Линейные рекуррентные соотношения первого порядка с постоянным коэффициентом.

Иванов Иван

№1

1) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 3 \cdot a_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3, \beta = 0, \gamma = 2$

$a_n = \left(\cancel{0} 2 - \frac{0}{1-3}\right) \cdot 3^{n-1} + \frac{0}{1-3} = 2 \cdot 3^{n-1}$, при $n \geq 1$

2) $\begin{cases} a_1 = \frac{3}{50} \\ a_n = \frac{4}{5} \cdot a_{n-1} + \frac{1}{50} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{4}{5}, \beta = \frac{1}{50}, \gamma = \frac{3}{50}$

$a_n = \left(\frac{3}{50} - \frac{1}{50} \cdot \frac{5}{1}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} + \frac{5}{50} = -\frac{1}{25} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{10} =$

$= -0{,}4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} + 0{,}1$

3) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 3 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3; \beta = 3, \gamma = 2$

$a_n = \left(2 + \frac{3}{2}\right) \cdot 3^{n-1} - \frac{3}{2} = 3{,}5 \cdot 3^{n-1} - 1{,}5$

4) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + f_n \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1, \beta = f_n, \gamma = 1$

$a_n = \cancel{\left(1 - \frac{f_n}{0}\right)} \cdot 1^{n-1} \cdot 1 + 1^n \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{1}\right)^i \cdot f_i = 1 + \sum_{i=2}^{n} f_i =$

$= 1 + f_1 + f_2 + \ldots + f_n$

5) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + r^{n-1}, \ r \in P \end{cases} = \alpha = 1, \ \beta = r^{n-1}, \ \gamma = 1$

$a_n = 1_2 \cdot 1_3 \cdot \ldots \cdot 1_n \cdot 1 + \sum_{i=2}^{n} \left(\prod_{k=i+1}^{n} 1k \right) r^{i-1} = 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{r^i}{r} =$

$= 1 + \frac{r^n - r}{r - 1} = \frac{r - 1 + r^n - r}{r - 1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$

6) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + n \cdot n! \end{cases}$

$a_n = 1^{n-1} \cdot 1 + 1^n \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{1}\right)^i \cdot i \cdot i! = 1 + (n+1)! - 2 =$

$= (n+1)! - 1$

7) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 3^n + 4 \end{cases}$

$$a_n = \left(1 - \frac{3^n+4}{1-2}\right) \cdot 2^{n-1} + \frac{3^n+4}{1-2} = (3^n - 3) \cdot 2^{n-1} - 3^n - 4 =$$

$$= \frac{6^n - 3 \cdot 2^n}{2} - 3^n - 4 = \frac{6^n - 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n - 8}{2}$$

8) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 2a_{n-1} + 4^n \end{cases}$

$$a_n = \left(2 + \cancel{4^n}\, 4^n\right) \cdot 2^{n-1} * - 4^n = \frac{2 \cdot 2^n + 8^n - 2 \cdot 4^n}{2} =$$

$$= 2^n + 2^{3n-1} - 4^n$$

9) $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = 7 \cdot a_{n-1} + 18 \cdot 2^{n-\cancel{1}\,-2} \end{cases}$

$$a_n = \left(\cancel{0+}\ \frac{18 \cdot 2^{n-2}}{6}\right) \cdot 7^{n-1} * - \frac{18 \cdot 2^{n-2}}{6} =$$

$$= 3 \cdot 2^{n-2} \cdot 7^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-2}(3 \cdot 7^{n-1} - 3) =$$

$$= 3 \cdot 2^{n-2} \cdot (7^{n-1} - 1)$$

№2

1) $\begin{cases} a_1 = \cancel{2}\,1 \\ a_n = \cancel{3}\,2 \cdot a_{n-1} + 1,\ n > 1 \end{cases}$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{1}\right) \cdot 2^{n-1} * - 1 = 2^n - 1$$

2) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 2, \; n > 1 \end{cases}$

$$a_n = (2+1) \cdot 3^{n-1} - 1 = 3^n - 1$$

Линейные рекуррентные соотношения первого порядка с переменным коэффициентом

№1

1) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = f_n \cdot a_{n-1}, \; n > 1 \end{cases}$

$$a_n = f_2 \cdot f_3 \cdot \ldots f_n \cdot 1 + \sum_{i=2}^{n} \left(\prod_{k=i+1}^{n} f_n \right) \cdot 0 =$$

$$= f_2 \cdot f_3 \cdot \ldots f_n$$

2) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = \frac{1}{n} \cdot a_{n-1}, \; n > 1 \end{cases}$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n} \cdot 1 + \sum_{i=2}^{n} \left(\prod_{k=i+1}^{n} \frac{1}{k} \right) \cdot 0 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \ldots \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$$

3) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = \frac{1}{n} \cdot a_{n-1} + n \end{cases}$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \ldots \frac{1}{n} \cdot 2 + \sum^{n} \left(\prod^{n} \frac{1}{\cdot} \right) \ldots \frac{2}{\cdot} + \left(-\frac{2}{1} \right) +$$

$+ n + 1 = n + 1$.

~~№2~~ ~~№3~~.

Квазилинейные рекуррентные соотношения первого порядка.

№1.

