辐射度量学和光传输算子

Dezeming Family

2022 年 9 月 7 日

DezemingFamily 系列文章和电子书**全部都有免费公开的电子版**，可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列电子书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新的版本。对文章的内容建议和出现的错误也欢迎在网站留言。

本文是对 [1] 论文的详细解读，该论文可以说是渲染必读论文，但有些符号表示和描述可能对初学者并不友好，由于里面介绍的几种重要技术，例如双向路径追踪、多重重要性采样以及 Metropolis 方法都是非常重要的，因此我打算写一下本论文的解读，作为构建“高端图形渲染学习体系”的一个重要组成部分。

由于论文 [1] 篇幅过长，为了减少 Latex 编译的时间以及更好把控不同部分的内容，我将整个论文划分为了多本小册子来进行讲解。

本文的预备知识：蒙特卡洛方法、蒙特卡洛光线追踪（可以看 Peter Shirley 的光线追踪三本小书）、BSDF 模型、路径追踪、向量空间。

目录

一　基本内容介绍

本文是对 [1] 的第三章和第四章的详细解读。我们先简单概括一下本文要覆盖的内容。

辐射度量学是用来测量电磁辐射 (electromagnetic radiation) 的概念，也是构建图形学的基石。

我们从场景模型的数学表达开始，讨论相空间 (phase space) 和轨迹空间 (trajectory space)，并介绍辐射量 (radiometric quantities) 如何通过术语“光子事件 (photon events)”来定义。除了介绍辐射度量学术语（能量、功率、辐射度等），我们还会介绍入射和出射辐射度函数。

之后我们会定义 BSDF(bidirectional scattering distribution function) 的数学定义，展示 BSDF 如何用来描述光传输方程，然后我们给出伴随方法 (adjoint methods) 和双向方法 (bidirectional algorithms)。我们也解释了为什么非对称 BSDF 在双向方法中需要特殊处理，并定义了伴随 BSDF。

之后，描述光和重要性传输，以及它们的入射和出射形式，为双向方法做一个严格的理论基础。构建数学基础包括测度论、函数空间、内积和线性算子。我们的工作直接基于 [2]，但理论框架的很多内容都是新的，比如我们不假设 BSDF 都是对称的。我们有四个传输量：Li（入射辐射度）、L_o（出射辐射度）、W_i（入射重要性）和 W_o（出射重要性），对每个传输量都有不同的传输算子 (transport operator) 和测量方程 (measurement equation)，它们都以简单的方式关联，因为它们仅由两个基本元素构成：散射和传输算子，这两个算子描述了光传输过程的相互独立的两个方面。

我们以一种新的更有用的方式描述粒子跟踪 (particle tracing)，作为一组加权样本光线概率分布的条件。我们还介绍了光线空间 (ray space) 抽象表示，它简化了符号并澄清了光传输计算的结构。最后论文指出，必须使用入射而不是场辐射函数 (field radiance functions) 来使某些传输算子自共轭 (self-adjoint)。我们会定义传感器 (sensors) 和测量 (measurements)，然后展示散射和传输算子对于重要性传输来说很有用。

二　光传输的域与空间

2 1　域与度量

在 $\mathbb{R}^3$ 空间上，设场景几何的并集为 $\mathcal{M}$。正常情况下，每个表面都是分段可微 (piecewise differentiable) 的二维流形 (manifold)，可能有边界也可能没有边界（有的表面，比如一个立方体，面与面之间的连接处就是不可微的）。由于技术上的原因，我们要求每个流形都是闭集（每个流形 M 都需要包括它的边界 ∂M），因此在邻接表面 (abutting surfaces) 处不能有间隙 (gaps)，比如立方体。当然 $\mathcal{M}$ 自身不一定是一个流形，因为可能有多个物体，这些物体之间没有表面连接。

表面会把 $\mathbb{R}^3$ 划分为许多小空间 (cells)，当然有的表面可能不属于任何 cell 边界，比如空间中漂浮的一个面片，它没有参与对 $\mathbb{R}^3$ 的划分。

对于一个区域 $D \subset \mathcal{M}$，符号 $\int_{\mathcal{M}} f(\mathbf{x}) dA(\mathbf{x})$ 表示 Lebesgue 积分：$f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$（可以理解为积分更广义的形式），与表面积 A 有关。

方向表示为单位长度向量 $\omega \in \mathbb{R}^3$，所有方向的集合写作 $\mathcal{S}^2$，这是一个在 $\mathbb{R}^3$ 的单位球。让 σ 表示 $\mathcal{S}^2$ 上的表面积测量 (surface area measure)，给定一个方向集 $D \subset \mathcal{S}^2$，被 D 覆盖的立体角就定义为 $\sigma(D)$。立体角可以描述为以 $\mathbf{x}$ 为中心时，将 P 投影到以 $\mathbf{x}$ 为中心的单位球面上的测量（就是面积）。

投影立体角，设表面点 $\mathbf{x}$ 上的法向量 $\mathbf{N}(\mathbf{x})$，对于给定的方向集 $D \subset \mathcal{S}^2$，投影立体角测量 $\sigma_{\mathbf{x}}^{\perp}$ 通过下式定义：

$$\sigma_{\mathbf{x}}^{\perp}(D) = \int_D |\omega \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x})| d\sigma(\omega) \tag{二.1}$$

$\omega \cdot \mathbf{N}$ 经常会写为 $\cos\theta$，θ 可以称为极角 (polar angle)。

投影立体角是从下面的几何解释中得到的。设 $T_{\mathcal{M}}(\mathbf{x})$ 是切线空间（$\mathbb{R}^3$ 上垂直于 $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ 的子空间）：

$$T_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \big| \mathbf{y} \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}) = 0\} \tag{二.2}$$

切空间把 $\mathcal{S}^2$ 划分为两个半球：

$$\textit{upward hemisphere} \ : \mathcal{H}_+^2(\mathbf{x}) = \{\omega \in \mathcal{S}^2 \big| \omega \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}) > 0\} \tag{二.3}$$

$$\textit{downward hemisphere} \ : \mathcal{H}_-^2(\mathbf{x}) = \{\omega \in \mathcal{S}^2 \big| \omega \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}) < 0\} \tag{二.4}$$

