

# Report16

王润泽 PB20020480

## 1 Question

以  $x_{n+1} = \lambda \sin(\pi x_n)$  为迭代方程进行迭代

- (1). 画出系统状态随参数  $\lambda$  的变化图, 要求在图中体现出定值状态、倍周期分叉和混沌状态;
- (2). 列出各个倍周期分叉处的  $\lambda$  值, 求相应的 Feigenbaum 常数。

## 2 Analysis

主要使用迭代法进行计算, 对于  $\lambda = 0.8$  的系统, 大致呈现如图1所示的类型, 与一维 *Logistic* 方法类似

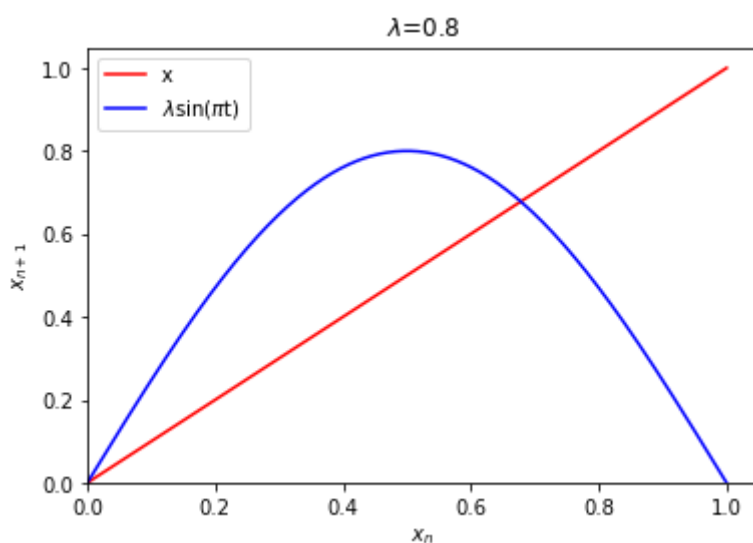


图1: 迭代方程形式 对于有固定周期的态, 结果与初始值无关, 且在有限步迭代后必然收敛。然而对于混沌的体系, 周期无穷, 那么最终绘图的结果与初值也无关, 不妨取初值为  $x_0=0.5$

设  $\lambda \in (0, 1)$ , 步长为  $\delta\lambda = 10^{-3}$ , 不断增大  $\lambda$  的值进行如下迭代:

初始值  $x_0 = 0.5, k = 1, \lambda_0 = 0, M = 5000, N = 1000$

1. 第  $k$  个  $\lambda$  取值为:  $\lambda_k = \delta\lambda + \lambda_{k-1}$
2. 根据公式  $x_{n+1} = \lambda \sin(\pi x_n)$  对  $x_n$  进行  $M$  步迭代, 再舍去, 热化掉不稳地的点
3. 创建变量 `data=[]`, 再进行  $N$  步迭代, 将新产生的点  $x$  加入到 `data` 中。

但考虑到由于计算机有精度限制, 所以在迭代时会有  $|x_i - x_j|$  极小的情况, 故为了避免这种情况要对  $|x_i - x_j| < 10^{-5}$  的点舍去

