

# Physikalisches Anfängerpraktikum II

## Sommersemester 2023

Versuch 255

Tutor: Ann-Cathrin Böttinger

### Röntgenspektrometer

## 1 Einleitung

### 1.1 Ziel des Versuchs

In diesem Experiment sollen wir den Röntgenspektrometer besser kennenlernen sowie seine Funktionsprinzip und praktische Anwendungen beherrschen, indem wir uns mit LiF-Kristall und NaCl-Kristall beschäftigen. Es wurde mithilfe eines LiF-Kristalls das Röntgenspektrum einer Molybdän-Anode aufgezeichnet, um aus dem kurzweligen Ende ist die Planck'sche Konstante  $h$  abzuschätzen. Die Reflexionswinkel der  $K_{\alpha}$ - und  $K_{\beta}$ -Linien sollen für die erste und zweite Ordnung gemessen sowie deren Wellenlänge bestimmt werden. Dies ermöglicht auch die Messung der Intensität der Röntgenstrahlen in Abhängigkeit von der Hochspannung und weitere Bestimmung von Planckschen Konstante durch die Einsatzspannung. Anschließend soll die Reflexionswinkel der  $K_{\alpha}$ - und  $K_{\beta}$ -Linien für die ersten und zweiten Ordnung unter Verwendung eines NaCl-Kristalls bestimmt werden. Dies ermöglicht die Berechnung stoffspezifischer Größen und schließlich die Ermittlung der Avogadro-Konstante.



Abbildung 1: Versuchsaufbau

### 1.2 Das Bohrsche Atommodell

Das Bohrsche Atommodell, entwickelt von Niels Bohr im Jahr 1913, beschreibt das Atom als ein System, in dem Elektronen auf diskreten Bahnen um den räumlich festen, positiv geladenen Atomkern kreisen. Diese Bahnen, oder "Schalen", haben

bestimmte Energieniveaus (quantisiert). Elektronen können nur gequantelte Energiezustände annehmen und zwischen diesen Schalen springen, wobei sie bestimmte Energie-Quanten absorbieren oder abgeben.

### 1.3 Röntgenröhre und Energieübergänge

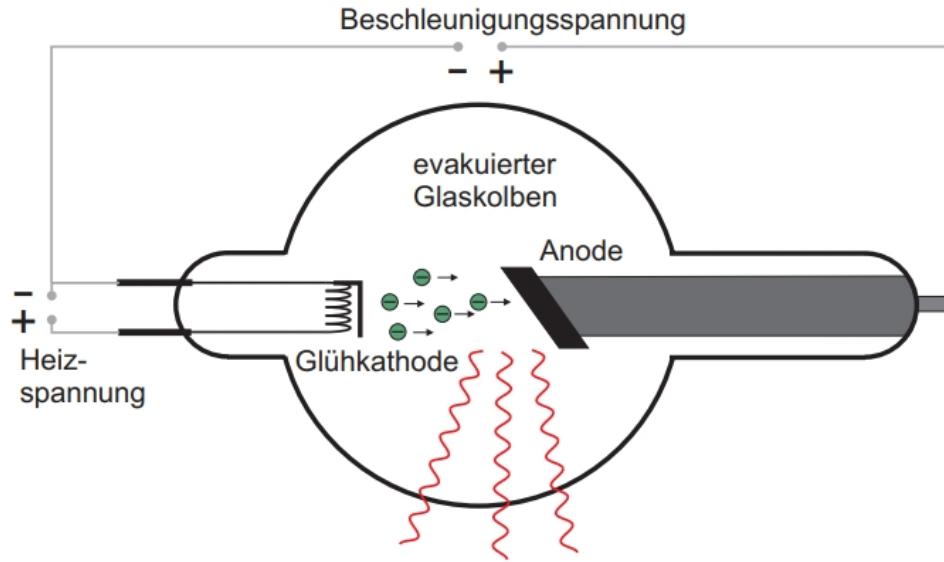


Abbildung 2: Röntgenröhre<sup>1</sup>

Eine Röntgenröhre besteht aus einem luftleeren Glaskolben und zwei Elektroden, zwischen den eine Spannung im Bereich von 10 kV bis 100 kV angewendet wird. Die an Kathode durch Glühemission freigesetzten Elektronen werden unter der Spannung in Richtung zu Anode beschleunigt, bis sie auf Anode treffen, werden sie durch die elektromagnetische Wechselwirkung mit den Anodenatomen abgebremst, wodurch Energie verloren geht und ein kontinuierliches **Bremsspektrum** entsteht, da der Energieverluste bei Elektronen verschieden sind.

Jedoch bemerkt man, dass das Spektrum wegen Energieerhaltung erst ab einer bestimmten Grenzwellenlänge  $\lambda_{gr}$  beginnt:

$$E = eU = h\nu_{gr} = \frac{hc}{\lambda_{gr}} \Rightarrow \lambda_{gr} = \frac{hc}{eU} \quad (1)$$

wobei  $h$  das Planck'sche Wirkungsquantum und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist.

Bei höheren Beschleunigungsspannungen tritt ein zusätzliches diskretes Linienpektrum (**charakteristisches Spektrum**) auf, das mit dem kontinuierlichen Bremsspektrum überlagert ist und vom Material der Anode abhängt (Abbildung 3 links).

---

<sup>1</sup>Quelle: Dr. J.Wagner - Physikalisches Anfängerpraktikum - V. 1.1 B.Sc. Stand 10/2012

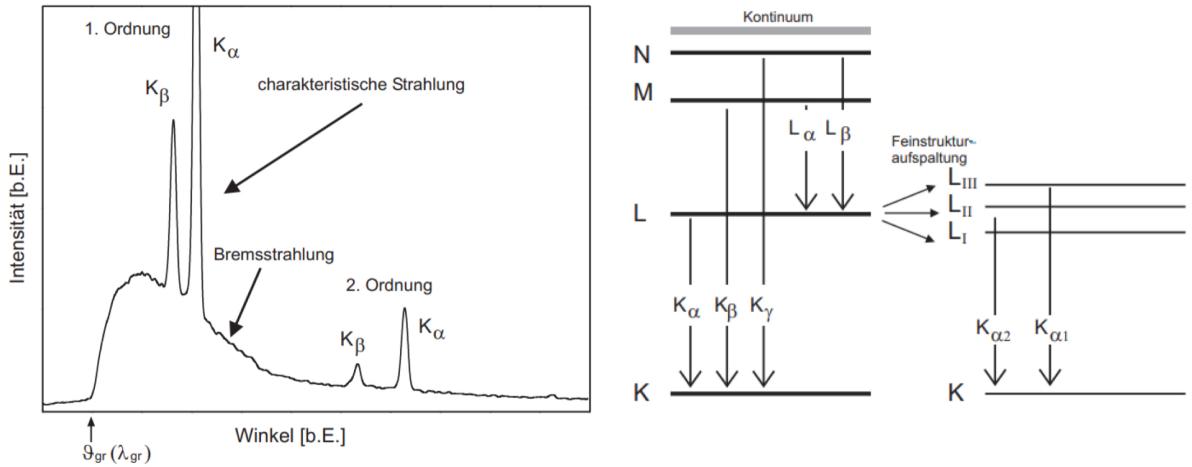


Abbildung 3: Links: Bremsspektrum; Rechts: Molybdän-Energieübergänge<sup>2</sup>

Die Ionisation des Anodenmaterials kann ebenso zum Energieverlust der beschleunigten Elektronen in der Röntgenröhre führen: Ein aus den innersten Schalen K entferntes Elektron kann durch ein höheres ersetzt werden, wobei die freiwerdende Bindungsenergie als Röntgenquant abgestrahlt wird. Die anderen resultierenden Übergänge, abhängig von der Schale, von der das Elektron springt, können in Serien zusammengefasst werden (Abbildung 3 rechts).

Die Energie der charakteristischen Linien kann mit Hilfe des **Moseley'schen Gesetzes** abgeschätzt werden. Für den Übergang von der n-ten zur m-ten Schale gilt:

$$E_{n \rightarrow m} = hcR_\infty(Z - A)^2 \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (2)$$

wobei  $h$  das Planck'sche Wirkungsquantum,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit,  $R_\infty$  die Rydberg-Konstante ( $R_\infty = 1,097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ ),  $Z$  die Kernladungszahl,  $n$  und  $m$  die jeweiligen Hauptquantenzahlen sind.  $A$  handelt sich um eine Abschirmungskonstante, die die Abschirmung zwischen Kernladung und Elektronen darstellt, und ist  $A \approx 1$  bei der  $K_\alpha$ -Strahlung (denn nur ein Elektron). Rechnen wir die Energie aus dann kommt:  $E_{K_\alpha} = 17,2 \text{ keV}$ , was konsistent mit dem Literaturwert  $E_{K_{Lit}} = 17,4 \text{ keV}$  ist.

Allerdings ist das Moseley-Gesetz nur eine Abschätzung und wir sollen auch die Feinstruktur des Energieniveaus beachten, die sowohl von der Hauptquantenzahl, als auch von der Drehimpulsquantenzahl und der Spinquantenzahl abhängt. Zum Beispiel ist das L-Niveau eigentlich dreifach entartet, was dazu führt, dass die  $K_\alpha$ -Linie eigentlich eine Doppellinie ist. Jedoch kann das Spektrometer diese Doppellinie nicht separieren auflösen und zeigt sie daher nur als eine einzelne Linie an.

---

<sup>2</sup>Quelle: Dr. J.Wagner - Physikalisches Anfängerpraktikum - V. 1.1 B.Sc. Stand 10/2012

## 1.4 Bragg-Reflexion und Kristallstruktur

Um das Spektrum einer Strahlungsquelle zu untersuchen, werden normalerweise Dispersion und Beugung analysiert. Im Fall von Röntgenstrahlung ist jedoch die Anwendung von Dispersion aufgrund der geringfügigen Abweichung des Brechungsin dex der Materie im Wellenlängenbereich nicht möglich. Auch um die klare Beugungerscheinung zu erzeugen wird eine äußerst feine Gitterstruktur benötigt, da das beugende Objekt eine ähnliche Größenordnung wie die Wellenlänge haben muss ( $\lambda$  in  $0,1pm - 10nm$ ). Aber mit einem Kristall als Beugungsgitter, die ein regeläßigen Atomanordnung und Atomabstände ausweisen und deren Atomabstände von der gleichen Größenordnung wie die Wellenlänge sind, kann ein gleichförmiges Interferenzmuster beobachtet werden, das sich von dem Winkel  $\vartheta$  und Wellenlänge der einfallenden Strahlung sowie der Kristallstruktur abhängt. Die entstehenden Interferenzphänomene werden "**Bragg-Reflexion**" genannt.