现在，给定方向集 D（只在一个半球上），投影立体角可以通过简单地将 D 正交投影到切线空间。对于整个半球面来说，投影到切线空间以后的面积是 $\pi r^2 = \pi$：$\sigma_{\mathbf{x}}^{\perp}(\mathcal{H}_+^2) = \pi$。

2 2　相空间

对于运动的 N 个粒子，可以用 $6N$ 维相空间 (phase space) 来描述整个体系状态（对于一个粒子，3 维表示位置，3 维表示速度）。

假设光非偏振，且完全不相干，那么每个光子都可以用位置 $\mathbf{x}$、速度 ω 和波长 λ 来描述。然而，对于不与其他粒子交互的情况（比如光子之间不会碰撞），使用相空间来描述单个粒子，相空间 ψ 是 6 维的：

$$\psi = \mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}^2 \times \mathbb{R}^+ \tag{二.5}$$

$\mathbb{R}^+$ 是表示波长的正实数。

辐射度量学可以定义为在相空间内的一个给定区域内数光子的数量，或者测量它们的密度。

2 3　轨迹空间与光子事件

如果把相空间的所有光子随着时间的变化把轨迹记录下来，那么就得到了轨迹空间 (trajectory space) 中的一系列的一维曲线（注意这里的一维意思是时间这个维度）：

$$\Psi = \mathbb{R} \times \psi \tag{二.6}$$

辐射度量学由沿着这些曲线的指定的一系列光子事件 (photon events)（比如发射光子、吸收光子或散射光子）来定义，并通过不同方式（比如单位立体角、单位面积等）测量这些事件的分布。对于一个表面 P，与该表面相交的光子轨迹产生的光子事件（折射、反射等）可以描述为（$\mathbb{R}$ 表示时间维度）：

$$\mathbb{R} \times P \times \mathcal{S}^2 \times \mathbb{R}^+ \tag{二.7}$$

光子事件被定义在与表面的交点上。

要测量光子事件的分布，用连续量比这种离散量（光子数量）会更容易，因此，我们用总的辐射能量 (radiant energy)Q（单位：焦耳 J）来表示给定轨迹空间区域的光子事件数。

2 4 辐射度量学

在有限面积的表面上定义单位时间的辐射功率（单位时间通过的光子数、单位时间接收/产生的能量）：

$$\Phi = \frac{dQ(t)}{dt} \tag{二.8}$$

这里，测量的区域（表面）大小可以变化，只要 $Q(t)$ 已知，功率就已知。

单位面积的功率就是辐射通量 (irradiance,radiosity)：

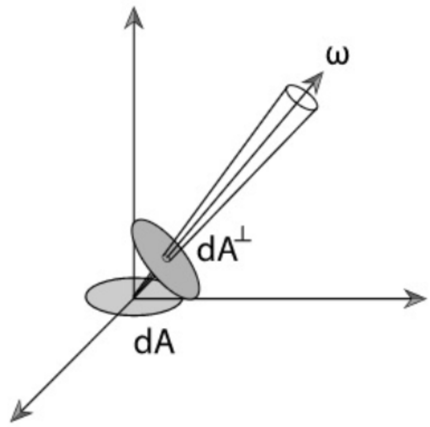
$$E(\mathbf{x}) = \frac{d\Phi(\mathbf{x})}{dA(\mathbf{x})} \tag{二.9}$$

对于一些描述习惯，射向表面的辐射通量叫做 irradiance，从表面发射或者射出则经常描述为 radiant exitance。

最重要的量纲叫做辐射度 (radiance)：

$$L(\mathbf{x}, \omega) = \frac{d^2\Phi(\mathbf{x}, \omega)}{dA_\omega^\perp(\mathbf{x})d\sigma(\omega)} \tag{二.10}$$

$A_\omega^\perp(\mathbf{x})$ 表示投影面积测量，即一个表面投影到垂直于 ω 的平面上的面积。也就是说，对于测量 $(\mathbf{x}, \omega)$ 辐射度，我们需要记录单位时间内通过一个小的区域 $dA_\omega^\perp(\mathbf{x})$（垂直于 ω）的光子数量，这些光子的方向包含在 ω 周围的一个小立体角 $d\sigma(\omega)$ 内。



当测量离开一个表面 S 的辐射度时，可以直接使用公式：

$$L(\mathbf{x}, \omega) = \frac{d^2\Phi(\mathbf{x}, \omega)}{|\omega \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x})| dA(\mathbf{x}) d\sigma(\omega)} \tag{二.11}$$

或者干脆写为“投影立体角”：

$$L(\mathbf{x}, \omega) = \frac{d^2\Phi(\mathbf{x}, \omega)}{dA(\mathbf{x}) d\sigma_\omega^\perp(\omega)} \tag{二.12}$$

还有很多其他的辐射度量被定义，大家可以在论文 [1] 的 3.4.4 小节给出的参考文献中去查阅。

2 5　入射和出射辐射度

辐射度 $L(\mathbf{x},\omega)$ 根据其参数 $\mathbf{x}$ 和 ω，可知对于表面来说，其辐射度函数可以描述为：

$$L:\mathcal{M}\times\mathcal{S}^2\to\mathbb{R} \tag{二.13}$$

或者用三维空间中点的形式：

$$L:\mathbb{R}^3\times\mathcal{S}^2\to\mathbb{R} \tag{二.14}$$

注意辐射度可以是一个负数（此时没有任何物理意义），这样保证所有的辐射度函数的集合构成一个向量空间。

入射辐射度 $L_i(\mathbf{x},\omega)$ 表示沿着 ω 方向射向点 $\mathbf{x}$；出射辐射度 $L_o(\mathbf{x},\omega)$ 表示从点 $\mathbf{x}$ 沿着 ω 方向射出。仅从数值来说：

$$L_i(\mathbf{x},\omega)=L_o(\mathbf{x},-\omega) \tag{二.15}$$

但对于一个实际点 $\mathbf{x}$ 来说，入射辐射度和出射辐射度之间存在复杂的联系，需要使用一些函数来定义（比如最简单的反照率，即光在表面被吸收后，有多少比例的光反射出去）。

