

双向路径追踪架构总结

Dezeming Family

2022 年 10 月 28 日

DezemingFamily 系列文章和电子书**全部都有免费公开的电子版**，可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列电子书，可以从我们的网站 [<https://dezeming.top/>] 找到最新的版本。对文章的内容建议和出现的错误也欢迎在网站留言。

本文是对 [1] 论文的详细解读，该论文可以说是渲染必读论文，但有些符号表示和描述可能对初学者并不友好，由于里面介绍的几种重要技术，例如双向路径追踪、多重重要性采样以及 Metropolis 方法都是非常重要的，因此我打算写一下本论文的解读，作为构建“高端图形渲染学习体系”的一个重要组成部分。

由于论文 [1] 篇幅过长，为了减少 Latex 编译的时间以及更好把控不同部分的内容，我将整个论文划分为了多本小册子来进行讲解。

本文的预备知识：**蒙特卡洛方法、蒙特卡洛光线追踪**（可以看 Peter Shirley 的光线追踪三本小书）、**BSDF 模型、路径追踪、向量空间**。

目录

一 双向路径追踪架构	1
1 1 路径权重计算	1
1 2 非加权路径	1
1 3 路径权重	2
二 非对称散射问题	3
2 1 非对称散射问题的产生	3
2 2 经验主义模型与非对称性	3
三 折射的非对称性	3
3 1 折射的 BSDF	3
3 2 折射的伴随 BSDF	4
3 3 结果与讨论	5
四 着色法向量带来的非对称性	6
参考文献	7

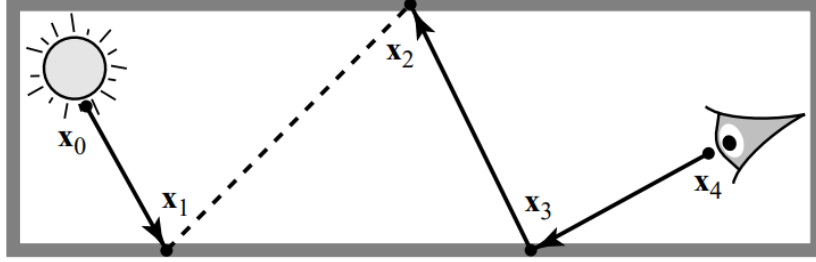
一 双向路径追踪架构

1.1 路径权重计算

假如 $\bar{x} = \mathbf{x}_0\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4$ ，我们得到：

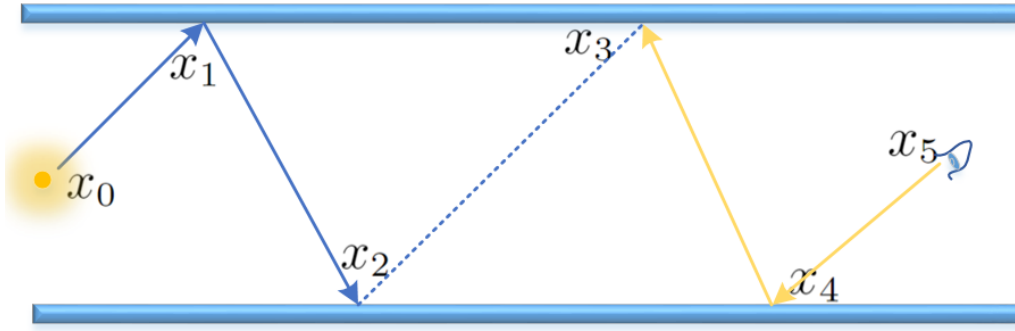
$$\begin{aligned} f_j(\bar{x}) = & L_e(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1) G(\mathbf{x}_0 \leftrightarrow \mathbf{x}_1) f_s(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2) \\ & \cdot G(\mathbf{x}_1 \leftrightarrow \mathbf{x}_2) f_s(\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3) \\ & \cdot G(\mathbf{x}_2 \leftrightarrow \mathbf{x}_3) f_s(\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_4) G(\mathbf{x}_3 \leftrightarrow \mathbf{x}_4) W_e^{(j)}(\mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_4) \end{aligned} \quad (一.1)$$

