UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

K. Wiegand, T. Stalljohann, T. Witt
Sommersemester 2025
Heidelberg, 24. Juni 2025

Grundlagen der Geometrie und Topologie

Übungsblatt 11

Stichworte: Fundamentalgruppe und Überlagerungen

Aufgabe 1 *Überlagerungen* (2+2 Punkte)

a) Zeigen Sie: Sei B ein kompakter, zusammenhängender Hausdorff-Raum.[1] Sei $p : E \to B$ eine Überlagerung und $b_0 \in B$ fixiert. Dann ist die Faser $p^{-1}(b_0)$ endlich genau dann wenn E kompakt ist.

b) Ergänzen Sie Lemma 7.38 aus der VL in folgendem Sinne: Sei Z zusammenhängend. Sind $q : X \to Y$ und $r : Y \to Z$ Überlagerungen sodass $z \in Z$ existiert mit $r^{-1}(z) \subseteq Y$ endlich, so ist auch $p := r \circ q : X \to Z$ eine Überlagerung.

Aufgabe 2 *Fundamentalgruppe von Produkten* (3 Punkte)

Gegeben seien zwei punktierte topologische Räume (X, x_0) und (Y, y_0). Geben Sie einen Isomorphismus

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

an.

Berechnen Sie die Fundamentalgruppe des n-Torus $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$.

Aufgabe 3 *Satz aus der Vorlesung* (1+2 Punkte)

a) Beweisen Sie Satz 7.29 (i) aus der VL (nur mit Sätzen, die zu diesem Zeitpunkt bekannt sind): Für jede Überlagerung $p : E \to B$ ist der induzierte Homomorphismus

$$p_* : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$$

injektiv. Hierbei ist natürlich $e_0 \in p^{-1}(b_0)$.

b) Sie dürfen jetzt Satz 7.29 vollständig verwenden. Berechnen Sie $\pi_1(\mathbb{RP}^n)$ für jedes $n \geq 1$.

---

[1] Sie dürfen verwenden: Jeder kompakte Hausdorff-Raum ist regulär, d.h. jeder Punkt hat eine Umgebungsbasis aus abgeschlossenen Mengen.

Aufgabe 4 *Topologisches Wedge-Produkt* (3+3 Punkte)
Auf dem 2-Torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ betrachten Sie den Teilraum

$$\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 := (\{*\} \times \mathbb{S}^1) \cup (\mathbb{S}^1 \times \{*\}) \ ,$$

den wir auch *das Wedge-Produkt zweier Kreise* nennen wollen.[2]

a) Zeigen Sie dass $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ unendlich ist.

b) Finden Sie die universelle Überlagerung von $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$.

Abgabe bis Dienstag, 01. Juli 2025, 13:00 Uhr im MaMpf in Zweiergruppen. Abgabe zu dritt ist erlaubt.

[2] siehe VL 18, Beispiele nach Satz 7.22