

双向路径追踪

Dezeming Family

2022 年 10 月 6 日

DezemingFamily 系列文章和电子书**全部都有免费公开的电子版**，可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列电子书，可以从我们的网站 [<https://dezeming.top/>] 找到最新的版本。对文章的内容建议和出现的错误也欢迎在网站留言。

本文是对 [1] 论文的详细解读，该论文可以说是渲染必读论文，但有些符号表示和描述可能对初学者并不友好，由于里面介绍的几种重要技术，例如双向路径追踪、多重重要性采样以及 Metropolis 方法都是非常重要的，因此我打算写一下本论文的解读，作为构建“高端图形渲染学习体系”的一个重要组成部分。

由于论文 [1] 篇幅过长，为了减少 Latex 编译的时间以及更好把控不同部分的内容，我将整个论文划分为了多本小册子来进行讲解。

本文的预备知识：蒙特卡洛方法、蒙特卡洛光线追踪（可以看 Peter Shirley 的光线追踪三本小书）、BSDF 模型、路径追踪、向量空间。

双向路径追踪算法等同于前面描述的“光传输路径积分表示”与“多重重要性采样”的结合。我们从眼镜发出一条子路径，然后再从光源发出一条子路径，把这些路径的顶点连接起来。通过改变每条子路径的顶点数量，我们就可以得到各种长度的路径。再通过多重重要性采样，将这些路径采样得到的值用不同的权重组合起来，得到目标结果。

本文内容相对有些抽象，建议了解基本方法以后，根据 PBRT 系列书来学习具体的实现方案，这样才能较好地掌握双向方法。双向方法一直都被认为是困难而且复杂的算法，所以需要多下功夫去研究。本人在学习双向方法时，也是将论文 [1] 和 PBRT 的实现进行反复对照，才能够渐渐掌握双向路径追踪方法。

目录

一 知识回顾	1
二 路径贡献与权重的计算	3
2.1 路径与采样	3
2.2 采样概率密度 $p_{s,t}$	3
2.3 不加权贡献 $C_{s,t}^*$	4
2.4 权重函数 $w_{s,t}$	5
三 实现细节	7
3.1 图像采样和滤波	7
3.2 图像函数的估计	7
3.3 决定子路径的长度	7
3.4 对于短子路径的特殊情况	8
3.4.1 光源子路径有 0 个顶点 ($s = 0$)	8
3.4.2 光源子路径有 1 个顶点 ($s = 1$)	8
3.4.3 相机子路径有 1 个顶点 ($t = 1$)	8
3.4.4 相机子路径有 0 个顶点 ($t = 0$)	9
3.5 镜面表面与近似权重	9
3.6 减少可见性测试的数量	10
四 结果展示与小结	11
4.1 结果展示	11
4.2 本文小结	12
参考文献	13

一 知识回顾

测量方程的形式是：

$$I_j = \int_{\Omega} f_j(\bar{x}) d\mu(\bar{x}) \quad (一.1)$$

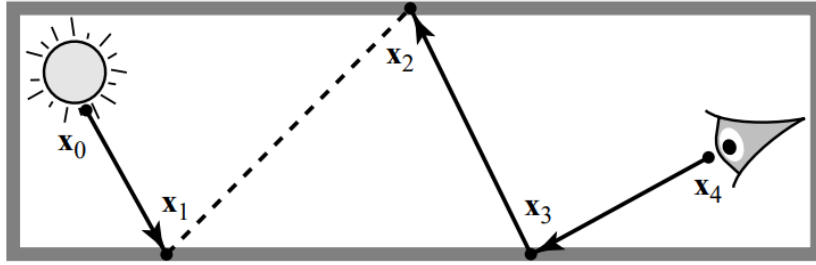
其中， $d\mu(\bar{x}) = dA(\mathbf{x}_0) \cdots A(\mathbf{x}_k)$ ， f_j 是测量贡献函数：

$$f_j(\bar{x}) = L_e(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1) G(\mathbf{x}_0 \leftrightarrow \mathbf{x}_1) \cdot \left(\prod_{i=1}^{k-1} f_s(\mathbf{x}_{i-1} \rightarrow \mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_{i+1}) G(\mathbf{x}_i \leftrightarrow \mathbf{x}_{i+1}) \right) W_e^{(j)}(\mathbf{x}_{k-1} \rightarrow \mathbf{x}_k)$$

假如 $\bar{x} = \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3$ ，我们得到：

$$f_j(\bar{x}) = L_e(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1) G(\mathbf{x}_0 \leftrightarrow \mathbf{x}_1) f_s(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2) \cdot G(\mathbf{x}_1 \leftrightarrow \mathbf{x}_2) f_s(\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3) G(\mathbf{x}_2 \leftrightarrow \mathbf{x}_3) W_e^{(j)}(\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3)$$

下图中， $\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_1$ 是光源子路径得到的， $\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3 \mathbf{x}_4$ 是相机子路径得到的（ \mathbf{x}_4 在相机镜头上），把这两条路径连接起来就能得到完整的路径：

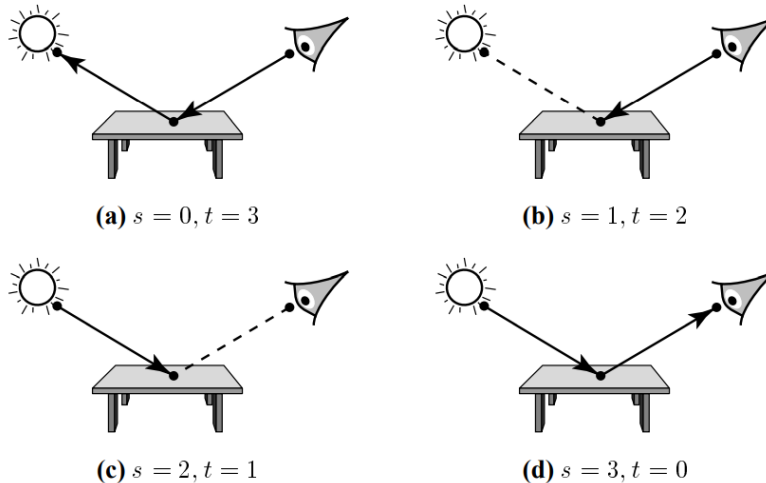


对于路径长度为 k ，如果光源路径顶点数为 s ，相机路径顶点数为 t ，那么总路径长度就是 $k = s + t - 1$ 。比如上面的路径 $\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3 \mathbf{x}_4$ ，一共有 4 段，即路径长度为 $4 = 2 + 3 - 1$ 。