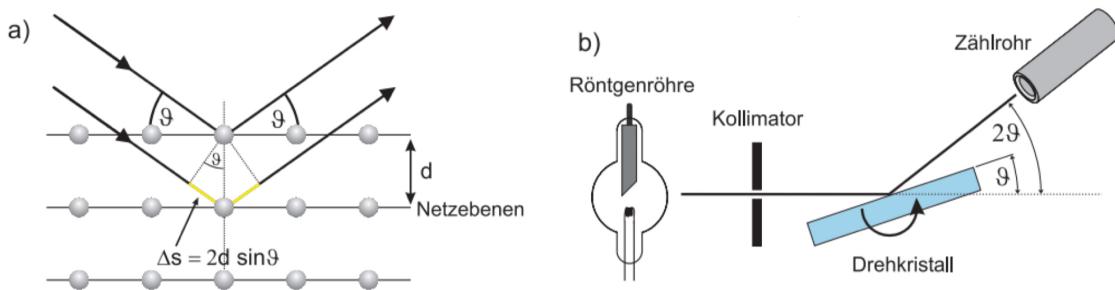


Abbildung 4: Links: Bragg-Reflexion; Rechts: Drehkristallmethode<sup>3</sup>

Die einfallende Strahlung mit Winkel  $\vartheta$  wird auf der Oberfläche reflektiert, dringt tief in den Kristall ein und erzeugt zusätzliche Reflexionen. Der Gangunterschied lautet:

$$\Delta s = 2d \sin \vartheta \quad (3)$$

wobei  $d$  der Abstand zwischen zwei nächstliegenden Netzebenen ist. Beträgt der Gangunterschied der zwei benachbarten Teilbündel ein Vielfaches der Wellenlänge  $\lambda$ , so gibt es eine konstruktive Interferenz:

$$2d \sin \vartheta = n\lambda, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{Bragg'sches Gesetz} \quad (4)$$

In der Praxis wird der Einfallswinkel variiert, indem der Kristall um seine eigene Achse senkrecht zur Einfallrichtung der Strahlen gedreht wird. Diese Methode wird als **Drehkristallmethode** bezeichnet. Je nach Winkel kann dabei eine unterschiedliche Intensität der reflektierten Strahlung detektiert werden. Außerdem für bekannte Wellenlänge lässt sich die Kristallstruktur der zu untersuchenden Kristalls theoretisch bestimmen, was die sogenannte **Röntgenstrukturanalyse** ist.

<sup>3</sup>Quelle: Dr. J.Wagner - Physikalisches Anfängerpraktikum - V. 1.1 B.Sc. Stand 10/2012

Dies ermöglicht deswegen auch eine genaue Bestimmung von Avogadrozahl  $N_A$  mit der Voraussetzung, dass das Volumen und die Anzahl der Atome in der Elementarzelle bekannt sind. Das Volumen  $V$  kann durch den bekannten Kristallschnitt aus der Gitterkonstante bestimmt werden. Die Anzahl der Atome pro Elementarzelle beträgt im vorliegenden Versuch 4 für NaCl und 4 für LiF. Somit ergibt sich für die Avogadrokonstante:

$$N_A = 4 \frac{V_{Mol}}{V} \quad V = a^3 = (2d)^3 \quad (5)$$

$$\Rightarrow N_A = 4 \frac{V_{Mol}}{(2d)^3} = \frac{M_{Mol}}{2\rho d^3} \quad (6)$$

wobei  $V_{Mol}$  das Molvolumen,  $M_{Mol}$  das Molgewicht,  $\rho$  die Dichte von Kristall,  $a$  die Gitterkonstante und  $d$  der Netzaabstand darstellen. Der Faktor 4 berücksichtigt, dass in einer Elementarzelle vier NaCl-Moleküle (bzw. LiF-Moleküle) vorhanden sind.

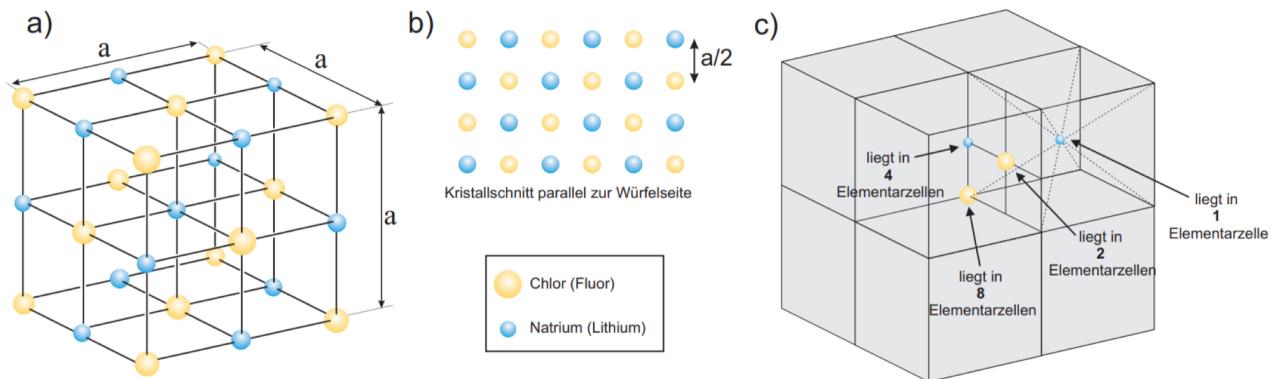


Abbildung 5: Elementarzelle von NaCl (LiF) und Aufbau eines Kristalls durch Aneinandereihen von Elementarzellen<sup>5</sup>

## 2 Versuchsdurchführung

Versuchsaufbau, Versuchsdurchführung und Messprotokoll siehe folgende Seiten.

---

<sup>5</sup>Quelle: Dr. J.Wagner - Physikalisches Anfängerpraktikum - V. 1.1 B.Sc. Stand 10/2012

## Versuch 255: Röntgenspektrometer

17.06.2024

Yulgi Shi

14:00 ~ 17:00

Yuting Shi

- Messgeräte:
- Röntgengerät mit Röntgenröhre (Molybdän-Anode)
  - Goniometer
  - Computer
  - LiF - und NaCl Kristall
  - Leuchtschirm mit CCD-Kamera

Funktionsfehler: Die Sicherheitskreise werden überprüft, das Gerät bei  $I = 1 \text{ mA}$  und  $U = 5 \text{ kV}$  anzuhalten. Die Bleiglasfenster werden geschlossen, und die Hochspannung eingeschaltet. Wenn die Kontrollleuchte über dem Taster blinkt, und die Röntgenröhre aufleuchtet, wird die Verriegelung der Bleiglasscheibe aufgehoben. Sofort sollten sich die Kathodenheizung sowie die Hochspannungsstartleuchte abschalten.

Aufgabe 1: Messung des Röntgenspektrums mit einem LiF - Kristall

→ Messung des Röntgenspektrums der Molybdän-Anode.

Montiere den LiF - Kristall →  $U = 35 \text{ kV}$ ,  $I = 1 \text{ mA}$ , Messzeit  $t = 5 \text{ s}$ , Einfallswinkel  $\beta$  in Schritten  $\Delta\beta$  von  $0.2^\circ$  zwischen  $3^\circ$  und  $22^\circ$  → Messen am Computer "Roentgenspektren.exe"

Aufgabe 2: Vermessen der  $K\alpha$  und  $K\beta$ -Linien des Anodenmaterials

Es wird die Messung für die groben Bereiche der  $K\alpha$ - und  $K\beta$ -Linien in erster und zweiter Ordnung wiederholen,  $\Delta\beta = 0.1^\circ$ ,  $t = 20 \text{ s}$

Aufgabe 3: Zählrate als Funktion der Beschleunigungsspannung

$\beta = 7.5^\circ$  fest, für verschiedene  $U \in [20 \text{ kV}, 35 \text{ kV}]$  in Schritten von  $1 \text{ kV}$ ,

Messzeit  $t = 20 \text{ s}$

Spannung [kV]	Zählrate [Hz]	Spannung	Zählrate
20	1.25	25	11.00
21	2.05	26	19.60
22	3.45	27	30.40
23	4.70	28	40.85
24	6.75	29	55.65

Tabelle 1: Zählraten  
bei verschiedenen  
Röhrenspannungen

Spannung [kV]	Zählrate [Hz]	Spannung	Zählrate
30	65 · 10	35	132 · 60
31	73 · 95		
32	92 · 90		
33	105 · 80		
34	117 · 10		

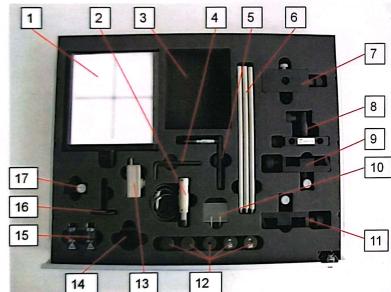
### Aufgabe 4: Messung des Röntgenspektrums mit einem NaCl - Kristall

Messung von Aufgabe 1 mit NaCl - Kristall wiederholen.  $\beta \in [3^\circ, 18^\circ]$

$$U = 35 \text{ kV}, I = 1 \text{ mA}, t = 5 \text{ s} \quad \Delta\beta = 0.2^\circ$$

17.06 ACR

Zuordnung der Fächer in der Schublade des XR 4.0 Schulröntgengeräts



Fach-Nr.	Art.-Nr.	Name	In XRE enthalten
1	09057-26	XR 4.0 X-ray Leuchtschirm	x
2	09005-00	Zählrohr Typ B	x
3	frei	z. B. 14608-00 Datenkabel USB Steckertyp A/B	x
4		Inbus-Schlüssel	x
5	09057-15	XR 4.0 X-ray Adapter für Digitalkamera	
6	09057-21	XR 4.0 X-ray externe optische Bank	
7	08286-00	Reiter für optische Profilbank	x
8	09057-29	XR 4.0 X-ray Reiter für externe optische Bank	
9	08286-01	Reiter für optische Profilbank, h = 30 mm	x
10	09058-04	XR 4.0 X-ray Comptonzusatz für 35 kV Röntgengerät	
11	08286-01	Reiter für optische Profilbank, h = 30 mm	x
12	09057-02	XR 4.0 X-ray Blendentubus d = 1 mm	
	09057-02	XR 4.0 X-ray Blendentubus d = 2 mm	
	09057-03	XR 4.0 X-ray Blendentubus d = 5 mm	
	09056-00	XR 4.0 X-ray Blendentubus mit Ni-FeW	
	09058-01	XR 4.0 X-ray Blendentubus mit Zr-FeW	
13	09058-30	XR 4.0 X-ray Röntgenenergiendetektor (Xe)	
14	09058-11	XR 4.0 X-ray Kristallhalter für Laue-Aufnahmen	
15	09056-05	XR 4.0 X-ray Lithiumfluorid-Einkristall im Hahn (LiF)	
	09056-01	XR 4.0 X-ray Kaliumbromid-Einkristall im Hahn (KBr)	
16	09824-00	Tisch mit Stiel	
17	09058-02	XR 4.0 X-ray Universal Kristallhalter für Röntgengerät	x

Die restlichen Artikel sind optional erhältlich

171396-4-04

PHYWE Systeme GmbH & Co. KG  
Robert-Bosch-Straße 10  
D-37079 Göttingen

Abbildung 6: Bedingungsanleitung Röntgenröhre

### 3 Auswertung

#### 3.1 Messung des Röntgenspektrums mit einem LiF-Kristall

Zwischen einer Winkel von  $3^\circ$  und  $22^\circ$  wurde das Röntgenspektrum für LiF aufgezeichnet. Grafisch lässt sich erkennen, dass das kontinuierliche Bremspektrum mit einem diskreten Linienspektrum überlagert ist, wodurch ein charakteristisches Spektrum entsteht.