通过轨迹空间 Ψ 可以更好地理解入射和出射辐射度的不同。考虑波长，光子事件可以写为一个函数：

$$(\mathbf{x}_i,\omega_i,\lambda_i)(t) \tag{二.16}$$

我们设光子事件发生在表面 $\mathbb{P}$ 上（$\mathbb{R}$ 是时间维度所在空间，$\mathcal{M}$ 是表面所在空间）：

$$\mathbb{R}\times\mathcal{M}\times\mathcal{S}^2\times\mathbb{R}^+ \tag{二.17}$$

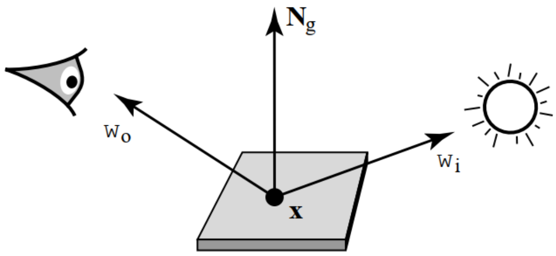
注意光子移动曲线不一定是连续的，因为散射的光子会瞬间改变它的方向和波长（一个连续的曲线要求光子在穿过 $\mathcal{M}$ 时没有任何变化）。而且对于发射光子和吸收光子而言，曲线也不是连续的，因为它们只定义在表面 $\mathbb{P}$ 的一侧（表面发光类似于“射线”，只发向一侧的方向）。

对于一个光子事件 $(t_i,\mathbf{x}_i,\omega_i,\lambda_i)$（比如光子在 t_i 时发生了散射），L_i 测量的是 $t<t_i$ 的轨迹，L_o 测量的是 $t>t_i$ 的轨迹。

三　双向散射分布函数

3 1　基本定义

我们固定表面上的一个点 $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$：



注意 ω_i 和 ω_o 都是表示从 $\mathbf{x}$ 向外的方向。从方向 ω_i 到达 $\mathbf{x}$ 的 irradiance 表示为：

$$L_i(\omega_i) = \frac{dE(\omega_i)}{d\sigma^{\perp}(\omega_i)} \tag{三.1}$$

$$\Longrightarrow dE(\omega_i) = L_i(\omega_i) d\sigma^{\perp}(\omega_i) \tag{三.2}$$

经过实验观察，当 $dE(\omega_i)$ 增加时，$dL_o(\omega_o)$ 也会成比例增加（$\propto$ 表示“正比于”）：

$$dL_o(\omega_o) \propto dE(\omega_i) \tag{三.3}$$

我们定义这个比例关系：

$$f_s(\omega_i \to \omega_o) = \frac{dL_o(\omega_o)}{dE(\omega_i)} = \frac{dL_o(\omega_o)}{L_i(\omega_i) d\sigma^{\perp}(\omega_i)} \tag{三.4}$$

f_s 就被称为双向散射分布函数 (bidirectional scattering distribution function, BSDF)。有些人可能会好奇为什么不是用 $\frac{dL_o(\omega_o)}{dL_i(\omega_i)}$，而是要用辐射度去比上辐射通量，我们下一小节就解释一下。

3 2　散射方程

我们已经得到：

$$dL_o(\omega_o) = f_s(\omega_i \to \omega_o) dE(\omega_i) \tag{三.5}$$

$$dL_o(\omega_o) = L_i(\omega_i) f_s(\omega_i \to \omega_o) d\sigma^{\perp}(\omega_i) \tag{三.6}$$

$$L_o(\omega_o) = \int_{\mathcal{S}^2} L_i(\omega_i) f_s(\omega_i \to \omega_o) d\sigma^{\perp}(\omega_i) \tag{三.7}$$

先不管 $f_s(\omega_i \to \omega_o)$ 的形式，我们会发现推导出上述积分公式的过程非常顺利，在有了 f_s 以后，我们只需要知道入射辐射度及其方向，就能求解出散射到任意方向的出射辐射度。

再解释一下上式。注意我们的积分区间是整个球面 $\mathcal{S}^2$，因此是对角度进行积分，将各个方向入射过来的辐射量进行累积。因此，被积分的内容一定不能是 irradiance，因为它并不是单位立体角的量。基于这样的 f_s 定义，光的计算就可以完全用辐射度来表示。

3 3　BRDF 和 BTDF

光在表面散射可以分为反射和穿透，分别表示为双向反射分布函数 f_r(bidirectional reflectance distribution function, BRDF) 和双向透射分布函数 f_t(bidirectional transmittance distribution function, BTDF)。设 $\mathcal{H}_i^2$ 为入射半球面，$\mathcal{H}_r^2$ 为反射半球面，$\mathcal{H}_t^2$ 为透射半球面：

$$f_r : \mathcal{H}_i^2 \times \mathcal{H}_r^2 \to \mathbb{R} \tag{三.8}$$

$$f_t : \mathcal{H}_i^2 \times \mathcal{H}_t^2 \to \mathbb{R} \tag{三.9}$$

BRDF 是一个对称的函数：

$$f_r(\omega_i \to \omega_o) = f_r(\omega_o \to \omega_i) \tag{三.10}$$

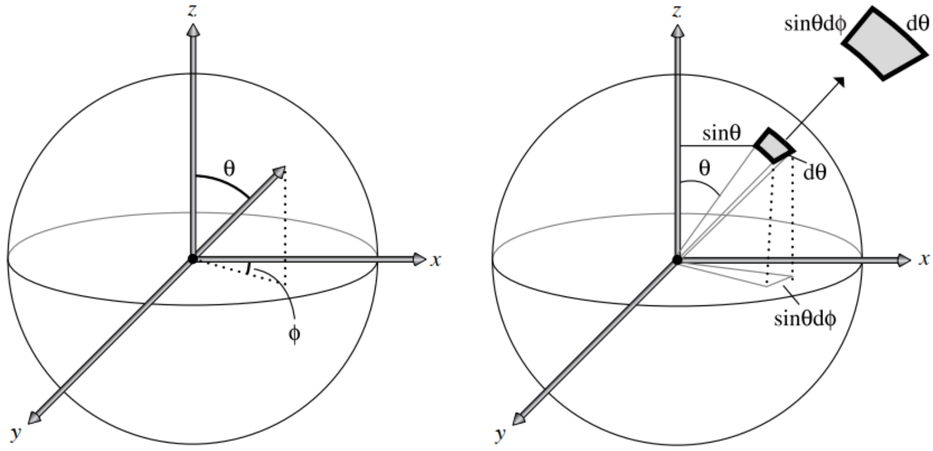
以及符合物理能量守恒（小于 1 说明有能量被吸收或者穿透了表面）：

$$\int_{\mathcal{H}_o^2} f_r(\omega_i \to \omega_o) d\sigma^{\perp}(\omega_o) \le 1 \quad for\ all\ \omega_i \in \mathcal{H}_i^2 \tag{三.11}$$

