

Physikalisches Anfängerpraktikum

Sommersemester 2023

Versuch 14

Tutor: Leon Wulf

Mathematisches Pendel

1 Einleitung

1.1 Ziel des Versuchs

In diesem Experiment wird beabsichtigt, die Erdbeschleunigung durch die Anwendung eines Pendels, das sich annähernd wie ein mathematisches Pendel verhält, zu bestimmen. Dies soll durch eine präzise Messung und Berechnung der Fadenlänge und der Schwingungsdauer des Pendels erfolgen. Zusätzlich soll die Schwerkraftbeschleunigung unter Berücksichtigung verschiedener Korrekturen wie Auftrieb und Reibung ermittelt werden, indem ein Reflexsensor verwendet wird, um die relevanten Messdaten auszuwerten und die entsprechenden Berechnungen durchzuführen.



Abbildung 1: Versuchsaufbau

1.2 Physikalische Grundlagen

1.2.1 Mathematisches Pendel

- Der Begriff mathematisches Pendel bezeichnet ein idealisiertes Fadenpendel, bestehend aus einem Massepunkt, der an einem masselosen Faden hängt. Physikalisch motivierte Terme wie die Ausdehnung der Masse, die Masse des Fadens oder auch die Luftreibung werden hierbei nicht berücksichtigt.

Wie Abb 2, ein Massenpunkt der Masse M sei im homogenen Gravitationsfeld an einem masselosen Faden der Länge l aufgehängt. Das Pendel bewege sich in der x-y-Ebene. Bei einem Auslenkwinkel ϕ aus der Ruhelage zeigt der Faden in die Richtung:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= l\vec{e} = l(\sin\phi\vec{e}_x - \cos\phi\vec{e}_y) \\ \dot{\vec{x}} &= l\dot{\phi}(\cos\phi\vec{e}_x + \sin\phi\vec{e}_y) \\ \ddot{\vec{x}} &= l\ddot{\phi}(\cos\phi\vec{e}_x + \sin\phi\vec{e}_y) - l\dot{\phi}^2(\sin\phi\vec{e}_x - \cos\phi\vec{e}_y) \approx l\ddot{\phi}\vec{e}_x\end{aligned}$$

Senkrecht zum Pendel wirkt die Rückstellkraft:

$$\begin{aligned}\vec{F}_r &= \vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{e})\vec{e} \\ &= -Mg\vec{e}_y - (Mg\cos\phi)(\sin\phi\vec{e}_x - \cos\phi\vec{e}_y) \\ &= -\sin^2\phi Mg\vec{e}_y - Mg\cos\phi\sin\phi\vec{e}_x \approx -Mg\phi\vec{e}_x\end{aligned}$$

Damit wird die linearisierte Bewegungsgleichung eindimensional, und die Bewegungsgleichung laut:

$$M\ddot{x} = \vec{F}_r \iff \ddot{\phi} + \frac{g}{l}\phi = 0 \quad (1)$$

Oben bei der Winkelnährung haben wir $\phi \approx \sin\phi$ und $\cos\phi \approx 1 - \frac{1}{2}\phi^2$ benutzt. Gl. (1) ist offensichtlich eine harmonische Oszillatorgleichung für ϕ . Die Schwingungsfrequenz und ihre Periode sind:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (2)$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}} \quad (3)$$

1.2.2 Physikalisches Pendel

- Wir ersetzen den Massenpunkt M durch eine homogene Scheibe derselben Masse, der Dicke d und mit Radius R, die in ihrem Schwerpunkt an der Pendelstange fixiert wird. Aufgrund des Trägheitsmoments verändert die Gravitationskraft den Dreihimpuls des rotierenden Pendelkörpers während der Schwingung.

Bestimmen wir zunächst den Trägheitstensor. Wir brauchen nur das dritte Hauptträgheitsmoment $\Theta_{33} = \frac{MR^2}{2}$ mit der Masse $M = \pi\rho R^2 d$, da um die z-Achse der Scheibe gedreht wird.

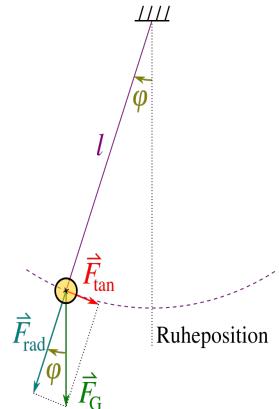
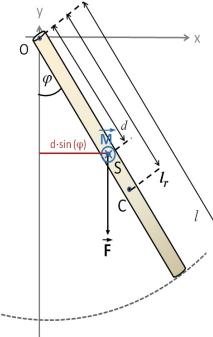


Abbildung 2:
Mathematisches
Pendel

Aber da die Drehachse um die Pendellänge l entfernt ist, ist das gesamte Trägheitsmoment durch das Steinersche Satz gegeben durch:

$$\Theta = \frac{MR^2}{2} + Ml^2 \quad (4)$$

Das Drehmoment der Gravitationskraft



(5) Abbildung 3:
Mathematisches
Pendel

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M} = \vec{F} \times l\vec{e} = -Mg\vec{e}_y \times l\sin\phi\vec{e}_x = Mgl\phi\vec{e}_z \quad (6)$$

Von $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ bekommen wir die Bewegungsgleichung:

$$(\frac{R^2}{2} + l^2)\ddot{\phi} + gl\phi = 0 \quad (7)$$

Damit bekommen wir die Schwingungsfrequenz und die Periode:

$$\omega = \sqrt{\frac{2gl}{R^2 + 2l^2}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R^2 + 2l^2}{2gl}} \quad (8)$$

Für $R \rightarrow 0$ bekommen wir wieder die gleiche Periode wie mathematisches Pendel.