Zuerst wird der lineare Anstieg am kurzwelligen Ende des Röntgenspektrums durch Anwendung einer Anpassungsgeraden  $ax + b$  bis zum Untergrund  $\lambda_{gr}$  extrapoliert, der als Grenzwellenlänge bezeichnet ist. Dabei ergeben sich die statistischen Fehler als Wurzeln der Zählungen, dividiert durch die Messzeit.<sup>6</sup>

<sup>6</sup>Python Code 1

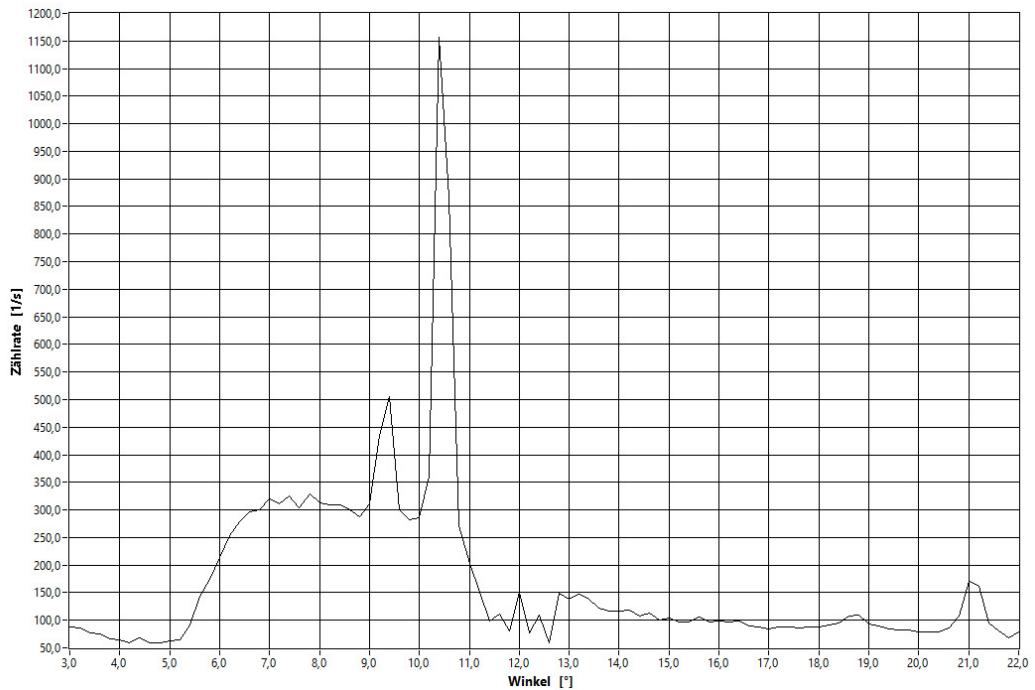


Abbildung 7: Röntgenspektrum für LiF

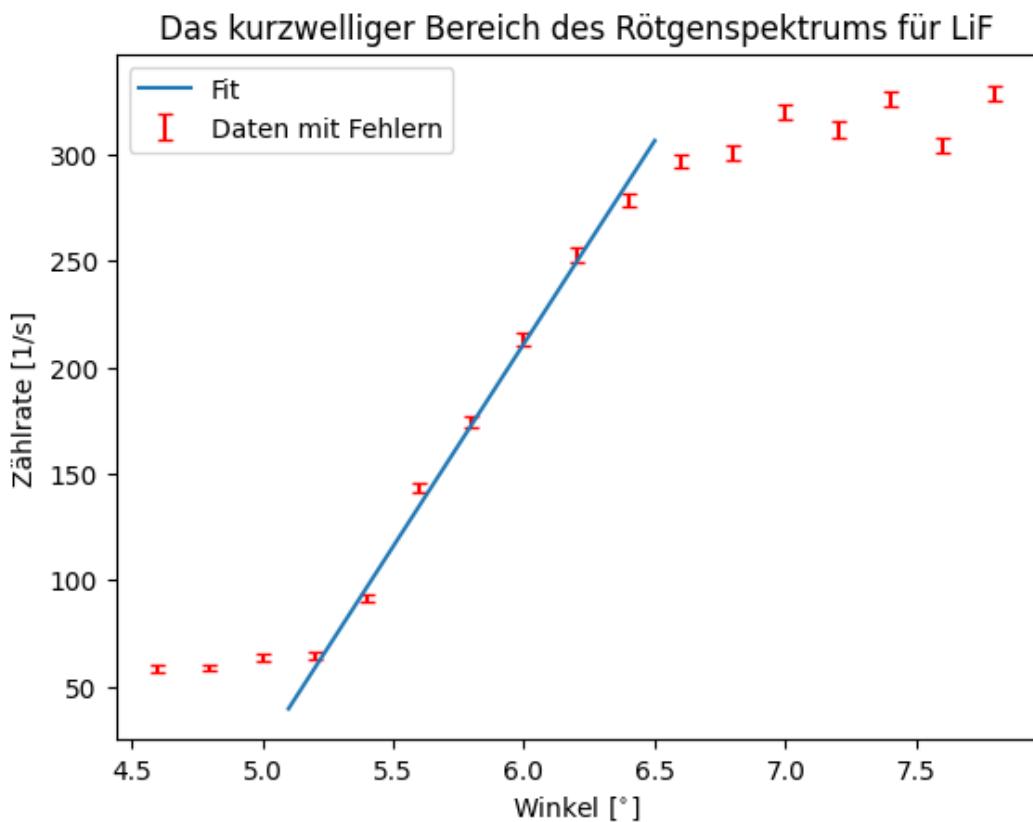


Abbildung 8: Bedingungsanleitung Röntgenröhre

Aus dem Fit-Algorithmus lauten die Parameter:

$$a = 190.60 \pm 3.12 \quad b = -932.51 \pm 18.03 \quad (7)$$

wobei wir eine Untergrundsräte von  $Z = 64.8 \text{ s}^{-1}$  bekommen und die Grenzwinkel durch den Schnittpunkt der Fitgeraden mit dem Untergrund auswerten können:

$$\theta_{Gr} = 5.23^\circ \pm 0.14^\circ \quad (8)$$

Aus dem Braggschen Gesetz und dem Netzebenenabstand  $d = 201.4 \text{ pm}$  vom LiF-Kristall gilt für die erste Ordnung ( $n=1$ ) die Grenzwellenlänge:

$$\lambda_{gr} = 2d \sin \theta = (36.72 \pm 0.98) \text{ pm} \quad (9)$$

wobei der Fehler aus der Gauss-Fehlerfortpflanzung stammt. Aus der Grenzwellenlänge kann nun das Plancksche Wirkungsquantum mithilfe von Gl.(1) ermittelt werden:

$$h = \frac{eU\lambda_{gr}}{c} = (6.87 \pm 0.20) \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad (10)$$

Im Vergleich zu dem Literaturwert  $h_{Lit} = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  beträgt die Fehlerabweichung:

$$\frac{|h - h_{Lit}|}{\Delta h} \approx 1.22\sigma \quad (11)$$

Die Fehlerabweichung ist nicht signifikant. Außerdem wird der Winkel bestimmt, ab dem das Spektrum zweiter Ordnung beginnt, ausgehend von der Grenzwellenlänge  $\lambda_{gr}$ :

$$\theta_2 = \arcsin(2\lambda_{gr}/(2d)) = (10.5 \pm 0.3)^\circ \quad (12)$$

### 3.2 Vermessen der $K_\alpha$ und $K_\beta$ -Linien des Anodenmaterials

Beschränkt auf dem Bereich wo die  $K_\alpha$  und  $K_\beta$ -Linien wurden die Messungen erneut durchgeführt und die entsprechenden Röntgenspektren aufgenommen. Die Messwerte der Zählrate im Bereich der K-Linien werden gegen den Winkel in ein Diagramm eingetragen und die Lagen der Linien zur genauen Auswertung mithilfe von Gauss-Kurve bestimmt.<sup>7</sup>

