线性空间基变换

Dezeming Family

2021 年 5 月 24 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一 向量的线性变换

我们首先需要明确的是，一个 n 维空间里可以由 n 个不相关的 n 维向量张成。例如三维空间中，$(2,3,4)$ 和 $(3,2,7)$ 和 $(1,8,2)$ 经过线性组合就可以构成整个空间。

但是，$(2,3,4)$ 和 $(3,2,7)$ 和 $(5,5,11)$ 却没法构成整个三维空间，因为向量 $(5,5,11)$ 与向量 $(2,3,4)$, $(3,2,7)$ 线性组合构成的平面是平行的，而任何与该平面不平行的向量它们是无法线性组合得到的。

线性变换可以理解为（或者从线性函数来说，就是）将基进行了变换。我们假设对于二维空间中的基为 $\widehat{i}$ 和 $\widehat{j}$，向量 $\widehat{w}=(a,b)$，可以表示为 $a\widehat{i}+b\widehat{j}$。我们对向量进行线性变换，即乘以一个矩阵 A，但本质上是作用于了基。我们设 $a=2.5$，$b=1.5$，$\widehat{i}=(1,0)$，$\widehat{j}=(0,1)$，矩阵 A 表示为：

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 2\end{bmatrix} \tag{一.1}$$

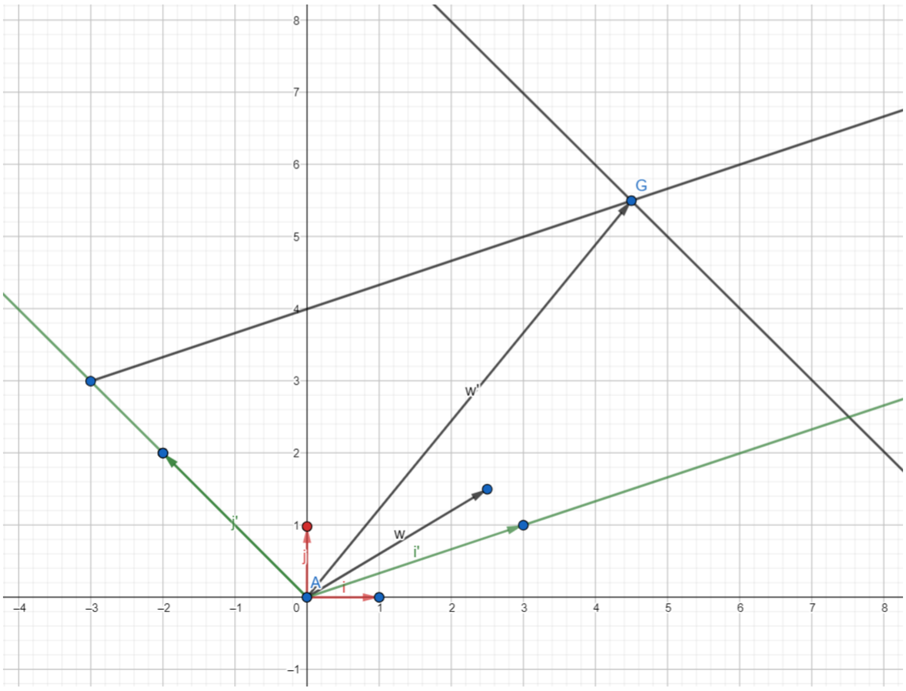
我们可以看到 $A\widehat{w}^T$：

$$A\begin{bmatrix}2.5\\ 1.5\end{bmatrix}=2.5A\widehat{i}^T+1.5A\widehat{j}^T \tag{一.2}$$

$$A\widehat{i}^T=(3,1)^T \tag{一.3}$$

$$A\widehat{j}^T=(-2,2)^T \tag{一.4}$$

如下图，红色向量表示原来的基。绿色向量表示经过线性变换以后的新的基，w 是初始向量，w' 是变换以后的向量：



顺便提一句，我们可以举一反三，当 $\widehat{i}$ 和 $\widehat{j}$ 不是坐标轴上的单位向量时，上面的变换也依然是成立的。

当矩阵的行向量或者列向量是线性相关的时候，例如：

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \tag{一.5}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{一.6}$$