1.2.3 Korrektur der Schwingungszeit für mathematisches Pendel

- Für die Bestimmung der Korrektur der Schwingungszeit auf endliche Winkel φ_0 geht man z.B. vom Energiesatz aus $E = E_{kin} + E_{pot}$, E_{kin} die kinetische Energie E_{pot} die potentielle Energie

Im Umkehrpunkt entspricht die Energie genau der potentiellen Energie. Daher gilt für jeden beliebigen Punkt:

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + (1 - \cos\varphi)lmg = (1 - \cos\varphi_0)lmg \quad (9)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \quad (10)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}dt \quad (11)$$

Wir integrieren von $t = 0$ bis $t = \frac{T}{4}$ und $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi_0$:

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = \int_0^{T/4} \sqrt{\frac{2g}{l}} dt = \frac{T}{4} \sqrt{\frac{2g}{l}} \quad (12)$$

Substitutionsregel benutzen:

$$u = \arcsin\left(\frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\varphi_0/2)}\right) \quad \frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1 - \sin^2(\varphi/2)}{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} \quad (13)$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = \sqrt{\frac{2}{1 - \sin^2(\varphi/2)}} du \quad (14)$$

Wir können Gl.(12) dann umschreiben:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2(\varphi/2)}} = \frac{T}{4} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (15)$$

Wir definieren noch: $k^2 = \sin^2(\varphi_0/2)$, so erhalten wir schließlich ein vollständiges elliptisches Integral erster Gattung:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} =: F(k, \pi/2) = \frac{T}{4} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (16)$$

Wenn wir die Wurzel nach kleiner k^2 taylorn:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 u + \frac{3}{8} (k^2 \sin^2 u)^2 + \dots \quad (17)$$

Mit der Beziehung $\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$ und $\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$ können wir $F(k, \pi/2)$ leicht ableiten und bekommen:

$$F(k, \pi/2) = \pi/2 [1 + (\frac{1}{2})^2 k^2 + (\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4})^2 k^4 + (\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6})^2 k^6 + \dots] \quad (18)$$

Wir benutzen wieder die Kleinwinkelnährung: $k^2 = \sin^2(\varphi_0/2) \approx (\varphi_0/2)^2$ und bricht nach dem quadratischen Term in k ab, so ergibt sich:

$$F(k, \pi/2) \approx \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\right) = \frac{T}{4} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (19)$$

$$\Rightarrow T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} F(k, \pi/2) = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\right) \quad (20)$$

$$\Rightarrow T^2 = T_0^2 \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{8}\right) \quad (21)$$

Wobei $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ ist und wir den Term $O(\varphi^4)$ vernachlässigt haben.

1.3 Relevante Formeln

1.3.1 Fehlerabschätzung

Betrachten wir wieder das mathematische Pendel. Aus der Schwingungsdauer Gl.(3) wird die Erdbeschleunigung bestimmt:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T_0^2} \quad (22)$$

Für die Messung der Schwingungsdauer werden n Schwingungsdauern gezählt, wobei n beliebig groß gemacht werden kann, erhält man eine Zeit $t = nT_0$ mit der Stoppgenauigkeit Δt , welche natürlich nicht von der Zahl der gemessenen Schwingungen abhängt. Dann ergibt die einfache Fehlerrechnung mit $T_0 = t/n$ für den relativen Fehler der Schwingungsdauer:

$$\frac{\Delta T_0}{T_0} = \frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta t}{nT_0} \quad (23)$$

Der Gesamtfehler der aus Gl.(22) zu ermittelnde Erdbeschleunigung g ist gegeben durch:

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T_0}\right)^2} = \sqrt{\left(4\pi^2 \frac{\Delta l}{T_0^2}\right)^2 + \left(4\pi^2 l \frac{2\Delta t \Delta T_0}{T_0^3}\right)^2} \quad (24)$$

$$= g \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta t}{nT_0}\right)^2} \quad (25)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta t}{nT_0}\right)^2} \quad (26)$$

Es ist offensichtlich, dass der Fehler bei der Längenmessung eine untere Grenze für den Gesamtfehler darstellt. Daher ist es nicht sinnvoll, die Genauigkeit der Zeitmessung wesentlich zu erhöhen, wenn die begrenzte Genauigkeit der Längenmessung nicht

verbessert werden kann.

Wir fordern deswegen:

$$\frac{2\Delta t}{nT_0} \approx 0,3 \frac{\Delta l}{l} \quad n \approx \frac{2l\Delta t}{0,3\Delta l T_0} \quad (27)$$

Dann wird die Fehlerquadratsumme in Gl.(26) aufgrund der quadratischen Addition der Fehler praktisch nur durch den Fehler der Längenmessung bestimmt, und wir bekommen eine Bedingungsgleichung für die Variable n . T_0 und Δt werden vorläufig von 20 Schwingungen ermittelt. Der mittlere Fehler σ_{T_0} gilt als die Stoppgenauigkeit und wird als Δt genommen.

1.3.2 Bestimmung der korrigierten Schwingungsdauer

- Bestimmung des Trägheitsmoments

Diese Betrachtungsweise des Pendels berücksichtigt jedoch einige physikalische Eigenschaften eines realen Pendels nicht, die für sehr exakte Messungen wichtig sind. Zunächst ist die Masse am Pendel natürlich keine Punktmasse sondern besitzt eine Ausdehnung. Der Faden besitzt selbst eine Masse. Diese Faktoren können berücksichtigt werden, indem man das Schwerependel als Drehpendel wie 1.2.2 mit dem Trägheitsmoment bzgl. der Drehachse durch P (Abb.1):

$$J_{Ges} = J_{Kugel} + J_{Faden} = m_K l^2 + \frac{2}{5} m_K r^2 + \frac{1}{3} m_F l'^2 \quad (28)$$

Hier bezeichnen m_K die Masse der Kugel, m_F die Masse des Fadens, l, l' Pendellänge und Fadenlänge und r der Kugelradius.