设切线空间中一个方向 **T** 与法向量 **N** 相互垂直：

$$\cos\theta = \omega \cdot \mathbf{N} \quad \cos\phi = \omega \cdot \mathbf{T} \tag{三.12}$$

T 经常是参考系的 x 轴：



由图可知，立体角和投影立体角微分可以写为（≡ 表示“即”、“就是”的意思）：

$$d\sigma(\omega) \equiv \sin\theta d\theta d\phi \tag{三.13}$$

$$d\sigma^{\perp}(\omega) \equiv \sin\theta d\theta d\phi \tag{三.14}$$

这样我们就可以换一种表示方法：

$$L_o(\theta_o, \phi_o) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} L_i(\theta_i, \phi_i) f_s(\theta_i, \phi_i, \theta_o, \phi_o) |\cos\theta_i| \sin\theta_i d\theta_i d\phi_i \tag{三.15}$$

四　光传输的引入

4 1　测量方程

计算光传输本质上就是在测量一些量 $I_1, ..., I_M$，比如对于渲染一张图像，那么每个像素的值 I_j 就表示单个像素的测量，M 是图像中的像素数。

测量器也叫传感器 (sensor)，它的响应值可能会根据光击中传感器的方向和位置来确定，定义为传感器响应函数 $W_e(\mathbf{x}, \omega)$。通过积分来得到总的响应，称为测量方程：

$$I = \int_{\mathcal{M}\times\mathcal{S}^2} W_e(\mathbf{x}, \omega) L_i(\mathbf{x}, \omega) dA(\mathbf{x}) d\sigma_{\mathbf{x}}^{\perp}(\omega) \tag{四.1}$$

或者单独对每个测量 I_j 写为：

$$I = \int_{\mathcal{M}\times\mathcal{S}^2} W_e^{(j)}(\mathbf{x}, \omega) L_i(\mathbf{x}, \omega) dA(\mathbf{x}) d\sigma_{\mathbf{x}}^{\perp}(\omega) \tag{四.2}$$

这跟前面散射方程有很多相似之处，注意单位投影立体角 $d\sigma_{\mathbf{x}}^{\perp}(\omega)$ 意味着：

$$L_i(\mathbf{x}, \omega) = L_o(\mathbf{x}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \omega), -\omega) \tag{四.3}$$

$\mathbf{x}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \omega)$ 是光线投射函数，返回 $\mathbf{x}$ 点沿着 ω 方向前进碰到的最近的表面点。

4 2　光传输方程

考虑表面自发光 L_e，则表面点发射到某个方向的辐射度 L_o 就是：

$$L_o = L_e + L_{o,s} \tag{四.4}$$

$L_{o,s}$ 表示散射的光：

$$L_{o,s}(\mathbf{x}, \omega_o) = \int_{\mathcal{S}^2} L_i(\mathbf{x}, \omega_i) f_s(\mathbf{x}, \omega_i \to \omega_o) d\sigma_{\mathbf{x}}^{\perp}(\omega_i) \tag{四.5}$$

总式可以表示为：

$$L_o(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{\mathcal{S}^2} L_o(\mathbf{x}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) f_s(\mathbf{x}, \omega_i \to \omega_o) d\sigma_{\mathbf{x}}^{\perp}(\omega_i) \tag{四.6}$$

这就是光传输方程，可以通过递归的方式来逐步求解。

4 3　重要性

关于重要性，这个小节和下个小节都会做一些铺垫性的介绍。但或许语言和文字有些苍白无力，我希望提前先进行一些概念上的描述，让大家更清楚为什么要定义和使用“重要性”。

如何估计辐射度？路径追踪中通常会使用递归方法，根据 BSDF 计算从 ω_i 散射到 ω_o 方向的比例。现在考虑双向过程，我们不让相机去递归采样计算不同散射阶数（直接射入人眼、散射一次以后射入人眼、散射两次以后射入人眼等）的光，而是计算对于相机来说的每条光线的重要性。比如对于相机传感器来说，对于每个像素 j，都有一个重要性函数 $W_e^j(\mathbf{x}, \omega)$。如果人眼发出的采样光线没有穿过像素 j 所在的小格子，那么这条光线对于这个像素的重要性就是 0。对于完全镜面反射的场景，假设相机发射的光线重要性是 $W_e^j(\mathbf{x}, \omega_1) > 0$，那么反射以后，它的重要性还是 $W_e^j(\mathbf{x}, \omega_1) > 0$，也就是说此时它采样到的光照对最后像素的贡献比例就是 $W_e^j(\mathbf{x}, \omega_1) > 0$。

但场景一般不是完美镜面的，也就是说重要性为 $W_e^j(\mathbf{x}, \omega_1) > 0$ 的采样光线在反射以后会把重要性分散到一个方向范围上，在这个范围里，每条光线的重要性都大于 0，根据蒙特卡洛方法，可以只跟踪一条光线的重要性。

尽管读者可能会对实际处理过程并没有那么了解，但至少现在对“重要性”这个概念应该已经有了一定的认识。

下面开始介绍原论文 [1] 上的内容。

对于传感器，如果我们把响应性 $W_e(\mathbf{x}, \omega)$ 作为发射量，则此时叫做发射重要性函数 (emitted importance function)。“重要性”，即光沿着相应的方向到达测量 I 的重要性。换句话说，光到达传感器以后，不同方向可能具有不同的“重要性”；传感器发出采样光线，那么这条光线就也是会携带这个“重要性”信息。