A_1 将单位基 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 变换为 $(1,-2)$ 和 $(-1,2)$，注意变换后的两个基是平行的，它们已经无法张成整个二维空间了。A_2 也是同理，将单位基 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 变换为 $(1,-1)$ 和 $(-2,2)$。

我们总结一下矩阵乘以向量的值：

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{bmatrix} & b_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{一.7}$$

因此，连续的矩阵变换就可以理解为将基进行了多次变换。

基的选择

当然，对于所有的基，我们都应该有一套衡量标准，比如，基怎么表示？比如二维空间，我们凭什么认为最标准的基应该表示为 $(0,1)$ 和 $(1,0)$ 呢？为什么不能把 $(3,1)$ 和 $(-2,2)$ 作为最标准的基底呢？

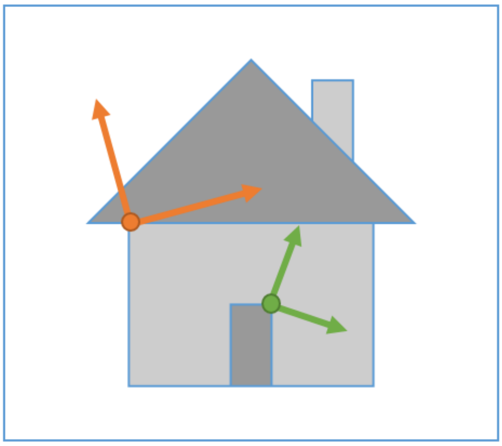
我们首先应该去保证的是对于 n 维空间，标准基的长度应该是相等的：

$$\|(3,1)\| = \sqrt{10} \neq \|(-2,2)\| = \sqrt{8} \tag{一.8}$$

因此 $(3,1)$ 和 $(-2,2)$ 不太适合作为标准基。

其次是要保证正交性，即点乘为 0，$(3,1)$ 和 $(-2,2)$ 同样不满足。

坐标系是我们理想化的产物，并不是自然而然就存在的，只是我们为了描述相对关系而存在的，因此，我们会对一个线性空间建立坐标轴，然后将用该坐标轴下的 $(0,1)$ 和 $(1,0)$ 向量作为这个坐标系中最标准的基。比如下图，我们完全可以建立为橙色坐标系，也可以建立为绿色坐标系，而且不同坐标系下单位长度对应的实际世界距离也可以不一样，这只在我们描述空间时会有不同，但在实际世界中没有什么区别：



在建立坐标系以后，我们描述的基便都在用同一个坐标系进行表示。

当我们有两个坐标系时，我们需要了解这两个坐标系之间的对应关系，包括一个坐标系如何用另一个坐标系来表示，这样才能在坐标系之间进行变换（有兴趣的同学可以参考 DezemingFamily 的《三维视角投影变换与代码实战》，相机坐标系的坐标是用世界坐标系的坐标轴来描述的，这样才为世界坐标和相机坐标之间构建了桥梁）。当描述不同坐标系的基坐标时，还是得有一个基准坐标系来描述，否则就无法描述对应关系了。

二　基变换

现在回到基变换的问题上来，现在有两个人分别定义了两个基组（并不需要保证这两个基组是单位正交的），如何判断用这两个基组表示的一个向量是否是同一个向量呢？

我们还是以二维为例，设第一个人的基是 $(\widehat{i}_1, \widehat{j}_1)$，第二个人的基是 $(\widehat{i}_2, \widehat{j}_2)$，

首先我们有一个用第二个人的基描述的向量 (a_2, b_2)：$a_2\widehat{i}_2 + b_2\widehat{j}_2$。我们希望研究一下它用第一个人的基怎么描述。我们假设该向量在另一组基中可以表示为 $a_1\widehat{i}_1 + b_1\widehat{j}_1$，由此得到关系：

$$\begin{bmatrix} \widehat{i}_1 & \widehat{j}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{i}_2 & \widehat{j}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{二.1}$$

通过矩阵的逆就可以得到：

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{i}_2 & \widehat{j}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \widehat{i}_1 & \widehat{j}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \tag{二.2}$$

这是一个很神奇的现象，我们思考如果 $(\widehat{i}_1, \widehat{j}_1)$ 是一组已经建立的坐标系下最标准的正交基，那么

$$\widehat{i}_1 = [1, 0]^T; \quad \widehat{j}_1 = [0, 1]^T \tag{二.3}$$

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{i}_2 & \widehat{j}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \tag{二.4}$$