Analog zu Versuch 12 haben wir auch die Periode eines Drehpendels:

$$T_D = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} \quad (29)$$

wobei J das Trägheitsmoment bzgl. der Drehachse und D die Winkelrichtgröße des Pendels.

- Bestimmung der Winkelrichtgröße D

Bildet das Pendel den Winkel φ mit der Ruhelage (Abbildung 4), so erzeugen die Gewichte von Kugel und Faden ein rucktreibendes Drehmoment, wobei das Gewicht der Kugel um den Auftrieb in Luft (Dichte ρ_L , Volumen V_K) vermindert ist:

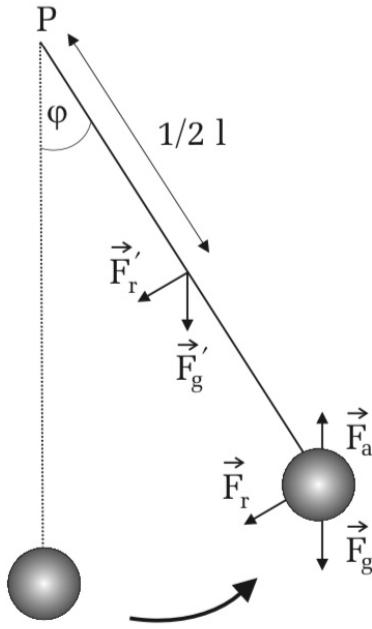


Abbildung 4: Kräfte die an das Pendel angreifen: Reibungskraft \vec{F}_R , Gewichtskraft \vec{F}_G , Auftrieb \vec{F}_a . Die gestrichenen Größen beziehen sich auf den Faden.

$$|\vec{F}_a| = \rho_L V_K g \quad (30)$$

Auf Kugel und Faden wirkende Drehmoments:

$$M_K = -(m_K - \rho_L V_K) g \sin \varphi l \quad M_F = -m_F g \cdot \frac{1}{2} l' \sin \varphi$$

Für das Drehmoment gilt:

$$M = -[(m_K - \rho_L V_K) g \sin \varphi l + 1/2 m_F g \sin \varphi l'] \quad (31)$$

Wir setzen $\sin \varphi \approx \varphi$, so ergibt sich mit $m_K = \rho_K V_K$:

$$M = - \left[m_K \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_K} \right) + \frac{1}{2} m_F \right] g l \varphi \quad (32)$$

Wegen $M = -D\varphi$ ergibt:

$$D = m_K g l \left[1 - \left(\frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{1}{2} \frac{m_F}{m_K} \right) \right] \quad (33)$$

- Bestimmung der Schwingungsdauer

Wir setzen J, D in (29) ein, es führt in linearer Näherungsformel $1/(1 - \epsilon) \approx 1 + \epsilon$ für $\epsilon \ll 1$ zu:

$$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{r^2}{l^2} + \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{1}{6} \frac{m_F}{m_K} \right) \quad (34)$$

wobei Produkte der Form $(\rho_L/\rho_K)(r^2/l^2)$, $(m_F/m_K)(r^2/l^2)$ etc., als Größen klein in 2. Ordnung, vernachlässigbar klein sind.

Ein weiterer Korrekturterm kommt, dass die Schwingungsdauer winkelabhängig ist wie in 1.2.3 erklärt worden ist:

$$T_2^2 = T_1^2 \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{8} \right) \quad (35)$$

Der dritte Korrekturterm ergibt sich aus der Dämpfung δ der Luftreibung. Aus Versuch 13 kennen wir schon, dass die gedämpfte harmonische Schwingung:

$$\omega_3^2 = \omega_2^2 - \delta^2 = \omega_2^2 \left(1 - \left(\frac{\delta^2}{\omega_2^2} \right) \right) \quad (36)$$

Wegen $T_3/T_2 = \omega_2/\omega_3$ und linearer Näherungsformel $1/(1 - \epsilon) \approx 1 + \epsilon$:

$$T_3^2 = T_2^2 \left[1 + \left(\frac{\delta^2}{\omega_2^2} \right) \right] \quad \omega_2 = \omega_0 \quad (37)$$

Wir fassen (34), (35), (36) zusammen und bekommen die Periodendauer:

$$T_g^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{r^2}{l^2} + \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{1}{6} \frac{m_F}{m_K} + \frac{\varphi_0^2}{8} + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} \right) \quad (38)$$

wobei T_g die gemessene Periodendauer darstellt.

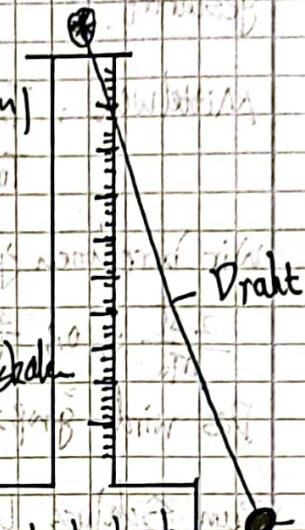
2 Durchführung

Versuchsaufbau, Versuchsdurchführung und Messprotokoll: siehe folgende Seiten.

Versuch 14 — Mathematisches Pendel

Messaufbau:

- Mathematisches Pendel mit 2 Spiegelstufen (1cm)
- Stoppuhr
- Messschieber
- Lichtschranke mit Zähler

Aufgabe 1: Länge & Schwingungsdauer -Messung

Zuerst wird die Länge des Pendels bestimmt.

die als Abstand Aufhängung bis Mitte Kugel bezeichnet.

Die Aufhängung des Pendels wird dreimal justiert

und Länge gemessen, indem wir die Spitze der oberen Aufhängung aus der kleinen Vertiefung nehmen und auf die plane Fläche, der Aufhängung setzen. Wir lesen die Koordinate der oberen Kante und unteren Rande ab.