4. 将当前的  $\lambda_k$  与系统状态存储在 `lambs` 和 `data_list` 中

## 3 Experiment

### 3.1 状态变换图

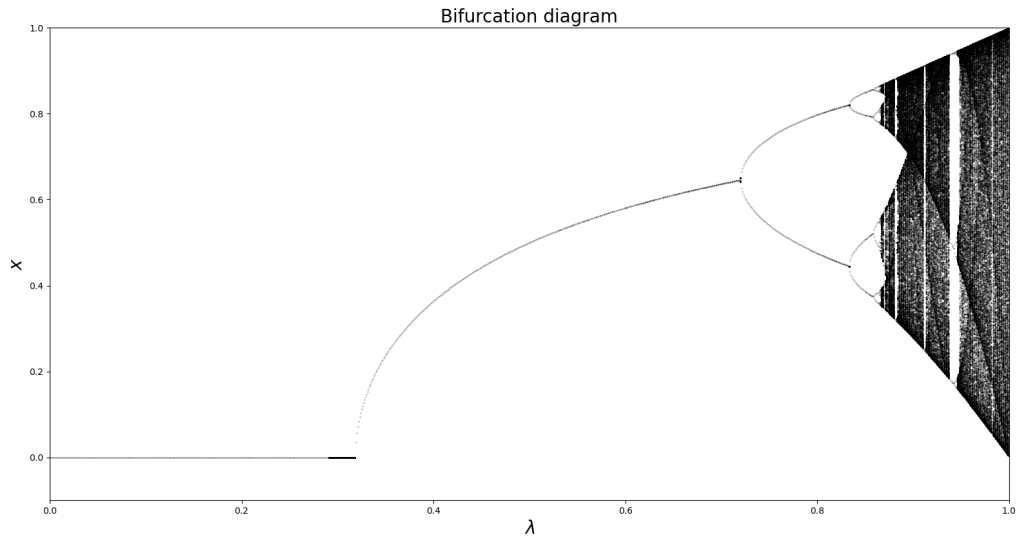


图2：倍周期分岔到混沌示意图

图 2 是将  $\lambda$  从 0 变化到 1 所生成出来的一个图像。当  $\lambda < 0.3$  时，迭代序列稳定地收敛到 0。当  $\lambda$  在 0.3 附近时，短暂地出现了一次倍周期分岔。当  $0.33 < \lambda < 0.7$  时，迭代序列收敛到单一值。当  $\lambda > 0.7$  时，迭代序列分别展现出倍周期分岔和混沌的形态。

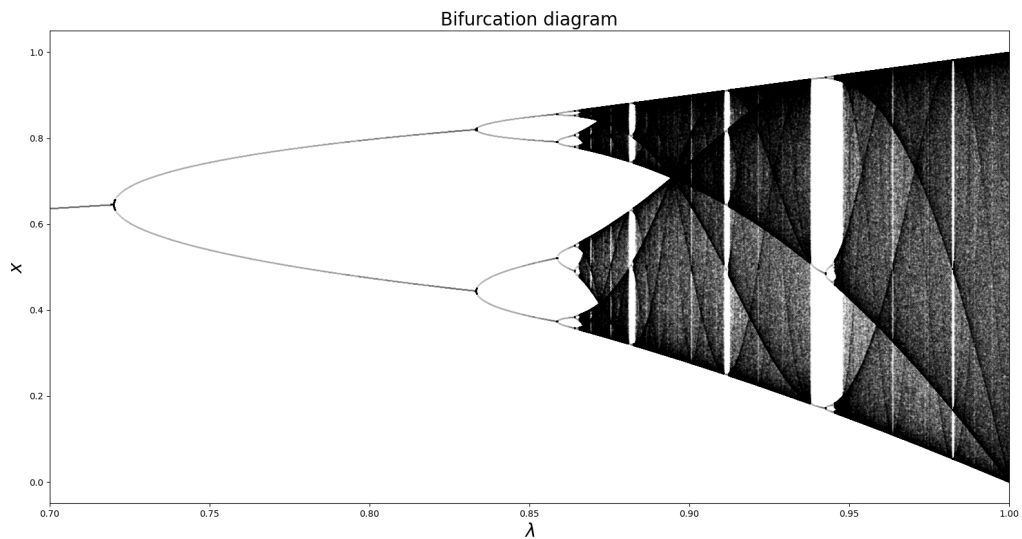


图3：局部放大图

将图 2 在  $0.7 < \lambda < 1$  的位置放大，得到图 3，从图中可以清晰地看到有  $T=2$ 、 $T=4$ 、 $T=8$ 、 $T=16$  的分岔点。

### 3.2 分叉处的 $\lambda$ 值与 Feigenbaum 常数

#### 3.2.1 横轴方向倍周期分岔中的标度行为

$\lambda_m$  按以下的几何级数（幂函数）收敛到  $\lambda_\infty$

$$\lambda_\infty - \lambda_m = A\delta^{-m} (m \gg 1)$$

A 是依赖于迭代函数的常数，而  $\delta$  是不依赖于 迭代函数的普适常数

为了找到分叉点，可以调整  $\lambda$  的区间和精度，放大局部图像，使得可求出更加准确的分叉处  $\lambda$  值。

此时取  $\lambda \in [7.15, 7.25] \cup [0.83, 0.835] \cup [0.85, 0.87]$ ,  $\delta\lambda = 10^{-6}$ ，程序可输出对应周期数与  $\lambda$  值，数据存储在 `Feigenbaum_size.csv` 文件中，在分叉处，或许是因为计算精度有限，周期会出现波动，故要在周期稳定时取值较为合适，观察表格中的数据与公式得到下表

$$\text{Feigenbaum } \delta = \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_{m+1} - \lambda_m} = \frac{\Delta\lambda_m}{\Delta\lambda_{m+1}}$$

m	T	$\lambda_m$	$\Delta\lambda_m$	$\delta$
1	$1 \rightarrow 2$	0.720043		
2	$2 \rightarrow 4$	0.833299	0.113256	
3	$4 \rightarrow 8$	0.858621	0.025322	4.472632
4	$8 \rightarrow 16$	0.864089	0.005468	4.630944
5	$16 \rightarrow 32$	0.865261	0.001172	4.665529
6	$32 \rightarrow 64$	0.865514	0.000253	4.632411

