# hw3

PB20020480

王润泽

### 1 Question

在球坐标系 $(\rho, \theta, \varphi)$ 下,产生上半球面上均匀分布的随机坐标点,给出其直接抽样方法。

#### 2 Method

设  $p(\theta,\varphi)$ 是球面上均匀的概率密度分布函数,**以球坐标为系**,半径r=1,那么有上

$$\int pds = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} p( heta,arphi) \sin heta d heta darphi = 1$$

解出  $p(\theta, \varphi) = 1/2\pi$ 

那么对于  $(\theta, \varphi)$ 来说,符合的概率密度函数为

$$g( heta,arphi) = rac{sin heta}{2\pi} = \sin heta imes rac{1}{2\pi} = f( heta) imes h(arphi)$$

对  $(\theta, \varphi)$ 进行直接抽样法抽样:

 $\theta$ 的累积函数  $F(\theta)$ 为

$$F( heta) = \int_0^ heta \sin t dt = 1 - \cos heta$$

故为了得到  $\theta$ 的抽样值,需要先得到(0, 1) 上均匀分布的  $\xi_1$ ,然后根据直接抽样法

$$\theta = \arccos(1 - \xi_1)$$

而  $\varphi$ 的分布可由 (0, 1) 上均匀分布  $\xi_2$ 得到

$$\varphi = 2\pi \xi_2$$

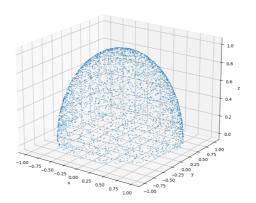
### 3 Experiment

根据以上方法,抽样出 $(\theta,\varphi)$ ,根据坐标公式转化

$$x = \sin \theta \cos \varphi$$
$$y = \sin \theta \sin \varphi$$
$$z = \cos \theta$$

可得绘制出上半球面的均匀分布图像

Evenly distributed on the upper hemisphere



# **4 Summary**

通过把球面上的均匀分布转换为以  $f(\theta)=\sin\theta~(\theta\in(0,\pi)$ 为概率密度的  $\theta$ ,以及在 $(0,2\pi)$ 上均匀分布的  $\varphi$  的联合分布得到了球面上均匀分布点的生成方式。最后根据直接抽样法,通过  $\theta=\arccos(1-\xi_1)$ 和  $\varphi=2\pi\xi_2$ 的方式,抽样得到分布。