Physikalisches Anfängerpraktikum
Sommersemester 2023

Versuch 23 Tutor: Michael Gotzmann

Strom- und Spannungsmessung

1 Einleiung

1.1 Ziel des Versuchs

In diesem Experiment ist das Ziel, Spannungen und Stromstärken zu messen indem wir das Drehspulinstrument sowie den Kompensator benutzen. Gleichzeitig die Gültigkeit der Kirchhoffschen Maschenregel zu überprüfen. Um dies zu erreichen, werden wir den Messbereich der Strom- und Spannungsmessgeräte erweitern, indem wir Widerstände in Parallelschaltung und Reihenschaltung verwenden.

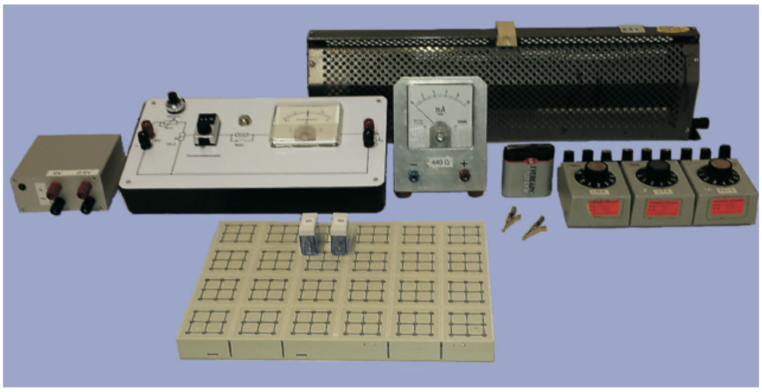

Abbildung 1: Aufbau des Versuchs Strom- und Spannungsmessung

1.2 Physikalische Grundlagen

1.2.1 Versuchsaufbau

- Drehspulinstrument

  Ein Drehspulinstrument, wie in Abbildung 2 dargestellt, ist ein Zeigerinstrument, bei dem der Ausschlag in direktem Verhältnis zum durchfließenden Strom steht. Im Inneren des Instruments befindet sich eine Spule, die drehbar gelagert ist und sich im Magnetfeld eines Permanentmagneten befindet. An dieser Spule ist ein Zeiger angebracht, der zusätzlich an einer Rückstellfeder befestigt ist.

  Wenn ein elektrischer Strom durch die Spule fließt, erfährt die Spule aufgrund der Lorentzkraft ein Drehmoment, das sie in Rotation versetzt. Die Spule wird so lange ausgelenkt, bis das Drehmoment, das durch die Lorentzkraft erzeugt wird, durch das Drehmoment der Rückstellfeder ausgeglichen wird. Der resultierende Abwinkel α, um den die Spule ausgelenkt wird, ist direkt proportional zur Stärke des Stroms I und zur Anzahl der Windungen n der Drehspule:

$$\alpha \propto nI \tag{1}$$

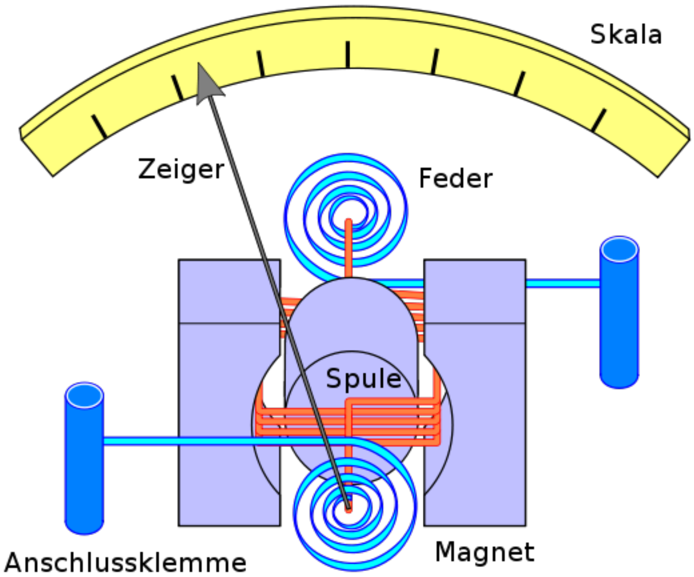

Abbildung 2: Aufbau eines Drehspulinstrument

Ein Drehspulinstrument fungiert als Strommessgerät. Die Messgenauigkeit eines solchen Instruments wird durch den Strom bestimmt, bei dem der Zeiger den maximalen Ausschlag erreicht. Wenn sehr geringe Ströme gemessen werden sollen, erfordert dies eine hohe Anzahl von Windungen n und ein geringes rückwirkendes Drehmoment. Typischerweise haben Amperemeter für geringe Ströme aufgrund ihrer hohen Windungszahl einen hohen Innenwiderstand R_{iA}.

Wenn der Innenwiderstand bekannt ist, kann ein Drehspulinstrument mithilfe des Ohmschen Gesetzes

$$U = I \cdot R \tag{2}$$

auch als Spannungsmessgerät verwendet werden.

- Kompensator

  Ein Spannungskompensator wird verwendet, um die Spannung in einem Netzwerk zu stabilisieren. Diese Geräte können Spannungsschwankungen ausgleichen und eine konstante Spannung aufrechterhalten, um Fehler oder Abweichungen in elektrischen Messungen zu korrigieren oder zu minimieren.

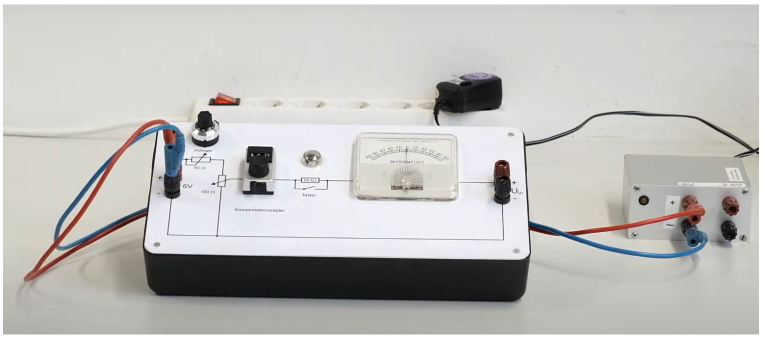

Abbildung 3: Aufbau eines Kompensators

Bei einem Kompensator wird eine bekannte, einstellbare Spannung U_e mit der zu messenden Spannung U_x verbunden, und der Strom zwischen diesen beiden Spannungsquellen wird gemessen. Die einstellbare Spannung wird schrittweise angepasst, bis kein Strom mehr fließt (Abbildung 4 oben). In diesem Fall entspricht die zu messende Spannung der bekannten einstellbaren Spannung. Da bei der Kompensation kein Strom oder nur ein äußerst geringer "Fehlerstrom" fließt, weist ein Kompensator einen sehr hohen Innenwiderstand auf.