对于路径长度为 k 的路径，有 $k + 2$ 种路径（称为使用 $k + 2$ 种采样技术得到的结果）：

- 相机光线长度为 0，光源路径长度为 k
- 相机光线长度为 1，光源路径长度为 $k - 1$
-
- 相机光线长度为 k ，光源路径长度为 0

当 $k = 2$ 时，示意图如下：



其中，(a) 可以看做蒙特卡洛光线追踪，但没有对光源有特殊采样处理；(b) 可以看做是有直接光照明的蒙特卡洛光线追踪 (c) 表示追踪光子，当光子击中人眼可见的表面时，记录为图像相应像素的一个样

本；(d) 中追踪光子，直到光子击中相机镜头。(a) 中只能使用面光源照明，(d) 中只能使用有限孔径的镜头。如果桌子是光滑的或者甚至是镜面反射的，则 (a) 方法最好；而如果光源是方向光，则 (d) 方法最好——由此我们可以看出，双向方法可以支持非常广泛的光源照明和相机类型，而且对于一个场景，这些路径都是能够被采样到的，因此都是可以作为重要性采样中的重要样本。

想要得到正确的结果，关键是如何计算每条路径 $\bar{x}_{s,t}$ 的概率密度 $p_{s,t}$ ，以及如何准确计算 $f_j(\bar{x}_{s,t})$ 。我们将在下一章详细介绍。

二 路径贡献与权重的计算

2.1 路径与采样

我们对路径进行标注，对于光源路径顶点数为 s ，相机路径顶点数为 t 的路径标记为 $\bar{x}_{s,t}$ 。设采样路径的概率密度函数为 $p_{s,t}$ ，因此， $\bar{x}_{s,t}$ 就是从概率密度 $p_{s,t}$ 中采样得到的。

之前我们都假设所有的 $\bar{x}_{s,t}$ 都是独立采样得到的，即对于每条路径都是单独生成一个光源路径和一个相机路径，但从实际的角度来说，让采样变得更有效是很有必要的，这是通过在组内产生样本来实现的。我们首先产生一条有 n_L 个顶点的光的子路径 $(\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_{n_L-1})$ ，然后再产生一条有 n_E 个顶点的相机子路径 $(\mathbf{z}_{n_E-1}, \dots, \mathbf{z}_0)$ 。其中， \mathbf{y}_0 和 \mathbf{z}_0 分别是光源和相机镜头上的点。

每个子路径的长度都是随机定义的（在每个子路径的每个顶点上定义终止概率）。假如得到了一个路径 $\bar{x}_{s,t} = \mathbf{y}_0 \cdots \mathbf{y}_{s-1} \mathbf{z}_{t-1} \cdots \mathbf{z}_0$ ，该路径一共有 $s+t$ 个顶点以及 $s+t-1$ 条边。其中， \mathbf{y}_{s-1} 和 \mathbf{z}_{t-1} 叫做连接顶点，它们之间的边叫做连接边。

对于每个测量 I_j 来说，估计式为：

$$\begin{aligned} F &= \sum_{s \geq 0} \sum_{t \geq 0} w_{s,t}(\bar{x}_{s,t}) \frac{f_j(\bar{x}_{s,t})}{p_{s,t}(\bar{x}_{s,t})} \\ &= \sum_{s \geq 0} \sum_{t \geq 0} C_{s,t} = \sum_{s \geq 0} \sum_{t \geq 0} w_{s,t}(\bar{x}_{s,t}) C_{s,t}^* \end{aligned} \quad (二.1)$$

$C_{s,t}^*$ 可以写为乘积：

$$C_{s,t}^* = \alpha_s^L c_{s,t} \alpha_t^E \quad (二.2)$$

其中， α_s^L 仅仅取决于光子路径， α_t^E 仅仅取决于相机子路径， $c_{s,t}$ 仅仅取决于连接边 $\mathbf{y}_{s-1} \mathbf{z}_{t-1}$ ：

$$C_{s,t} = w_{s,t} C_{s,t}^* \quad (二.3)$$

2.2 采样概率密度 $p_{s,t}$

用简化的符号代替： $p_{s,t} \equiv p_{s,t}(\bar{x}_{s,t})$ 。

在《光传输的路径积分与符号表示》中我们介绍过，对于一个路径 $\bar{x} = \mathbf{x}_0 \cdots \mathbf{x}_k$ ，概率密度计算可以写为：

$$p(\bar{x}) = \prod_{i=0}^k \frac{dP}{dA}(\mathbf{x}_i) \quad (二.4)$$

即采样每个顶点的概率密度的乘积。

对于光源上和相机镜头上的点 \mathbf{y}_0 和 \mathbf{z}_0 来说，它们直接是从表面上采样得到的，采样概率密度可以直接计算。对于其他顶点，比如 \mathbf{y}_i ，都是基于从 \mathbf{y}_{i-1} 采样一个方向并投射一条光线。设选择从 \mathbf{y}_{i-1} 到 \mathbf{y}_i 方向的与投影立体角有关的概率密度是 $P_{\sigma^\perp}(\mathbf{y}_{i-1} \rightarrow \mathbf{y}_i)$ （准确来书应该写为 $P_{\sigma^\perp}(\mathbf{y}_{i-1} \rightarrow \mathbf{y}_i | \mathbf{y}_{i-2}, \mathbf{y}_{i-1})$ ）：

$$\begin{aligned} P_A(\mathbf{y}_i) &= P_{\sigma^\perp}(\mathbf{y}_{i-1} \rightarrow \mathbf{y}_i) G(\mathbf{y}_{i-1} \leftrightarrow \mathbf{y}_i) \\ &= P_{\sigma^\perp}(\mathbf{y}_{i-1} \rightarrow \mathbf{y}_i) \left(V(\mathbf{y}_{i-1} \leftrightarrow \mathbf{y}_i) \frac{|\cos(\theta_o) \cos(\theta'_i)|}{\|\mathbf{y}_{i-1} - \mathbf{y}_i\|^2} \right) \end{aligned} \quad (二.5)$$