通过伴随方法 (adjoint methods)，将传输法则用于重要性而不是辐射度。平衡重要性函数 (equilibrium importance function)$W(\mathbf{x}, \omega)$ 可以根据重要性传输公式：

$$W(\mathbf{x}, \omega) = W_e(\mathbf{x}, \omega) + \int_{\mathcal{S}^2} W(\mathbf{x}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) f_s(\mathbf{x}, \omega_o \to \omega_i) d\sigma_{\mathbf{x}}^{\perp}(\omega_i) \tag{四.7}$$

这个公式跟光传输方程非常相似，但注意 f_s 的方向变为了 $\omega_o \to \omega_i$。

虽然只有一个平衡辐射函数，但可以有许多不同的平衡重要性函数（每个传感器一个）。这是直接方法 (direct method) 和伴随方法 (adjoint methods) 之间的重要区别。

双向方法，比如通过重要性驱动 (importance-driven) 得到。在蒙特卡洛方法中，双向方法通常结合路径跟踪 (path tracing) 和粒子跟踪 (particle tracing)，其中传输方程从传感器开始采样，粒子跟踪从光源开始采样。

4 4 非对称 BSDF 与伴随 BSDF

非对称的 BSDF，即：

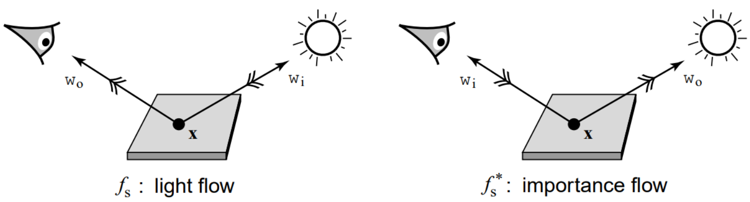
$$f_s(\omega_i \to \omega_o) \neq f_s(\omega_o \to \omega_i) \tag{四.8}$$

在双向方法中，必须要重点关注这种材质，因为光传输和重要性传输是一个相反的过程，而如果 BSDF 非对称，则它们相当于不同的传输方程。这部分内容会在后面单独讲解。

伴随 (adjoint)BSDF 定义为：

$$f_s^*(\omega_i \to \omega_o) = f_s(\omega_o \to \omega_i) \tag{四.9}$$

此时，对于蒙特卡洛方法来说，ω_i 永远是采样方向：



(a) The normal BSDF f_s. **(b)** The adjoint BSDF f_s^*.

注意 $f_s(\omega_i \to \omega_o)$ 是用来估计辐射度的（以及散射重要性粒子）；而伴随 BSDF，$f_s^*(\omega_i \to \omega_o)$ 是用来估计重要性的（以及散射光粒子）。估计辐射度的过程大家应该都非常熟悉了，且每一条入射光线都贡献到反射到 ω_o 方向上，在路径追踪中其实散射的是重要性粒子。这些内容以后还会花很多篇幅来介绍。

五　光线空间与算子

我们定义光线空间 (ray space) 和吞吐量测量 (throughput measure)，它们共同构成光传输计算的基础。论文中证明了可以用多种方式表示光线空间，并且还讨论了抽象定义光线空间的优势，而不是使用光线的显式表示，这些我们都会一一介绍。

光线空间包含了场景中某个表面为起始点：

$$\mathcal{R} = \mathcal{M} \times \mathcal{S}^2 \tag{五.1}$$

$$\mathbf{r} = (\mathbf{x}, \omega) \tag{五.2}$$

注意沿着一条光线的 radiance 是恒定值（无参与介质），因此只需要记录离开表面的 radiance 即可。

5 1　吞吐量

我们定义 $\mathcal{R}$ 上的测量 μ，定义为吞吐量。考虑围绕 $\mathbf{r} = (\mathbf{x}, \omega)$ 的一小束光线，这一小束光线占据的面积为 dA，它们的方向都在立体角 $d\sigma$ 之内，这个小光束范围的吞吐量定义为：

$$d\mu(\mathbf{r}) = d\mu(\mathbf{x}, \omega) = dA(\mathbf{x}) d\sigma_{\mathbf{x}}^{\perp}(\omega) = dA_{\omega}^{\perp}(\mathbf{x}) d\sigma(\omega) \tag{五.3}$$

微分形式的吞吐量测量，就是面积与投影立体角的乘积。

对于光线集合 $D \subset \mathcal{R}$，进行积分来得到 $\mu(D)$：

$$\begin{aligned}\mu(D) &= \int_D dA(\mathbf{x}) d\sigma_{\mathbf{x}}^{\perp}(\omega) \\ &= \int_{\mathcal{M}} d\sigma_{\mathbf{x}}^{\perp}(D_{\mathbf{x}}) dA(\mathbf{x}) \qquad D_{\mathbf{x}} = \{\omega | (\mathbf{x}, \omega) \in D\}\end{aligned} \tag{五.4}$$

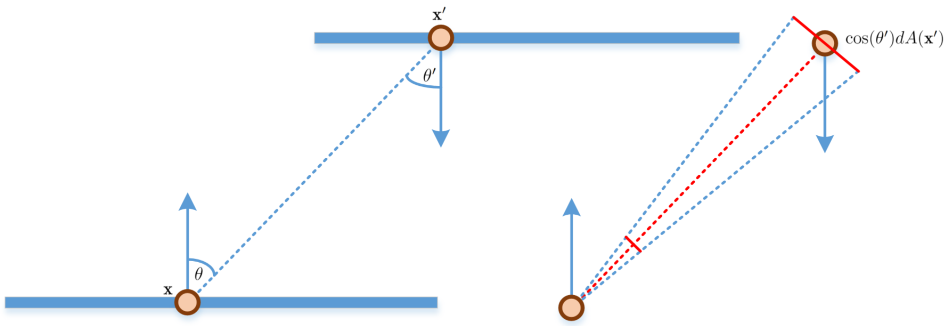
基于吞吐量来定义辐射度 radiance，即单位吞吐量的功率：

$$L(\mathbf{r}) = \frac{d\Phi(\mathbf{r})}{d\mu(\mathbf{r})} \tag{五.5}$$

光线也可以表述为“点到点”：$\mathbf{x} \to \mathbf{x}'$：

$$d\mu(\mathbf{x} \to \mathbf{x}') = V(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}') \frac{\cos(\theta)\cos(\theta')}{||\mathbf{x} - \mathbf{x}'||^2} dA(\mathbf{x}) dA(\mathbf{x}') \tag{五.6}$$

