Report5

> Rainzor

1. Question

对于球面上均匀分布的随机坐标点，给出它们在(x, y)平面上投影的几率分布函 数。并由此验证 Marsaglia 抽样方法$x = 2u\sqrt{1-r^2}, y = 2v\sqrt{1-r^2}, z = 1-r^2$ 确为球面上均匀分布的随机抽样

2. Algorithm

2.1 Marsaglia抽样方法

三维球面上分布的 Marsaglia 方法为：

1. 随机抽样一对均匀分布的随机数，$(u, v) \in [-1, 1]$
2. 计算 $r^2 = u^2 + v^2$ ，如 果 $r^2 > 1$ 则重新抽样直至 $r^2 \le 1$ ；
3. 得三维坐标抽样为：

$$x = 2u\sqrt{1-r^2}, y = 2v\sqrt{1-r^2}, z = \sqrt{1-x^2-y^2} = (1-2r^2), r^2 = u^2+v^2$$

2.2 证明

为证明抽样结果确为球面均匀分布。

首先，Marsaglia抽样方法所得关于 (u, v)的联合分布满足为:在单位圆内均匀分布

$$\int p(u,v)dudv = \int_{u^2+v^2\le 1} Cdudv = 1$$

$C = 1/\pi$，所以 (u, v)满足联合密度分布为：

$$p(u,v) = 1/\pi$$

可以得到（u，v）坐标系到（x，y）坐标系的变换关系

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= (\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})^{-1} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial v & \partial y/\partial v \end{vmatrix}^{-1} \\
&= \begin{vmatrix} 2\sqrt{-r^2+1} - 2\frac{2u^2}{\sqrt{1-r^2}} & -\frac{2uv}{\sqrt{-r^2+1}} \\ -\frac{2uv}{\sqrt{-r^2+1}} & 2\sqrt{-r^2+1} - \frac{2v^2}{\sqrt{-r^2+1}} \end{vmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{4(1-2r^2)} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}
\end{aligned}$$

所以可以得到(x, y)概率密度函数

$$p(x,y) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}p(u,v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

直接看球面上均匀分布，在球坐标系中的联合分布函数：

$$\int p(\theta,\varphi)d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} C\sin\theta d\theta d\varphi = 1$$

$C = 1/4\pi$，所以 (θ,φ)满足联合密度分布为

$$p(\theta,\varphi) = \frac{\sin\theta}{4\pi}$$

根据关系

$$x = \sin\theta\cos\varphi, y = \sin\theta\sin\varphi$$

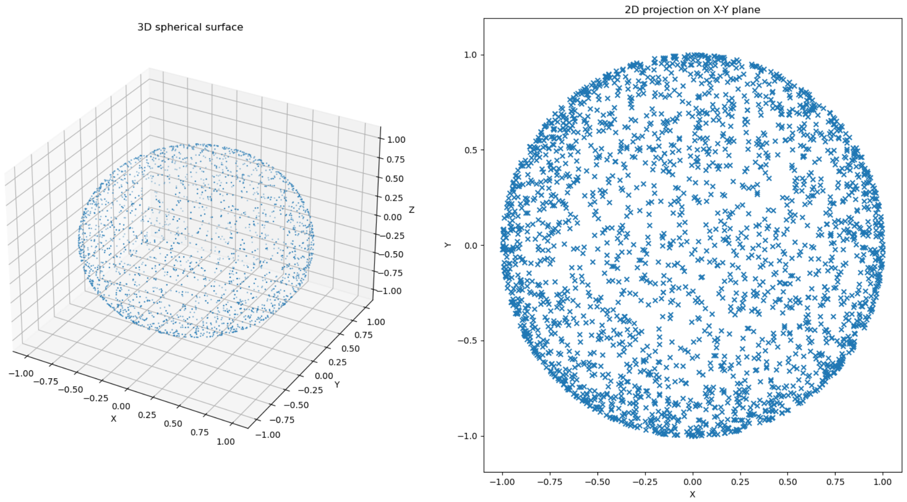
同理得到(x,y)概率密度函数

$$p(x,y) = \frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(x,y)}p(\theta,\varphi) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

从不同角度出发，得到相同的概率的密度，故 Marsaglia 抽样方法得到的确实是球面上的均匀分布。

3 Experiment

在实验中，我们利用Marsaglia方法，绘制出如下图像



左图可见得到的确实是均匀分布的球面。且可以看到，在XY平面内投影并不均匀，从而佐证了原图像是球面均匀分布。

4 Summary

本实验了解另一种在球面上采样的方法，Marsaglia抽样方法。且其计算效率高于直接的三角函数法，为后续实验打下基础