定义符号 p_i^L 和 p_i^E 来表示光和相机子路径上第一次生成 i 顶点的概率。注意，在这里的 \mathbf{y}_0 和 \mathbf{z}_0 分别是光源子路径和相机子路径的第一个顶点（注意下标问题）。 p_i^L 为：

$$\begin{aligned} p_0^L &= 1 \\ p_1^L &= P_A(\mathbf{y}_0) \\ p_2^L &= P_{\sigma^\perp}(\mathbf{y}_0 \rightarrow \mathbf{y}_1) G(\mathbf{y}_0 \leftrightarrow \mathbf{y}_1) p_1^L \\ p_3^L &= P_{\sigma^\perp}(\mathbf{y}_1 \rightarrow \mathbf{y}_2) G(\mathbf{y}_1 \leftrightarrow \mathbf{y}_2) p_2^L \\ p_i^L &= P_{\sigma^\perp}(\mathbf{y}_{i-2} \rightarrow \mathbf{y}_{i-1}) G(\mathbf{y}_{i-2} \leftrightarrow \mathbf{y}_{i-1}) p_{i-1}^L \quad \text{for } i \geq 2 \end{aligned}$$

p_i^E 为:

$$\begin{aligned}
p_0^E &= 1 \\
p_1^E &= P_A(\mathbf{z}_0) \\
p_2^E &= P_{\sigma^\perp}(\mathbf{z}_0 \rightarrow \mathbf{z}_1)G(\mathbf{z}_0 \leftrightarrow \mathbf{z}_1)p_1^E \\
p_3^E &= P_{\sigma^\perp}(\mathbf{z}_1 \rightarrow \mathbf{z}_2)G(\mathbf{z}_1 \leftrightarrow \mathbf{z}_2)p_2^E \\
p_i^E &= P_{\sigma^\perp}(\mathbf{z}_{i-2} \rightarrow \mathbf{z}_{i-1})G(\mathbf{z}_{i-2} \leftrightarrow \mathbf{z}_{i-1})p_{i-1}^E \quad \text{for } i \geq 2
\end{aligned}$$

根据这些符号, 对于生成路径 $\bar{x}_{s,t} = \mathbf{y}_0 \cdots \mathbf{y}_{s-1} \mathbf{z}_{t-1} \cdots \mathbf{z}_0$ 的概率密度为 $p_{s,t}(\bar{x}_{s,t}) = p_s^L p_t^E$ 。注意这里并不清楚 $\mathbf{y}_{s-1} \mathbf{z}_{t-1}$ 之间是否可见, 但生成这条路径的概率密度确实应该如此计算。

2.3 不加权贡献 $C_{s,t}^*$

不加权贡献 $C_{s,t}^*$:

$$C_{s,t}^* \equiv \frac{f_j(\bar{x}_{s,t})}{p_{s,t}(\bar{x}_{s,t})} \equiv \alpha_s^L c_{s,t} \alpha_t^E \quad (\text{二.6})$$

类似于 p_i^L 和 p_i^E , 我们定义 α_i^L :

$$\begin{aligned}
\alpha_0^L &= 1 \\
\alpha_1^L &= \frac{L_e^{(0)}(\mathbf{y}_0)}{P_A(\mathbf{y}_0)} \\
\alpha_2^L &= \frac{f_s(\mathbf{y}_{-1} \rightarrow \mathbf{y}_0 \rightarrow \mathbf{y}_1)}{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{y}_0 \rightarrow \mathbf{y}_1)} \alpha_{i-1}^L \\
\alpha_i^L &= \frac{f_s(\mathbf{y}_{i-3} \rightarrow \mathbf{y}_{i-2} \rightarrow \mathbf{y}_{i-1})}{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{y}_{i-2} \rightarrow \mathbf{y}_{i-1})} \alpha_{i-1}^L \quad \text{for } i \geq 2
\end{aligned}$$

以及 α_i^E :

$$\begin{aligned}
\alpha_0^E &= 1 \\
\alpha_1^E &= \frac{W_e^{(0)}(\mathbf{z}_0)}{P_A(\mathbf{z}_0)} \\
\alpha_2^E &= \frac{f_s(\mathbf{z}_1 \rightarrow \mathbf{z}_0 \rightarrow \mathbf{y}_{-1})}{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{z}_0 \rightarrow \mathbf{z}_1)} \alpha_1^E \\
\alpha_i^E &= \frac{f_s(\mathbf{z}_{i-3} \rightarrow \mathbf{z}_{i-2} \rightarrow \mathbf{y}_{i-1})}{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{z}_{i-2} \rightarrow \mathbf{z}_{i-1})} \alpha_{i-1}^E \quad \text{for } i \geq 2
\end{aligned}$$

注意这里用了前面定义的:

$$\begin{aligned}
L_e(\mathbf{y}_0 \rightarrow \mathbf{y}_1) &= L_e^{(0)}(\mathbf{y}_0) L_e^{(1)}(\mathbf{y}_0 \rightarrow \mathbf{y}_1) \\
W_e(\mathbf{z}_0 \rightarrow \mathbf{z}_1) &= W_e^{(0)}(\mathbf{z}_0) W_e^{(1)}(\mathbf{z}_0 \rightarrow \mathbf{z}_1)
\end{aligned}$$

以及新定义的:

$$\begin{aligned}
f_s(\mathbf{y}_{-1} \rightarrow \mathbf{y}_0 \rightarrow \mathbf{y}_1) &\equiv L_e^{(1)}(\mathbf{y}_0 \rightarrow \mathbf{y}_1) \\
f_s(\mathbf{z}_1 \rightarrow \mathbf{z}_0 \rightarrow \mathbf{z}_{-1}) &\equiv W_e^{(1)}(\mathbf{z}_0 \rightarrow \mathbf{z}_1)
\end{aligned}$$

这样就相当于把发射项也用 BSDF 来表示。注意 α_i^L 和 α_i^E 是没有几何项 $G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}')$ 的, 这是因为 $\frac{f_j(\bar{x}_{s,t})}{p_{s,t}(\bar{x}_{s,t})}$ 中分式的上下两项中都有几何项, 所以相互抵消了 (道理也很简单, 我们以前在做光线追踪时, 如果只是对 BSDF 采样来构建路径, 则不会出现几何项 G)。