可以表示为将基构成的矩阵取逆以后，作用于标准正交基下描述的向量，就变成了新的基下描述的向量了。

三　不同基下的变换

现在我们有另一个问题，当某种变换 A 作用于空间的标准正交基$(\widehat{i}_1, \widehat{j}_1)$ 中时，我们知道 A 描述的是标准正交基的变换。但是我们在该空间还有另一组基 $(\widehat{i}_2, \widehat{j}_2)$ 描述的向量 $a_2\widehat{i}_2 + b_2\widehat{j}_2$，我们想知道矩阵 A 对向量进行了变换以后，如何用 $(\widehat{i}_2, \widehat{j}_2)$ 描述变换了以后的值（注意我们不是用变换了以后的基去描述向量）。

其实很简单，我们先说过程，后面再说原理。先把该向量用另一组基描述（进行基变换）：$a_2\widehat{i}_2+b_2\widehat{j}_2$，然后对其进行 A 变换，然后再通过逆矩阵逆变换回去。过程如下：

$$\begin{bmatrix} a'_2 \\ b'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{i}_2 & \widehat{j}_2 \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} \widehat{i}_2 & \widehat{j}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{三.1}$$

这个时候，作用于第一组基的变换，对应于第二组基描述的向量就变为了 $a'_2\widehat{i}_2+b'_2\widehat{j}_2$ 。

我们把这组变换的最后面的向量去掉，设矩阵 X 为：

$$X = \begin{bmatrix} \widehat{i}_2 & \widehat{j}_2 \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} \widehat{i}_2 & \widehat{j}_2 \end{bmatrix} \tag{三.2}$$

我们分析一下 X 的作用，其实就是使矩阵作用于某一组基，然后做基的逆变换。一个矩阵变换只是对应一组基，但是代表这个矩阵作用的线性变换是对应了整个世界空间，只不过该线性变换在这组基下可以描述为这个矩阵，而我们的目标是用这组基描述的这个线性变换去得到它在整个世界空间的作用效果。

基变换过程

因此我们可以思考该过程：我们打算对世界空间做一些变换 T，比如某种仿射变换。该变换作用于描述该空间的标准正交基 $(\widehat{i}_1,\widehat{j}_1)$ 上表现为矩阵 A，这是我们的已知信息。我们现在有一组基 $(\widehat{i}_2,\widehat{j}_2)$ 描述的向量 (a_2,b_2)，我们现在想知道这个变换作用于标准正交基描述的该向量后，应该如何用基 $(\widehat{i}_2,\widehat{j}_2)$ 表示变换后的向量 (a'_1,b'_1)。

使用标准正交基来描述 (a_2,b_2)：

$$\begin{bmatrix} \widehat{i}_2 & \widehat{j}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{三.3}$$

对标准正交基进行空间变换，得到标准正交基下描述的向量（要明确的是，虽然矩阵本质上是作用于基，但标准基变换了以后的基的描述还是用标准坐标系描述的，因此对于作用的向量的值来说基底我们可以认为并没有改变，结尾我会再说明一下）：

$$A \begin{bmatrix} \widehat{i}_2 & \widehat{j}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{三.4}$$

根据前面“基变换”小节，使用基矩阵的逆变换得到基 $(\widehat{i}_2,\widehat{j}_2)$ 对于变换后的向量的描述：

$$\begin{bmatrix} \widehat{i}_2 & \widehat{j}_2 \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} \widehat{i}_2 & \widehat{j}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{三.5}$$

针对上面蓝字描述的内容，再补充说明一下，设某个向量在标准正交系下可以描述为 $(2.5,1.5)^T$。

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} \tag{三.6}$$

该变换虽然本质上将标准正交基变为了 $(3,1)^T$ 和 $(-2,2)^T$，但经过运算以后我们还是习惯于用标准正交基描述变换以后的向量，即标准正交系下的 $(4.5,5.5)^T$。

参考文献

[1] Strang G . Introduction to Linear Algebra[M]. Wellesley-Cambridge Press, 2003.

[2] https://www.bilibili.com/video/BV1ys411472E?p=1