Report17

> Rainzor

1 Question

进行单中心DLA模型的模拟(可以用圆形边界，也可 以用正方形边界)，并用两种方法计算模拟得到的DLA图形的分形维数，求分形维数时需要作出双对数图

2 Algorithm

2.0 DLA

DLA模型的生成方式在作业11中已经实现过了，大致步骤是：

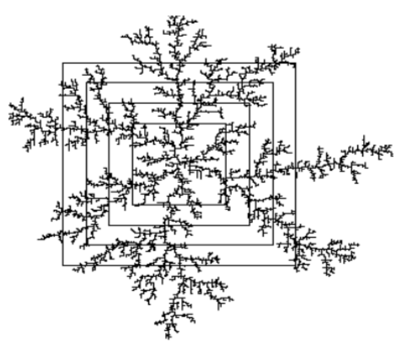
- 取一个2维的方形点阵，在点阵中央原点处放置一个粒子作为生长的种子。
- 然后从距原点足够远的圆周界处释放一 个粒子，让它作随机行走
- 该粒子走到种子的最近邻位置与种子相碰， 这时让粒子粘结到种子上不再运动；
- 当粒子走到点阵边界，这时认为粒子走了一条无用的轨迹，取消该粒子，重新生成新的粒子。
- 因此， 那些有用的粒子与种子相粘结后形成不断生长的聚集集团。

2.1 Sandbox Method

Sandbox来计算分形位数的方法，公式为

$$N(r) \sim r^D$$
$$D = \frac{\ln N}{\ln r} + C$$

N为方盒子中的像素点数，r为盒子的边长，C为其他常数，统计过程如下图所示



按照 $\sqrt{2}$幂次增长盒子的边长，统计内部点数，得到对数坐标图形，计算斜率即为分形位数D

2.3 密度-密度相关函数法

平面上分形图形的密度-密度 相关函数定义:

$$C(r) = \left\langle \sum \frac{\rho(r')\rho(r'+r)}{N} \right\rangle \sim r^{-\alpha}$$

$\rho(r')$ 是图形的密度函数，有图形象素处为 1，无 图形处为 0；N 是总象素数。C(r) 的几何意义是：原始图形和平移 r 后的图形重叠部分的象素数和全部象素数的比值，即在相距 r 处发现另一象素的概率。在实际计算中除了对 N 个不同的 r′ 求平均之外，还对不同方向、 长度相同的 r 求平均

特例: 固定 r′， 并把它取为图形的中心，即r′=0，此时

$$C(r)=\left\langle\sum\rho(0)\rho(r)\right\rangle\sim r^{-\alpha}$$

则要做的就是按照 $\sqrt{2}$幂次增长圆的半径，统计内部重叠点数，绘制出对数坐标，得到斜率 α

在C(r) 在回转半径R内积分，R 足够大时，积分值很接近于和图形总象素数 N 成正比

$$\int_0^R C(r)\mathrm{d}^{dim}r\sim N$$
$$N\sim R^{dim-\alpha}$$
$$D=dim-\alpha$$

dim是欧氏空间维数，此题中为2；D是分形维数。

3 Experiment

3.0 DLA

实验画出的图像如下

3.1 Sandbox Method

实验结果如下图所示

实验计算得到图像的斜率为

$$D_1=1.6666788360254807$$

该斜率即为分形维数。

分形维数结果在 $1.6\sim1.7$之间，与理论比较符合。

2.3 密度-密度相关函数法

实验结果如下图所示

图像斜率与分形维数是：

$$k=-\alpha=-0.35808654164728$$
$$D_2=d-\alpha=1.64191345835272$$

分形维数结果在 $1.6\sim1.7$之间，与理论比较符合。

4 Summary

本次实验利用 DLA 的生长规则模拟出了 DLA 的轨迹图形。同时用 sandbox 法和密度-密度相关函数法求出了 DLA 的维数，两个方法所求出来的维数都在1.6~1.7内和理论值较为贴近。