现在还剩下连接部分的贡献 $c_{s,t}$, 当 s 和 t 有一个等于 0 时, 则贡献计算式为:

$$\begin{aligned}
c_{0,t} &= L_e(\mathbf{z}_{t-1} \rightarrow \mathbf{z}_{t-2}) \\
c_{s,0} &= W_e(\mathbf{y}_{s-2} \rightarrow \mathbf{y}_{s-1})
\end{aligned} \quad (\text{二.7})$$

比如，当 $s = 0$ 时，表示相机子路径在经过多次反弹以后到达光源 \mathbf{z}_{t-1} 点上，此时连接权重就是 $c_{0,t}$ ，即光从相机子路径终点发出。如果 $t = 0$ ，则 \mathbf{y}_{s-1} 就是相机镜头上的点。

当 s 和 t 都不是 0 时，在计算权重之前，一般会考虑 \mathbf{y}_{s-1} 和 \mathbf{y}_{t-1} 这两个点是否可见。 $c_{s,t}$ 的计算也很直接：

$$c_{s,t} = f_s(\mathbf{y}_{s-2} \rightarrow \mathbf{y}_{s-1} \rightarrow \mathbf{z}_{t-1})G(\mathbf{y}_{s-1} \leftrightarrow \mathbf{z}_{t-1})f_s(\mathbf{y}_{s-1} \rightarrow \mathbf{z}_{t-1} \rightarrow \mathbf{z}_{t-2}) \quad \text{for } s, t > 0 \quad (二.8)$$

如果没有多重重要性采样技术，那么双向方法到这里就算是结束了。但考虑多重重要性方法，如何有效的把这些路径组合起来，那么还需要下一节的知识。

2.4 权重函数 $w_{s,t}$

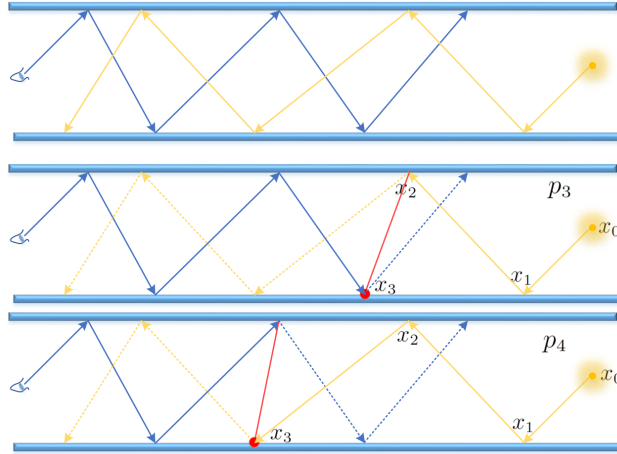
最终我们介绍如何计算 $w_{s,t} \equiv w_{s,t}(\bar{x}_{s,t})$ ，该值取决于所有的生成路径为 $\bar{x}_{s,t}$ 的相同长度的 $s + t + 1$ 种采样技术的概率密度。

我们用 p_i 表示光源子路径生成 i 个顶点，以及相机子路径生成 $s + t - i$ 个顶点：

$$p_i = p_{i,(s+t)-i}(\bar{x}_{s,t}) \quad \text{for } i = 0, \dots, s + t \quad (二.9)$$

其中， p_s 就表示实际生成给定路径 $\bar{x}_{s,t}$ 的概率； $p_0 \cdots p_{s-1}$ 和 $p_{s+1} \cdots p_{s+t}$ 这些表示能够生成这个路径的其他所有方式。

下面的示意图是表示 $p_{s=3}$ 和 $p_{s=4}$ 方法得到的路径：



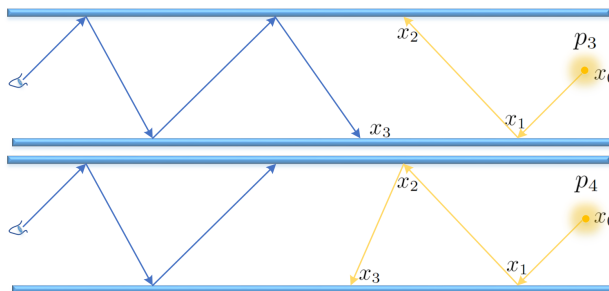
注意 p_s 和 p_i 表示不同的意义，其中， p_s 表示我们已经产生的这条路径的方法， p_i 表示“用其他方法生成这条路径”的概率。这一点需要仔细理解，比如 $p_{i=2}$ 表示我们只用到了光源路径生成的两个顶点，要想获得与 $p_{s=3}$ 相同的结果，则 \mathbf{x}_2 这个点需要好好生成一下。

计算 p_i 时可以直接根据权重公式来简化计算方法，例如对于幂启发式：

$$w_{s,t} = \frac{p_s^2}{\sum_i p_i^2} = \frac{1}{\sum_i (p_i/p_s)^2} \quad (二.10)$$

然后我们可以很随意地设 $p_s = 1$ ，并计算其他的 p_i 相对于 p_s 的值 $(\frac{p_0}{p_s}, \frac{p_1}{p_s}, \dots, \frac{p_{k+1}}{p_s})$ 。

考虑比值 p_{i+1}/p_i ，忽略顶点是属于光子路径还是相机子路径会比较方便，因此设 $\bar{x}_{s,t}$ 为 $\bar{x} = \mathbf{x}_0 \cdots \mathbf{x}_k$ ， $k = s + t - 1$ 。 p_i 和 p_{i+1} 的不同仅仅在于顶点 \mathbf{x}_i 是如何生成的。对于 p_i ，它是从相机子路径上生成的；对于 p_{i+1} ，它是从光源子路径上生成的，也就是说，对于 $p_{s=3}$ ，表示 \mathbf{x}_3 是相机子路径得到的， $p_{i=3}$ 和 $p_{i=4}$ 的区别是：



因此：

$$\frac{p_4}{p_3} = \frac{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3)G(\mathbf{x}_2 \leftrightarrow \mathbf{x}_3)}{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_3)G(\mathbf{x}_4 \leftrightarrow \mathbf{x}_3)} \quad (二.11)$$