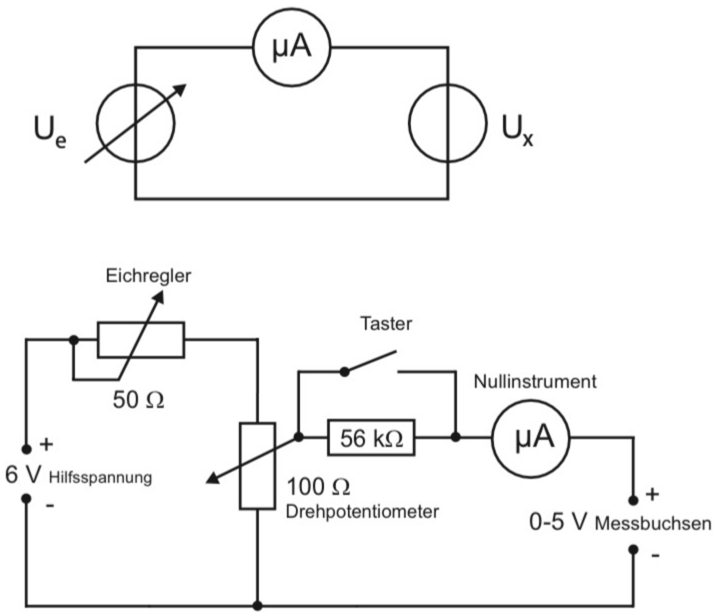

Abbildung 4: Aufbau eines Kompensators

Der Schaltplan des Kompensators ist in Abbildung 4 unten dargestellt. Die Gegen- oder Gegenspannung wird mithilfe eines Drehpotentiometers mit einer digitalen Skala von 0 bis 1000 eingestellt. Diese Skala muss zuvor kalibriert werden. Für die Kalibrierung steht eine präzise Referenzspannung von $2,5V \pm 0,02\%$ zur Verfügung.

Der Kompensator ist für den Betrieb im Bereich von 0 V bis 5 V ausgelegt. Das Drehpotentiometer wird auf 500 Skalenteile (was 2,5 V entspricht) eingestellt, und die 2,5 V Referenzspannung wird damit verbunden. Mit einem weiteren Potentiometer, dem Eichregler, wird der Kompensator abgestimmt, bis kein Strom mehr fließt. Auf diese Weise wird der Kompensator kalibriert, und die Spannung kann direkt anhand des Skalenanzeigers abgelesen werden.

1.2.2 Prinzipien der Messungen

(a) Die Kirchhoffschen Gesetze

- Das 1. Kirchhoffsche Gesetz besagt, dass die Summe aller Ströme, die an einem Punkt (Knoten) in einem elektrischen Netzwerk zusammenfließen, gleich null ist. Mit anderen Worten, die Summe der Ströme, die in einen Knoten hineinfließen, muss gleich der Summe der Ströme sein, die aus dem Knoten herausfließen.

$$\text{Knotenregel:} \sum I_{ein} = \sum I_{aus} \tag{3}$$

- Das 2. Kirchhoffsche Gesetz besagt, dass die algebraische Summe aller Spannungen in einer geschlossenen Schleife (Masche) eines elektrischen Netzwerks gleich null ist. Mit anderen Worten, die Summe der Spannungen, die in einer geschlossenen Schleife auftreten, ist gleich der Summe der Spannungen, die von den Komponenten in dieser Schleife verursacht werden.

$$\text{Maschenregel:} \sum_k U_k = 0 \tag{4}$$

(b) Messbereichserweiterung

Wenn die zu messende Größe den Messbereich eines Instruments überschreitet, muss der Messbereich mit Hilfe von Widerständen erweitert werden. Bei Strommessgeräten wird ein Widerstand R_p parallel zum Instrument geschaltet, während bei Spannungsmessgeräten der Widerstand in Serie geschaltet wird (Abbildung 5).

Angenommen, I_0 ist der maximale Messbereich eines Amperemeters mit einem Innenwiderstand R_i. Um den Messbereich um einen Faktor f zu erweitern, muss der Parallelwiderstand einen Strom von $(f-1)I_0$ ermöglichen. Da an beiden Widerständen die gleiche Spannung anliegt, gilt:

$$U_{Ri} = U_{Rp} \longrightarrow R_i I_0 = R_p(f-1)I_0 \longrightarrow R_p = \frac{R_i}{f-1} \tag{5}$$

Wenn der Messbereich eines Amperemeters um den Faktor f erweitert werden soll, muss der Parallelwiderstand einen Wert von $R_i/(f-1)$ haben. Bei einem Voltmeter mit dem Messbereich U_0 sollte am Serienwiderstand eine Spannung von $(f-1)U_0$ und am Innenwiderstand eine Spannung von U_0 anliegen. Da die Ströme durch beide Widerstände gleich groß sind, ergibt sich daraus:

$$I_{Ri} = I_{Rs} \longrightarrow U_0/R_i = (f-1)U_0/R_s \longrightarrow R_s = R_i(f-1) \tag{6}$$

Soll bei einem Voltmeter der Messbereich um den Faktor f erweitert werden, so muss der Serienwiderstand den Wert $R_i(f-1)$ besitzen.

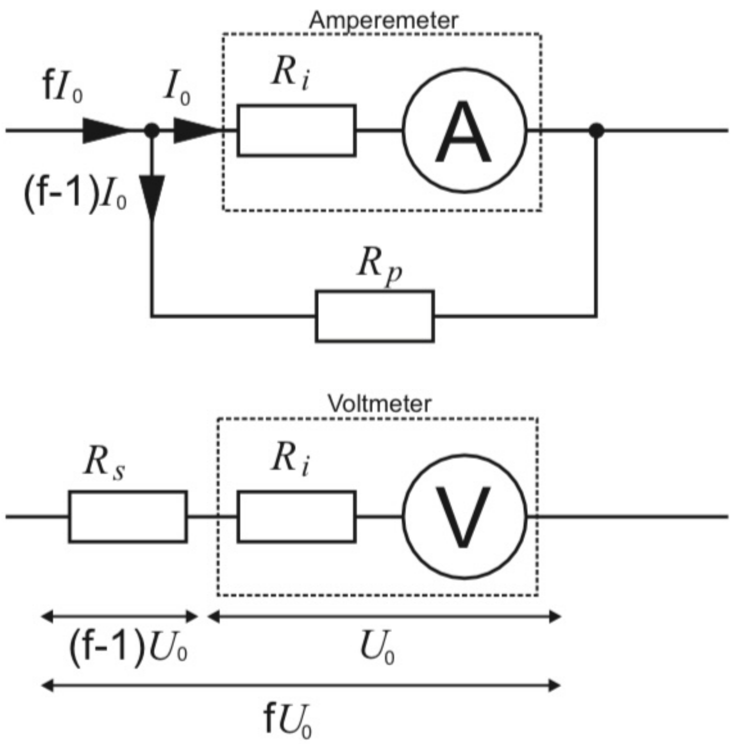

Abbildung 5: Messbereichserweiterung eines Amperemeters (oben) und eines Voltmeters (unten)

(c) Quellenspannung und Klemmenspannung

Ideale Spannungsquellen zeichnen sich dadurch aus, dass die Spannung unabhängig von der entnommenen Stromstärke ist. Die Spannung an den Ausgangsklemmen (Klemmenspannung) entspricht immer der Quellenspannung und bleibt konstant. Bei realen Spannungsquellen hängt dagegen die Spannung an den Anschlussklemmen vom entnommenen Strom I ab, da die Spannungsquelle über einen Innenwiderstand R_i verfügt. Bei linearen Spannungsquellen ist der Spannungsabfall U(I) proportional zum Strom. Solche Spannungsquellen können durch eine Serienschaltung einer idealen Spannungsquelle mit der Quellenspannung U_q und einem Widerstand R_{iS}, der als Innenwiderstand der Spannungsquelle bezeichnet wird Daher hängt die entnommene Spannung U vom entnommenen Strom I ab wie folgt:

$$U = U_q - U(I) = U_q - R_i I \tag{7}$$

Wird eine solche lineare Spannungsquelle mit einem Verbraucher mit Widerstand R_L belastet, so ergibt sich für den Strom die folgende Gleichung:

$$I = \frac{U_q}{R_{iS} + R_L} \tag{8}$$

Für die Klemmenspannung, die der Spannung über dem Lastwiderstand entspricht, gilt dann:

$$U = R_L I = U_q \frac{R_L}{R_L + R_i} \tag{9}$$

Nur falls $R_{iS} \ll RL$ ist kann der Spannungsabfall am Innenwiderstand vernachlässigt werden und die Klemmenspannung entspricht in etwa der Quellenspannung.