---

<sup>7</sup>Python Code 2

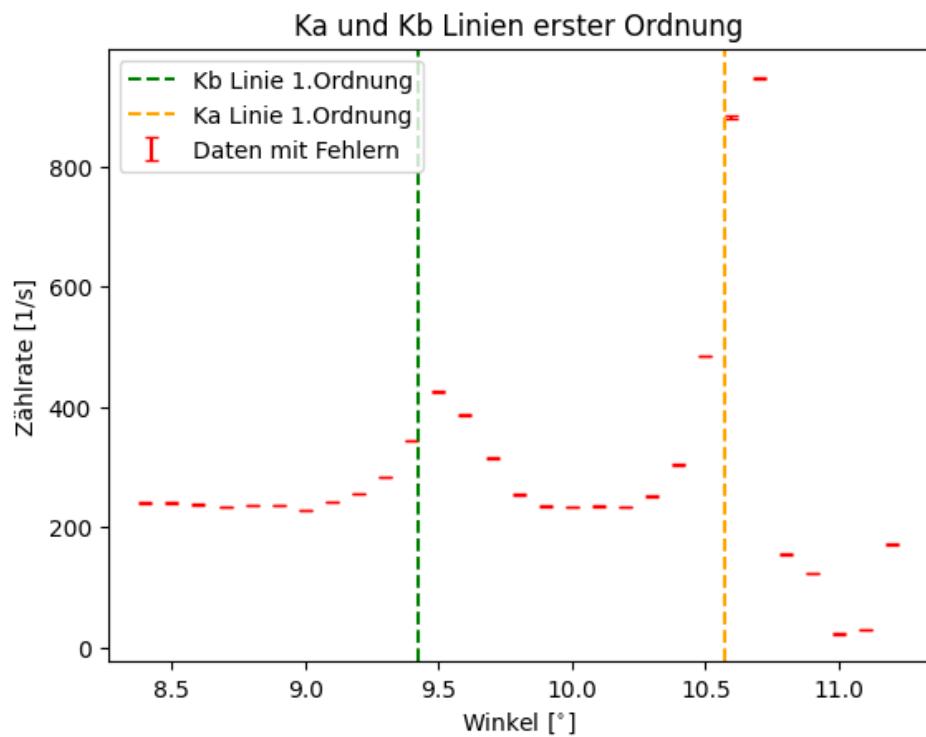


Abbildung 9:  $K_{\alpha}$  und  $K_{\beta}$ -Linien 1.Ordnung

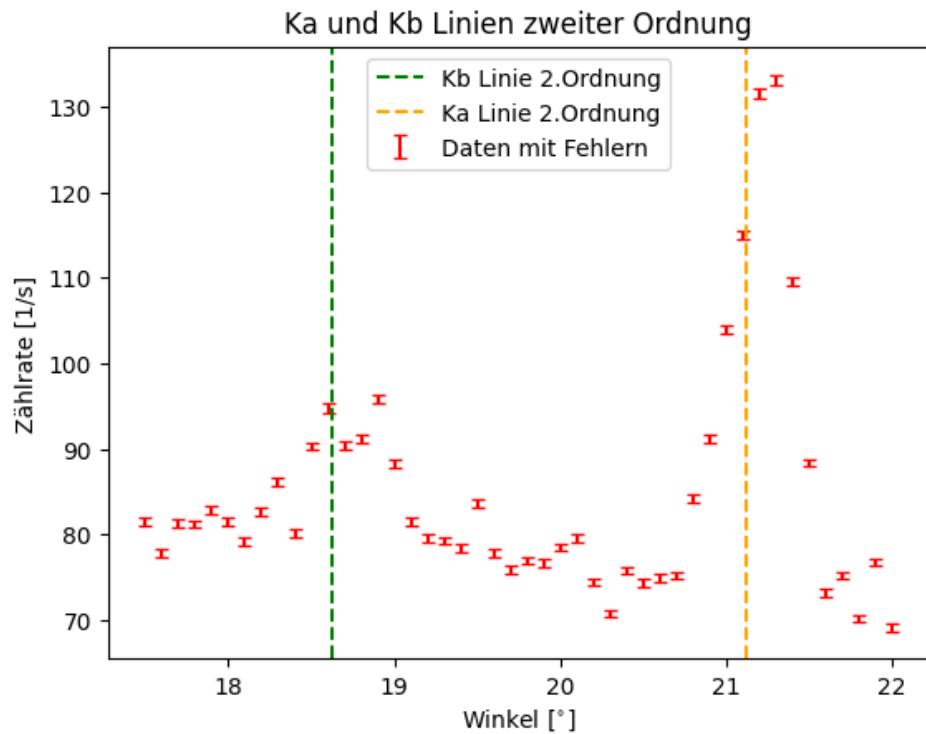


Abbildung 10:  $K_{\alpha}$  und  $K_{\beta}$ -Linien 2.Ordnung

Wobei wir die Lagen für die  $K_\alpha$  und  $K_\beta$ -Linien erster und zweiter Ordnung finden:

$$\vartheta_{\beta 1} = (9.43 \pm 1.02)^\circ \quad \vartheta_{\alpha 1} = (10.57 \pm 0.16)^\circ \quad (13)$$

$$\vartheta_{\beta 2} = (18.62 \pm 1.93)^\circ \quad \vartheta_{\alpha 2} = (21.12 \pm 2.82)^\circ \quad (14)$$

Analog aus dem Braggschen Gesetz lassen sich die Wellenlängen bestimmen:

$$\lambda_{\beta 1} = (66.00 \pm 7.14) pm \quad \lambda_{\alpha 1} = (73.89 \pm 9.09) pm \quad (15)$$

$$\lambda_{\beta 2} = (64.31 \pm 6.67) pm \quad \lambda_{\alpha 2} = (72.57 \pm 9.69) pm \quad (16)$$

Für die Berechnung der Fehler haben wir die Standardabweichung von der Gauss-Kurve benutzt, die aber wegen der Rauschung der Daten besonders groß ist. Nun soll für  $K_\alpha$  in erster Ordnung die Halbwertsbreite ermittelt werden, indem man in den Messergebnissen die korrespondierenden Winkel identifiziert und dann den Abstand berechnet:

$$FWHM = 2\sqrt{2\ln(2)}\sigma = (0.35 \pm 0.02)^\circ \quad (17)$$

### 3.3 Zählrate als Funktion der Beschleunigungsspannung

In dieser Aufgabe wird aus den Messungen bei festem Winkel und variierter Spannung die Einsatzspannung, also jene Spannung, bei der die Detektion einsetzt, extrapoliert.<sup>8</sup>

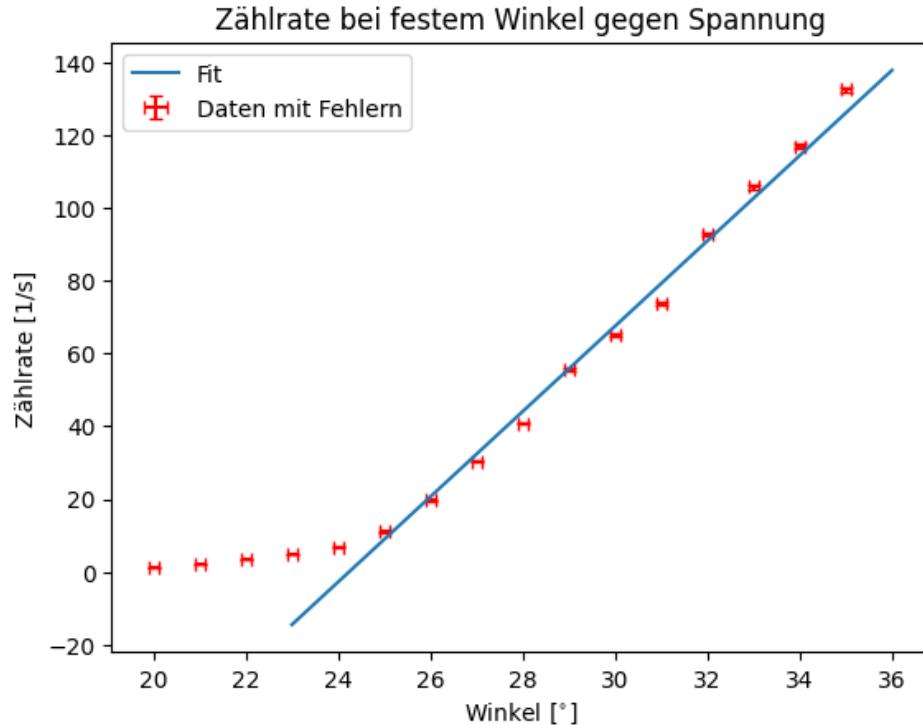


Abbildung 11: Die Zählraten bei verschiedenen Spannungen und festem Einfallswinkel von  $7.5^\circ$

<sup>8</sup>Python Code 3

Wenn man wieder den Untergrund betrachtet lässt sich die Einsatzspannung bestimmen:

$$U = (24.24 \pm 0.11) \text{ kV} \quad (18)$$

Für den eingestellten Winkel von  $7.5^\circ$  erhält man nach dem Braggschen Gesetz (4) eine Wellenlänge von 52.756 pm. Somit aus Gl.(1) kann das Plancksche Wirkungsquantum berechnet werden:

$$h' = (6.83 \pm 0.31) \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad (19)$$

Man findet eine Fehlerabweichung von dem Literaturwert  $0.66\sigma$  und ist nicht signifikant. Die sogenannte Isochromatenmethode stellt deswegen im Vergleich zu Aufgabe 2 ein besseres Modell zur Berechnung des Planckschen Wirkungsquants.

### 3.4 Messung des Röntgenspektrums mit einem NaCl-Kristall

Analog wie LiF-Kristall wurde auch das Röntgenspektrum von NaCl-Kristall aufgenommen:

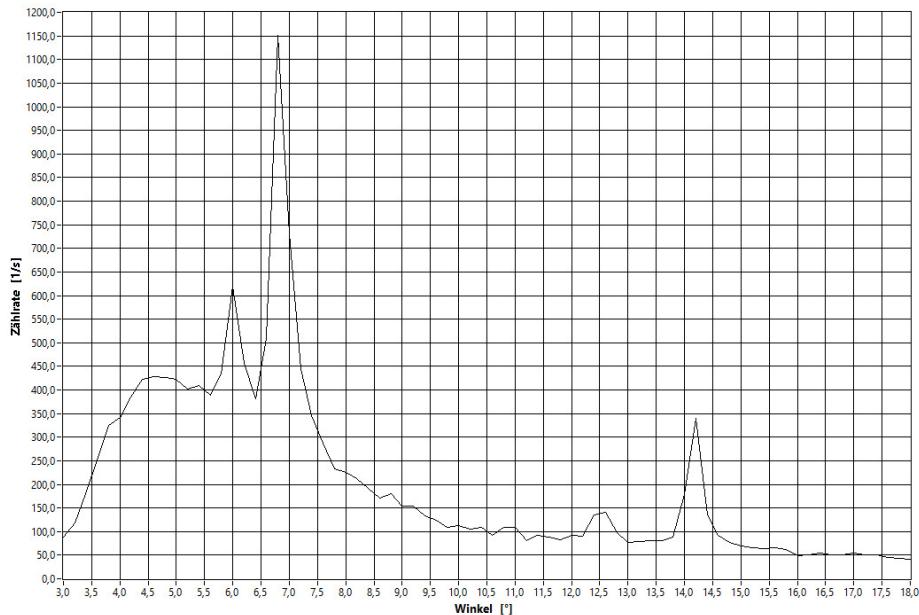


Abbildung 12: Röntgenspektrum von NaCl

Um hier ebenfalls die  $K_\alpha$  und  $K_\beta$ -Linien zu bestimmen wird wie Aufgabe 2 eine Gauss-Fit auf dem Peak angelegt und der Erwartungswert ausgewertet. Es ergibt:<sup>9</sup>

$$\vartheta_{\beta 1} = (6.00 \pm 0.05)^\circ \quad \vartheta_{\alpha 1} = (6.75 \pm 0.10)^\circ \quad (20)$$

$$\vartheta_{\beta 2} = (12.50 \pm 0.35)^\circ \quad \vartheta_{\alpha 2} = (14.25 \pm 0.20)^\circ \quad (21)$$