总结一下：

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{p_0} &= \frac{P_A(\mathbf{x}_0)}{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_0)G(\mathbf{x}_1 \leftrightarrow \mathbf{x}_0)} \\ \frac{p_{i+1}}{p_i} &= \frac{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_{i-1} \rightarrow \mathbf{x}_i)G(\mathbf{x}_{i-1} \leftrightarrow \mathbf{x}_i)}{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_{i+1} \rightarrow \mathbf{x}_i)G(\mathbf{x}_{i+1} \leftrightarrow \mathbf{x}_i)} \quad for \ 0 < i < k \\ \frac{p_{k+1}}{p_k} &= \frac{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_{k-1} \rightarrow \mathbf{x}_k)G(\mathbf{x}_{k-1} \leftrightarrow \mathbf{x}_k)}{P_A(\mathbf{x}_k)} \end{aligned}$$

这样，根据 p_s 就可以重复地计算出 p_{s+1}, \dots, p_{k+1} 。类似地，也会根据逆比率 p_i/p_{i+1} 来计算出 p_{s-1}, \dots, p_0 ，得到整个权重。

注意，每个组里的所有的样本都是相互不独立的，它们都来自相同的光源和相机子路径。但这并不会对结果有很大影响，因为对于每个测量，增加不独立的样本组的数量后，它们的相关性就会趋近于 0（也就是说，每次双向光传输的估计都是一个组，代表像素上的一个样本）。

如果有 N 个独立的光路径和相机子路径，则它们中每个 $p_{s,t}$ 采样得到的样本都是独立的，并且只与 $\frac{1}{N}$ 比例的样本有相关性（属于同一个相机、光源子路径得到的路径），根据论文 [1] 中的关于方差的证明，方差并不会受到多于 $\frac{N-1}{N}$ 个因子的影响。

三 实现细节

首先介绍图像如何采样和滤波，然后介绍光源子路径和相机子路径如何产生。这包括与每个子路径一起预计算和存储的信息的总结（以便更有效地评估样本贡献），以及用于确定每个子路径长度的方法。

接下来，我们将描述如何实现光源或相机子路径最多只有一个顶点的重要特殊情况。我们还介绍了如何处理镜面反射以及权重函数不能准确计算时如何近似。

3.1 图像采样和滤波

路径追踪是在世界空间进行的，因此需要映射到图像空间作为显示。我们需要一个图像函数 (image function) I ，使得 I 与图像平面在 (u, v) 上的 irradiance 值成比例。

每个像素值 I_j 定义为加权平均：

$$I_j = \int \int_D h_j(u, v) I(u, v) du dv \quad (三.1)$$

其中 h_j 是积分为 1 的滤波器函数。

我们需要对这个图像进行大量采样，通过对每个像素进行固定数量的分层采样来实现这一点（例如，要采集 $n = 25$ 个采样，每个像素对应的标称矩形将被细分为一个 5×5 的网格）。所有的像素值都通过下式来估计：

$$I_j \approx \frac{\sum_{i=1}^N h_j(u_i, v_i) I(u_i, v_i)}{\sum_{i=1}^N h_j(u_i, v_i)} \quad (三.2)$$

在很多情况下， $h_j(u, v)$ 都是一个固定值。

3.2 图像函数的估计

采样相机与采样光源是有点不同的，光源只需要发出光线即可，而相机光线则需要一些技巧。

首先，顶点 \mathbf{z}_0 可能是从相机任意位置采样得到的， $\mathbf{z}_0 \rightarrow \mathbf{z}_1$ 是根据成像平面的 (u, v) 点来确定，注意 \mathbf{z}_1 并不是成像平面上的点，它是场景中的表面交点，但该点在 (u, v) 点确定后，就已经是确定的点了。由于 (u, v) 在成像平面上均匀分布，可以由此决定采样概率密度 $P_{\sigma^\perp}(\mathbf{z}_0 \rightarrow \mathbf{z}_1)$ （我们一直没有很明确介绍 P_{σ^\perp} 是怎么计算，因为它的计算方式不是确定的，可能需要基于重要性采样等内容，我们前面只是介绍了它和对于面积相关的概率之间的转换关系）。

我们在采样中把每个顶点的信息都进行记录，把顶点作为一个事件对象（能够去采样和计算 BSDF 的对象）。 \mathbf{y}_0 和 \mathbf{z}_0 也要被记录为这种形式，以便查询这些顶点处的发射辐射度和发射重要性。

预存在顶点的信息包括 α_i^I 和 α_i^E ，几何因子 $G(\mathbf{x}_{i-1} \leftrightarrow \mathbf{x}_i)$ 以及概率密度 $P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_{i-1})$ 和 $P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_{i+1})$ 。在每次计算不同的组合路径中，我们还需要计算 $\mathbf{y}_{s-1} \mathbf{z}_{t-1}$ 。

3.3 决定子路径的长度

通过俄罗斯轮盘，令 q_i 表示子路径在 \mathbf{x}_i 点能够继续生成的概率，则 $1 - q_i$ 就表示子路径被终止的概率。

我们在最开始的几个顶点上设置 $q_i = 1$ ，这是为了避免短路径带来的额外方差。

q_i 是通过首先对候选方向 $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_{i+1}$ 进行采样来确定的。然后令：

$$q_i = \min \left\{ 1, \frac{f_s(\mathbf{x}_{i-1} \rightarrow \mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_{i+1})}{P_{\sigma^\perp}^*(\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_{i+1})} \right\} \quad (三.3)$$

其中， $P_{\sigma^\perp}^*(\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_{i+1})$ 是采样方向 $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_{i+1}$ 的概率密度函数，如果它正比于 BSDF，则其实 q_i 就是材质的 albedo。比如，对于 lambertian 材质，其 BSDF 的计算与采样 BSDF 的 pdf 计算是：

$$\begin{aligned} BSDF &: \frac{\text{albedo}}{\pi} \\ PDF &: \frac{1}{\pi} \end{aligned} \quad (三.4)$$

当然，对于采样 BSDF 有时候会算上 $\cos \theta_i$ 来采样，则此时概率密度就不正比于 BSDF 了。

在基于俄罗斯轮盘构建子路径，则采样的概率密度需要乘以轮盘概率（所以 $P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_{i+1})$ 积分可以小于 1，这是因为乘以了终止概率，不再是原先整个半球上积分为 1 的情况了）：

$$P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_{i+1}) = q_i P_{\sigma^\perp}^*(\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_{i+1}) \quad (三.5)$$