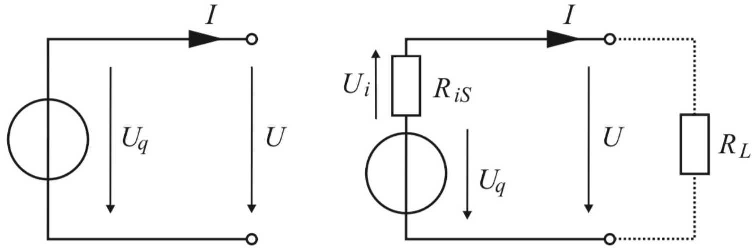

Abbildung 6: Links: ideale Spannung. Rechts: Reale Spannungsquellen besitzen einen Innenwiderstand R_{iS}

(d) Strom- und Spannungsmessung

- Strommessung

  Strommessgeräte werden immer in Serie zum Verbraucher RL geschaltet (Abbildung 6 oben), was bedeutet, dass der Strom durch das Messgerät fließen muss. Aufgrund ihres Innenwiderstands beeinflussen Amperemeter den Messaufbau. Ohne ein Amperemeter fließt der Strom in der Schaltung:

$$I = \frac{U_0}{R_{iS} + R_L} \tag{10}$$

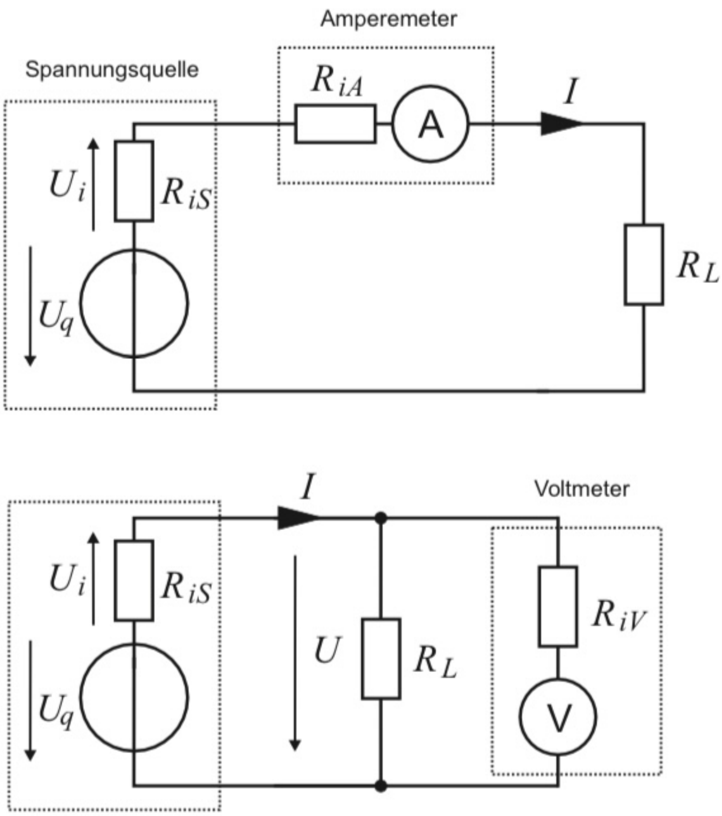

Abbildung 7: Strom- und Spannungsmessung

Wird ein Ampermeter eingebaut, so addiert sich zum Lastwiderstand der Innenwiderstand R_{iA} des Amperemeter hinzu. Der Strom verringert sich auf den Wert:

$$I' = \frac{U_0}{R_L + R_{iS} + R_{iA}} \tag{11}$$

Um die Abweichung zwischen I und I' möglichst klein zu halten muss der Innenwiderstand des Amperemeters möglichst klein sein, bzw. viel kleiner als der Lastwiderstand.

- Spannungsmessung

  Spannungsmessgeräte werden parallel zum Verbraucher geschaltet (Abbildung 6 unten). Auch hier hat der Innenwiderstand Einfluss auf die Messung. Ohne Messgerät liegt am Verbraucher R_L die Spannung an:

$$U = U_q \frac{R_L}{R_{iS} + R_L} \tag{12}$$

  Wenn ein Voltmeter angeschlossen wird, ist der Lastwiderstand RL parallel zum Innenwiderstand R_{iV} des Voltmeters geschaltet. In diesem Fall beträgt die Spannung an R_L dann:

$$U = U_q \frac{R_L}{R_{iS} + R_L + \frac{R_{iS}+R_L}{R_{iV}}} \tag{13}$$

  wobei $R_v = \frac{R_{iS}+R_L}{R_{iV}}$ der effektive Widerstand des Voltmeters ist.

2 Versuchsdurchführung

2.1 Versuchsaufbau, Versuchsdurchführung und Messprotokoll

Siehe folgende Seiten.

Messprotokoll PAP1 20.09.2023

9:00 ~ 11:00

Versuch 23 — Strom- und Spannung Messung

Yuting Shi
Yulai Shi

Messaufbau

- 6V Netzteil mit zusätzlicher Präzisionsquelle (2,5V ± 0,02%)
- Kompensator, Linearitätsfehler des Kompensationsreglers : 0,25%
- Milliamperemeter
- Schiebewiderstand
- Drei Dekadenwiderstände
- Batterie
- Taster
- Steckblatt mit 2 Widerstände

① $U_{Eich} = (2{,}5000 \pm 0{,}0005)\,V$

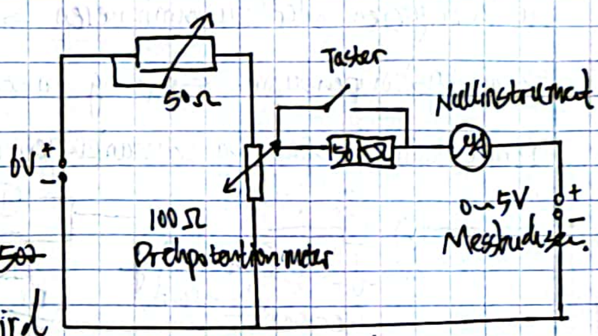

Abb 1. Eichung des Kompensationsreglers.

Wir eichen das Gerät indem wir die Schaltung rechts aufbauen und den Kompensationsregler auf ~~500~~ 500 Skt stellen. Den Eichregler wird so gedreht, dass die effektive Spannung genau gleich 0 ist. Nach dem Abgleich entsprechen 1000 Skt. am Kompensationsregler genau 5V ~~und~~ an den Messbuchsen, 800 Skt genau 4V und so geht die Linearität weiter.

Der Linearitätsfehler beträgt 0,25%

② Wir betreiben das Drehspulinstrument als Voltmeter und erweitern den Messbereich durch Serienwiderstand.

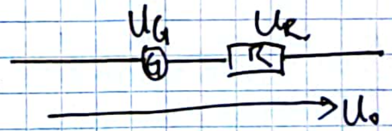

Abb. 2. Drehspulinstrument als Voltmeter

Der Eigenwiderstand des Drehspulinstruments beträgt: $R_{iD} = (397 \pm 4\%)\,\Omega$

Der maximale Ausschlag liegt bei 10 mA.