表 1：分岔横向距离和 Feigenbaum 常数计算

即前后分岔间距的比值趋向于一个常数：4.669201609

#### 3.2.2 纵轴方向倍周期分岔的标度行为

如下图所示，取  $x = 0.5$ ,其纵向标度的比值趋于一个常数，即

$$\frac{d_m}{d_{m+1}} \rightarrow \alpha = 2.50290787509589282228390287 \quad (m \rightarrow \infty)$$

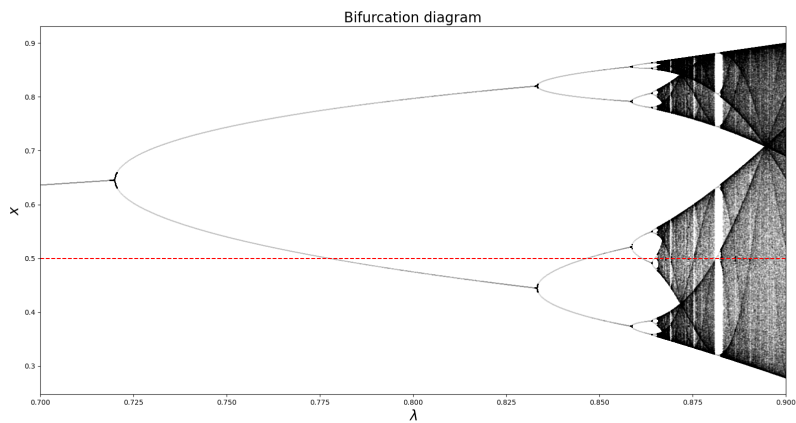


图4：纵向距离交点示意图

对于此题如果取在  $x = 0.5$  处的值，计算分岔的纵向间距比值，可以看到Feigenbaum  $\alpha$  是趋于理论值的。

而计算机精度有限，故实验中选择了  $0.4995 < x < 0.5005$  之间的值输出。同时要注意相同周期数，不同分叉之间纵向距离不一定相同，所以要取在  $x = 0.5$  分叉处的纵向距离才能得到正确的结果。

数据保存在 `Feigenbaum_alpha.csv` 中，如下表所示

m	T	$d_m$	$\alpha$
1	2	0.277659	
2	4	0.047581	5.83550
3	8	0.019911	2.52277
4	16	0.007477	2.66296
5	32	0.003082	2.42602

表 2：分岔纵向距离和 Feigenbaum 常数计算

结果已经比较接近理论值：2.502907875

### 3.3 更大范围内变化

如果将区间范围调整到  $\lambda \in [-2, 2]$  范围，可以看到迭代序列出现了负值，这和迭代函数的函数取值是吻合的，同时呈现处一定的对称性

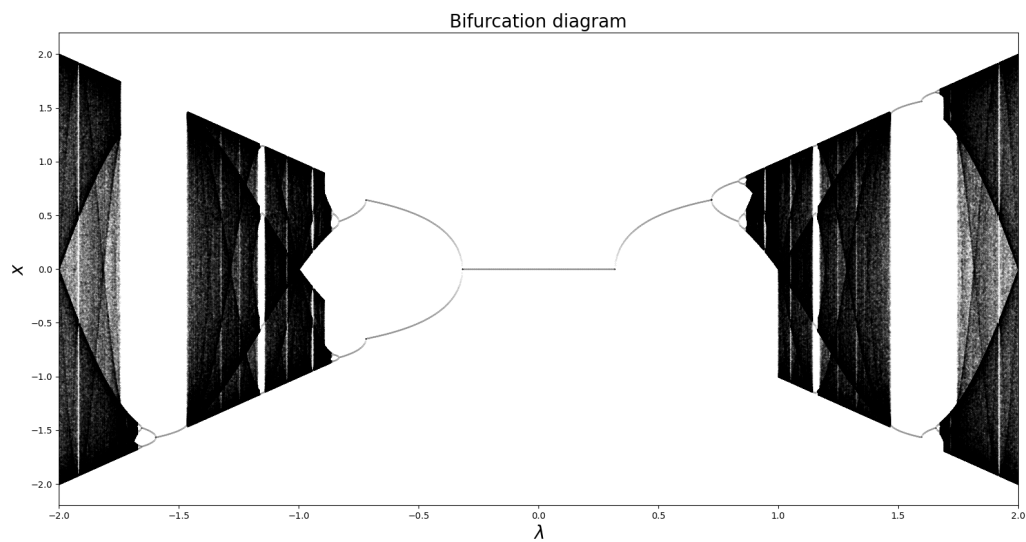


图5：更大范围内状态的变化

## 4 Summary

利用迭代序列  $x_{n+1} = \lambda \sin(\pi x_n)$  进行迭代，观察到了迭代序列随  $\lambda$  会从定值变化到周期再变化到混沌。而且验证了 Feigenbaum 常数是一个和迭代序列无关的普适常数。