其中，θ 和 θ' 分别是 $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$ 与 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{x}'$ 上的法向量的夹角；$V(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}')$ 表示两个点之间是否可见，如果不可见，就是 0，否则就是 1。底下的平方项 $||\mathbf{x} - \mathbf{x}'||^2$ 通过下图来解释：



$\cos(\theta')dA(\mathbf{x}')$ 投影到以 $\mathbf{x}$ 为中心的单位球上的面积，这个比值关系就是 $\frac{1}{||\mathbf{x}-\mathbf{x}'||^2}$（面积是二维的，所以是平方关系）。

5 2　光线空间的函数

辐射度和重要性可以描述为光线空间的实值函数 (real-value function)：

$$f : \mathcal{R} \to \mathbb{R} \tag{五.7}$$

定义 L_p 范数：

$$||f||_p = \left(\int_{\mathcal{R}} |f(\mathbf{r})|^p d\mu(\mathbf{r}) \right)^{1/p} \tag{五.8}$$

$$||f||_\infty = ess\ sup_{\mathbf{r}\in\mathcal{R}} |f(\mathbf{r})| \tag{五.9}$$

$ess\ sup$ 表示本质上确界 (essential supremum)，其实就相当于找 $|f(\mathbf{r})|$ 的最大值。

定义 L_p 空间 $L_p(\mathcal{R})$，它在相加和标量乘法下是闭区间，所以就是一个向量空间（线性代数的一些基本知识）。这是完备的（柯西序列收敛）有范数的线性空间，叫做 Banach 空间。定义内积 (inner products) 操作：

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathcal{R}} f(\mathbf{r}) g(\mathbf{r}) d\mu(\mathbf{r}) \tag{五.10}$$

每个内积都有一个关联范数 (associated norm)$||f|| = \langle f, f \rangle^{1/2}$，因此这是一个希尔伯特空间 (Hilbert space)。

5 3　散射与传输算子

线性算子 A 是一个线性函数：$A : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$，它的域是一个向量空间 $\mathcal{F}$。符号 Af 表示把算子 A 作用于一个函数 f，得到一个新的函数。

局部散射算子 (local scattering operator)：

$$(\mathbf{K}h)(\mathbf{x}, \omega_o) = \int_{\mathcal{S}^2} f_s(\mathbf{x}, \omega_i \to \omega_o) h(\mathbf{x}, \omega_i) d\sigma_{\mathbf{x}}^{\perp}(\omega_i) \tag{五.11}$$

当 $h = Li$，就得到 $L_o = \mathbf{K}L_i$。因此，$\mathbf{K}$ 是一个映射，将函数 L 映射到另一个函数 $\mathbf{K}L$。

定义传输算子，ray-casting 函数 $\mathbf{x}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \omega)$，令：

$$d_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \omega) = \inf\{d > 0 | \mathbf{x} + d\omega \in \mathcal{M}\} \tag{五.12}$$

其中，inf 表示下确界（相当于找一个最小距离）。定义光线投射函数：

$$\mathbf{x}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{x} + d_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \omega)\omega \tag{五.13}$$

表示从 $\mathbf{x}$ 沿着方向 ω 出发到达 $\mathcal{M}$ 的第一个点。

几何或者传输算子 $\mathbf{G}$，定义为：

$$(\mathbf{G}h)(\mathbf{x}, \omega_i) = \begin{cases} h(\mathbf{x}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) & if\ d_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \omega_i) < \infty \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{五.14}$$

注意 $L_i = \mathbf{G}L_o$，假设 $d_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \omega_i) < \infty$：

$$L_i = L_o(\mathbf{x}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) \tag{五.15}$$

也就是说，对于一个表面的入射光，相当于上一个表面的出射光。

注意，如果 f_s 对称，则 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{K}$ 就都是自伴随的 (self-adjoint)，后面我们会描述它带来的光传输和重要性传输的对称性。

算子也有局部性 (locality)，比如 $(\mathbf{G}h)(\mathbf{r})$ 只取决于一条光线 $\mathbf{r}$，而 $(\mathbf{K}h)(\mathbf{r})$ 要对整个局部球面积分，因此 $\mathbf{G}$ 比 $\mathbf{K}$ 更具有局部性。

5 4　光传输与解算子

把散射和传输算子组合起来，就得到了光传输算子：

$$\mathbf{T} = \mathbf{KG} \tag{五.16}$$

我们先不解释它的具体含义，而是思考我们前面描述过的测量均衡辐射度 L 的方式：

$$L = L_e + \mathbf{T}L \tag{五.17}$$

L_e 是发射辐射度。这个式子叫做光传输方程 (light transport equation)，这个式子说明，在均衡时，出射辐射度必须是发射和散射辐射度之和。我们来看一下 $\mathbf{T}L$ 代表什么。对于出射辐射度 L_o，$L_i = \mathbf{G}L_o$，注意 $\mathbf{KG}L_o = \mathbf{K}L_i$，也就是相当于散射的部分。这个式子其实跟下式是完全一样的：

$$L_o(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{\mathcal{S}^2} L_i(\mathbf{x}, \omega_i) f_s(\mathbf{x}, \omega_i \to \omega_o) d\sigma_{\mathbf{x}}^{\perp}(\omega_i) \tag{五.18}$$

$$= L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{\mathcal{S}^2} L_o(\mathbf{x}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) f_s(\mathbf{x}, \omega_i \to \omega_o) d\sigma_{\mathbf{x}}^{\perp}(\omega_i) \tag{五.19}$$

我们来变换一下，得到解算子 (solution operator)（注意 $(\mathbf{I} - \mathbf{T})$ 可逆的前提是 $||\mathbf{T}|| < 1$。这里面涉及不少泛函的证明，但不理解也没有任何问题）：

$$(\mathbf{I} - \mathbf{T})L = L_e \tag{五.20}$$

$$L = (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} L_e \tag{五.21}$$

$\mathbf{I}$ 是一个恒等算子 (identity operator)，类似于矩阵变换中的单位矩阵。设 $\mathbf{S} = (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}$，则 $L = \mathbf{S}L_e$。展开解算子：

$$\mathbf{S} = (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{T}^i = \mathbf{I} + \mathbf{T} + \mathbf{T}^2 + \cdots \tag{五.22}$$