Zum Eigenwiderstand werden Dekadenwiderstände in Reihe ~~ein~~angeschlossen. Durch die insgesamt ca. $\boxed{103 + 397}\,\Omega$ $= 500\,\Omega \pm \Delta R_{gx}$ kann das Drehspulinstrument bis zu 5 V messen

Bei Motifizierung, ob das Voltmeter gewertert werden, verbinden wir den mit der Battarie (4,5V), und der Ausschlag beträgt: 8.0 <=> 4.0V

Auf dem Klemmbrett ist ein Spannungsteiler mit zwei Widerstände aufgebaut

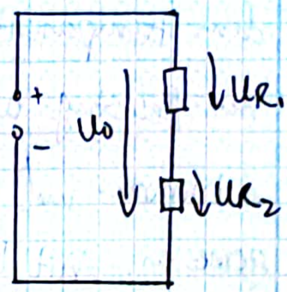

Abb. 3

- Es wurden folgende Werte mit dem erweiterten Drehspulinstrument bestimmt, wobei U_0, U_{R_1}, U_{R_2} die Batteriespannung E, und Spannungen über den zwei gleichen Widerstände sind:

Auflösung Voltmeter: 0,25 V

$U_0 = (4{,}00 \pm 0{,}10)\,V$

$U_{R_1} = (1{,}13 \pm 0{,}10)\,V$

$U_{R_2} = (1{,}13 \pm 0{,}10)\,V$

~~$\Delta U_{ables} = 0{,}10\,V$~~

~~$\Delta U_{Gerät} = \sqrt{(I \Delta R)^2 + (\ldots)^2}$~~ = ~~bei U_0/X_0: $\sqrt{(\Delta R_{g_1})^2 + (\Delta I)}$~~ ~~bei U_{R_x}/X_{R_x}: $\sqrt{(\Delta R_{g_2})^2 + (\Delta I)^2}$~~

~~$\Delta I = \sqrt{(\Delta I_{gerät})^2 + (\Delta I_{Able})^2}$~~

~~$= \sqrt{(2{,}5\% \cdot \ldots mA)^2 + (0{,}2\,mA)^2} = 0{,}29\,mA$~~ $\rightarrow \Delta U_{gerät}$

- Nun wird dieselbe Messung mit den Kompensator wiederholt. Die gemessenen Skalenwerte sind mit X_0, X_{R_1}, X_{R_2} bezeichnet:

$X_0 = (822{,}20 \pm 0{,}10)\,Skt$

$X_{R_1} = (412{,}22 \pm 0{,}10)\,Skt$

$X_{R_2} = (411{,}98 \pm 0{,}10)\,Skt$

Fehler aus Ablesegenauigkeit: 0,10 Skt
(Auflösung des Kompensators: 0,20 Skt)

- Bei der Messung mit den Drehspulinstrument sind die über beide Widerstandswerten gemessenen Werte gleich groß, addieren sich aber nicht zu U_0; Bei der 2. Messung sind die über beide Widerstände gemessenen Spannungen gleich groß, und addieren sich ungefähr zu X_0.

③ Bestimmung der Klemmenspannung von Batterie und des Innenwiderstands

- Wir erweitern zuerst den Messbereich vom Drehspulinstrument von 10 mA bis 200 mA. Dann mit den erweiterten mA-Meter und

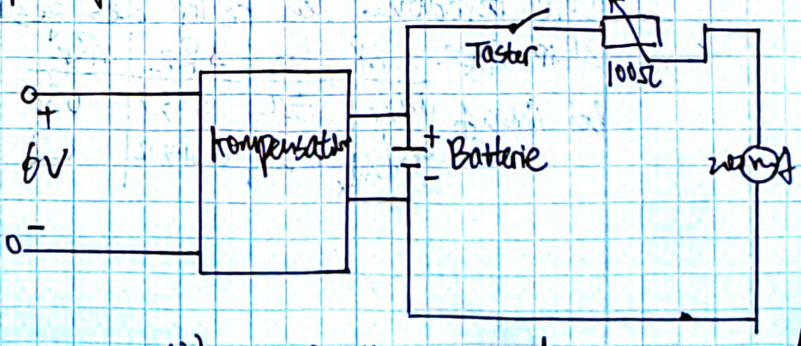

Abb. 4. Quellenspannung und Innenwiderstand.

dem Kompensator wird die Klemmenspannung der Batterie bei Belastung aufgenommen. Der Batterie wird ein Strom I entnommen und gleichzeitig die Klemmenspannung mit dem Kompensator gemessen. Mit dem Schiebwiderstand wird die Stromstärke von ca. 0A bis 200 mA geregelt (9 Messpunkte)

Tabelle 1

Messung Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Kompensator [Skt]	735,18	746,20	753,02	760.90	766.60	773.00	784.60	724.20	740,38
Strom I [mA]	120	90	70	60	50	40	30	110	80

Ablesegenauigkeit des Kompensators: $\Delta X = 0{,}10$ Skt

Auflösung des 200mA-Meters: 10mA

Fehler des Stroms:

$$\Delta I' = \sqrt{\Delta I_{Ablese}^2 + \Delta I_{Gerät}^2} \approx 5{,}4 \text{ mA}$$

ΔI_{Ablese} steht für Ablesegenauigkeit und beträgt 2 mA.

$\Delta I_{Gerät}$ steht für Ablesegenauigkeit des erweiterten mA-Meters:

$$\Delta I_{Gerät} = \underline{2{,}5\% \times 200\text{mA} = 5\text{ mA}}.$$

Dekadenwiderstand:

	$0.75\, I_{max}$	I_{max}
$0.1\Omega / 1\Omega$	±0.5%	±1%
$10\Omega \ldots 100\Omega$	±0.1%	±0,2%

Wir berechnen den Fehler des gesamten Voltmeters in ②:

$\Delta R_{iD} = 4\Omega$

bei Messung	ΔR_{D_1}	ΔR_{D_2}	ΔR_{D_3}
U_0/X_0	$0{,}29\Omega$	$0{,}03\Omega$	0Ω
U_{Rx}/X_{Rx}	$0{,}15\Omega$	$0{,}015\Omega$	0Ω

$\Rightarrow$

$$\Delta R_{g_1} = \sqrt{\Delta R_{iD}^2 + \Delta R_{D_1}^2 + \Delta R_{D_2}^2 + \Delta R_{D_3}^2} \approx 4\Omega$$

$$\Delta R_{g_2} = \sqrt{\Delta R_{iD}^2 + \Delta R_{D_1}^2 + \Delta R_{D_2}^2 + \Delta R_{D_3}^2} \approx 4\Omega$$

20.09.23

Sotzman

Noch zum 3. Teil hinzufügen: Faktor f $(=20)$ / „≈23"

Bei Berechnung von U dann ΔI, ΔR und Δf betrachten

~~die gemessenen Stromstärke sind alle unter 0,75 I_{max}:~~

~~$\Delta R'_{P_1} = 0{,}1\% \times$~~

Um den Messbereich von 10mA bis 200mA zu erhöhen:

$$f = \frac{200\,mA}{10\,mA} = 20 \Rightarrow R_P = \frac{R_{iD}}{f-1} = \frac{397}{19} \approx 20{,}90\Omega$$

$$R_A = \frac{10\,mA \cdot 397\Omega}{200\,mA} = 19{,}85\Omega$$ Widerstand des 200 mA-Meters.