---

<sup>9</sup>Python Code 4

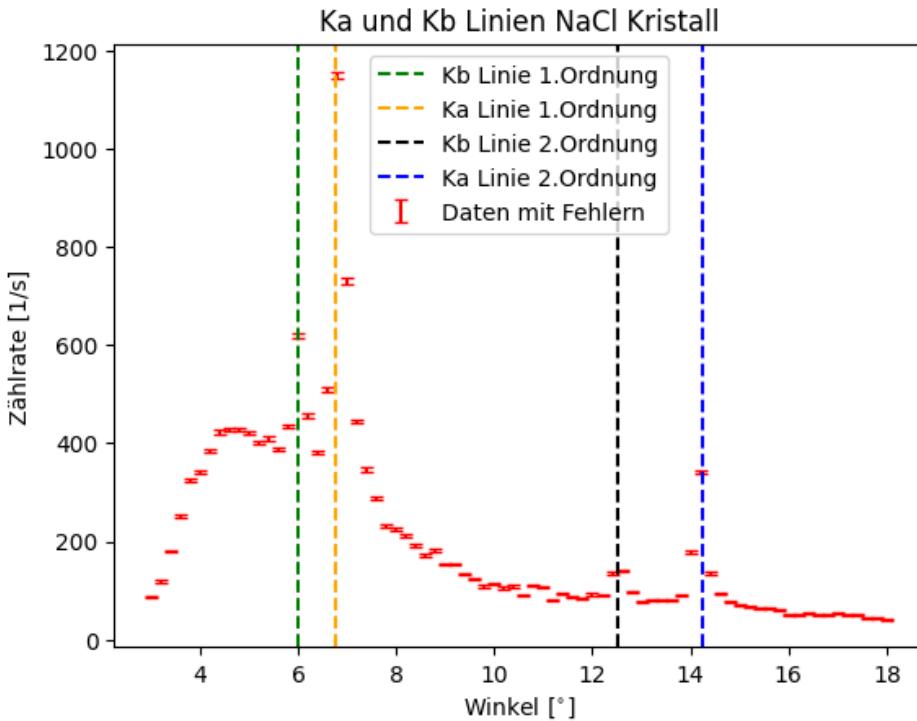


Abbildung 13:  $K_\alpha$  und  $K_\beta$ -Linien von NaCl

Mithilfe von den in Aufgabe 2 berechneten Wellenlängen der  $K_\alpha$  und  $K_\beta$ -Linien erster und zweiter Ordnung sind jetzt die Gitterkonstante von NaCl sowie die Avogadro Zahl zu berechnen. Nach Gl.(4) ist die Gitterkonstante:

$$a = 2d = \frac{n\lambda}{\sin \vartheta} \quad \Delta a = \sqrt{\left(\frac{n\Delta\lambda}{\sin \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{n\lambda \cos \vartheta \Delta \vartheta}{\sin^2 \vartheta}\right)} \quad (22)$$

Damit bekommen wir:

$$a_{\beta 1} = (631.41 \pm 68.51) \text{ pm} \quad a_{\alpha 1} = (628.65 \pm 77.14) \text{ pm} \quad (23)$$

$$a_{\beta 2} = (594.25 \pm 64.84) \text{ pm} \quad a_{\alpha 2} = (589.63 \pm 79.17) \text{ pm} \quad (24)$$

Die Gitterkonstanten werden gemittelt:

$$a = (610.98 \pm 36.33) \text{ pm} \quad (25)$$

wobei der Fehler durch Gauss-Fehlerfortpflanzung entsteht. Somit lautet die Avogadro-Konstante zusammen mit der Dichte  $\rho = 2.164 \text{ g/cm}^3$  und der Molekulargewicht  $M_{Mol} = 58.44 \text{ g}$  von NaCl nach Gl.(6):

$$N_A = \frac{M_{Mol}}{2\rho(a/2)^3} = (4.74 \pm 0.28) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \quad (26)$$

Die Fehlerabweichung mit dem Literaturwert  $N'_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  beträgt:

$$\frac{|N_A - N'_A|}{\Delta N_A} \approx 4.58\sigma \quad (27)$$

und ist schon größer als  $3\sigma$  und ist signifikant. Der Grund dafür liegt in der Gitterkonstante, da der NaCl-Kristall eine Gitterkonstante von etwa  $a \approx 56.4$  pm besitzt und unser Wert deutlich größer ist als dieser. Im Folgenden werden wir uns mit den Fehlerquellen weiter beschäftigen.

## 4 Zusammenfassung und Diskussion

In diesem Experiment wurden mithilfe von Röntgenspektrum die charakteristischen Röntgenspektren von LiF und NaCl-Kristall aufgezeichnet und analysiert, wobei die detektierten Zählrate in Abhängigkeit von Winkel oder Röntgenspannung grafisch eingetragen sind. Durch Analyse des linearen Anteils am kurzweligen Ende des Röntgenspektrums wurde eine Extrapolation für den Untergrund durchgeführt und basiert darauf das Plancksche Wirkungsquantum ermittelt:  $h = (6.87 \pm 0.20) \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ , das eine Fehlerabweichung  $1.22\sigma$  von dem Literaturwert aufweist und nicht signifikant ist.

Nachfolgend wurde die Messung des Spektrums im Bereich der  $K_\alpha$ - und  $K_\beta$ -Linien sowohl für die erste als auch die zweite Ordnung wiederholt. Durch Darstellung der Positionen von charakteristischen Linien lassen sich dann die entsprechenden Wellenlängen aus dem Braggschen Gesetz bestimmen, die eine  $0.31\sigma$  Abweichung von dem Literaturwert  $\lambda_{K\alpha} = 71.1$  pm und  $0.41\sigma$   $\lambda_{K\beta} = 63.1$  pm zeigen. Es ist jedoch zu beachten, dass die Fehler in den Wellenlängen relativ groß sind. Dies liegt daran, dass wir für jeden Peak eine Gauß-Kurve verwendet haben, um die Positionen der charakteristischen Linien und deren Fehler anhand des Erwartungswertes und der Standardabweichung zu approximieren. Stattdessen sollten wir die Fehler der Positionen direkt mit der Funktion `pcov[0][0]` bestimmen, da die Standardabweichung wesentlich größer ist als der Fehler des Erwartungswertes, insbesondere, wenn die Daten stark unter Hintergrundrauschen fluktuiieren und statistisch instabil sind.

Ein weiterer bemerkenswerter Fakt ist, dass im Röntgenspektrum von LiF direkt nach der  $K_\alpha$ -Linie erster Ordnung ein Knick auftritt (siehe Abbildung 7), der im Vergleich zum theoretischen Spektrum jedoch unwahrscheinlich erscheint. Der Grund dafür ist, dass die Gitterstruktur nach langer Nutzung leicht beschädigt oder zersetzt ist, was dazu führt, dass die Oberfläche des Gitters nicht gleichmäßig ist und eine unregelmäßige Reflexion der Strahlung unter bestimmten Winkeln verursacht.

Anschließend wurde die Zählrate für verschiedene Spannungen im Bereich von 20 kV bis 35 kV bei einem konstanten Winkel von  $7.5^\circ$  gemessen. Die erfassten Messwerte wurden in einem Diagramm dargestellt, und der Verlauf durch eine Ausgleichsgerade angepasst. Mit Hilfe dieser Ausgleichsgerade wurde die Einsatzspannung bestimmt und erneut das Plancksche Wirkungsquantum berechnet:  $h = (6.83 \pm 0.31) \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ , das eine Fehlerabweichung von  $0.66\sigma$  darstellt. Wie schon diskutiert wird, ist diese Methode wahrscheinlich besser als die Spektrumsextrapolation-Methode vorher. Theoretisch aber ist die hier verwendete sogenannte Isochromatenmethode zur Be-

stimmung der Einsatzspannung der Extrapolation des kurzweligen Endes des Spektrums in Aufgabe 2 äquivalent. In der Praxis ist die Spektrumsextrapolation jedoch ungenauer, da dabei Messpunkte unterschiedlicher Wellenlängen verwendet werden, die individuell z.B. auf Eigenabsorption in der Anode, das Röhrenfenster und das unterschiedliche Reflexionsvermögen des Kristalls korrigiert werden müssen.

In letzter Aufgabestellung wurde das Röntgenspektrum der Molybdän-Anode zusätzlich mit einem NaCl-Kristall unter verschiedene Winkeln aufgenommen und ebenso grafisch geplottet. Durch die Analyse dieses Diagramms wurden die Positionen der  $K_{\alpha}$ - und  $K_{\beta}$ -Linien für die erste und zweite Ordnung bestimmt, und dadurch unter Verwendung der zuvor bestimmten Wellenlängen die Gitterkonstante des NaCl-Kristalls ermittelt:  $a = (610.98 \pm 36.33) \text{ pm}$ , deren Abweichung zwar nicht signifikant gegen den Literaturwert ist, lässt sich jedoch auf dem großen Fehler der Gitterkonstante zurückführen, der wiederum aus der Überschätzung von den Wellenlängen stammt. Nach Auswertung wurde die Avogadro-Konstante  $N_A = (4.74 \pm 0.28) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  bestimmt, die sich aber signifikant von dem Literaturwert  $N'_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  abweicht.

Da sich die Avogadro-Konstante aus der Gitterkonstante berechnen lässt, betrachten wir die Fehlerquellen von  $a$  aus Gl.(22), die sich aus den Wellenlängen und den Grenzwinkeln zusammensetzen. Aufgrund der Kompatibilität des berechneten Planckschen Wirkungsquantums mit dem Literaturwert spielen die Fehler in den Wellenlängen der  $K_{\alpha}$ - und  $K_{\beta}$ -Linien kaum eine große Rolle. Daher bleibt als einzige Möglichkeit die Betrachtung der Winkel. Die Positionen der  $K_{\alpha}$ - und  $K_{\beta}$ -Linien werden mithilfe des Erwartungswertes einer Gaußkurve bestimmt, die jedoch aufgrund der geringen Anzahl der Stichproben in der Nähe des Peaks nicht exakt approximiert werden kann. Andererseits reagiert die Sinusfunktion bei kleinen Winkeln sehr sensibel auf Änderungen der Variablen, weshalb kleine Datenfluktuationen zu großen Abweichungen im Nenner führen können. Die Präzision des Experiments kann verbessert werden, indem beispielsweise kleinere Winkelschritte bei den Messungen eingestellt werden, um die Peaks präziser abzutasten und die statistische Unsicherheit zu kompensieren. Es ist außerdem empfehlenswert, die NaCl- bzw. LiF-Kristalle zu wechseln, wenn sie bereits lange in Gebrauch sind und die regelmäßige Gitterstruktur nicht mehr erhalten ist.