Tabelle 1: Pendelaufhängung

Pos 1 [cm]	Pos 2 [cm]	Pos 3 [cm]	Pendellänge [cm]	Durchmesser [cm]
97.80	3.70	1.40	$L_1 = 97.60$	2.40
97.90	3.65	1.30	$L_2 = 97.70$	2.40
97.95	3.75	1.35	$L_3 = 97.75$	2.40

Fehler der Messung

Mittelwert der Pendellänge: $L = 97.68 \text{ cm}$ Mittlere Fehler des Mittelwerts: $\sigma_L = 0.025 \text{ cm}$

$$\Delta L_M = 0.05 \text{ cm} \Rightarrow \Delta L_R = \sqrt{3} (\Delta L_M)^2 = 0.0425 \text{ cm} = 0.866$$

Tabelle 2: T_0 Schwingungsdauer (5 × 20 Schwingungen)

Nr.	Anzahl Schwingungen	Periodendauer $20 T_0$ [s] $\pm t$	T_0 [s] $= \frac{t}{20}$
1	20	39.46	1.9730
2	20	39.31	1.9655
3	20	39.29	1.9645
4	20	39.31	1.9655
5	20	39.54	1.9770

Beim Abzählen der Schwingungen benutzen wir die Reflexlichtschranke. Wir positionieren den Reflexsensor unter Gleichgewichtsposition. Bei Periodenmessung haben wir an der maximalen Auslenkung gestartet.

Mittelwert : $T_{20} = 3,9, 3,8205$ Mittlere Fehler : Reaktionszeit :

$$T_0 = \frac{T_{20}}{20} = 1,96915 \quad \sigma_T = \sqrt{\frac{T_{20}}{20}} = 0,02723 \quad \sigma T = 0,25$$

$$\sigma_T = \sqrt{T_0/20} = 0,00136 \quad \Delta t = \sigma T$$

Wir berechnen jetzt die Anzahl der Schwingungen:

$$\frac{2 \Delta t}{n T_0} \approx 0,3 \frac{\Delta t}{T} \Leftrightarrow n = \left(0,3 \frac{\Delta t}{T} \cdot \frac{T}{\Delta t} \right)^{-1} \approx 10,58$$

Das wird "größtigig" auf 20 gerundet.

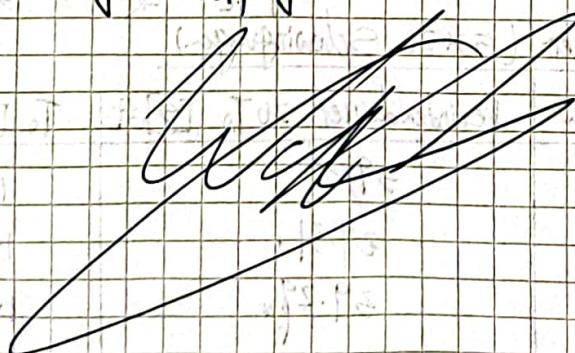
Zum Schluss lassen wir das Pendel 200 mal schwingen und messen die Schwingungsdauer sowie die Auslenkung bei verschiedenen Zeitpunkten ab:

Alle 10 Schwingungen bestimmen wir die Amplitude.

Tabelle 3 : Amplitude zur Zeit

Schwingungen	0	10	20	30	40	50	60	70
[cm] Auslenkung	4,40	4,40	4,25	4,30	4,25	4,20	4,10	4,00
Schwingungen	80	90	100	110	120	130	140	150
[cm] Auslenkung	4,00	3,90	3,80	3,70	3,60	3,70	3,70	3,60
Schwingungen	160	170	180	190	200			
[cm] Auslenkung	3,55	3,50	3,40	3,40	3,30			

Der Fehler des Auslenkung beträgt $\pm 0,3 \text{ cm}$, da das Absehen sehr ungenau erfolgte