$$\Rightarrow f = \frac{R_{iD}}{R_P} + 1 \Rightarrow \Delta f = \sqrt{\left(\frac{\Delta R_{iD}}{R_{iD}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R_P}{R_P}\right)^2} \qquad R_{iD} = (397 \pm 4)\Omega$$

$$\Delta R_P = \sqrt{\Delta R'^2_{P_1} + \Delta R'^2_{P_2} + \Delta R'^2_{P_3}}$$

die gemessene Stromstärke sind alle unter 75% I_{max} (150mA):

$$\Delta R'_{P_1} = 20\Omega \cdot 0.1\% = 0{,}02\Omega,\ \Delta R'_{P_2} = 0 \times 0{,}5\% = 0,\ \Delta R'_{P_3} = 0{,}9\Omega \times 0{,}5\% = 0{,}0045\Omega$$

$$\Rightarrow \Delta R_P = \sqrt{0{,}02^2 + 0{,}0045^2} = 0{,}0205\Omega \approx 0{,}02\Omega$$

$$\Rightarrow \Delta f = \sqrt{\left(\frac{4}{394}\right)^2 + \left(\frac{0{,}02}{20{,}90}\right)^2} = 0{,}01$$

3 Auswertung

3.1 Spannungsteiler

Aus der Kirchhoffschen Maschenregel (4) würden wir erwarten, dass am Spannungsteiler gilt:

$$U_0 = U_{R_1} + U_{R_2} \tag{14}$$

Es wurden folgende Ergebnisse beobachtet: die gesammte Spannung der beiden Widerstände beträgt $U_0 = (4,00 \pm 0,10)V$ und die separate Spannungen sind jeweils $U_{R_1} = (1,13 \pm 0,10)V$, wobei wir einen Ablesefehler angesichts unseres erweiterten Voltmeter 0,10V genommen haben.

$$\implies U_{R_1} + U_{R_2} \neq U_0 \tag{15}$$

Der scheinbare Widerspruch lässt sich durch die Überlegung auflösen, dass aufgrund des geringen Widerstands des Drehspulinstruments und des zusätzlichen Widerstands zur Erweiterung des Messbereichs ein erheblicher Teil des Stroms über das Drehspulinstrument fließt. In solchen Fällen teilt sich der Gesamtstrom zwischen dem Messinstrument und dem erweiterten Widerstandspfad, wodurch der Strom durch das Messinstrument selbst signifikant reduziert wird.

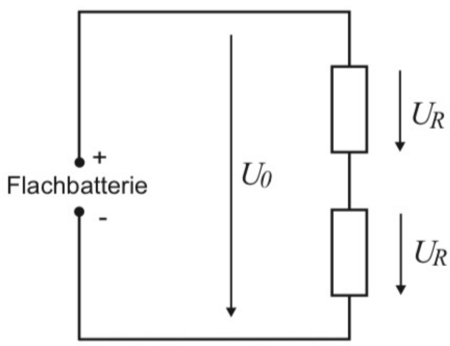

Abbildung 8: Schaltung zu Aufgabe 2

Wir betrachten zuerst die gesamte Spannung. Der effektive Widerstand der neben Parallelschaltung lautet:

$$R_{eff} = \frac{1}{\frac{1}{R_v} + \frac{1}{2R}} = \frac{2R_vR}{2R + R_v} \tag{16}$$

Dann wird die Spannungsmessung gemessen als:

$$U_1 = U_0 \frac{R_{eff}}{R_i s + R_{eff}} = \frac{2R_vR}{(2R + R_v)R_{is} + 2R_vR} \tag{17}$$

wobei R_{is} als Innenwiderstand der Batterie und U_0 die ideale Spannung gilt.
Nun wird nur ein Widerstand gemessen:

$$R'_{eff} = \frac{1}{\frac{1}{R_v} + \frac{1}{R}} = \frac{R_v R}{R + R_v} \tag{18}$$

Dann wird die Spannungsmessung gemessen als:

$$U_2 = U_0 \frac{R'_{eff}}{R_i s + R'_{eff} + R} = \frac{R_v R}{(R + R_v)(R_{is} + R)} \tag{19}$$

Nach den Messungen gibt es dann die Relation:

$$U_2 \leq \frac{1}{2} U_1 \iff R^2 \geq R_{is} R + R_v R \iff \underline{\underline{R \geq R_{is} + R_v}} \tag{20}$$

Wir haben dann gesehen, der genauere Grund liegt daran, dass der Widerstand R viel größer als die Summe von Batterie und Voltmeter Innenwiderstand ist.

Um den Widerstand R berechnen zu können nehmen wir an, dass die Spannungsquelle U_0 ideal ist, um den Widerstand $R = R_1 = R_2$ zu berechnen. Die Abbildung 8 veranschaulicht die Überlegungen zur Berechnung der Spannung

Mithilfe der Kirchhoffschen Regeln und des Ohmschen Gesetzes wurden die folgenden Rechnungen gemacht:

$$U_1 = U_0 \qquad U_2 = U_{R_1} = U_{R_2} \qquad U = U_1 - U_2 \tag{21}$$

$$I_v = \frac{U_2}{R_v} \qquad I_R = \frac{U_2}{R} \implies I = I_R + I_v = \frac{(R + R_v) U_2}{R_v R} \tag{22}$$

$$R = \frac{U}{I} = (U_1 - U_2) \cdot \frac{R_v R}{(R_v + R) U_2} \tag{23}$$

$$\iff R(R + R_v) U_2 = (U_1 - U_2) R_v R \tag{24}$$

$$\iff U_2 R^2 + (2U_2 R_v - U_1 R_v) R = 0 \tag{25}$$

$$\iff R = \frac{U_1 R_v}{U_2} - 2R_v \tag{26}$$

Wir setzen unsere Messwerte in die Gl.(26) und bekommen:

$$\implies R = 769,9\ \Omega \tag{27}$$

Der Fehler wird berechnet als:

$$\Delta R = \sqrt{(\frac{\partial R}{\partial U_1}\Delta U_1)^2 + (\frac{\partial R}{\partial U_2}\Delta U_2)^2 + (\frac{\partial R}{\partial R_v}\Delta R_v)^2} \tag{28}$$

$$= \sqrt{(\frac{R_v}{U_2}\Delta U_1)^2 + (\frac{U_1 R_v}{U_2^2}\Delta U_2)^2 * ((\frac{U_1}{U_2} - 2)\Delta R_v)^2} \tag{29}$$

Um den Fehler zu ermitteln, betrachten wir den Fehler von Voltmeter ΔR_V.

Hier wird eine Übersicht von Dekadenwiderständen präsentiert, um zu veranschaulichen, wie sich der Fehler bei unterschiedlichen Messbereichen verhält:

Auflösung	$0,75 I_{max}$	I_{max}
$0,1\Omega/1\Omega$	$\pm 0,5\%$	$\pm 1\%$
$10\Omega ... 100\Omega$	$\pm 0,1\%$	$\pm 0,2\%$

Der jeweils Fehler vom Dekadenwiderstand beträgt:

$$\text{bei Messung } U_0,\, x_0 : \Delta R_{D_1} = 0,20\Omega \qquad \Delta R_{D_2} = 0,03\Omega \qquad \Delta R_{D_3} = 0 \tag{30}$$

$$\text{bei Messung } U_x,\, x_x : \Delta R_{D_1} = 0,10\Omega \qquad \Delta R_{D_2} = 0,015\Omega \qquad \Delta R_{D_3} = 0 \tag{31}$$

Daher bekommen wir unter Berücksichtigung von dem Fehler des Innenwiderstands von Drehspulinstrument $\Delta R_{iD} = 4\Omega$ den Fehler vom Voltmeter:

$$\Delta R_v = \sqrt{(\Delta R_{iD})^2 + (\Delta R_{D_1})^2 + (\Delta R_{D_2})^2 + (\Delta R_{D_3})^2} \approx 4\Omega \tag{32}$$

Für die beiden Situationen ist der gesamte Fehler ganz gleich, weil vergleichbar mit ΔR_{iD} sind die drei andere Fehler so klein, dass die sogar vernachlässigt werden können.