## 5 Anhang

# Python Code Versuch 255

June 18, 2024

## 0.0.1 PAP 2.2 Versuch 255 Rötgenspektrometer

Yuting Shi 17.06.2024

```
[95]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import curve_fit
```

Python Code 1: Röntgenspektrum der LiF

```
[96]: winkel=[]
rate=[]

f = open('C:\\\\Users\\\\shiy0\\\\OneDrive\\\\Dokumente\\\\PAP 2.2\\\\Versuch 255\\\\shi\\\\versuch 255\\\\Aufgabe 1 a.txt', 'r')

for line in f:
    line=line.replace(","," .")      #Komma durch Punkt ersetzen
    line=line.strip()                #Whitespaces am Anfang und Ende einer Zeile entfernen
    zeile=line.split()              #Zeileneinträge in die Liste "zeile"
    schreiben
    winkel.append(float(zeile[0]))   #Spalten in Listen eintragen
    rate.append(float(zeile[1]))

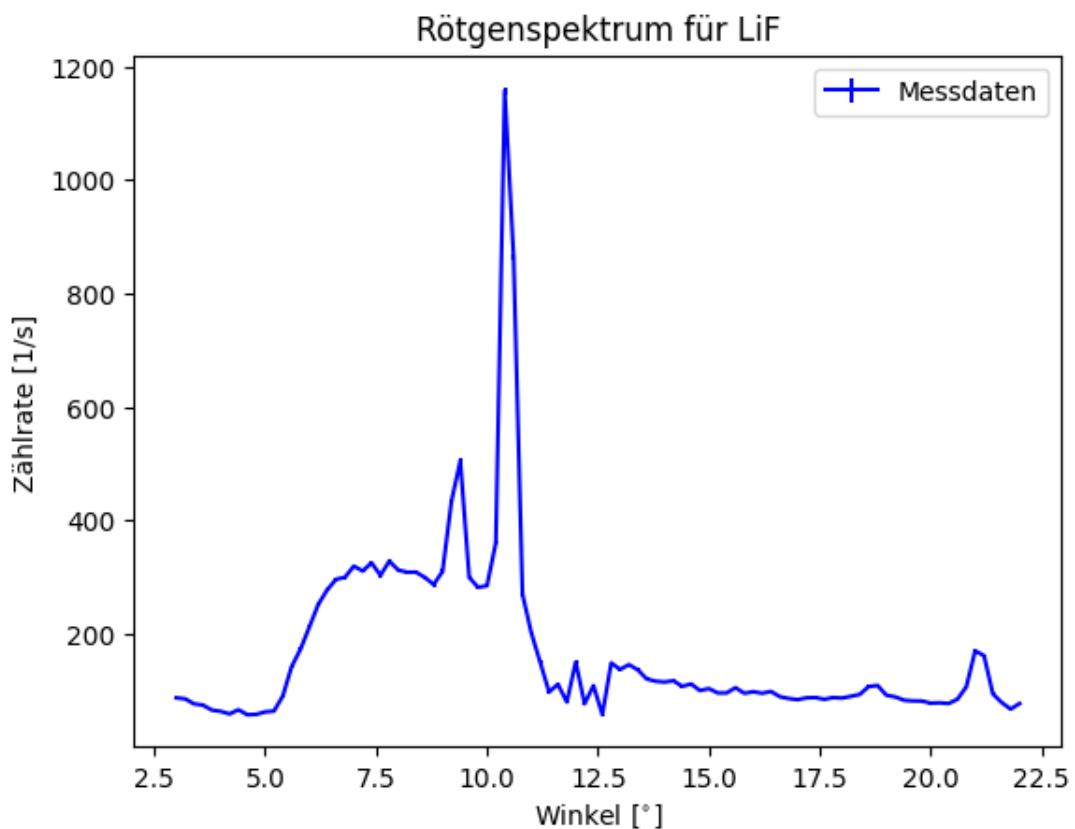
print(winkel)
print(rate)
```

```
[3.0, 3.2, 3.4, 3.6, 3.8, 4.0, 4.2, 4.4, 4.6, 4.8, 5.0, 5.2, 5.4, 5.6, 5.8, 6.0,
6.2, 6.4, 6.6, 6.8, 7.0, 7.2, 7.4, 7.6, 7.8, 8.0, 8.2, 8.4, 8.6, 8.8, 9.0, 9.2,
9.4, 9.6, 9.8, 10.0, 10.2, 10.4, 10.6, 10.8, 11.0, 11.2, 11.4, 11.6, 11.8, 12.0,
12.2, 12.4, 12.6, 12.8, 13.0, 13.2, 13.4, 13.6, 13.8, 14.0, 14.2, 14.4, 14.6,
14.8, 15.0, 15.2, 15.4, 15.6, 15.8, 16.0, 16.2, 16.4, 16.6, 16.8, 17.0, 17.2,
17.4, 17.6, 17.8, 18.0, 18.2, 18.4, 18.6, 18.8, 19.0, 19.2, 19.4, 19.6, 19.8,
20.0, 20.2, 20.4, 20.6, 20.8, 21.0, 21.2, 21.4, 21.6, 21.8, 22.0]
[88.2, 86.4, 77.6, 75.4, 66.6, 64.4, 59.8, 67.2, 58.4, 59.0, 63.4, 64.8, 91.4,
143.4, 174.0, 213.4, 252.8, 278.4, 296.8, 300.4, 320.0, 311.6, 325.8, 304.0,
328.8, 313.2, 309.4, 309.6, 300.2, 287.8, 311.0, 434.6, 505.4, 300.2, 282.8,
285.6, 361.2, 1157.0, 864.8, 270.8, 202.4, 150.6, 98.6, 112.0, 80.8, 151.2,
```

```
77.8, 109.6, 58.6, 149.6, 138.2, 146.6, 137.4, 121.4, 117.4, 116.0, 118.2,  
108.4, 112.6, 101.0, 104.4, 96.8, 96.8, 106.0, 96.2, 99.0, 96.2, 99.4, 90.2,  
87.0, 85.0, 88.2, 88.6, 85.6, 88.6, 87.8, 90.8, 94.2, 108.0, 110.0, 92.8, 89.8,  
84.0, 82.8, 82.6, 78.8, 79.4, 78.2, 85.6, 107.4, 170.8, 162.4, 95.0, 79.8, 68.4,  
78.2]
```

```
[97]: dw=np.sqrt(rate)/5  
plt.errorbar(winkel, rate, yerr=dw, color='blue', label='Messdaten')  
plt.xlabel('Winkel [ $^{\circ}$ ]')  
plt.ylabel('Zählerate [1/s]')  
plt.title('Röntgenspektrum für LiF')  
plt.legend()
```

```
[97]: <matplotlib.legend.Legend at 0x14e42605820>
```



```
[98]: #kurzwelliger Bereich  
w=winkel[12:18]  
r=rate[12:18]
```

```

plt.errorbar(winkel[8:25],rate[8:25], yerr=dw[8:25], fmt='None', ecolor='r',  

             capsize=3, marker='s', mec='black', mfc='black', ms='2', label='Daten mit  

             Fehlern')

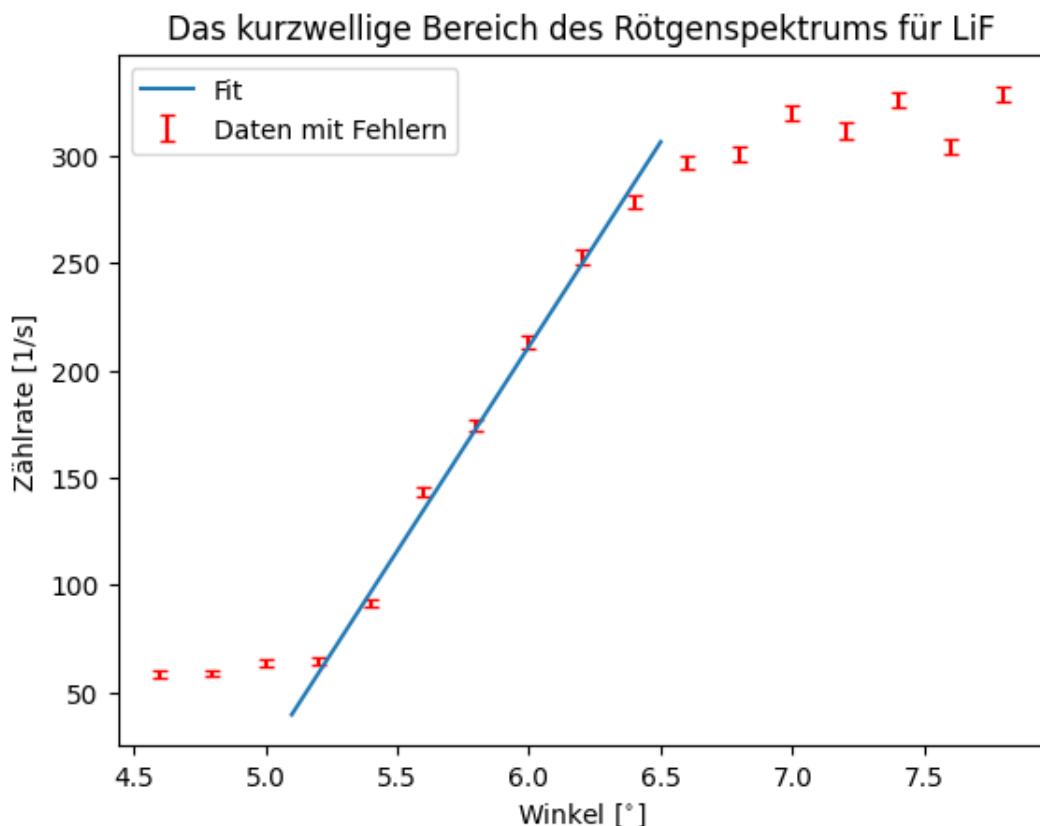
def l(x,a,b):
    return a*x+b

popt, pcov=curve_fit(l,w,r,sigma=dw[12:18], absolute_sigma=True)
x_range=np.linspace(5.1, 6.5, 20)
plt.plot(x_range,l(x_range,*popt), label='Fit')
plt.xlabel('Winkel [${}^{\circ}$]')
plt.ylabel('Zählrate [1/s]')
plt.title('Das kurzwellige Bereich des Röntgenspektrums für LiF')
plt.legend()

print("a=",popt[0], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[0][0]))
print("b=",popt[1], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[1][1]))

```

a= 190.6015600436201 , Standardfehler= 3.1198803312492287  
b= -932.5140578880565 , Standardfehler= 18.030937731677177



```
[99]: #zweite Ordnung
l_gr=36.72    #Einheit in pm
dl_gr=0.98
d=201.4
theta=np.arcsin(2*l_gr/(2*d))*360/(2*np.pi)  #Winkel in Grad
d_theta=theta*np.sqrt((dl_gr/l_gr)**2)
print(theta)
print(d_theta)
```

10.50514008051186

0.2803659389679091

Python Code 2: Vermessen der Ka und Kb-Linien des Anodenmaterials

```
[100]: winkel2=[]
rate2=[]

f = open('C:\\\\Users\\\\shiy0\\\\OneDrive\\\\Dokumente\\\\PAP 2.2\\\\Versuch 255\\\\shi_
˓→versuch 255\\\\aufgabe 2 1.Ordnung.txt', 'r')

for line in f:
    line=line.replace(",",".")          #Komma durch Punkt ersetzen
    line=line.strip()                  #Whitespaces am Anfang und Ende einer
˓→Zeile entfernen
    zeile=line.split()                #Zeileneinträge in die Liste "zeile"
˓→schreiben
    winkel2.append(float(zeile[0]))   #Spalten in Listen eintragen
    rate2.append(float(zeile[1]))

print(winkel2)
print(rate2)
print(len(winkel2))
```