下图中， $\mathbf{x}_0\mathbf{x}_1$ 是光源子路径得到的， $\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4$ 是相机子路径得到的（ \mathbf{x}_4 在相机镜头上），把这两条路径连接起来就能得到完整的路径：



1.2 非加权路径

设路径图示为：



不加权贡献可以写为 $C_{s,t}^*$ ：

$$C_{s,t}^* \equiv \frac{f_j(\bar{x}_{s,t})}{p_{s,t}(\bar{x}_{s,t})} \equiv \alpha_s^L c_{s,t} \alpha_t^E \quad (一.2)$$

先看光源路径，注意采样第 i 个顶点的权重设为 α_i^L ，因此：

$$\begin{aligned} \alpha_1^L &= \frac{L_e^{(0)}(\mathbf{x}_0)}{P_A(\mathbf{x}_0)} \\ \alpha_2^L &= \frac{f_s(\mathbf{x}_{-1} \rightarrow \mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1)}{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1)} \frac{L_e^{(0)}(\mathbf{x}_0)}{P_A(\mathbf{x}_0)} \\ \alpha_3^L &= \frac{f_s(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2)}{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2)} \frac{f_s(\mathbf{x}_{-1} \rightarrow \mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1)}{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1)} \frac{L_e^{(0)}(\mathbf{x}_0)}{P_A(\mathbf{x}_0)} \end{aligned}$$

再看相机路径（注意 \mathbf{x}_6 与 \mathbf{x}_{-1} 都是补充的假想点）：

$$\begin{aligned} \alpha_1^E &= \frac{W_e^{(0)}(\mathbf{x}_5)}{P_A(\mathbf{x}_5)} \\ \alpha_2^E &= \frac{f_s(\mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{x}_6)}{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{x}_6)} \frac{W_e^{(0)}(\mathbf{x}_5)}{P_A(\mathbf{x}_5)} \\ \alpha_3^E &= \frac{f_s(\mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_5)}{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_5)} \frac{f_s(\mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{x}_6)}{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{x}_6)} \frac{W_e^{(0)}(\mathbf{x}_5)}{P_A(\mathbf{x}_5)} \end{aligned}$$

最后是两个路径的连接点 $c_{3,3}$:

$$c_{3,3} = f_s(\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3)G(\mathbf{x}_2 \leftrightarrow \mathbf{x}_3)f_s(\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_4) \quad (一.3)$$

1.3 路径权重

幂启发式的权重:

$$w_k(p_s) = \frac{p_s^2}{\sum_i p_i^2} = \frac{1}{\sum_i (p_i/p_s)^2} \quad (一.4)$$

注意这个权重是对于相同的路径长度 $k = s + t - 1$ 的所有路径形式来计算的。

人眼观测到的光为: 直接射入人眼的部门 + 散射一次以后射入人眼的部分 + 散射两次以后射入人眼的部分 + ...; 对于路径长度为 k , 表示光散射了 $k - 1$ 次。因此, 我们分别对光散射不同的次数来估计, 然后把它们加起来, 就能得到最终的渲染结果。所以, 我们只需要分别对每个长度为 k 的路径中的那些样本进行加权组合, 得到长度为 k 的路径的估计结果。把不同的长度为 k 的路径估计的结果相加, 得到最终结果。

二 非对称散射问题

当光发生折射或者着色法向量被使用时，就会发生非对称散射。我们展示了如何在双向光传输算法中正确处理这些问题，即通过相应的伴随 BSDF。需要注意的是，非对称 BSDF 可能看起来不是很重要，但其实它可能会因为处理不当引入大量误差。

着色法向量 N_s （模型表面本身的法向量记做 N_g ）的作用一般是，通过法向量贴图等工具使得光滑的表面变粗糙，添加一些额外的细节。着色法向量虽然很方便，但是并没有很好定义的物理偏差（它属于非物理材质组成部分），因此需要代码来控制。

