Контрольная работа №1.

№1

1) $\begin{cases} a_{n+1} = 4\cdot a_n + 6 \\ a_0 = -5 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a_n = 4\,a_{n-1} + 6 \\ a_1 = 4\cdot(-5) + 6 = -14 \end{cases}$

$\cancel{a_n =}\ \gamma = -14 \quad , \alpha = 4 \quad , \beta = 6$

$a_n = (-14 + 2)\cdot 4^{n-1} \cancel{+} - 2 = -3\cdot 4^{n\cancel{-1}} - 2$

$a_{n+1} = -3\cdot 4^{n+1} - 2$

2) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + n + 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a_n = a_{n-1} + n \\ a_1 = 2 \end{cases}$

$\cancel{a_n = q^{n-1}\cdot a_1 + q^n}$ $\quad q = 1,\ a_1 = 2,\ d_i = n$

$a_n = 2 + \sum_{i=2}^{n} i = 2 + \frac{1}{2}(n^2 + n - 2) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$

$a_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$

3) $\begin{cases} a_{n+1} = 5\,a_n + 4n^2 + 6n - 7 \\ a_0 = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} a_n = 5\,a_{n-1} + 4n^2 \cancel{+} - 2n - 9 \\ a_{\cancel{0}1} = 8 \end{cases}$

$q=5,\ a_1=8,\ d_i=4n^2-2n-9$

$a_n=5^{n-1}\cdot 8+5^n\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^i\cdot(4i^2-2i-9)=8\cdot 5^{n-1}+\frac{1}{5}\cdot$

$\cdot(-5n^2-10n+2\cdot 5^n+5)=8\cdot 5^{n-1}-n^2-2n+2\cdot 5^{n-1}+1=$

$=2\cdot 5^n-n^2-2n+1$

4) $\begin{cases} a_{n+1}=3\cdot a_n+5\cdot 2^n \\ a_0=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} a_n=3\cdot a_{n-1}+5\cdot 2^{n-1} \\ a_1=-3+5=2 \end{cases}$

$a_n=3^{n-1}\cdot 2+3^n\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^i\cdot(5\cdot 2^{i-1})=3^{n-1}\cdot 2+$

$+3^n\left(10\cdot 3^{-1}-5\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)=12\cdot 3^{n-1}-5\cdot 2^n=3^n\cdot 4-5\cdot 2^n$

5) $\begin{cases} a_{n+1}=3\cdot a_n+(n-4)\cdot 5^n \\ a_0=\frac{1}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} a_n=3a_{n-1}+(n-5)\cdot 5^{n-1} \\ a_1=\frac{3}{4}+(-4)\cdot 5^0=-\frac{13}{4} \end{cases}$

$q=3,\ a_1=-\frac{13}{4},\ d_i=(n-5)\cdot 5^{n-1}$

$a_n=3^{n-1}\cdot\left(-\frac{13}{4}\right)+3^n\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^i\cdot(i-5)\cdot 5^{i-1}=3^{n-1}\cdot$

$\cdot\left(-\frac{13}{4}\right)+3^n\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n\cdot n-3^n\cdot\frac{13}{4}\left(\frac{5}{3}\right)^n+3^n\cdot\frac{55}{12}=$

$=\frac{21}{2}\cdot 3^{n-1}+5^n\left(\frac{1}{2}n-\frac{13}{4}\right)=\frac{1}{4}5^{n}(2n-13)+\frac{7\cdot 3^n}{2}$

6) $\begin{cases} a_{n+1}=4\cdot a_n+8\cdot 4^n \\ a_0=7 \end{cases}$ $\begin{cases} a_n=4\cdot a_{n-1}+8\cdot 4^{n-1} \\ a_1=36 \end{cases}$

$$a_n = 4^{n-1}\cdot 36 + 4^n \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^i \cdot \left(8\cdot 4^{i-1}\right) = 36\cdot 4^{n-1} + 4^n\cdot 2n =$$
$$= 7\cdot 4^n + 2n\cdot 4^n = 4^n(2n+7)$$

7) $\begin{cases} a_{n+1} = 3\cdot a_n + 4n^2 - 6n - 11 \\ a_0 = 14 \end{cases}$ $\begin{cases} a_n = 3\cdot a_{n-1} + 4n^2 - 12n + 6 \\ a_1 = 40 \end{cases}$

$$a_n = 3^{n-1}\cdot 40 + 3^n \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^i \cdot \left(4i^2 - 12i + 6\right) = 40\cdot 3^{n-1} +$$
$$+ 3^n\left(\frac{2}{3} - 2\cdot 3^{-n}\cdot n^2\right) = 40\cdot 3^{n-1} + 2\cdot 3^{n-1} - 2n^2 = 14\cdot 3^n - 2n^2$$

№2 Алгоритм в

$\begin{cases} a_{n+1} = 5\cdot a_n + 4n^2 + 6n - 7 \\ a_0 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} + 4n^2 - 2n - 9 \\ a_1 = 8 \end{cases}$

$$a_n = 5^{n-1}\cdot 8 + 5^n \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^i \left(4i^2 - 2i - 9\right) = 5^{n-1}\cdot 8 +$$
$$+ \frac{1}{5}\left(-5n^2 - 10n + 2\cdot 5^n + 5\right) = 10\cdot 5^{n-1} - n^2 - 2n + 1 =$$
$$= 2\cdot 5^n - n^2 - 2n + 1.$$

Алгоритм а.