3.4 对于短子路径的特殊情况

当光路径只有一个顶点，相当于直接采样光；当相机子路径只有一个或没有顶点时，要考虑这种特殊情况。这些情况需要一些特殊处理。

3.4.1 光源子路径有 0 个顶点 ($s = 0$)

对于 $s = 0$ 的情况，表示相机路径最终可以采样到光源。 $s = 0$ 这种采样技术对于渲染相机直接可见的光源，或者经过镜面表面反射的光源，以及由于大面光源造成的焦散效果，以及通过镜面表面间接看到的焦散效果。

我们需要在场景中能够包含光源（即光源是场景求交中的一部分，而不是单独定义在场景之外），已经能够检查到 \mathbf{z}_{t-1} 是光源，计算出 $\mathbf{z}_{t-1} \rightarrow \mathbf{z}_{t-2}$ 。

为了去估计组合权重 $\omega_{0,t}$ ，我们必须计算生成 \mathbf{z}_{t-1} 以及方向 $\mathbf{z}_{t-1} \rightarrow \mathbf{z}_{t-2}$ 的概率密度。

$s = 0$ 这种情况是不需要可见性测试的。

3.4.2 光源子路径有 1 个顶点 ($s = 1$)

也就是说，相当于在相机路径最后直接采样光源。在这种条件下，我们可以不使用构建光源子路径时的 \mathbf{y}_0 ，而是通过更精妙的方法选择新的 \mathbf{y}_0^d 来连接到相机路径上。

这种优化对于直接照明（路径长度为 2）的情况尤其有效，对较长路径也会很有效。这种技术要求对样本贡献的计算有一些改变：

- 通过选择光源点 \mathbf{y}_0^d 的概率密度 $P_A^d(\mathbf{y}_0^d)$ 来计算未加权贡献 $C_{1,t}^*$ 。它的计算跟标准的路径追踪技术是一样的。
- 组合权重 $\omega_{1,t}$ 的计算有轻微不同，因为直接光照策略并不会影响有两个或更多顶点的光路径的采样。我们需要计算根据发出的能量来采样 \mathbf{y}_0^d 的概率密度，这被用来计算采样使用其他方法采样当前路径的概率密度 p_i 。
- 直接光照策略也会影响到 $s \neq 1$ 的路径的组合权重。正确的 p_i 计算方法应该是首先像往常一样计算，然后把 p_1 的概率密度乘以 $P_A^d(\mathbf{x}_0)/P_A(\mathbf{x}_0)$ 。这里， $P_A(\mathbf{x}_0)$ 就是根据发射功率生成 \mathbf{x}_0 的概率密度， $P_A^d(\mathbf{x}_0)$ 是根据点 \mathbf{x}_1 来通过直接光照策略产生 \mathbf{x}_0 的概率密度。

当然，使用直接采样光技术可以采样多个样本，比如从每个光源都采样一个光源点样本。这就等同于使用多种采样技术来生成这些不同的路径，之后可以再用多种重要性采样策略将这些路径结合起来。

3.4.3 相机子路径有 1 个顶点 ($t = 1$)

相机子路径只有一个顶点时，即把光源子路径 $\mathbf{y}_0 \cdots \mathbf{y}_{s-1}$ 与相机镜头上的顶点 \mathbf{z}_0 相连。这种情况对于渲染焦散（尤其是对于小光源或者点光源的焦散）很有用。

这种情况的主要问题在于它产生的样本不是只会对 (u, v) 有贡献，而会对图像上任意位置都可能贡献，它很有可能不会对 I_j 测量有任何贡献。我们需要分配一个图像来记录这些相机处只有 0 个或 1 个顶点的路径贡献，我们把这张图叫做光图像 (light image)，而不是持有路径贡献的相机图像 (eye image)（注意相机图像中相机子路径的顶点数量要大于等于 2）。

为了收集这些样本，我们需要首先决定 $\mathbf{y}_{s-1} \rightarrow \mathbf{z}_0$ 的图像点 (u', v') ，然后像往常一样计算贡献 $C_{s,1}$ ，并在 (u', v') 的位置记录它。这是通过找所有 $h_j(u', v')$ 不为 0 的像素决定（因为滤波的缘故，一个位置的

值可能会对周边几个像素都有影响，当然也可以使一个像素格子内的全部点只对该像素的值有贡献），并通过更新到这些像素上：

$$I_j^L \leftarrow I_j^L + h_j(u', v') C_{s,1} \quad (三.6)$$

当算法结束以后，每个像素的最终估计有如下形式（ $|D|$ 是图像区域的面积； N 是双向样本的总数； I_j^L 和 I_j^E 分别是像素 j 在光图和相机图像上的值）：

$$I_j \approx \frac{|D|}{N} I_j^L + I_j^E \quad (三.7)$$

我们可以看到，相机图的滤波是加权测量值除以权重和；而根据式三.6光图并不是除以权重和，这样，当每个像素获得的样本量越高，图像就会越亮（注意这并不是说这样的结果是错误的，而是从逻辑上解释一下）。

为了计算每个样本的贡献 $C_{1,s}$ ，必须要计算 \mathbf{z}_0 到 \mathbf{y}_{s-1} 的发射重要性 $W_e^{(1)}$ 。下式：

$$\int_D W_e^{(1)}(\mathbf{z}_0, \omega) d\sigma^\perp(\omega) \quad (三.8)$$

等于镜头上 \mathbf{z}_0 点到方向 $\omega \in D$ 映射到图像区域的点 (u, v) 所覆盖的面积。对于大多数镜头模型来说，这个函数并不是统一的，因为对于同一束光而言，靠近图像中心的位置上投影立体角会比靠近边缘部分的投影立体角更大。

3.4.4 相机子路径有 0 个顶点 ($t = 0$)

当光源子路径随机地与相机镜头交叉时，就会得到这种情况。由于相机镜头在场景中一般都很小，所以这些样本并不会有很大的贡献。但另一方面，这些样本由于不需要可见性测试，计算消耗较少。这种方式在计算小光源或者方向光的镜面反射效果时很有用，因为这些光源的光反射一次以后如果直接射到相机镜头，则相当于直接肉眼可见。

要想得到这种情况，镜头表面在场景中必须有一个物理表示，即它可以与光源子路径的采样射线相交；它不能被用于针孔镜头模型的采样。

注意 $t = 0$ 和 $t = 1$ 一样，它可以对任意一个像素有贡献（你事先并不知道光源的采样射线会与镜头相交时击中哪个像素位置），像素点是根据 $\mathbf{y}_{s-2} \rightarrow \mathbf{y}_{s-1}$ 来确定的。