[8.4, 8.5, 8.6, 8.7, 8.8, 8.9, 9.0, 9.1, 9.2, 9.3, 9.4, 9.5, 9.6, 9.7, 9.8, 9.9,  
10.0, 10.1, 10.2, 10.3, 10.4, 10.5, 10.6, 10.7, 10.8, 10.9, 11.0, 11.1, 11.2]  
[240.4, 240.1, 238.1, 234.35, 237.0, 236.7, 227.95, 241.75, 255.8, 283.85,  
344.2, 425.65, 386.3, 315.65, 253.85, 235.55, 234.15, 235.3, 233.55, 251.45,  
303.55, 485.05, 882.35, 948.05, 155.0, 122.95, 22.7, 29.7, 172.25]  
29

```
[111]: plt.errorbar(winkel2,rate2, yerr=np.sqrt(rate2)/20, fmt='None', ecolor='r',_
˓→capsize=3, marker='s', mec='black', mfc='black', ms='2', label='Daten mit
˓→Fehlern')

def gauss(x,u,d,A):
    return A*np.exp(-(x-u)**2/(2*d**2))/np.sqrt(2*np.pi*d**2)

#Gauss 1
```

```

w_1=winkel2[1:18]
r_1=rate2[1:18]
popt2, pcov2=curve_fit(gauss,w_1,r_1,p0=[9.5, 0.3, 400], sigma=np.sqrt(r_1)/20,
                        absolute_sigma=True)
#Gauss 2
w_2=winkel2[18:25]
r_2=rate2[18:25]
popt3, pcov3=curve_fit(gauss,w_2,r_2,p0=[10.5, 0.3, 800], sigma=np.sqrt(r_2)/
                        20, absolute_sigma=True)

plt.xlabel('Winkel [${}^{\circ}$]')
plt.ylabel('Zählrate [1/s]')
plt.title('Ka und Kb Linien erster Ordnung')
plt.axvline(popt2[0], color='green', linestyle='--', label='Kb Linie 1. Ordnung')
plt.axvline(popt3[0], color='orange', linestyle='--', label='Ka Linie 1.
                        Ordnung')
plt.legend()

print("u1=",popt2[0], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov2[0][0]))
print("d1=",popt2[1], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov2[1][1]))
print("u2=",popt3[0], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov3[0][0]))
print("d2=",popt3[1], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov3[1][1]))

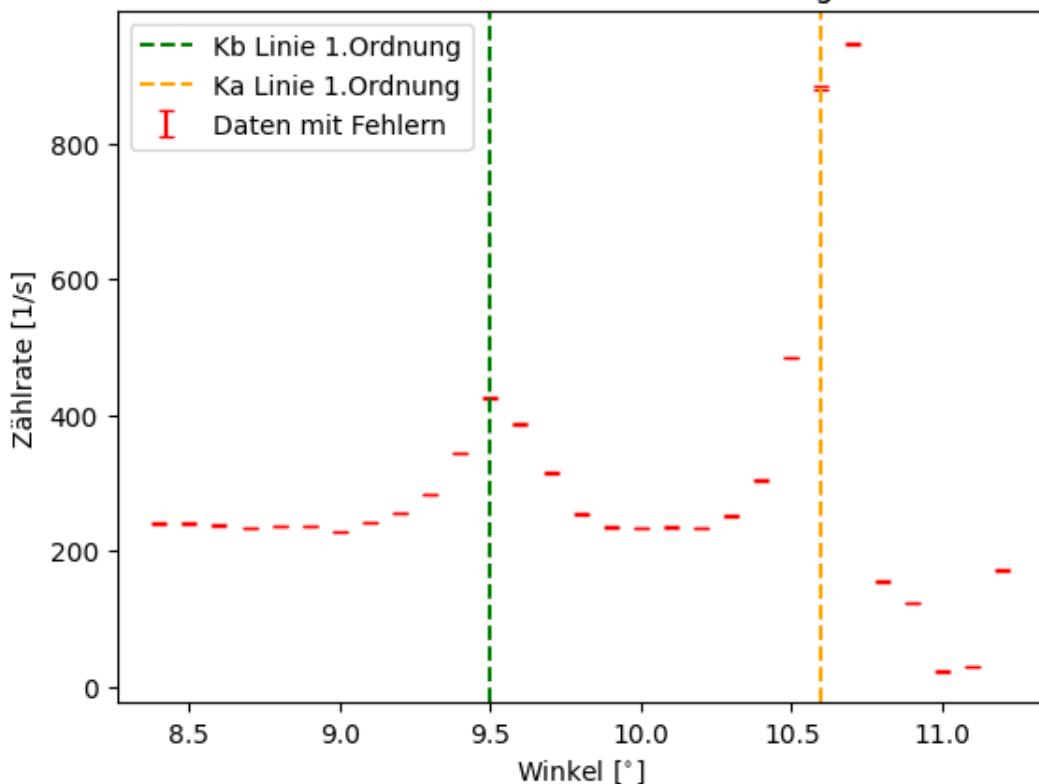
```

```

u1= 9.426174985865575 , Standardfehler= 0.0018136478354173896
d1= 1.0206723262678254 , Standardfehler= 0.003929962820008735
u2= 10.572183006472471 , Standardfehler= 0.00017467349117378624
d2= 0.16156097328906122 , Standardfehler= 0.00018260438800441495

```

### Ka und Kb Linien erster Ordnung



```
[102]: winkel3=[]
rate3=[]

f = open('C:\\\\Users\\\\shiy0\\\\OneDrive\\\\Dokumente\\\\PAP 2.2\\\\Versuch 255\\\\shi\\\\versuch 255\\\\Aufgabe 2 2. Ordnung.txt', 'r')

for line in f:
    line=line.replace(",",".")          #Komma durch Punkt ersetzen
    line=line.strip()                  #Whitespaces am Anfang und Ende einer Zeile entfernen
    zeile=line.split()                #Zeileneinträge in die Liste "zeile"
    schreiben
    winkel3.append(float(zeile[0]))   #Spalten in Listen eintragen
    rate3.append(float(zeile[1]))

print(winkel3)
print(rate3)
print(len(winkel3))
```

[17.5, 17.6, 17.7, 17.8, 17.9, 18.0, 18.1, 18.2, 18.3, 18.4, 18.5, 18.6, 18.7,

```

18.8, 18.9, 19.0, 19.1, 19.2, 19.3, 19.4, 19.5, 19.6, 19.7, 19.8, 19.9, 20.0,
20.1, 20.2, 20.3, 20.4, 20.5, 20.6, 20.7, 20.8, 20.9, 21.0, 21.1, 21.2, 21.3,
21.4, 21.5, 21.6, 21.7, 21.8, 21.9, 22.0]
[81.6, 77.85, 81.35, 81.25, 82.85, 81.5, 79.25, 82.65, 86.2, 80.2, 90.35, 94.8,
90.4, 91.2, 95.8, 88.3, 81.5, 79.55, 79.35, 78.45, 83.65, 77.85, 75.9, 77.0,
76.7, 78.55, 79.6, 74.45, 70.75, 75.8, 74.4, 75.0, 75.2, 84.3, 91.25, 103.95,
115.05, 131.65, 133.2, 109.65, 88.4, 73.2, 75.25, 70.25, 76.75, 69.15]
46

```

```

[115]: plt.errorbar(winkel3,rate3, yerr=np.sqrt(rate3)/20, fmt='None', ecolor='r',
                   capsizes=3, marker='s', mec='black', mfc='black', ms='2', label='Daten mit
                   Fehlern')

#Gauss 1
w_1=winkel3[1:21]
r_1=rate3[1:21]
popt2, pcov2=curve_fit(gauss,w_1,r_1,p0=[18.6, 0.3, 100], sigma=np.sqrt(r_1)/
                       20, absolute_sigma=True)
#Gauss 2
w_2=winkel3[18:45]
r_2=rate3[18:45]
popt3, pcov3=curve_fit(gauss,w_2,r_2,p0=[21.6, 0.3, 130], sigma=np.sqrt(r_2)/
                       20, absolute_sigma=True)

plt.xlabel('Winkel [${}^{\circ}$]')
plt.ylabel('Zählrate [1/s]')
plt.title('Ka und Kb Linien zweiter Ordnung')
plt.axvline(18.7, color='green', linestyle='--', label='Kb Linie 2.Ordnung')
plt.axvline(21.3, color='orange', linestyle='--', label='Ka Linie 2.Ordnung')
plt.legend()

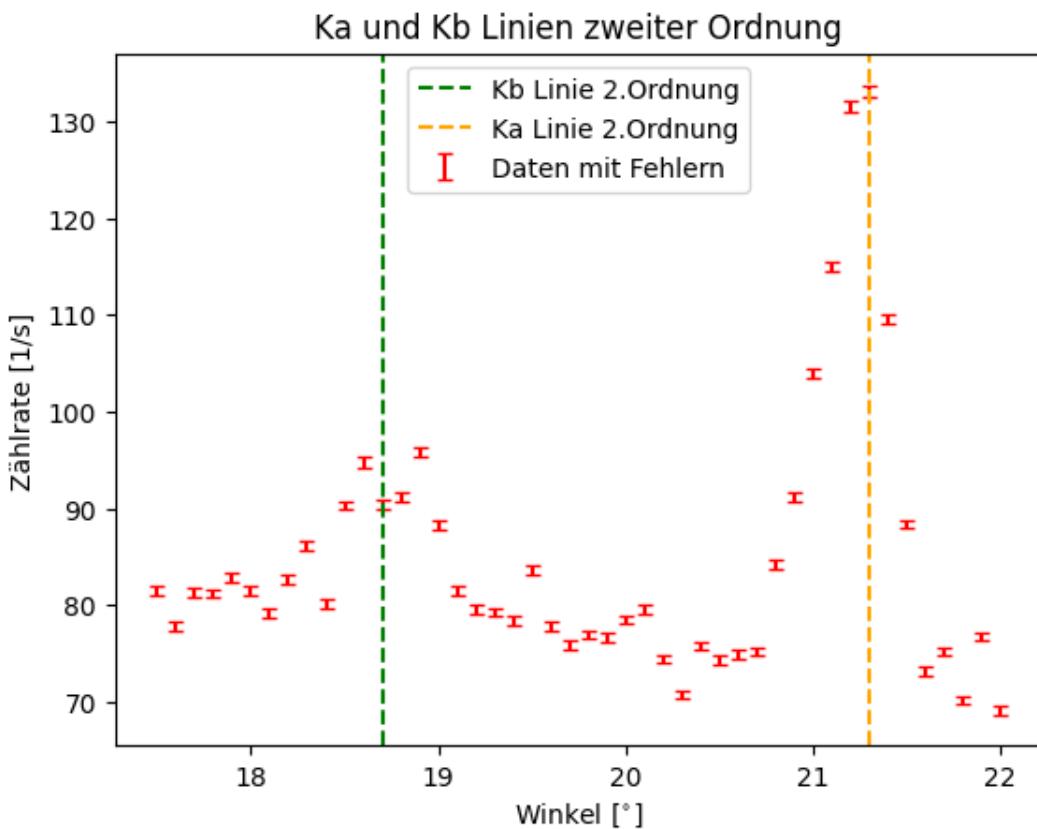
print("u1=",popt2[0], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov2[0][0]))
print("d1=",popt2[1], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov2[1][1]))
print("u2=",popt3[0], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov3[0][0]))
print("d2=",popt3[1], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov3[1][1]))

```

```

u1= 18.622653262204985 , Standardfehler= 0.008231124973633548
d1= 1.923755059491875 , Standardfehler= 0.02993000101194274
u2= 21.12276866458108 , Standardfehler= 0.0182781212978586
d2= 2.8164498297327807 , Standardfehler= 0.043468283671239345