Nun setzen wir alle benöigten Werte in die Gl.(29) ein und bekommen:

$$\Delta R = 422,0\Omega \tag{33}$$

Auf jeden Fall wäre dieser Fehler zu erheblich gewesen. Dies ist darauf zurückzuführen, dass wir den Fehler bei den Spannungsmessungen deutlich überschätzt haben, weil die Spannung während der Messung ganz stabil ist. Wir benutzen $\Delta U = 0,01\Omega$ und bekommen:

$$\Delta R = 42,2\Omega \tag{34}$$

Dieser Fehler ist jetzt akzeptabel.

Wir wollen nun die Messwerte des Kompensators auswerten. Hierzu nutzen wir die folgenden Formeln:

$$U = \frac{5\ V}{1000} \cdot X \tag{35}$$
$$\Delta U = \frac{5\ V}{1000} \cdot \Delta X \tag{36}$$

Die Auslenkungen X wurden hierbei laut der Eichung auf 500 Skalenteile für 2,5 V berechnet.
Die mit dem Kompensator bestimmten Werte können so in Spannungen umgerechnet werden. Wir finden:

$$X_0 = 822,20 \pm 0,10 \Rightarrow U_0 = (4,1110 \pm 0,0005)V \tag{37}$$
$$X_{R_1} = 412,22 \pm 0,10 \Rightarrow U_{R_1} = (2,0611 \pm 0,0005)V \tag{38}$$
$$X_{R_2} = 411,98 \pm 0,10 \Rightarrow U_{R_2} = (2,0599 \pm 0,0005)V \tag{39}$$

Außerdem spielt der Linearitätsfehler 0,25 % auch eine wichtige Rolle bei Berechnung der gesamten Fehler von U.

$$\Delta U_0' = 0,25\% \cdot 4,1110V \approx 0,1028V \tag{40}$$
$$\Delta U_1' = 0,25\% \cdot 2,0611V \approx 0,0515V \tag{41}$$
$$\Delta U_2' = 0,25\% \cdot 2,0599V \approx 0,0515V \tag{42}$$
$$\tag{43}$$

Daher gilt:

$$\Delta U_0 = \sqrt{(\Delta U_0')^2 + (\Delta U_0)^2} \approx 0,1028V \tag{44}$$
$$\Delta U_{R_1} = \sqrt{(\Delta U_1')^2 + (\Delta U_1)^2} \approx 0,0515V \tag{45}$$
$$\Delta U_{R_2} = \sqrt{(\Delta U_2')^2 + (\Delta U_2)^2} \approx 0,0515V \tag{46}$$
$$\tag{47}$$

Bei der Messung mit dem Drehspulinstrument sind die über beide Widerstände gemessenen Werte gleich groß, addieren sich ungefähr zu x_0.

Wir überprüfen die so gefundenen Werte auf ihre Konsistenz mit $U_0 = U_{R_1} + U_{R_2}$:

$$\frac{|U_0 - (U_{R_1} + U_{R_2})|}{\sqrt{(\Delta U_0)^2 + (\Delta U_{R_1})^2 + (\Delta U_{R_2})^2}} \approx 0,1026 \tag{48}$$

Die Fehlerabweichung von lediglich $0,1026\sigma$ ist nicht signifikant. Daher können wir feststellen, dass der Einsatz des Kompensators zur Spannungsmessung die systematischen Fehler erheblich reduziert und kompensiert. Aus diesem Grund werden wir in weiteren Experimenten sowie die Ausarbeitung den Kompensator als Voltmeter verwenden.

3.2 Quellenspannung und innerer Widerstand

Wir erweitern zuerst den Messbereich vom Drehspulinstrument von 10mA bis 200mA. Daher wird der Erweiterungsfaktor berechnet nach Gl.(5) als:

$$f = \frac{200mA}{10mA} = 20 \implies R_p = \frac{R_{iD}}{f-1} \approx 20,90\Omega \tag{49}$$

$$R_A = \frac{10mA \cdot 397\Omega}{200mA} = 19,85\Omega \tag{50}$$

$$\implies f = \frac{R_{iD}}{R_p} + 1 \tag{51}$$

Der Fehler von dem Erweiterungsfaktor ist daher gegeben als:

$$\Delta f = f\sqrt{(\frac{\Delta R_{iD}}{R_{iD}})^2 + (\frac{\Delta R_p}{R_p})^2} \tag{52}$$

Um den Fehler von f zu berechnen, brauchen wir zuerst den Fehler von dem Innenwiderstand des Amperemeters zu bestimmen.

Zum Teil 3 des Experiments sind alle gemessenen Stromstärke unter $0,75I_{max}$, die Fehler von den drei Dekadenwiderständen ergeben sich daher:

$$\Delta R'_{D_1} = 20\Omega \cdot 0,1\% = 0,02\Omega \tag{53}$$

$$\Delta R'_{D_2} = 0\Omega \cdot 0,5\% = 0\Omega \tag{54}$$

$$\Delta R'_{D_3} = 0,9\Omega \cdot 0,5\% = 0,0045\Omega \tag{55}$$

$$\implies \Delta R_p = \sqrt{(\Delta R'_{D_1})^2 + (\Delta R'_{D_2})^2 + (\Delta R'_{D_3})^2} \approx 0,02\Omega \tag{56}$$

Und $R_{iD} = (394 \pm 4)\Omega$ kennen wir schon von den Parametern in Messprotokoll.
Nun durch Einsetzen in die Gl.(52) finden wir:

$$\Delta f = 20 \cdot \sqrt{(\frac{4}{394})^2 + (\frac{0,02}{20,9})^2} \approx 0,2 \tag{57}$$

$$\implies \underline{\underline{f = 20,00 \pm 0,20}} \tag{58}$$

Anschließend möchten wir den Fehler der Stromstärke, die von unserem erweiterten mA-Meter gemessenen werden:

$$\Delta I = \sqrt{(\Delta I_{Ablese})^2 + (\Delta I_{\text{Gerät}})^2} \tag{59}$$

$\Delta I_{\text{Gerät}}$ steht für die Ablesegenauigkeit des erweiterten Amperemeters, und ΔI_{Ablese} für die Ablesefehler während des Experiments.