注意 $L = \mathbf{S}L_e$：

$$L = L_e + \mathbf{T}L_e + \mathbf{T}^2 L_e + \cdots \tag{五.23}$$

意味着 L 是表面发出的光加散射一次的光加散射两次的光等。

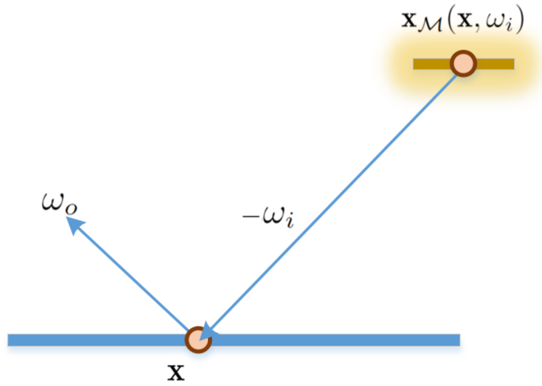
我们分析一下 $\mathbf{T}L_e$ 的实际含义：

$$\mathbf{T}L_e = \mathbf{KG}L_e \tag{五.24}$$

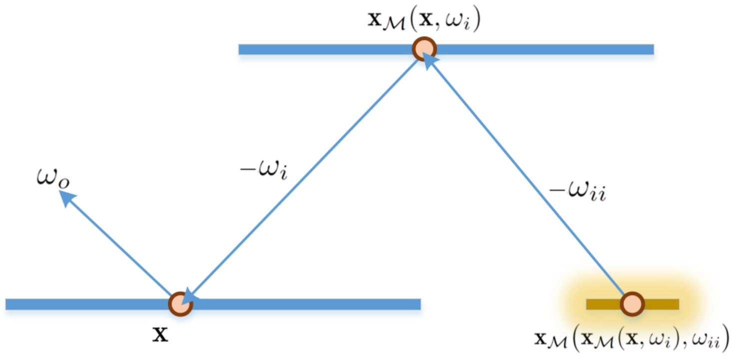
$$\mathbf{G}L_e(\mathbf{x}, \omega_i) = L_e(\mathbf{x}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) \tag{五.25}$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{G}L_e)(\mathbf{x}, \omega_o) = \int_{\mathcal{S}^2} L_e(\mathbf{x}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) f_s(\mathbf{x}, \omega_i \to \omega_o) d\sigma_{\mathbf{x}}^{\perp}(\omega_i) \tag{五.26}$$

这就相当于直接光照散射一次以后入射到人眼方向 ω_o 的部分：



再分析一下 $\mathbf{T}^2 L_e$ 的实际含义。$\mathbf{T}L_e$ 是散射一次进入人眼方向 ω_o 的部分，设两次散射的光第一次散射方向为 ω_{ii}。$\mathbf{T}(\mathbf{T}L_e)$ 相当于对 $\mathbf{T}L_e$ 再做一次回溯，因此就相当于散射两次到达人眼的光：


$\mathbf{x}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \omega_i)$
ω_o
$-\omega_i$
$-\omega_{ii}$
$\mathbf{x}$
$\mathbf{x}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \omega_i), \omega_{ii})$

六　传感器测量与重要性

光传输算法的目标其实就是在于测量：测量有限个均衡辐射度 L。如果就是直接计算生成的图像，那么测量 $I_1, ..., I_M$ 就是 M 个像素。

本章有不少内容都比较抽象和难懂，我们可以忽略一些性质的证明，只需要知道最后的结论即可。

6 1　传感器与测量

定义线性传感器：

$$W_e(\mathbf{x}, \omega) = \frac{dS(\mathbf{x}, \omega)}{d\Phi(\mathbf{x}, \omega)} \tag{六.1}$$

即沿着 ω 方向到达 $\mathbf{x}$ 的每个单位功率的传感器响应值，S 可能是电压或者电流等。

我们前面说过 W_e 也可以叫做发射重要性函数 (exitant importance function)，即我们认为传感器发射的是重要性。W_e 在整个光线空间 $\mathcal{R}$ 中定义。测量方程定义为：

$$dS(\mathbf{r}) = W_e(\mathbf{r}) d\Phi(\mathbf{r}) = W_e(\mathbf{r}) L_i(\mathbf{r}) d\mu(\mathbf{r}) \tag{六.2}$$

于是：

$$I = \langle W_e, L_i \rangle = \int_{\mathcal{R}} W_e(\mathbf{r}) L_i(\mathbf{r}) d\mu(\mathbf{r}) \tag{六.3}$$

我们可以这么理解上面的式子，W_e 是发出的重要性，L_i 是入射的辐射度。

根据 $L_i = \mathbf{G} L_o = \mathbf{G}(\mathbf{S} L_e)$：

$$I = \langle W_e, L_i \rangle = \langle W_e, \mathbf{G} L_o \rangle = \langle W_e, \mathbf{G}(\mathbf{S} L_e) \rangle \tag{六.4}$$

6 2　伴随算子

伴随算子是理解光传输算法的有力工具。它们允许我们以多种方式估计测量结果，从而产生新的见解和渲染算法。

算子 $\mathbf{H}$ 的伴随算子写为 $\mathbf{H}^*$，定义为：

$$\langle \mathbf{H}^* f, g \rangle = \langle f, \mathbf{H} g \rangle \quad for\ all\ f, g \tag{六.5}$$

如果 $\mathbf{H} = \mathbf{H}^*$ 则该算子是自伴随的 (self-adjoint)。

基于伴随，我们可以写出：

$$I = \langle W_e, \mathbf{GS} L_e \rangle = \langle (\mathbf{GS})^* W_e, L_e \rangle \tag{六.6}$$