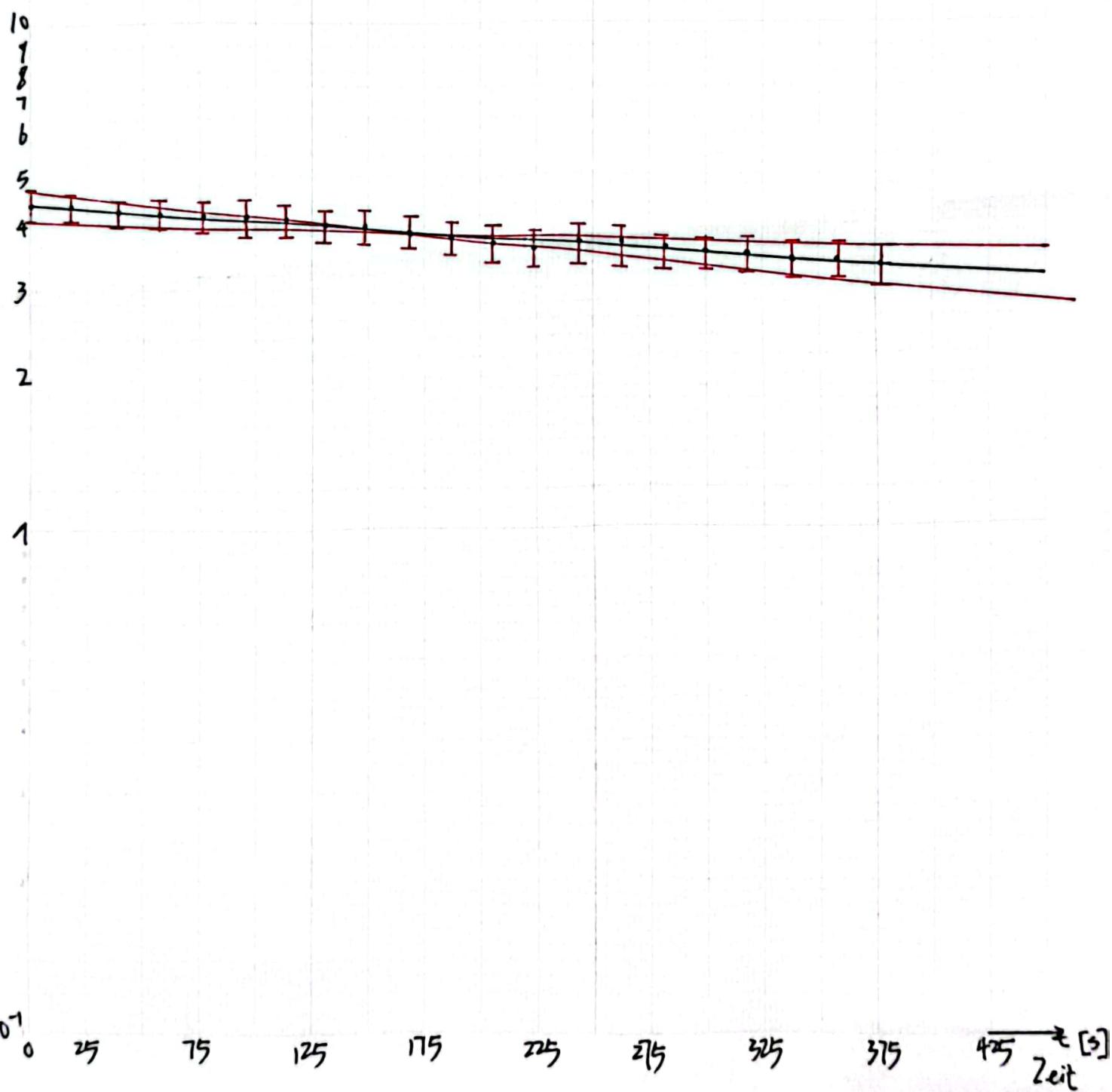


Auslenkung
[cm]

Diagramm 1: Auslenkung als Funktion der Zeit

— : Ausgleichsgerade

— : Fehlergerade



3 Auswertung

Wir bestimmen zuerst die Pendellänge sowie ihren Fehler nach unserem Messprotokoll:

$$l = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{3} = 97,680\text{cm}$$

Die Fadenlänge beträgt: $l_F = l - r = 96,480\text{cm}$, wobei r der Radius der Kugel ist.

Fehler der Messung Δl_M sowie der mittlere Fehler des Mittelwerts σ_l lauten:

$$\Delta l_M = 0,050\text{cm} \quad \sigma_l = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (l_i - l)^2}{n(n-1)}} \approx 0,035\text{cm}$$

Daher ergibt sich der Fehler:

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta l_M)^2 + (\sigma_l)^2} = 0,043\text{cm} \quad \Rightarrow l = (97,680 \pm 0,043)\text{cm} \quad (39)$$

Analog haben wir die Periodendauer des Pendels bestimmt. Wir achten hier nur auf den mittleren Fehler des Mittelwerts von der Periode und nehmen an, dass die menschliche Reaktionszeit als systematischer Fehler mithilfe von 5 Messungen ausgeglichen wird.

$$T_0 = (1,9691 \pm 0,0014)\text{s} \quad (40)$$

Im nächsten Schritt werden wir die Fallbeschleunigung zuerst ohne und anschließend unter Berücksichtigung der Fehlerterme, wie sie in Abschnitt 1.3 beschrieben sind, berechnen. Um die beiden Werte besser voneinander unterscheiden zu können, bezeichnen wir die Fallbeschleunigung, die ohne Berücksichtigung der Fehlerterme ermittelt wird, während g den Wert repräsentiert, der unter Einbeziehung dieser Korrekturterme berechnet wird.

3.1 Bestimmung der Fallbeschleunigung ohne Korrekturen

Wir setzen die Werte von T_0 und l in die Gl.(22) ein und bekommen die Erdbeschleunigung:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T_0^2} \approx 9,9355 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (41)$$

Der Fehler Δg wird aus der Gauß-Fehlerfortpflanzung berechnet:

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l} \Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T_0} \Delta T_0\right)^2} \quad (42)$$

$$= \sqrt{\left(4\pi^2 \frac{\Delta l}{T_0^2}\right)^2 + \left(-8\pi^2 \frac{l \Delta T_0}{T_0^3}\right)^2} \quad (43)$$

$$\approx 0,0046 \frac{m}{s^2} \quad (44)$$

$$\Rightarrow g' = (9,9355 \pm 0,0046) \frac{m}{s^2} \quad (45)$$

Wir würden weiter die Abweichung der bestimmten Erdbeschleunigung von Literaturwert $g_L = (9,80984 \pm 2 \cdot 10^{10^{-5}}) \frac{m}{s^2}$ berechnen:

$$\frac{g_L - g'}{g_L} \approx 1,28\% \quad (46)$$

$$\frac{|g_L - g'|}{\sqrt{(\Delta g_L)^2 + (\Delta g')^2}} \approx 27,32 \quad (47)$$

Bei Fehlerabschätzung sind wir auf jeden Fall ein bisschen konservativ und haben den signifikanten Fehler zwischen dem bestimmten Wert und dem Literaturwert, der jeweils um 27,32 σ abweicht.

3.2 Bestimmung der Fallbeschleunigung unter Berücksichtigung der Korrekturen

Das Pendel soll eigentlich nicht einfach als ein ideales Pendel betrachtet werden. Wie 1.3.2 schon erklärt hat, werden wir hier die Auswertung unter Berücksichtigung der Korrekturen durchführen.

