Report 12

> Rainzor

1. Question

推导正方格子点阵上键逾渗的重整化群变换表达式 $p'=R(p)$，求临界点 p_c 与临界指数 ν ，与正确值（下表）相比较。

表1.6.1.3-1 各种点阵下座逾渗与键逾渗的逾渗阈值 p_c

维数	点 阵	座逾渗 p_c	键逾渗 p_c	配位数
2	三角形	0.500000	0.34729	6
2	正方形	0.592746	0.50000	4
2	Kagome	0.6527	0.45	4
2	蜂房形	0.6962	0.65271	3
3	面心立方	0.198	0.119	12
3	体心立方	0.246	0.1803	8
3	简立方	0.3116	0.2488	6
3	金刚石	0.428	0.388	4
3	无规密堆积	0.27(实验值)		
4	简立方	0.197	0.160	8
5	简立方	0.141	0.118	10
6	简立方	0.107	0.094	12

表1

2. Answer

2.1 临界点 p_c

本题要讨论的是正方形点阵上的键逾渗，而键逾渗有6条相邻的键，如下图所示

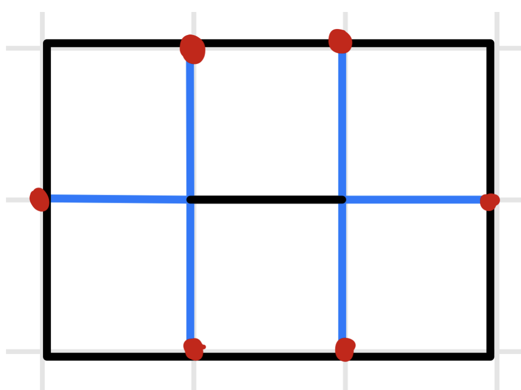

图1：方阵键逾渗

且与两边有两个点联通，与上下有四个点联通，但实际上这个结构与三角形的座逾渗结构十分相似，如下图所示：

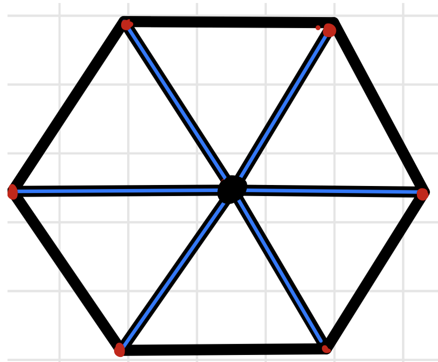

图2：三角阵座逾渗

与图1的结构一样，中心的点有6个相邻的座，二者是同构。

那么为了方便问题的讨论，我们就可以把问题转化成：讨论三角格子点阵上座逾渗的临界点 p_c 与临界指数 ν。

我们重整化方式如下，取尺度放大因子为2的元胞。

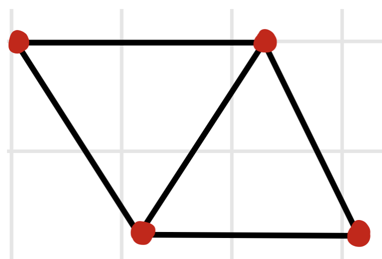

图3：b=2元胞

一共有三种情况可以联通

1. 四个点都占据

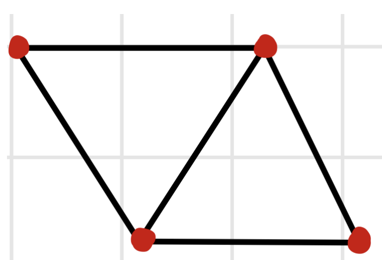

图4：四个点占据

2. 三个点占据

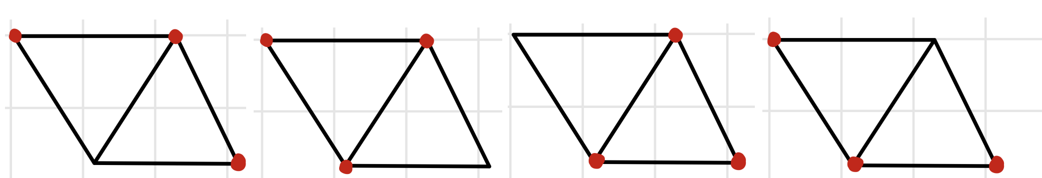

图5：三个点占据

3. 两个点占据

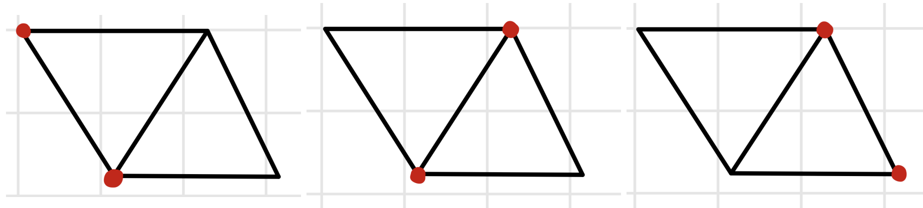

图6：两个点占据

假设格点的占据几率为 p，对于 **b = 2** ，上下端连接的图形有7个（图1.6.3.3-1），其变换表达式为

$$
p' = R(p|b=2)=p^4+4p^3(1-p)+3p^2(1-p)^2 \tag1
$$

一般来说，重整化后的格子点阵占据几率 p ' 相异于原格子点阵的占据几率 p，但对于零界点 p_c，它满足关系式：

$$
p_c= R(p_c)\tag2
$$

由（1）（2）解出非平凡的值为 $\mathbf{p_c = 0.5}$，与表1对比可以看出，与正确值一样

2.2 临界指数 ν

为了计算临界指数 ν，对（1）式求导

$$
R'(p)=4p^3+12p^2(1-p)-4p^3+6p(1-p)^2-6p^2(1-p)=6(1-p)p\tag3
$$

那么在 p_c处的值为 $R'(p_c)=1.5$，那么可以解得临界指数为

$$
\nu=\frac{\ln b}{\ln k}=\frac{\ln2}{\ln 1.5}\approx1.7095
$$

与正确的值对比 $p^*=0.5,\nu^*=4/3$,可见 p_c求得了精确值，而 ν的值有所差距，但对于b=2的简单情况来说，近似结果已经不错了。可能对于较大的b，结果可能会得到更好的改善。