3.5 镜面表面与近似权重

由于 BSDF 和概率密度函数在重要性采样中都可能包含 Dirac 分布（比如镜面反射），当计算 α_i^L 和 α_i^E 时并不是太大问题，因为下面的比率都是很好定义的：

$$\frac{f_s(\mathbf{x}_{i-3} \rightarrow \mathbf{x}_{i-2} \rightarrow \mathbf{x}_{i-1})}{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_{i-2} \rightarrow \mathbf{x}_{i-1})} \quad (三.9)$$

虽然不能根据分母上下值来计算这个比率，但是我们可以直接得到这个权重，因为在镜面表面上采样 BSDF 时，采样到的方向概率密度一定是 1。

对于镜面表面，计算非加权贡献 $C_{s,t}^*$ 时镜面表面也不会存在什么问题，因为连接权重 $c_{s,t}$ 一定是 0（此时， \mathbf{y}_{s-1} 和 \mathbf{z}_{t-1} 有一个是镜面表面）：

$$c_{s,t} = f_s(\mathbf{y}_{s-2} \rightarrow \mathbf{y}_{s-1} \rightarrow \mathbf{z}_{t-1}) G(\mathbf{y}_{s-1} \leftrightarrow \mathbf{z}_{t-1}) f_s(\mathbf{y}_{s-1} \rightarrow \mathbf{z}_{t-1} \rightarrow \mathbf{z}_{t-2}) \quad \text{for } s, t > 0 \quad (三.10)$$

当计算 $w_{s,t}$ 时，需要计算：

$$\frac{p_{i+1}}{p_i} = \frac{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_{i-1} \rightarrow \mathbf{x}_i) G(\mathbf{x}_{i-1} \leftrightarrow \mathbf{x}_i)}{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_{i+1} \rightarrow \mathbf{x}_i) G(\mathbf{x}_{i+1} \leftrightarrow \mathbf{x}_i)} \quad \text{for } 0 < i < k$$

我们需要给每个顶点标注是否是镜面顶点（加一个镜面标志 (flag)），然后再根据顶点是否是镜面，来计算相应的权重，这里的计算需要一些技巧，大家可以参考 PBRT 源码来理解。

有些时候， p_i 的准确计算是十分困难的，需要近似。好的权重近似可以得到跟最优组合策略差不多的结果，就算近似得不太好，只要权重和为 1，最起码也能得到无偏的结果。

3.6 减少可见性测试的数量

按理来说，每个相机子路径的顶点都可能需要与光源子路径的顶点进行光可见性测试，也就是具有复杂度 $O(n_L n_E)$ 。可是有些时候有的路径权重很小，进行可见性测试有点浪费。本节实现了一个新的技术，叫做效率优化的俄罗斯轮盘 (efficiency-optimized Russian roulette)。

假设一个估计器的形式如下：

$$F = C_1 + \dots + C_n \quad (三.11)$$

贡献 n 的数量是一个随机变量，假设每个贡献 C_i 被写为未知量 t_i 和可见性因子 v_i (0 或者 1) 的乘积，那么按照以前描述的俄罗斯轮盘赌的方法：

$$C_i = \begin{cases} (1/q_i)v_i t_i & \text{with probability } q_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (三.12)$$

很容易证明 $E[C_i] = E[v_i t_i]$ ，即估计器是无偏的。主要问题在于如何选择轮盘概率 q_i ，通过选择一个固定的轮盘阈值 δ ，定义：

$$q_i = \min(1, t_i/\delta) \quad (三.13)$$

因此，比 δ 大的贡献总会被计算，然而小贡献却会被跳过。如果阈值选择得太高，则会有大量的额外偏差（由于随机跳过的可见性测试造成），而如果阈值太低，则会执行许多不必要的可见性测试（导致计算时间超出必要时间）。如何找到更好的 q_i 值很重要。注意，效率被定义为：

$$\epsilon = \frac{1}{\sigma^2 T} \quad (三.14)$$

σ^2 是给定估计器的方差， T 是平均计算时间。假设计算时间只与光线投射的数量 n 有关， n 包括了可见性光线的投射，也包括双向路径追踪中构建光源子路径和相机子路径的过程。

我们分析一下效率。设 t_i 是一个定值，也就是说不考虑在假定 $q_i = 1$ 的情况下估计器的方差（只考虑俄罗斯轮盘带来的额外的方差）。由于 $v_i = 0$ 并不会增加任何方差，所以设 $v_i = 1$ 。俄罗斯轮盘带来的额外方差可以写为：

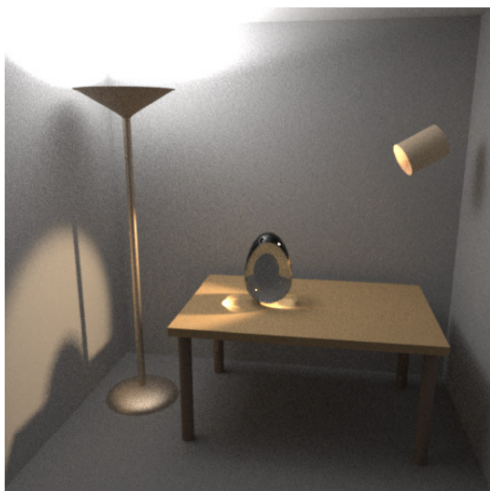
$$\begin{aligned} V[C_i] &= E[C_i^2] - E[C_i]^2 \\ &= [q_i(t_i/q_i)^2 + (1 - q_i)0] - t^2 \\ &= t_i^2(1/q_i - 1) \end{aligned}$$

假设估计器会被重复采样估计，因此它的平均方差 σ_0^2 和平均的采样贡献 n_0 就能够计算得到。由此，得到新的对于效率的估计式，里面有参数 q_i ，通过求导，找到使得效率最大化的 q_i 参数即可。