2.1 非对称散射问题的产生

对于折射，一般直接将入射方向 ω_i 映射为 ω_t ，而不去考虑 BSDF 的计算。在做光线追踪时，要使用 BSDF 来估计，而当进行光粒子追踪时，则需要用伴随 BSDF。

前面说过， $f_s(\omega_i \rightarrow \omega_o)$ 是用来估计辐射度以及散射重要性粒子的；而伴随 BSDF $f_s^*(\omega_i \rightarrow \omega_o)$ 是用来估计重要性以及散射光粒子的。它们之间的关系是 $f_s(\omega_i \rightarrow \omega_o) = f_s^*(\omega_o \rightarrow \omega_i)$ 。非对称散射就是 $f_s(\omega_i \rightarrow \omega_o) \neq f_s(\omega_o \rightarrow \omega_i)$ ，导致采样光源子路径和相机子路径时不能使用同一个 BSDF 计算式。在实际程序中，只要认识到非对称散射可能存在的场景，并好好利用相应的伴随 BSDF。

2.2 经验主义模型与非对称性

考虑 Phong 照明的高光部分：

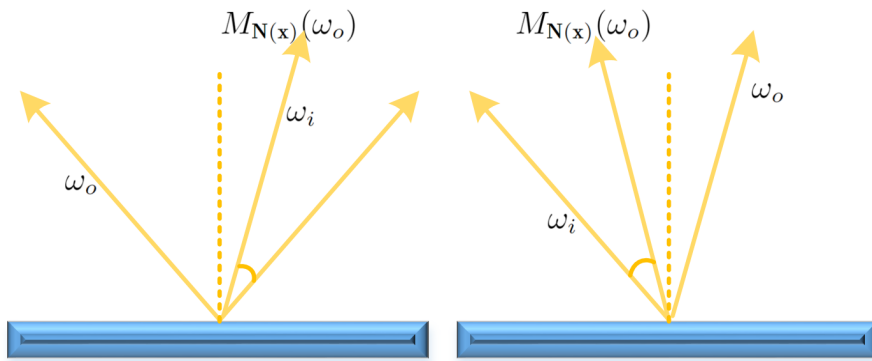
$$L_o(\omega_o) = \int_{\mathcal{H}_i^2} C_r \max(0, \omega_i \cdot M_{N(x)}(\omega_o))^n L_i(\omega_i) d\sigma(\omega_i) \quad (二.1)$$

其中 $M_{N(x)}(\omega_o)$ 表示方向为 ω_o 的光在法向量为 $N(x)$ 的镜面反射到的方向。由于 BSDF 是对投影立体角进行积分的，所以需要加上一个 \cos 项：

$$L_o(\omega_o) = \int_{\mathcal{H}_i^2} \frac{C_r \max(0, \omega_i \cdot M_{N(x)}(\omega_o))^n}{|\omega_i \cdot N(x)|} L_i(\omega_i) |\omega_i \cdot N(x)| d\sigma(\omega_i) \quad (二.2)$$

$$f_s(\omega_i \rightarrow \omega_o) = \frac{C_r \max(0, \omega_i \cdot M_{N(x)}(\omega_o))^n}{|\omega_i \cdot N(x)|} \quad (二.3)$$