1) $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n^2 - a_{n-1}^2 = 2, & n > 1 \end{cases}$

Пусть $a_n^2 = x_n$, $x_1 = 0$, тогда

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_n - x_{n-1} = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 \\ x_n = x_{n-1} + 2 \end{cases}$

$x_n = 1^{n-1} \cdot 0 + 1^n \cdot \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{1}\right)^i \cdot 2 = \sum_{i=2}^{n} 2 = 2(n-1)$

$a_n^2 = 2(n-1)$

$a_n = \sqrt{2n-2}$

2) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n^3 - a_{n-1}^3 = 6, & n > 1 \end{cases}$

Пусть $a_n^3 = x_n$, $a_{n-1}^3 = x_{n-1}$, $x_1 = 1$, тогда

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n - x_{n-1} = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = x_{n-1} + 6 \end{cases}$

$x_n = 1^{n-1} \cdot 1 + 1^n \cdot \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{1}\right)^i \cdot 6 = 1 + \sum_{i=2}^{n} 6 = 6n - 5$

$x_n = a_n^3 = 6n - 5$

$a_n = \sqrt[3]{6n-5}$

3) $\begin{cases} a_1 = 7 \\ \cancel{a_n}\ (2a_n+1)^2 = (2a_{n-1}+1)^2+5, \ n \geq 1 \end{cases}$

Пусть $(2a_n+1)^2 = x_n$, $(2a_{n-1}+1)^2 = x_{n-1}$,

$x_1 = (2 \cdot a_1 + 1)^2 = 15^2 = 225$, тогда

$\begin{cases} x_1 = 225 \\ x_n = x_{n-1} + 5 \end{cases}$

$x_n = 1^{n-1} \cdot 225 + 1^n \cdot \sum\limits_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{1}\right)^i \cdot 5 = 225 + \sum\limits_{i=2}^{n} 5 =$

$= 225 + 5(n-1) = 225 + 5n - 5 = 220 + 5n$

$(2a_n+1)^2 = 220 + 5n$

$a_n = \frac{\sqrt{220+5n} - 1}{2}$

4) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ (3a_n-5)^3 - (3a_{n-1}-5)^3 = 1, \ n \geq 1 \end{cases}$

Пусть $(3a_n-5)^3 = x_n$, $(3a_{n-1}-5)^3 = x_{n-1}$,

$(3 \cdot a_1 - 5)^3 = x_1$, тогда

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = x_{n-1} + 1 \end{cases}$

$x_n = 1^{n-1} \cdot 1 + 1^n \cdot \sum\limits_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{1}\right)^i \cdot 1 = 1 + \sum\limits_{i=2}^{n} 1 = n$

$$(3a_n-5)^3=n$$

$$a_n=\frac{\sqrt[3]{n}+5}{3}$$

№2

1) $\begin{cases} a_1=1 \\ a_n^2 - a_{n-1}=2, \ n>1 \end{cases}$

$$\log_2 a_n^2=\log_2 2+\log_2 a_{n-1}$$

$$2\log_2 a_n = 1+\log_2 a_{n-1}$$

Пусть $x_n=2\log_2 a_n$, $x_{n-1}=2\log_2 a_{n-1}$, $x_1=\log_2 1=0$

$\begin{cases} x_1=0 \\ x_n=\frac{1+x_{n-1}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=0 \\ x_n=\frac{1}{2}x_{n-1}+\frac{1}{2} \end{cases}$

$$x_n=(0-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1=-2\left(\frac{1}{2}\right)^n+1$$

$$\log_2 a_n=-2\left(\frac{1}{2}\right)^n+1$$

$$a_n=2^{1-2^{1-n}}$$

2) $\begin{cases} a_1=4 \\ a_n^2=4\cdot a_{n-1}, \ n>1 \end{cases}$

$$\log_2 a_n^2=\log_2 4+\log_2 a_{n-1}$$

$$2\log_2 a_n=2+\log_2 a_{n-1}$$

Пусть $2\log_2 a_n=2x_n$, $\log_2 a_{n-1}=x_{n-1}$, $x_1=\log_2 4=2$, тогда

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_n = \frac{1}{2} x_{n-1} + 1 \end{cases}$$

$$x_n = (2-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 = 2$$

$$\log_2 a_n = 2 \qquad a_n = 4$$

3) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n^2 = 3 \cdot a_{n-1}, \ n > 1 \end{cases}$

$$\log_3 a_n^2 = \log_3 a_{n-1} + 1, \ 2\log_3 a_n = 1 + \log_3 a_{n-1}$$

Пусть $2\log_3 a_n = 2x_n$, $\log_3 a_{n-1} = x_{n-1}$, $x_1 = \log_3 2$

$$\begin{cases} x_1 = \log_3 2 \\ x_n = \frac{1}{2} x_{n-1} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x_n = (\log_3 2 - 1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 = 2^{1-n} \cdot \log_3 2 - 2^{1-n} + 1$$

$$\log_3 a_n = 2^{1-n} \cdot \log_3 2 - 2^{1-n} + 1 = 2^{1-n}(\log_3 2 - 1) + 1$$

$$a_n = 3^{\log_3 2 \cdot 2^{1-n}} = 3^{2^{1-n}(\log_3 2 - 1) + 1} = \cancel{\left(\frac{2}{3}\right)} 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2^{1-n}}$$