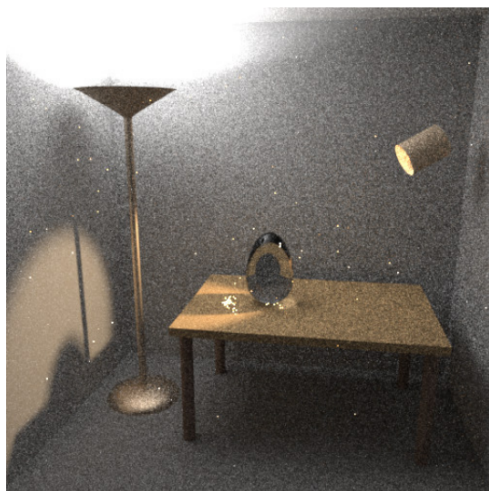
四 结果展示与小结

4.1 结果展示

下图中左图是双向方法采样 25 个样本，右图是标准的路径追踪技术采样 56 个样本：



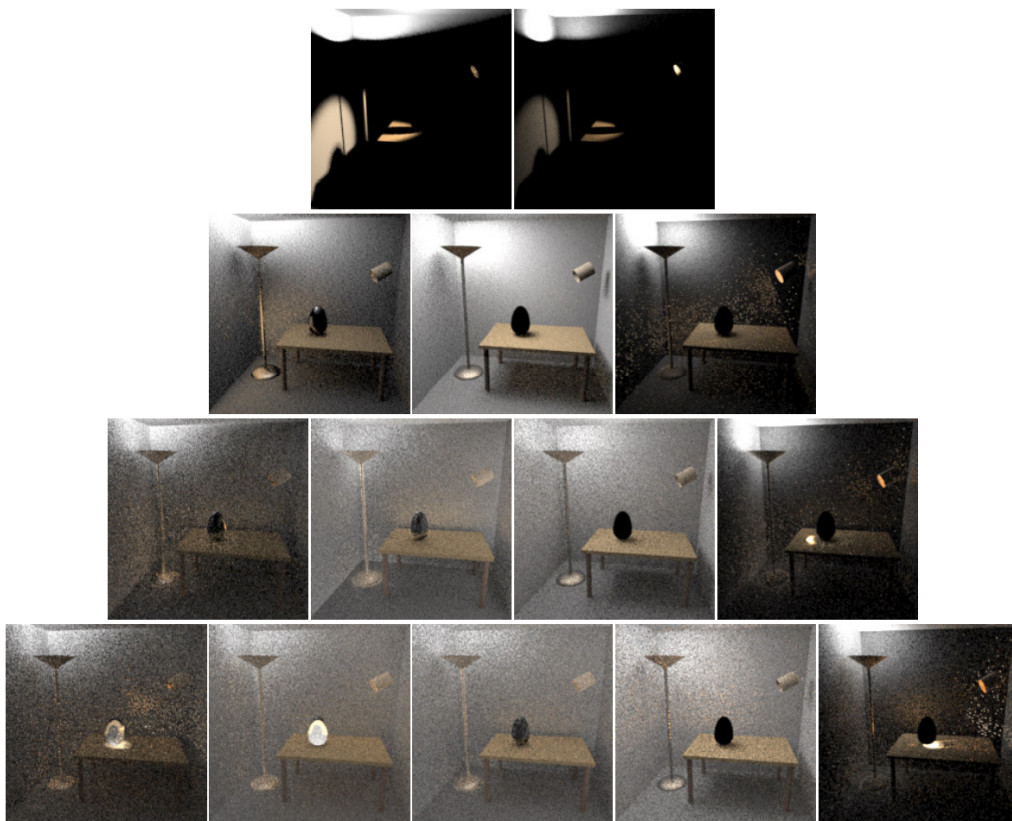
(a) Bidirectional path tracing with 25 samples per pixel



(b) Standard path tracing with 56 samples per pixel (the same computation time as (a))

可以看到，双向方法对上图这种光源位置相对不是容易找到（手电筒和朝向一遍照射的光）的路径来说有比较好的效果（间接光照占主要作用）。

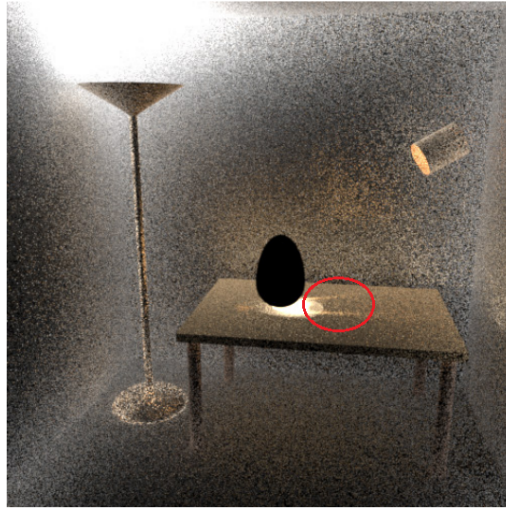
下图将所有各种路径组合进行了可视化，第 r 行表示路径长度为 $r + 1$ ；每行从左到右第 s 个图像表示光源顶点数为 s 。注意，一些路径并没有给可视化出来，比如 $k = 1$ 的路径以及光源路径或者相机路径的顶点数为 0 的路径（一般这些图像都很黑）。



另外上图可以看到不同的路径数量可以用于渲染不同的效果。例如第二行中间的图，对应于 $p_{2,2}$ ，这是通过采样两个相机顶点和两个光源顶点得到的，这比它左右两边的图像都要亮。也就是说，采样到的这个图像贡献更大一些；而图上的玻璃却是黑的，说明采样到的这些路径对渲染当前内容更有效（效率更高），采样焦散和玻璃的光照计算效率并不高（所以左右两边的结果比较黑）。

再看一下最后一行的最右边的图像，手电筒的焦散多出来两个“角”，这是由于光在玻璃内部多次反

射得到的：



而且每一行的图像中间都比左右两边更亮，这说明光源和相机顶点数相同是相对来说最好的采样策略。

4 2 本文小结

双向光传输方法中最基本的内容到现在已经介绍完了，但分了好几篇文章，比较零散，下一本小册子我会将全部的双向算法理论再串联一下，使得知识框架更丰富和完整。在后续系列，也会将双向算法中的一些其他细节部分（比如非对称传输）再好好地进行描述。

参考文献

- [1] Veach E . Robust Monte Carlo Methods for Light Transport Simulation[J]. Ph.d.thesis Stanford University Department of Computer Science, 1998.
- [2] Arvo, J. [1995]. Analytic Methods for Simulated Light Transport, PhD thesis, Yale University.