hw3

1 Question

在球坐标系(ρ，θ，φ)下，产生上半球面上均匀分布的随机坐标点，给出其直接抽样方法。

2 Method

设 $p(\theta,\varphi)$是球面上均匀的概率密度分布函数，**以球坐标为系**，半径r=1，那么有上

$$\int pds=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}p(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi=1$$

解出 $p(\theta,\varphi)=1/2\pi$

那么对于 (θ,φ)来说，符合的概率密度函数为

$$g(\theta,\varphi)=\frac{sin\theta}{2\pi}=\sin\theta\times\frac{1}{2\pi}=f(\theta)\times h(\varphi)$$

对 (θ,φ)进行直接抽样法抽样：

θ的累积函数 $F(\theta)$为

$$F(\theta)=\int_0^{\theta}\sin tdt=1-\cos\theta$$

故为了得到 θ的抽样值，需要先得到(0，1）上均匀分布的 ξ_1，然后根据直接抽样法

$$\theta=\arccos(1-\xi_1)$$

而 φ的分布可由（0，1）上均匀分布 ξ_2得到

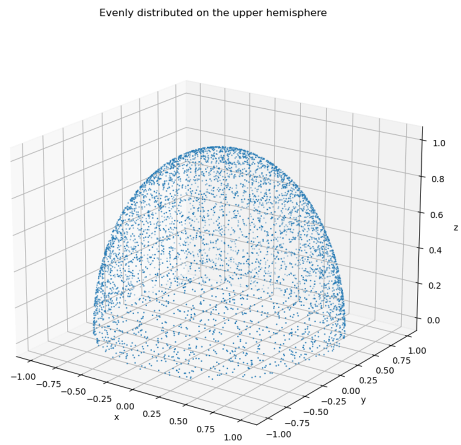
$$\varphi=2\pi\xi_2$$

3 Experiment

根据以上方法，抽样出 (θ,φ)，根据坐标公式转化

$$x=\sin\theta\cos\varphi$$
$$y=\sin\theta\sin\varphi$$
$$z=\cos\theta$$

可得绘制出上半球面的均匀分布图像



4 Summary

通过把球面上的均匀分布转换为以$f(\theta) = \sin\theta$ ($\theta \in (0, \pi)$为概率密度的 θ，以及在$(0, 2\pi)$上均匀分布的 φ 的联合分布得到了球面上均匀分布点的生成方式。最后根据直接抽样法，通过 $\theta = \arccos(1 - \xi_1)$和 $\varphi = 2\pi\xi_2$的方式，抽样得到分布。