$\begin{cases} a_{n+1} = 3\cdot a_n + 4n^2 - 6n - 11 \\ a_0 = 14 \end{cases}$ $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4n^2 - 14n - 1 \\ a_1 = 31 \end{cases}$

$$a_n = 3^{n-1}\cdot 31 + 3^n \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(4i^2 - 14i - 1\right) = 31\cdot 3^{n-1} + \frac{1}{3}\cdot$$

$\cdot(-6n^2+3n-4\cdot 3^n+15)=9\cdot 3^n-2n^2+n+5=3^{n+2}-2n^2+n+5.$

Для алгоритма в

$T(n)=\Theta(2\cdot 5^n-n^2-2n+1)=\Theta(5^n)$

Для алгоритма а.

$T(n)=\Theta(3^{n+2}-2n^2+n+5)=\Theta(3^n)$

$5^n>3^n\to$ Алгоритм в асимптотически быстрее алгоритма а.

№3

Алгоритм в

$$\begin{cases} a_n=\frac{n+1}{n}\cdot a_{n-1}+2 \\ a_1=0 \end{cases}$$

$$a_n=\sum_{i=2}^{n}\left(\prod_{k=i+1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)\right)\cdot 2=\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{2\cdot(n+1)}{i+1}\right)$$

Алгоритм а

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{n}\cdot a_{n-1}+n \\ a_1=2 \end{cases}$$

$$a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}\cdot 2+\sum_{i=2}^{n}\left(\prod_{k=i+1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)\right)i=\frac{2}{n!}+$$

$$+\left(-\frac{2}{n!}+n+1\right)=n+1$$

$$\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{2\cdot(n+1)}{i+1}\right)>n+1$$

Алгоритм в асимптотически быстрее алгоритма а.

№4.

Алгоритм в:

$$\begin{cases} a_{n+1} = A \cdot a_n + 6 \\ a_0 = -5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = A \cdot a_{n-1} + 6 \\ a_1 = -5A + 6 \end{cases}$$

$$a_n = \left(-5A + 6 - \frac{6}{1-A}\right) \cdot A^{n-1} + \frac{6}{1-A} = \frac{((-5A + 5A^2 + 6 - 6A) - 6)A^{n-1} + 6}{1-A} = \frac{(5A^2 - 11A)A^{n-1} + 6}{1-A} = \frac{5A^{n-1} - 11A^n + 6}{1-A}$$

Алгоритм а

$$\begin{cases} a_{n+1} = B \cdot a_n + (n-4) \cdot 5^n \\ a_0 = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} a_n = B \cdot a_{n-1} + (n-5) \cdot 5^{n-1} \\ a_1 = -\frac{1}{4}B - 4 \end{cases}$$

$$a_n = B^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{4}B - 4\right) + B^n \sum_{i=2}^{n} \left(\left(\frac{1}{B}\right)^i (i-5) \cdot 5^{i-1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}B^n - 4B^{n-1} + \frac{-4 \cdot 5^n \cdot B + 5^{n+2} + (B-5)5^n \cdot n + 15B^n - 100B^{n-}}{(B-5)^2}$$

$$= \frac{5^n(n(B-5) + 25 - 4B) + B^n\left(55 - \frac{25}{4}\right) - 200B^{n-1} + B^{n+1}\left(\frac{5}{2} - 4\right) - \frac{1}{4}}{B^2 - 10B + 25}$$

Для алгоритма в:

$$T(n) = \Theta\left(\frac{5\alpha^{n+1} - 11\alpha^n + 6}{1-\alpha}\right) = \Theta(\alpha^n)$$

Для алгоритма а.

$$T(n) = \Theta(5^n \cdot n + \beta^n)$$

$$\beta \cancel{\beta} \leq 5 \to T(n) = 5^n \cdot n$$

$$\beta > 5 \to T(n) = \beta^n$$

Алгоритм в будет асимптотически быстрее алгоритма а, если $\begin{cases} \beta > 5 \\ \alpha > \beta \end{cases}$ и $\begin{cases} \beta \leq 5 \\ \alpha > 5 \end{cases}$