hw3

1 Question

在球坐标系 (ρ, θ, φ) 下,产生上半球面上均匀分布的随机坐标点,给出其直接抽样方法。

2 Method

设 $p(\theta,\varphi)$ 是球面上均匀的概率密度分布函数,**以球坐标为系**,半径r=1,那么有上

$$\int pds = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} p(heta,arphi) \sin heta d heta darphi = 1$$

解出 $p(\theta, \varphi) = 1/2\pi$

那么对于 (θ, φ) 来说,符合的概率密度函数为

$$g(heta,arphi) = rac{sin heta}{2\pi} = \sin heta imes rac{1}{2\pi} = f(heta) imes h(arphi)$$

对 (θ, φ) 进行直接抽样法抽样:

 θ 的累积函数 $F(\theta)$ 为

$$F(heta) = \int_0^ heta \sin t dt = 1 - \cos heta$$

故为了得到 heta的抽样值,需要先得到(0,1) 上均匀分布的 ξ_1 ,然后根据直接抽样法

$$\theta = \arccos(1 - \xi_1)$$

而 φ 的分布可由 (0, 1) 上均匀分布 ξ_2 得到

$$\varphi=2\pi\xi_2$$

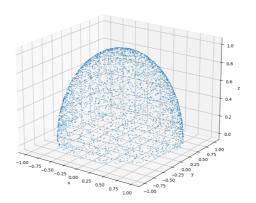
3 Experiment

根据以上方法,抽样出 (θ,φ) ,根据坐标公式转化

$$x = \sin \theta \cos \varphi$$
$$y = \sin \theta \sin \varphi$$
$$z = \cos \theta$$

可得绘制出上半球面的均匀分布图像

Evenly distributed on the upper hemisphere



4 Summary

通过把球面上的均匀分布转换为以 $f(\theta)=\sin\theta~(\theta\in(0,\pi)$ 为概率密度的 θ ,以及在 $(0,2\pi)$ 上均匀分布的 φ 的联合分布得到了球面上均匀分布点的生成方式。最后根据直接抽样法,通过 $\theta=\arccos(1-\xi_1)$ 和 $\varphi=2\pi\xi_2$ 的方式,抽样得到分布。