Im Hinsicht auf der Auflösung vom Amperemeter (10mA) nehmen wir $\Delta I_{Ablese} = 2mA$, und nach den Geräte Bedingungsanleitung wissen, dass $\Delta I_{\text{Gerät}} = 0,25\% \cdot 200mA = 5mA$, dann ergibt sich der Fehler von der Stromstärke:

$$\Longrightarrow \Delta I = \sqrt{(\Delta I_{Ablese})^2 + (\Delta I_{\text{Gerät}})^2} \approx \underline{\underline{5,4mA}} \tag{60}$$

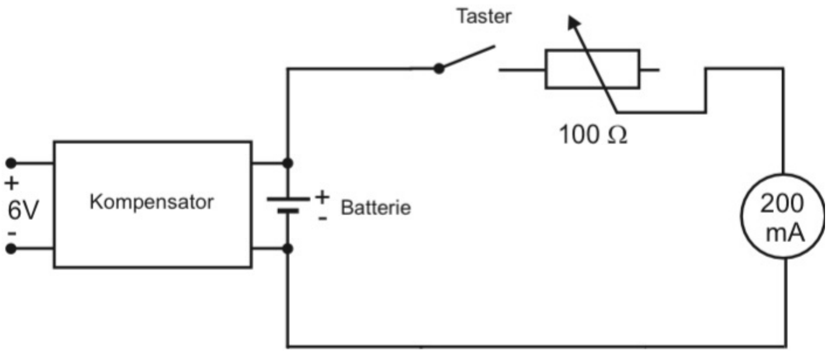

Abbildung 9: Schaltung zu Aufgabe 3

Um die Quellenspannung sowie ihrer Innenwiderstand zu ermitteln, leiten wir zuerst die lineare Beziehung zwischen der gemessenen Spannung U und der Stromstärke I:

$$U_q = I(R_{iS} + R_A + R_L) \quad \Longrightarrow \quad R_L = \frac{U_q}{I} - R_{iS} - R_A \tag{61}$$

$$U = I(R_L + R_A) \quad \Longrightarrow \quad U = U_q - IR_{iS} \tag{62}$$

Deswegen bezeichnet sich die Steigung der U-I Gerade als der innere Widerstand der Batterie, während der Schnittpunkt auf der U-Achse die Quellenspannung repräsentiert.

Die Fehler auf der I-Achse bleiben konstant bei $\Delta I = 5,4mA$. Die verbleibenden Fehler ergeben sich aus der Berechnung der Spannungsfehler für jede Messung unter Berücksichtigung der Ablesefehler sowie der Linearitätsfehler:

$$\Delta U = \sqrt{(\Delta U_{linear})^2 + (\Delta U_{ablese})^2} \tag{63}$$

$$\Delta U_{linear} = 0,25\% \cdot \frac{5V}{1000} \cdot X \qquad \Delta U_{ablese} = \frac{5V}{1000} \cdot \Delta X \cdot \tag{64}$$

Die folgende Tabelle zeigt die jeweilige Größe der Fehler für jede Messung:

Strom I [mA]	30	40	50	60	70	80	90	110	120
Kompensator [Skt]	784,60	773,00	766,60	760,90	753,02	740,38	746.20	724,20	735,03
Fehler X [Skt]	19,61	19,33	19,17	19,02	18,83	18,51	18,66	18,11	18,38

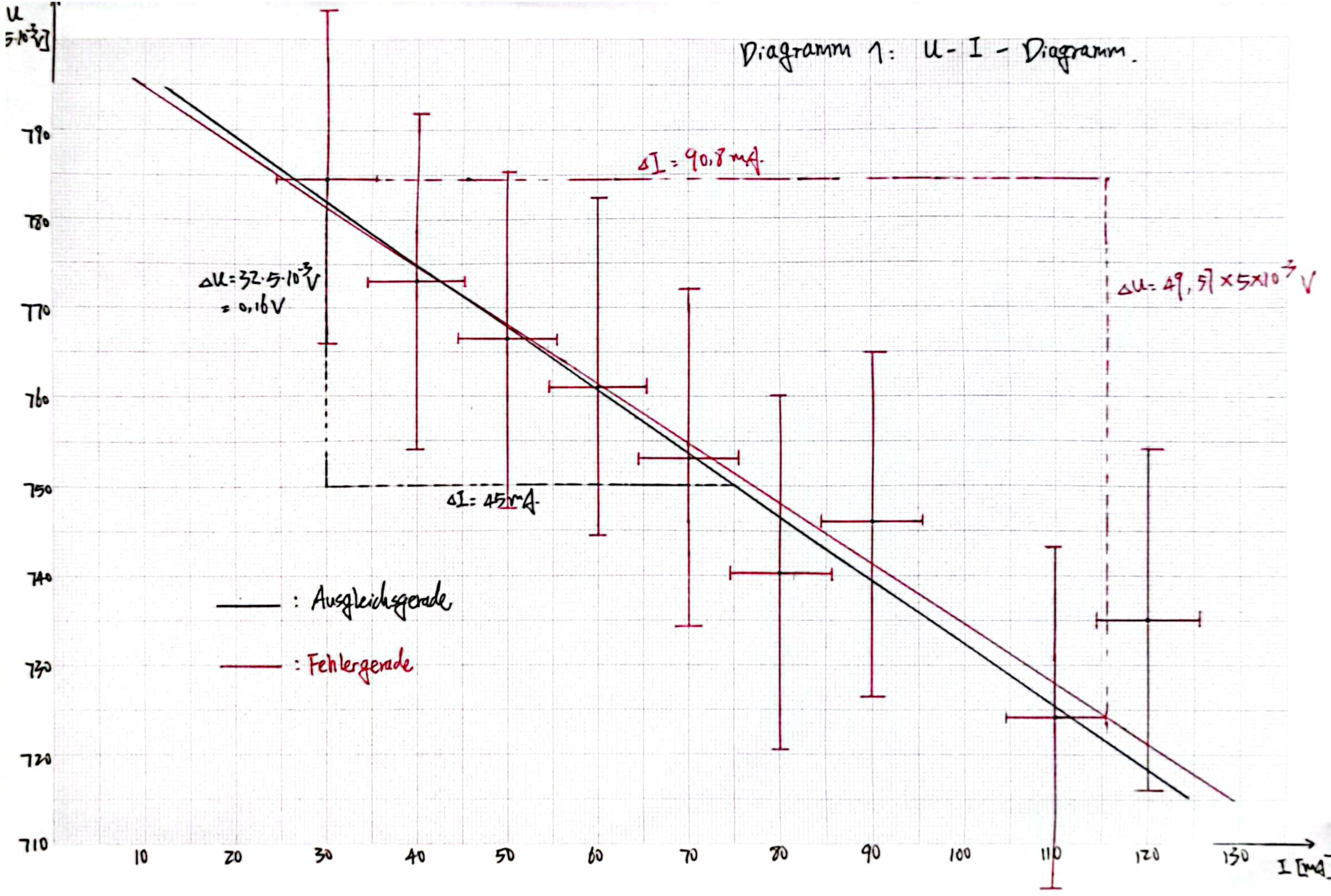

Diagramm 1: U - I - Diagramm.
U [5·10⁻³V]
790
780
770
760
750
740
730
720
710
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
I [mA]
ΔI = 90,8 mA
ΔU = 32·5·10⁻³ V
= 0,16 V
ΔI = 45 mA
ΔU = 49,57 × 5×10⁻³ V
— : Ausgleichsgerade
— : Fehlergerade

Vom Diagramm können wir die Steigungen der Ausgleichsgerade und der Fehlergerade ablesen:

$$k_a = \frac{0,16V}{0,025A} \approx 3,56\Omega \qquad k_f = \frac{247,85mV}{90,8mA} \approx 2,73\Omega \tag{65}$$

$$\implies \Delta k = k_a - k_f = 0,83\Omega = \Delta R_{iS} \tag{66}$$

Aus Gl.(62) wissen wir dann, dass der innere Widerstand:

$$\implies \underline{\underline{R_{iS} = (3,56 \pm 0,83)\Omega}} \tag{67}$$

Graphisch können wir auch herausfinden, dass der Schnittpunkt von der Ausgleichsgerade in U-Achse: $U_a \approx 4,02V$ und der Schnittpunkt von der Fehlergerade $U_f = 4,01V$ Daher kann die Quellenspannung ebenso mit Gl.(62) ausgerechnet werden:

$$\implies \underline{\underline{U_q = (4,020 \pm 0,010)V}} \tag{68}$$

Wenn wir nun zu Gleichung (20) zurückkehren, stellen wir fest, dass die theoretische Formel, auf die wir gestoßen sind, vollständig richtig ist, dass der Widerstand auf dem Steckbrett größer als die Summe von Innenwiderstand der Batterie und des Voltmeters.

$$\frac{|U_q - U_0|}{\sqrt{(\Delta U_q)^2 + (\Delta U_0)^2}} = \frac{0,02}{0,1^2 + 0,01^2} \approx 0,20 \tag{69}$$

Die Fehlerabweichung beträgt nur $0,20\sigma$ und ist damit nicht signifikant. Für den zweiten Teil haben wir $(4,000 \pm 0,100)V$ erhalten, was recht nah an unserer Messung liegt.