如果没有 \cos 项，Phong 模型的高光就是对称 BSDF：



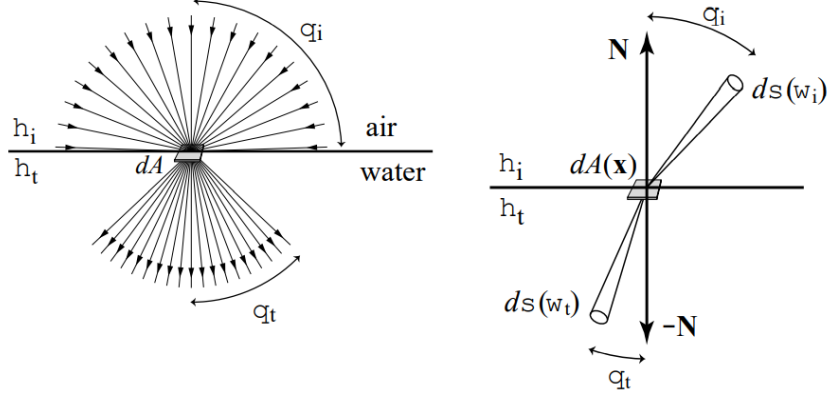
但是因为有了 \cos 项，所以就不再是对称的 BSDF 了。

三 折射的非对称性

3.1 折射的 BSDF

我们导出了相应 BSDF 及其伴随的显式公式，并讨论了双向渲染算法的含义。假设在折射中，光全部都穿透了介质。

直观地说, 当光进入折射率较高的介质时, 相同的光能被压缩到较小的体积中。考虑一个小片段 $dA(\mathbf{x})$ 在半球 \mathcal{H}_i^2 中有均匀辐射度照射进入。假设光以较高的折射率进入介质, 穿过光不会填充整个半球, 如下图所示左:



入射光携带的功率在一个小片段 $dA(\mathbf{x})$ 上是:

$$d\Phi_i = L_i dA(\mathbf{x}) d\sigma^\perp(\omega_i) \quad (三.1)$$

类似地, 出射光表示为:

$$d\Phi_t = L_t dA(\mathbf{x}) d\sigma^\perp(\omega_t) \quad (三.2)$$

因此, 通过能量守恒:

$$L_t = \frac{d\sigma^\perp(\omega_i)}{d\sigma^\perp(\omega_t)} L_i \quad (三.3)$$

注意立体角的极坐标参数化以及 Snell 定律及其微分形式:

$$d\sigma^\perp(\omega) = \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (三.4)$$

$$\eta_i \sin \theta_i = \eta_t \sin \theta_t \quad (三.5)$$

$$\eta_i \cos \theta_i d\theta_i = \eta_t \cos \theta_t d\theta_t \quad (三.6)$$

注意 $d\phi_i = d\phi_t$, 上面的式子就能够推出入射和出射辐射度的关系是:

$$L_t = \frac{\eta_t^2}{\eta_i^2} L_i \quad (三.7)$$

注意这个推导关系是与光的频率相关的, 如果按照波长相关, 则 $L_t = \frac{\eta_t^3}{\eta_i^3} L_i$ 。

对于镜面反射:

$$\begin{aligned} L_o(\omega_o) &= \int_{S^2} L_i(\omega_i) f_s(\omega_i \rightarrow \omega_o) |\omega_i \cdot \mathbf{N}| d\sigma(\omega_i) \\ f_s(\omega_i \rightarrow \omega_o) &= \frac{\delta_\sigma(\omega_i - M_{\mathbf{N}}(\omega_o))}{|\omega_i \cdot \mathbf{N}|} \end{aligned} \quad (三.8)$$

进而类比写出折射的 BSDF, 这里注意折射公式 $\omega_i = R(\omega_t)$:

$$f_s(\omega_i \rightarrow \omega_t) = \frac{\eta_t^2}{\eta_i^2} \delta_{\sigma^\perp}(\omega_i - R(\omega_t)) \quad (三.9)$$

3.2 折射的伴随 BSDF

对于任意物理上合理的 BSDF (注意这里要求 $f_s(\omega_i \rightarrow \omega_o) = f_s(\omega_o \rightarrow \omega_i)$), 当发生的是折射事件时, BSDF 可以写为:

$$\frac{f_s(\omega_i \rightarrow \omega_o)}{\eta_o^2} = \frac{f_s(\omega_o \rightarrow \omega_i)}{\eta_i^2} \quad (三.10)$$