Wir haben zuerst die Amplitude als Funktion der Zeit $a(t)$ sowie ihre Fehlergerade graphisch auf eindekadisches Logarithmenpapier aufgetragen und aus der Steigung die Dämpfung δ wie Versuch 13 ermittelt:

Schwingungen	0	10	20	30	40	50	60	70
Zeit [s]	0	19,691	39,382	59,073	78,764	98,455	118,146	137,837
Auslenkung [cm]	4,40	4,40	4,35	4,30	4,25	4,20	4,10	4,00

Schwingungen	80	90	100	110	120	130	140	150
Zeit [s]	157,528	177,219	196,910	216,601	236,292	255,983	275,674	295,365
Auslenkung [cm]	4,00	3,90	3,80	3,70	3,60	3,70	3,70	3,60

Schwingungen	160	170	180	190	200
Zeit [s]	315,056	334,747	354,438	374,129	393,820
Auslenkung [cm]	3,55	3,50	3,40	3,40	3,30

Die Zeit $t = nT_0$, wobei n die Anzahl der Schwingungen ist.

Der Fehler von t haben wir auch berechnet durch $\Delta t = n\Delta T_0$, jedoch gegenüber dem Fehler der Auslenkung ist Δt vernachlässigbar, weshalb wir graphisch nicht darstellen werden.

Nun bestimmen wir die Dämpfungskoeffizient δ indem wir die Steigungen der beiden Geraden feststellen:

$$a(t) = a_0 e^{-\delta t} \Rightarrow \delta = \frac{\ln(a_1) - \ln(a_2)}{t_2 - t_1} \quad (48)$$

$$a_{\text{Ausgleich}} = 7,3 \cdot 10^{-4} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \quad a_{\text{Fehler}} = 11,4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \quad (49)$$

$$\underline{\underline{\Rightarrow \delta = (7,3 \pm 4,1) \cdot 10^{-4} \frac{\text{cm}}{\text{s}}}} \quad (50)$$

Hier haben wir offensichtlich den Fehler überschätzt, weil sich die Amplitude sehr winzig verändert.

Unter der Voraussetzung kleiner Auslenkungswinkel können wir die Kleinwinkelnäherung nutzen. Dann ist der mittlere Auslenkungswinkel bei einer mittleren gemessenen Auslenkung \bar{x} durch die folgende Gleichung gegeben:

$$\varphi_0 \approx \sin(\varphi_0) = \frac{\bar{x}}{l} \quad (51)$$

Die mittlere Auslenkung \bar{x} berechnen wir aus den Messwerten der Auslenkung über 200 Schwingungen. Es ergibt sich $\bar{x} = (3,86 \pm 0,08) \text{ cm}$, wobei der Fehler wieder gleich Wurzel der Quadrataddition von mittleren Fehler und der Ablesegenauigkeit ist. Zusätzlich dazu sollte nicht die Fadenlänge, sondern der Abstand vom Drehpunkt zum Spiegellineal berücksichtigt werden. Dieser Abstand wurde gemessen und beträgt $l' = (93,52 \pm 0,30) \text{ cm}$. Jetzt kommt die Auslenkung:

$$\varphi_0 = \frac{\bar{x}}{l'} = \frac{3,86 \text{ cm}}{93,52 \text{ cm}} \approx 0,0413 \approx 2,367^\circ \quad (52)$$

Der Fehler von φ_0 wird gegeben als:

$$\Delta\varphi_0 = \varphi_0 \sqrt{\left(\frac{\Delta\bar{x}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l'}{l'}\right)^2} \approx 0,00087 \approx 0,050^\circ \quad (53)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\varphi_0 = (2,367 \pm 0,050)^\circ}} \quad (54)$$

Außerdem wollen wir die Eigenschwingung des Pendels in Betracht ziehen. Hieraus ergibt sich die mittlere Winkelgeschwindigkeit bei einer gemessenen Periodendauer:

$$\omega_0 = \frac{4\varphi_0}{T_g} \quad (55)$$

Da wir insgesamt $(393,82 \pm 0,02) s$ als Zeit für 200 Schwingungen gemessen haben, ergibt sich die mittlere Schwingungsdauer zu

$$T_g = (1,9691 \pm 1 \cdot 10^{-4})s \quad (56)$$

somit gilt:

$$\omega_0 = \frac{4\varphi_0}{T_g} = \frac{4 \cdot 0,0413}{1,9691} \approx 0,0839 \frac{1}{s}$$

Der Fehler von ω_0 :

$$\Delta\omega_0 = \omega_0 \sqrt{\left(\frac{\Delta\varphi_0}{\varphi_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T_g}{T_g}\right)^2} \approx 0,0018 \frac{1}{s} \quad (57)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\omega_0 = (0,0839 \pm 0,0018) \frac{1}{s}}} \quad (58)$$

Um die Gl.(38) zu verwenden werden noch die Massen von Körpern benötigt. Selbstverständlich, hier ist eine umformulierte Version des Textes Wir ermitteln die Masse der Kugel, die als kugelförmig angenommen wird, sowie die des Fadens, der als zylindrisch betrachtet wird und eine zuvor bestimmte Länge $l_F = (96,480 \pm 0,044)cm$ aufweist. Der Durchmesser des Fadens ist im Praktikumsskript als $d_F = 0,2mm$ angegeben. Wir verwenden dabei die Dichte, die im Praktikumsskript als $\rho_{Eisen} = 7,86 \frac{g}{cm^3}$ festgelegt ist:

$$m_K = V_K \cdot \rho_{Eisen} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{Eisen} \approx 0,0568 \text{ kg} \quad (59)$$

$$m_F = V_F \cdot \rho_{Eisen} = \pi \left(\frac{d_F}{2}\right)^2 l_F \cdot \rho_{Eisen} \approx 2,381 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \quad (60)$$

Wir berechnen wieder mit Fehlerfortpflanzung den Fehler:

$$\Delta m_K = \rho_{Eisen} \Delta V_K = \rho_{Eisen} \cdot \frac{\partial V_K}{\partial r} \Delta r = 4\pi \rho_{Eisen} \cdot 3r^2 \Delta r \approx 0,0213 \text{ kg} \quad (61)$$

$$\Delta m_F = \rho_{Eisen} \Delta V_F = \rho_{Eisen} \frac{\partial V_F}{\partial l_f} \Delta l_F = \rho_{Eisen} \pi \cdot \frac{d_F^2}{4} \Delta l_F \approx 0,001 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \quad (62)$$

