

替换法则 The Substitution Rule

Dezeming Family

2022 年 1 月 2 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一 替换法则	1
二 替换法则举例	2
2.1 例子 1	2
2.2 例子 2	2
三 定积分替换法则	2
参考文献	2

一 替换法则

替换法则是链式法则的积分版本。我们先回顾一下链式法则：

$$(f \circ g)'(x) = \frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (一.1)$$

假如我们要求某个积分：

$$\int f(g(x))g'(x)dx \quad (一.2)$$

我们令 $h' = f$ ，则得到：

$$\int h'(g(x))g'(x)dx = h(g(x)) + C \quad (一.3)$$

$$\text{make } u = g(x) \quad (一.4)$$

$$\int h'(g(x))g'(x)dx = h(u) + C = \int h'(u)du \quad (一.5)$$

$$\implies \int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \quad (一.6)$$

这样就得到了替换法则，值得注意的是：

$$du = g'(x)dx \quad (一.7)$$

$$\int f(u)du = \int f(g(x))g'(x)dx \quad (一.8)$$

二 替换法则举例

2.1 例子 1

计算 $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$:

$$\text{make } u = 1 - 4x^2 \implies du = -8x dx \quad (二.1)$$

$$\implies x dx = -\frac{1}{8} du \quad (二.2)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx = -\frac{1}{8} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = -\frac{1}{8} (2\sqrt{u}) + C = -\frac{1}{4} \sqrt{1-4x^2} + C \quad (二.3)$$

2.2 例子 2

计算 $\int \sqrt{1+x^2} x^5 dx$ 。

我们可以把 x^5 拆分成 $x^4 \cdot x$ 。令 $u = 1 + x^2$, 所以 $du = 2x dx$, 也就是说 $x dx = \frac{1}{2} du$, 同时 $x^2 = u - 1$, 于是:

$$\int \sqrt{1+x^2} x^5 dx = \int \sqrt{1+x^2} x^4 \cdot x dx \quad (二.4)$$

$$= \int \sqrt{u} (u-1)^2 \cdot \frac{1}{2} du \quad (二.5)$$

$$= \frac{1}{2} \int (u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}) du \quad (二.6)$$

三 定积分替换法则

设 $f(g(x))g'(x)$ 的不定积分结果为 $\int f(u) du = F(u) = F(g(x))$, 则:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) \Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) \quad (三.1)$$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du \quad (三.2)$$

以前面计算过的 $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ 为例, 计算:

$$u = g(x) = 1 - 4x^2 \quad g(0) = 1 \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad (三.3)$$

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx = -\frac{1}{8} \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{u}} du = -\frac{1}{8} (2\sqrt{u}) \Big|_1^0 = \frac{1}{4} \quad (三.4)$$

$$(三.5)$$

注意和代入 $u = g(x)$ 以后计算的结果一定是相等的:

$$-\frac{1}{4} \sqrt{1-4x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \quad (三.6)$$

参考文献

- [1] James Stewart. Calculus, Eighth Edition. 2016.