei Schleifen $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{S}^1 \to X$ äquivalent sind, wenn es eine Homotopie $H : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to X$ gibt mit $H_0 = \gamma_1$ und $H_1 = \gamma_2$. (Bemerke: Hier gibt es keine Bedinungen an die Schleifen sowie Homotopien, wohin der Basispunkt von $\mathbb{S}^1$ nach X abgebildet werden muss.)
[6]d.h. f ist stetig und es gibt eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ mit $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$

Zusatzaufgabe 3 *Fundamentalgruppe der Sphären* (1+3 Bonuspunkte)

a) Sei $F : M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten M und N mit $\dim(M) < \dim(N)$. Folgern Sie mit Sards Theorem, dass F nicht surjektiv ist.

Für den nächsten Aufgabenteil dürfen Sie verwenden: Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$ ein Punkt. Die kanonische Abbildung

$$\pi_1^\infty(M,p) \to \pi_1(M,p)\,, \quad [\gamma]_p^\infty \mapsto [\gamma]_p$$

von der *glatten Fundamentalgruppe*[7] $\pi_1^\infty(M,p)$ in die Fundamentalgruppe ist nach Whitneys-Approxitionssatz ein Isomorphismus.

b) Zeigen Sie, dass für $n > 1$ die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{S}^n)$ der n-Sphäre trivial ist.
Hinweis: Benutzen Sie Teil a) und $\mathbb{S}^n - \{\text{pt.}\} \cong \mathbb{R}^n$.

Abgabe bis Dienstag, 24. Juni 2025, 13:00 Uhr im MaMpf in Zweiergruppen. Abgabe zu dritt ist erlaubt.

[7] die Gruppe der Äquivalenzklassen von glatten Schleifen $(\mathbb{S}^1, *) \to (M,p)$; wobei zwei Schleifen äquivalent seien, wenn es eine glatte Homotopie $(\mathbb{S}^1 \times [0,1], \{*\} \times [0,1]) \to (M,p)$ zwischen ihnen gibt