Es folgt darauf:

$$\implies \underline{\underline{m_K = (0,0568 \pm 0,0213) \text{ kg}}} \quad (63)$$

$$\implies \underline{\underline{m_F = (2,381 \pm 0,001) \cdot 10^{-4} \text{ kg}}} \quad (64)$$

$$(65)$$

Nun setzen wir alle benötigten Werte: die Dichte ρ_L von Luft, die Dichte ρ_{Eisen} von Eisen, l (39) die Pendellänge, r der Radius von Kugel, T_g (56) die mittleren Schwingungsdauer, δ (50) die Dämpfungskoeffizient, φ_0 (54) die mittlere Auslenkung, ω_0 (58) die Eigenwinkelgeschwindigkeit, m_F (64) Masse des Fadens, m_K (63) Masse der Kugel in die Gl.(38) ein:

$$T_g^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{r^2}{l^2} + \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{1}{6} \frac{m_F}{m_K} + \frac{\varphi_0^2}{8} + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} \right) \quad (66)$$

Nach Umformung gilt die korrigierte Erdbeschleunigung:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T_g^2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{r^2}{l^2} + \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{1}{6} \frac{m_F}{m_K} + \frac{\varphi_0^2}{8} + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} \right) \quad (67)$$

Der Fehler wird gegeben als:

$$\Delta g = \left(\left(\frac{\partial g}{\partial l} \Delta l \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T_g} \Delta T_g \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial r} \Delta r \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial m_F} \Delta m_F \right)^2 \right) \quad (68)$$

$$+ \left(\frac{\partial g}{\partial m_K} \Delta m_K \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \varphi_0} \Delta \varphi_0 \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \delta} \Delta \delta \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \omega_0} \Delta \omega_0 \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (69)$$

$$(70)$$

Die partiellen Ableitungen lauten:

$$\frac{\partial g}{\partial l} = \frac{4\pi^2}{T_g^2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{r^2}{l^2} + \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{1}{6} \frac{m_F}{m_K} + \frac{\varphi_0^2}{8} + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} \right) + 4\pi^2 \frac{l}{T_g^2} \cdot \frac{-4}{5} \frac{r^2}{l^3} \quad (71)$$

$$\frac{\partial g}{\partial T_g} = -8\pi^2 \frac{l}{T_g^3} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{r^2}{l^2} + \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{1}{6} \frac{m_F}{m_K} + \frac{\varphi_0^2}{8} + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} \right) \quad (72)$$

$$\frac{\partial g}{\partial r} = 4\pi^2 \frac{l}{T_g^2} \cdot \frac{4}{5} \frac{r}{l^2} \quad (73)$$

$$\frac{\partial g}{\partial m_F} = \frac{-1}{6} \cdot 4\pi^2 \frac{l}{T_g^2} \cdot \frac{1}{m_K} \quad (74)$$

$$\frac{\partial g}{\partial m_K} = \frac{1}{6} \cdot 4\pi^2 \frac{l}{T_g^2} \cdot \frac{m_F}{m_K^2} \quad (75)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi_0} = 4\pi^2 \frac{l}{T_g^2} \cdot \frac{\varphi_0}{4} \quad (76)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \delta} = 4\pi^2 \frac{l}{T_g^2} \cdot \frac{2\delta}{\omega_0^2} \quad (77)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \omega_0} = 4\pi^2 \frac{l}{T_g^2} \cdot \frac{-2\delta^2}{\omega_0^3} \quad (78)$$

Wir fassen zum Schluss alle Werte zusammen und bestimmen die Erdbeschleunigung:

$$\rho_L = 1,2 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{Eisen} = \rho_K = 7,86 \cdot 10^{10^3} \text{ kg/m}^3$$

$$l = (97,680 \pm 0,043) \text{ cm}$$

$$T_g = (1,9691 \pm 1 \cdot 10^{-4}) \text{ s}$$

$$r = (1,2000 \pm 0,0025) \text{ cm}$$

$$m_F = (2,381 \pm 0,001) \cdot 10^{-4} \text{ kg}$$

$$m_K = (0,0568 \pm 0,0213) \text{ kg}$$

$$\varphi_0 = (0,0413 \pm 0,0009)$$

$$\delta = (7,3 \pm 4,1) \cdot 10^{-4} \text{ cm/s}$$

$$\omega_0 = (0,0839 \pm 0,0018) \text{ s}^{-1}$$

$$\Rightarrow g = (9,71293 \pm 0,03554) \frac{\text{m}}{\underline{\underline{s^2}}} \quad (79)$$

Zum Schluss möchten wir uns noch ein bisschen über die Abweichung zwischen der korrigierten Erdbeschleunigung und dem Literaturwert $g_L = 9,80984 \pm 2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ in Heidelberg:

$$\frac{|g_L - g|}{g_L} = \frac{9,80984 - 9,71293}{9,80984} \approx 0,00988 \quad (80)$$

$$\frac{|g_L - g|}{\sqrt{(\Delta g_L)^2 + (\Delta g)^2}} = \frac{9,80984 - 9,71293}{\sqrt{(2 \cdot 10^{-5})^2 + (0,03554)^2}} \approx 2,727 \quad (81)$$

Wir sehen, dass die Abweichung der korrigierten Erdbeschleunigung von dem Literaturwert schon deutlich kleiner als die, die ohne Berücksichtigung der Korrekturterme ausgerechnet wird!