我们需要知道 $(\mathbf{GS})^*$ 究竟是什么。

下式是 $\mathbf{G}$ 算子和 $\mathbf{K}$ 算子：

$$(\mathbf{G}h)(\mathbf{x}, \omega_i) = \begin{cases} h(\mathbf{x}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) & if\ d_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \omega_i) < \infty \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$(\mathbf{K}h)(\mathbf{x}, \omega_o) = \int_{\mathcal{S}^2} f_s(\mathbf{x}, \omega_i \to \omega_o) h(\mathbf{x}, \omega_i) d\sigma_{\mathbf{x}}^{\perp}(\omega_i)$$

对于对称 BSDF，$f_s^*(\mathbf{x}, \omega_i \to \omega_o) = f_s(\mathbf{x}, \omega_o \to \omega_i) = f_s(\mathbf{x}, \omega_i \to \omega_o)$，因此：

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}^* h)(\mathbf{x}, \omega_o) &= \int_{\mathcal{S}^2} f_s^*(\mathbf{x}, \omega_i \to \omega_o) h(\mathbf{x}, \omega_i) d\sigma_{\mathbf{x}}^{\perp}(\omega_i) \\ &= (\mathbf{K}h)(\mathbf{x}, \omega_o) \end{aligned} \tag{六.7}$$

6 3 重要性传输

上面描述的这些对称性表明任何光传输算法都可以用于重要性传输。均衡重要性函数 (equilibrium importance function) 通过 $W = \mathbf{S}W_e$ 定义，满足重要性传输方程：

$$W = W_e + \mathbf{T}W \tag{六.8}$$

另外，根据 $L_i = \mathbf{G}L_o$ 可以写出 $W_i = \mathbf{G}W_o$，对称测量方程：

$$\begin{aligned} I &= \langle W_e, L_i \rangle \\ I &= \langle W_i, L_e \rangle \end{aligned} \tag{六.9}$$

如果场景模型包含任意非对称 BSDF 的表面，则光传输算子 $\mathbf{T} = \mathbf{KG}$ 自然没有问题，但重要性传输算子需要写为 $\mathbf{T}_W = \mathbf{K}^*\mathbf{G}$。

6 4 算子符号总结

传输算子 $\mathbf{G}$ 把出射量映射到入射量：

$$L_i = \mathbf{G}L_o \quad W_i = \mathbf{G}W_o \tag{六.10}$$

局部散射算子 $\mathbf{K}$ 把入射量映射到出射量：

$$L_o = \mathbf{K}L_i \quad W_o = \mathbf{K}^*W_i \tag{六.11}$$

还有一些式子，例如：

$$L_o = L_e + \mathbf{KG}L_o \tag{六.12}$$

$$L_i = L_e + \mathbf{GK}L_i \tag{六.13}$$

$$W_o = W_e + \mathbf{K}^*\mathbf{G}W_o \tag{六.14}$$

$$W_i = W_e + \mathbf{GK}^*W_i \tag{六.15}$$

(六.16)

我们把这些关系可以写为：

$$X = X_e + \mathbf{T}_X X \tag{六.17}$$

X_e 是对 X 来说的发射函数，一般形式是：

$$X = \mathbf{S}_X X_e \tag{六.18}$$

$$\mathbf{S}_X = (\mathbf{I} - \mathbf{T}_X)^{-1} \tag{六.19}$$

$\mathbf{T}_X$ 有下面的几种形式：

表 1: 算子符号表

	Exitant	Incident
Light	$\mathbf{T}_{L_o} = \mathbf{KG}$	$\mathbf{T}_{L_i} = \mathbf{GK}$
Importance	$\mathbf{T}_{W_o} = \mathbf{K}^*\mathbf{G}$	$\mathbf{W}_{L_i} = \mathbf{GK}^*$

测量方程可以有四种形式（注意 $W_{e,i}$ 和 $L_{e,i}$ 中的 i 表示“incident”，即入射）：

$$\begin{aligned} I &= \langle W_e, L_i \rangle = \langle W_i, L_e \rangle \\ &= \langle W_{e,i}, L_o \rangle = \langle W_o, L_{e,i} \rangle \end{aligned}$$

我们在这里解释一下上面的式子，先给出前面表示过的公式：

$$I = \langle W_e, L_i \rangle = \int_{\mathcal{R}} W_e(\mathbf{r}) L_i(\mathbf{r}) d\mu(\mathbf{r}) \tag{六.20}$$

我们有两个发射函数，一个发射辐射度，一个发射重要性。入射形式 $L_{e,i}$ 和 $W_{e,i}$（称作入射发射函数 (incident emission functions)）。$L_{e,i} = \mathbf{G}L_e$，这相当于把发射辐射度 L_e 设定为一种入射量 $L_{e,i}$，什么意思呢？根据前面 $\mathbf{G}h$ 的定义式，得到：

$$(\mathbf{G}L_e)(\mathbf{x}, \omega_o) = \begin{cases} L_e(\mathbf{x}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \omega_o), -\omega_o) & if\ d_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \omega_o) < \infty \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{六.21}$$

在这里 $L_e(\mathbf{x}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \omega_o), -\omega_o)$ 和 W_o 都是处于同一个方向的。

看起来似乎发射形式 W_e 和 L_e 更直观。但有些时候入射形式 $L_{e,i}$ 和 $W_{e,i}$ 也会在处理一些问题上有意义。$L_{e,i}$ 和 $W_{e,i}$ 并不要求完全理解，因为内容确实有些抽象。

七　本文小结

这几个章节看似有些抽象和难以理解，但其实也是紧密结合的，我们最后理清一下。

如何测量光能？我们需要定义传感器。传感器的响应值其实就是响应函数和入射光辐射度的积分。在光线追踪中有两种方式，一是从相机发出重要性光线，然后去估计辐射度；二是从光源发射光线，去估计光线的重要性。我们可以暂时先不必理解这两种方式，但我们需要明白光传输中的这种“对称性”，基于对称性和定义的算子，可以得到一些重要的结果表示。

下一篇文章我们会介绍导出的光传输方程，以及路径积分形式，我们会借助一些现有的结论来描述，可以帮助读者更好地理解这些算子的作用。

参考文献

[1] Veach E . Robust Monte Carlo Methods for Light Transport Simulation[J]. Ph.d.thesis Stanford University Department of Computer Science, 1998.

[2] Arvo, J. [1995]. Analytic Methods for Simulated Light Transport, PhD thesis, Yale University.