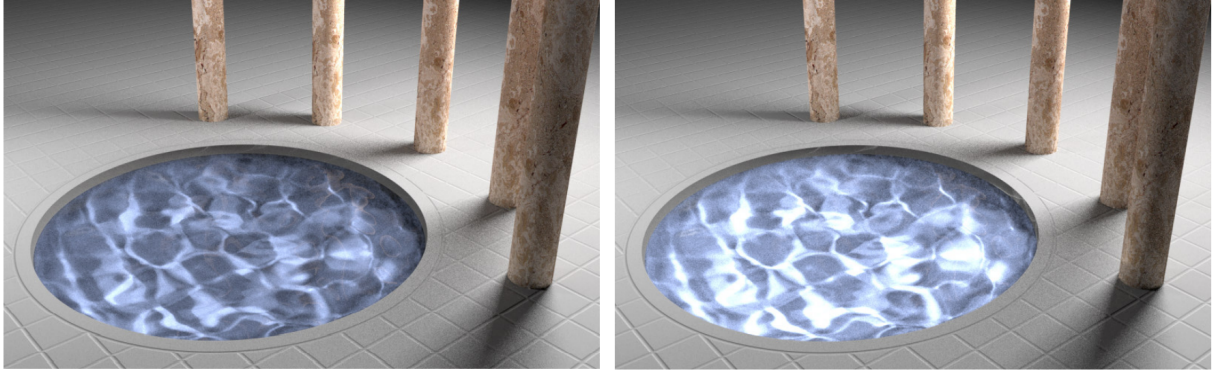
因此得到折射伴随 BSDF 的关系式：

$$\begin{aligned}
 f_s^*(\omega_i \rightarrow \omega_t) &= f_s(\omega_t \rightarrow \omega_i) \\
 &= (\eta_i/\eta_t)^2 f_s(\omega_i \rightarrow \omega_t) \\
 &= \delta_{\sigma^\perp}(\omega_i - R(\omega_t))
 \end{aligned} \tag{三.11}$$

上式可以看出伴随 BSDF 中并没有 $(\eta_t/\eta_i)^2$ 项，也就是说重要性和光粒子在穿过折射面时不需要缩放（伴随 BSDF 是用来估计重要性以及散射光粒子的）。

3 3 结果与讨论

渲染结果如下：



左图表示正确的结果，右图是发射光粒子时乘以了 $(\eta_t/\eta_i)^2$ 项的结果，这样会使得焦散过亮（焦散是光从水表面折射到水池底部形成的光斑）。

在 1989 年时 Hall 就指出了辐射度在计算折射时需要用 $(\eta_t/\eta_i)^2$ 项来缩放，但是当时在很多光线追踪系统中都忽略了。在论文原文中指出当追踪光路径时，不需要乘以该项。在 PBRT 中的 SpecularTransmission::Sample_f 函数中可以看到：

```

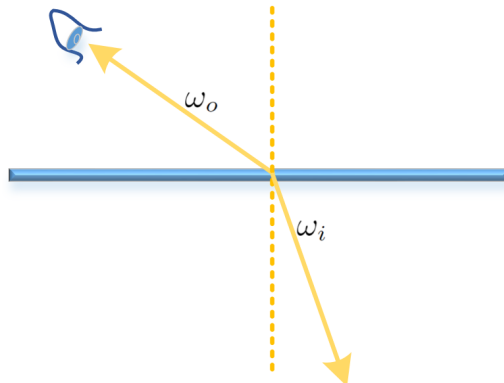
1 // Figure out which $\eta$ is incident and which is transmitted
2 bool entering = CosTheta(wo) > 0;
3 Float etaI = entering ? etaA : etaB;
4 Float etaT = entering ? etaB : etaA;
5 .....
6 // Account for non-symmetry with transmission to different medium
7 if (mode == TransportMode::Radiance) ft *= (etaI * etaI) / (etaT * etaT)
    ;