Die relative Abweichung vom Literaturwert liegt lediglich bei 0,988%, was eine geringfügige Abweichung von nur $2,727 \sigma$ darstellt. Im Vergleich dazu zeigt sich eine signifikante Verbesserung im Vergleich zum Fehler ohne Berücksichtigung der Korrekturterme, der bei 1,280% und $27,320 \sigma$ liegt. Dies unterstreicht eine deutlich zufriedenstellendere Genauigkeit.

4 Diskussion

Im Rahmen unseres Experiments haben wir zuerst die Erdbeschleunigung mithilfe eines Fadenpendels ohne die Berücksichtigung von Korrekturtermen gemessen. Dies führte anfänglich zu einer Abweichung von 1,280% vom erwarteten Literaturwert. Wir führten fünf Serien von jeweils 20 Schwingungen durch, und das Ergebnis wies eine signifikante Abweichung von $27,320\sigma$ auf, die deutlich von der erwarteten Literaturabweichung abwich.

Als Reaktion darauf haben wir die Erdbeschleunigung unter Einbeziehung der Korrekturterme erneut bestimmt. Diese Vorgehensweise führte zu einer wesentlich präziseren Messung mit nur einer Abweichung von 0,988% und einem Fehler von lediglich $2,727\sigma$. Diese Ergebnisse verdeutlichen die Wirksamkeit der Berücksichtigung der Korrekturterme, die zu einer erheblichen Verbesserung der Genauigkeit führte.

Wir haben unsere Untersuchung auf der Annahme eines mathematischen Pendelmodells aufgebaut, bei dem wir davon ausgingen, dass das Pendel innerhalb eines engen Winkelbereichs maximale Auslenkungen erlebt. Diese Annahme ermöglichte es uns, die Pendelbewegung als einfache harmonische Schwingung zu betrachten. Die resultierende Taylorentwicklung (Gleichung 17) zeigte, dass die Schwingungsdauer unter diesen Bedingungen genau $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ beträgt. Allerdings gilt diese Annahme nur bei kleinen Auslenkungen, bei denen das Lagrange'sche Restglied vernachlässigbar ist. Für eine genaue Bestimmung der Schwingungsdauer unter allen Bedingungen bleibt die Lösung durch elliptische Integration (Gleichung 15) die bevorzugte Methode, sofern eine Taylorentwicklung vermieden werden soll.

Die Berücksichtigung von Reibung und Auftriebskraft ist unverzichtbar, da das Pendel nicht mehr als ideales mathematisches Pendel betrachtet werden kann, sondern als physikalisches Pendel mit Trägheitsmoment. Bei der Messung von 200 Perioden wählten wir zu Beginn eine geringe Auslenkung, um die verlangsamte Pendelbewegung genauer zu beobachten. Aufgrund der geringen Luftreibung und teilweise mechanischen Reibung war die Abnahme der Amplitude jedoch kaum wahrnehmbar und konnte sogar als nahezu linear angesehen werden, wie aus dem Diagramm hervorgeht, in dem die meisten Punkte im Intervall zwischen 2 und 3 nahe beieinander lagen.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial l} \Delta l &\approx 8,35 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s^2} & \frac{\partial g}{\partial T_g} \Delta T_g &\approx -1,93 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s^2} \\ \frac{\partial g}{\partial r} \Delta r &\approx 1,94 \cdot 10^{-5} \frac{m}{s^2} & \frac{\partial g}{\partial m_F} \Delta m_F &\approx -1,62 \cdot 10^{-7} \frac{m}{s^2} \\ \frac{\partial g}{\partial m_K} \Delta m_K &\approx 3,45 \cdot 10^{-2} \frac{m}{s^2} & \frac{\partial g}{\partial \varphi_0} \Delta \varphi_0 &\approx 2,25 \cdot 10^{-5} \frac{m}{s^2} \\ \frac{\partial g}{\partial \delta} \Delta \delta &\approx -5,16 \cdot 10^{-5} \frac{m}{s^2} & \frac{\partial g}{\partial \omega_0} \Delta \omega_0 &\approx -1,97 \cdot 10^{-6} \frac{m}{s^2}\end{aligned}$$

Bei der Fehlerabschätzung sind wir sehr vorsichtig vorgegangen. Obwohl die Berücksichtigung der Korrekturterme die Messgenauigkeit verbessert hat, besteht die Möglichkeit, dass der Fehler in beiden Fällen unterschätzt wurde. Die Fehler bei der Längenmessung und der Bestimmung der Kugelmasse hatten den größten Einfluss auf den Fehler Δg (siehe die Formel oben). Der Fehler bei der Längenmessung war auf einen Ablesefehler der Längenskala zurückzuführen, die eine Genauigkeit von 1 mm aufwies. Der Abstand zwischen dem Pendel und den Spiegelskalen trug ebenfalls zu visuellen Fehlern bei, was den Ablesefehler erheblich vergrößerte.

Die Bestimmung der Kugelmasse trug ebenfalls zur Fehlerabweichung bei, da die Dichte von Eisen und Luft temperaturabhängig ist und keine Raumtemperaturnmessung durchgeführt wurde. Zudem könnte der Verschleiß der Kugel im Laufe der Zeit zu Fehlern bei der Radiusmessung geführt haben, was wiederum zu einer größeren Abweichung von m_K führte. Daher wäre es ratsam, die Kugel und den Faden vor der Justierung zu wiegen.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass aufgrund der Erdrotation das auf dem Boden befindliche System nicht als vollständig inertial betrachtet werden kann, was zur Folge hat, dass Corioliskraft, Zentrifugalkraft und andere Scheinkräfte auftreten. Diese Faktoren hatten jedoch nur einen minimalen Einfluss auf das Experiment, und sie wurden aufgrund ihrer geringen Bedeutung nicht berücksichtigt (zum Beispiel führte die Corioliskraft zu einer Drehung der Schwingungsebene des Foucault-Pendels in Köln von 11 Grad pro Stunde, was für unser Experiment nicht relevant war).