```



Python Code 3: Zählrate als Funktion der Beschleunigungsspannung

```
[104]: U=np.array([20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35])
Z=np.array([1.25,2.05,3.55,4.70,6.75,11.00,19.60,30.40,40.85,55.65,65.10,73.
         ↪95,92.90,105.80,117.10,132.60])
dU=0.1
dZ=np.sqrt(Z)/20

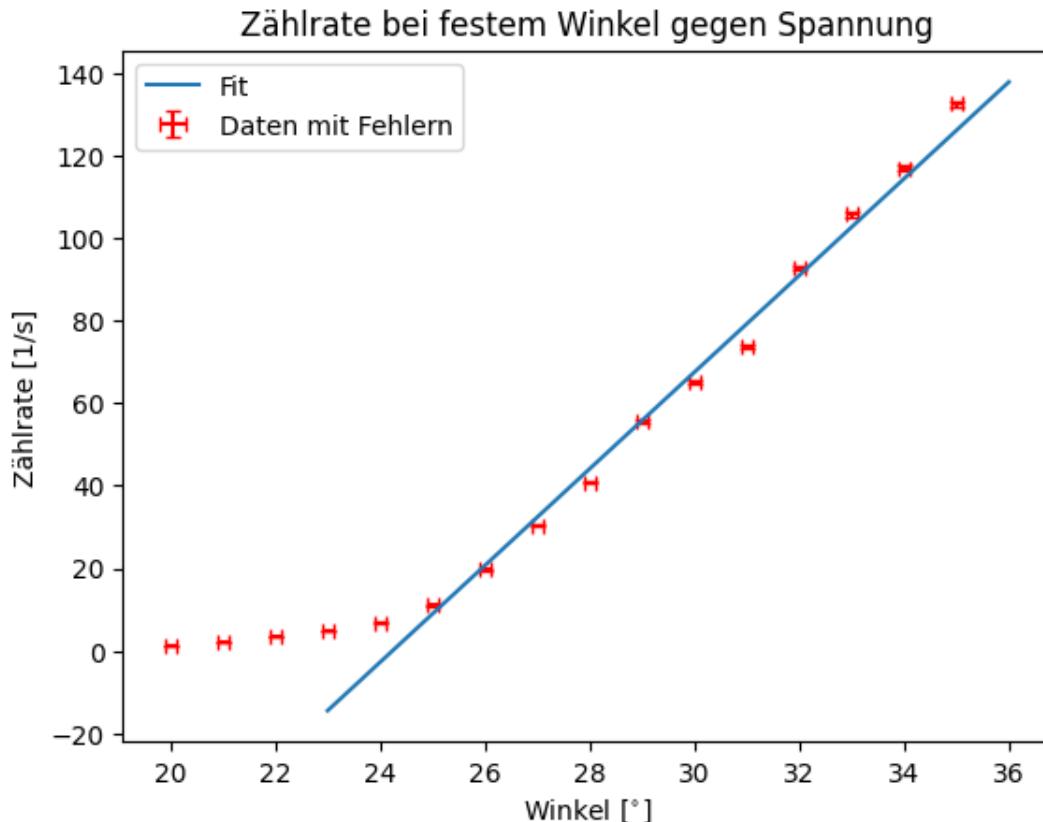
plt.errorbar(U,Z, yerr=dZ,xerr=dU, fmt='None', ecolor='r', capsize=3, □
             ↪marker='s', mec='black', mfc='black', ms='2', label='Daten mit Fehlern')

popt, pcov=curve_fit(l,U[5:],Z[5:],sigma=dZ[5:], absolute_sigma=True)
x_range=np.linspace(23, 36, 25)
plt.plot(x_range,l(x_range,*popt), label='Fit')
plt.xlabel('Winkel [$^{\circ}$]')
plt.ylabel('Zählrate [1/s]')
plt.title('Zählrate bei festem Winkel gegen Spannung')
plt.legend()

print("a=",popt[0], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[0][0]))
```

```
print("b=",popt[1], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[1][1]))
```

```
a= 11.730739711781668 , Standardfehler= 0.033060629625110846  
b= -284.3640259140962 , Standardfehler= 0.916020853569227
```



Python Code 4: Messung des Röntgenspektrums mit einem NaCl-Kristall

```
[105]: winkel=[]  
rate=[]  
  
f = open('C:\\\\Users\\\\shiy0\\\\OneDrive\\\\Dokumente\\\\PAP 2.2\\\\Versuch 255\\\\shi_\\\\versuch 255\\\\Aufgabe 4 NaCl Linie.txt', 'r')  
  
for line in f:  
    line=line.replace(",",".")           #Komma durch Punkt ersetzen  
    line=line.strip()                   #Whitespaces am Anfang und Ende einer Zeile entfernen  
    zeile=line.split()                 #Zeileneinträge in die Liste "zeile"  
    schreiben  
    winkel.append(float(zeile[0]))      #Spalten in Listen eintragen
```

```

rate.append(float(zeile[1]))

print(winkel)
print(rate)
print(rate[20])

[3.0, 3.2, 3.4, 3.6, 3.8, 4.0, 4.2, 4.4, 4.6, 4.8, 5.0, 5.2, 5.4, 5.6, 5.8, 6.0,
6.2, 6.4, 6.6, 6.8, 7.0, 7.2, 7.4, 7.6, 7.8, 8.0, 8.2, 8.4, 8.6, 8.8, 9.0, 9.2,
9.4, 9.6, 9.8, 10.0, 10.2, 10.4, 10.6, 10.8, 11.0, 11.2, 11.4, 11.6, 11.8, 12.0,
12.2, 12.4, 12.6, 12.8, 13.0, 13.2, 13.4, 13.6, 13.8, 14.0, 14.2, 14.4, 14.6,
14.8, 15.0, 15.2, 15.4, 15.6, 15.8, 16.0, 16.2, 16.4, 16.6, 16.8, 17.0, 17.2,
17.4, 17.6, 17.8, 18.0]
[88.2, 119.0, 180.4, 250.8, 324.6, 341.0, 385.6, 422.6, 427.8, 427.0, 421.8,
401.2, 409.2, 387.8, 433.8, 620.6, 456.4, 380.8, 508.6, 1150.6, 730.4, 445.0,
346.2, 287.8, 232.8, 224.8, 211.8, 191.8, 171.0, 180.8, 154.0, 153.8, 132.8,
124.6, 108.6, 112.6, 105.0, 108.6, 91.2, 109.6, 108.0, 81.4, 92.6, 87.6, 82.4,
92.0, 90.4, 135.2, 140.6, 97.2, 76.6, 79.4, 81.4, 81.6, 89.0, 178.0, 340.6,
135.2, 92.4, 76.8, 70.2, 65.6, 63.0, 65.0, 61.8, 49.6, 49.8, 54.0, 49.8, 51.6,
53.6, 50.2, 50.4, 44.2, 43.4, 41.2]
730.4

```

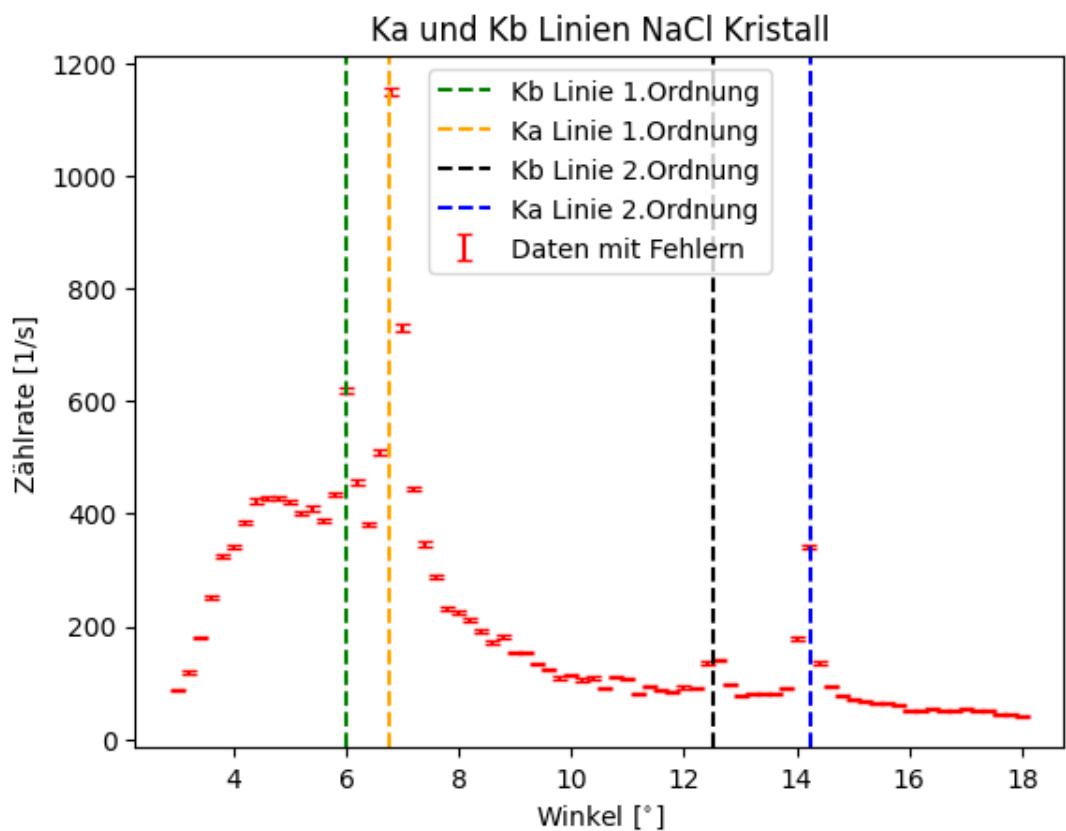
```
[108]: plt.errorbar(winkel,rate, yerr=np.sqrt(rate)/5, fmt='None', ecolor='r',  

    ↪ capsize=3, marker='s', mec='black', mfc='black', ms='2', label='Daten mit  

    ↪ Fehlern')

plt.xlabel('Winkel [${}^{\circ}$]')
plt.ylabel('Zählrate [1/s]')
plt.title('Ka und Kb Linien NaCl Kristall')
plt.axvline(6.0, color='green', linestyle='--', label='Kb Linie 1.Ordnung')
plt.axvline(6.75, color='orange', linestyle='--', label='Ka Linie 1.Ordnung')
plt.axvline(12.5, color='black', linestyle='--', label='Kb Linie 2.Ordnung')
plt.axvline(14.25, color='blue', linestyle='--', label='Ka Linie 2.Ordnung')
plt.legend()
```

[108]: <matplotlib.legend.Legend at 0x14e4522bfe0>



[ ]:

## **6 Quelle**

- Wagner, J. (April 2022). Physikalisches Praktikum PAP 2.2 für Studierende der Physik [Praktikumsanleitung]. Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg. Abgerufen am 05. April 2024, von [https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/info/Corona/2\\_2\\_2022.pdf](https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/info/Corona/2_2_2022.pdf)