3.3 Leistungsanpassung

Die Leistung P ist bei konstanter Spannung und Stromstärke gegeben durch:

$$P = UI \tag{70}$$

$$= (U_q - R_i I) \cdot I \tag{71}$$

$$= U_q I - R_i I^2 \tag{72}$$

Nach Gleichung (10) folgt:

$$P = \frac{U_q^2}{R_i + R_L} - R_i \left(\frac{U_q}{R_i + R_L} \right)^2 \tag{73}$$

Unter der Voraussetzung

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R_L} = 0 \tag{74}$$

folgt dann

$$0 = -U_q^2 + 2R_i(\frac{U_q^2}{R_i + R_L}) \tag{75}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R_L = R_i}} \tag{76}$$

Die Leistung ist also bei einem Lastwiderstand von

$$R_L = (3,56 \pm 0,83)\Omega$$

am größten. Die Spannung ist dann gegeben durch

$$U = R_i I = \frac{R_i U_q}{R_i + R_L} = \frac{1}{2}U_q = 2,01V \tag{77}$$

Ihr Fehler wird mit der folgenden Gleichung berechnet:

$$\Delta U = U\sqrt{\left(\frac{\Delta U_q}{U_q}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R_i}{R_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R_L}{R_L}\right)^2} \tag{78}$$

$$= 2,01 \cdot \sqrt{(\frac{0,01}{4,02})^2 + (\frac{0,83}{3,56})^2 + (\frac{0,83}{3,56})^2} \tag{79}$$

$$\approx 0,11V \tag{80}$$

$$\Rightarrow U = (2,010 \pm 0,110)V \tag{81}$$

4 Diskussion

In diesem Experiment haben wir beabsichtigt, Spannungen und Ströme mithilfe des Drehspulinstruments und des Kompensators zu messen sowie die Gültigkeit der Kirchhoffschen Maschenregel zu überprüfen. Zu Beginn der Messungen haben wir zunächst den Kompensator kalibriert, der später im dritten Teil des Experiments als Voltmeter verwendet wurde. Anschließend haben wir mithilfe von 103Ω Dekadenwiderständen den Messbereich des Drehspulinstruments erweitert und es ähnlich wie das Kompensator als Voltmeter in 2. Teil verwendet, um die Spannungen über zwei Widerständen zu bestimmen. Zum Ende des Experiments haben wir einen 20,9Ω Widerstand parallel zum Drehspulinstrument geschaltet um sie zusammen als erweitertes Amperemeter verwendet. Wir haben sowohl Spannungen als auch Ströme gemessen, nachdem wir jedes Mal den Schiebewiderstand angepasst haben. Aus dem Spannungs-Strom (U-I) Diagramm konnten wir dann den Innenwiderstand der Batterie und die Quellenspannung berechnen.

Unsere Berechnungen ergaben, dass der errechnete Quellenwiderstand deutlich geringer ist als 4,5V. Wir vermuten, dass die Batterie möglicherweise bereits seit einiger Zeit in Gebrauch ist, was dazu führt, dass ihre elektromotorische Kraft aufgrund des Alterns abnimmt und Messabweichungen verursacht, die in der mathematischen Modellierung der Prozesse nicht berücksichtigt wurden. Ein weiterer möglicher Grund ist der inhärente Widerstand der Kabel und Anschlüsse, der im Experiment nicht berücksichtigt wurde. Daher wurde ein Teil der Spannung, der eigentlich zur Quellenspannung gehören sollte, einfach vernachlässigt. Diese Annahme passt zur Beobachtung, dass die Summe der Spannungen kleiner ist als die Quellenspannung.

Obwohl diese Abweichung beschrieben wurde, war sie vergleichbar mit unserem Ergebnis nicht besonders signifikant. Die ermittelte Quellenspannung $U_q = (4,02 \pm 0,01)V$ sollte recht überzeugend sein, da wir im zweiten Teil unseres Experiments die Gesamtspannung über die beiden Widerstände mithilfe des Kompensators gemessen haben, was etwa der Quellenspannung entsprechen sollte. Für den zweiten Teil haben wir $(4,00 \pm 0,10)V$ erhalten, was recht nah an unserer Messung liegt.

Dieser Fehler hätte durch die Verwendung von Kabeln mit geringerem inhärentem Widerstand, wie etwa kürzeren Kabeln oder Kabeln aus einem anderen Material, idealerweise Silber, weiter reduziert werden können, wenn dies wirtschaftlich möglich gewesen wäre.

Aus dem U-I Diagramm lässt sich erkennen, dass die Spannungsfehler im Vergleich zu den Stromfehlern recht signifikant sind und etwa die Hälfte der Gesamthöhe ausmachen. Obwohl diese Fehler im Vergleich zu denen mit mehr als 700 Skt nicht viel sind, können sie aufgrund unserer relativ großen Auflösung auf der Spannungsachse und der Konzentration unserer Daten zu erheblichen Abweichungen in der Zeichnung führen. Daher haben wir die Fehlerbalken in Bezug auf den Stromfehler ΔI gezeichnet; sonst wäre das Zeichnen der Linie genau herausfordernd, und die Schätzung der Fehler allein mit dem bloßen Auge wäre schwierig gewesen.

Die aus dem Linearitätsfehler berechneten Fehler sind im Vergleich zu normalen recht groß. Obwohl der prozentuale Fehler in der Linearität klein ist, hat er aufgrund der großen Basis der Parameter des Kompensators selbst erheblich zugenommen. Um diese signifikante systematische Abweichung zu minimieren, haben wir bei der Berechnung des Widerstandsfehlers im dritten Teil nur die Fehler der drei Dekadenwiderstände berücksichtigt (da die Fehler des Drehspulinstruments selbst im Vergleich zu den Dekadenwiderständen viel größer sind, wenn wir den Fehler mit dem 4Ω Drehspulinstrument berechnen würden, wäre der Gesamtfehler fast so groß wie der Fehler des Drehspulinstruments selbst, was zu weiteren signifikanten Abweichungen führen würde).

5 Quelle

Grundlage der Einleitung:

- Universität Heidelberg Physikalisches Praktikum PAP1 für Studierende der Physik B.Sc.
  Ausgabe 25. August 2022 (https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/info/Corona

- Kirchhoffsche Gesetze (https://de.wikipedia.org/wiki/Kirchhoffsche_Regeln)

Abbildung 2: Drehspulinstrument (https://de.m.wikipedia.org/wiki/Datei:Drehspulinstrument.svg)

Alle andere Bilder werden entweder von mir selbst oder von Physikalischer Anleitung genommen.