```

也就是说当估计的是辐射度时，需要乘以该因子。注意上面乘以 $(\eta_i/\eta_t)^2$ 项是倒数是因为：

$$L_i = \frac{\eta_i^2}{\eta_t^2} L_t \implies L_t = \frac{\eta_t^2}{\eta_i^2} L_i \tag{三.12}$$

比如下图，设 $\eta_i > \eta_t$ 。我们知道光从 ω_i 射入到 ω_o 会发散（注意 ω_o 所在半球假设在表面上方）：



四 着色法向量带来的非对称性

着色法向量看起来像是改变了几何结构，但其实它本质上是改变了 BSDF：

$$\bar{f}_s(\omega_i \rightarrow \omega_o) = f_{s, \mathbf{N}_s}(\omega_i \rightarrow \omega_o) \frac{|\omega_i \cdot \mathbf{N}_s|}{|\omega_i \cdot \mathbf{N}_g|} \quad (四.1)$$

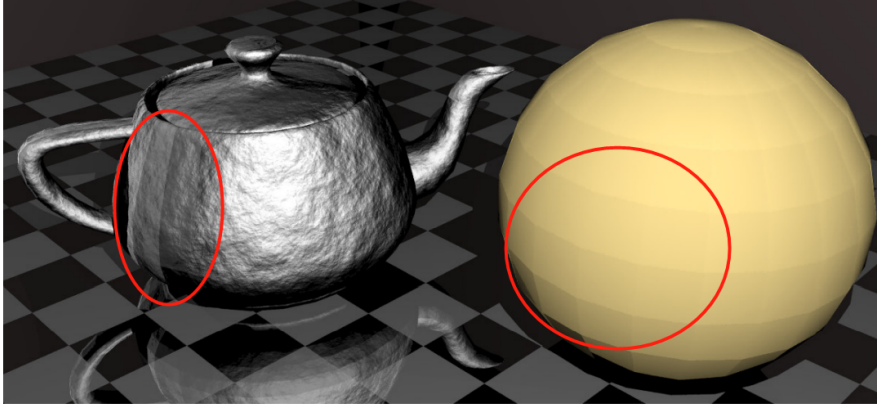
估计的出射辐射度为：

$$\begin{aligned} L_o(\omega_o) &= \int_{S^2} L_i(\omega_i) \bar{f}_s(\omega_i \rightarrow \omega_o) |\omega_i \cdot \mathbf{N}_g| d\sigma(\omega_i) \\ &= \int_{S^2} L_i(\omega_i) f_{s, \mathbf{N}_s}(\omega_i \rightarrow \omega_o) \frac{|\omega_i \cdot \mathbf{N}_s|}{|\omega_i \cdot \mathbf{N}_g|} |\omega_i \cdot \mathbf{N}_g| d\sigma(\omega_i) \end{aligned} \quad (四.2)$$

估计重要性为：

$$\begin{aligned} W_o(\omega_o) &= \int_{S^2} W_i(\omega_i) \bar{f}_s^*(\omega_i \rightarrow \omega_o) |\omega_i \cdot \mathbf{N}_g| d\sigma(\omega_i) \\ &= \int_{S^2} W_i(\omega_i) f_{s, \mathbf{N}_s}(\omega_o \rightarrow \omega_i) \frac{|\omega_o \cdot \mathbf{N}_s|}{|\omega_o \cdot \mathbf{N}_g|} |\omega_i \cdot \mathbf{N}_g| d\sigma(\omega_i) \end{aligned} \quad (四.3)$$

也就是说对于估计重要性时，后面的由着色法向量带来的 BSDF 的改变是没法被消除的。所以需要单独处理这种情况，而不能仅仅当成“表面的法向量被改变了”来处理。如果不注意着色法向量带来的问题，就会得到下面的结果。具体原因请见论文原文中的描述。



参考文献

- [1] Veach E . Robust Monte Carlo Methods for Light Transport Simulation[J]. Ph.d.thesis Stanford University Department of Computer Science, 1998.
- [2] Arvo, J. [1995]. Analytic Methods for Simulated Light Transport, PhD thesis, Yale University.