Hw4

> PB2002480
>
> 王润泽

1 Question

设 pdf 函数满足如下关系式

$$p'(x)=a\delta(x)+b\exp(-cx),\quad x\in[-1,1],a\neq 0$$

讨论该函数的性质并给出抽样方法

2 Algorithm

2.1 表达式

对一维随机变量，设 ξ是[0, 1]上的均匀分布，对x的分布函数 $p(x)$满足

$$p'(x)=a\delta(x)+b\exp(-cx),x\in[-1,1],a\neq 0$$
$$p(x)=\int_{-\infty}^{x}p'(t)dt$$

由于 $\delta(x)$积分后得到的阶梯函数$H(x)$，在x=0处不连续，所以对p(x)分段处理

$$p(x)=\begin{cases}\frac{b}{c}(\exp c-\exp(-cx)) & -1\leq x<0\\ a+\frac{b}{c}(\exp c-\exp(-cx)) & 0\leq x\leq 1\end{cases}$$

```
由概率密度要求：非负且积分归一。且因为p(x)分段单调，那么分别有
```

1. $$p(-1)=0\geq 0$$
2. $$p(0-)=b/c*(\exp c-1)\geq 0$$
3. $$p(0+)=a+b/c*(\exp c-1)\geq 0$$
4. $$p(1)=a+b/c*(\exp c-\exp(-c))\geq 0$$
5. $$P(x)=\int vp(x)dx=(\int_{-1}^{0}+\int_{0}^{1})p(x)dx=a+\frac{2b(c\exp c-\sinh c)}{c^2}=1$$

由上面的条件可得，一个关于a,b,c的**充分条件**

$$a=1-\frac{2b}{c}e^c+\frac{2b}{c^2}\sinh c$$
$$b>0$$
$$c>0$$
$$1-\frac{b}{c}(1+\exp c)+\frac{2b}{c^2}\sinh c\geq 0$$
$$1-\frac{2b}{c}(\cosh c)+\frac{2b}{c^2}\sinh c\geq 0$$

可以取

$$b=0.5, c=0.5, a=1-\frac{2b\exp\left(-c\right)}{c}\approx -0.213061$$

2.2舍选法

考虑到p(x)的不连续性，所以无法写出累积函数的解析表达式，**采取舍选法：**

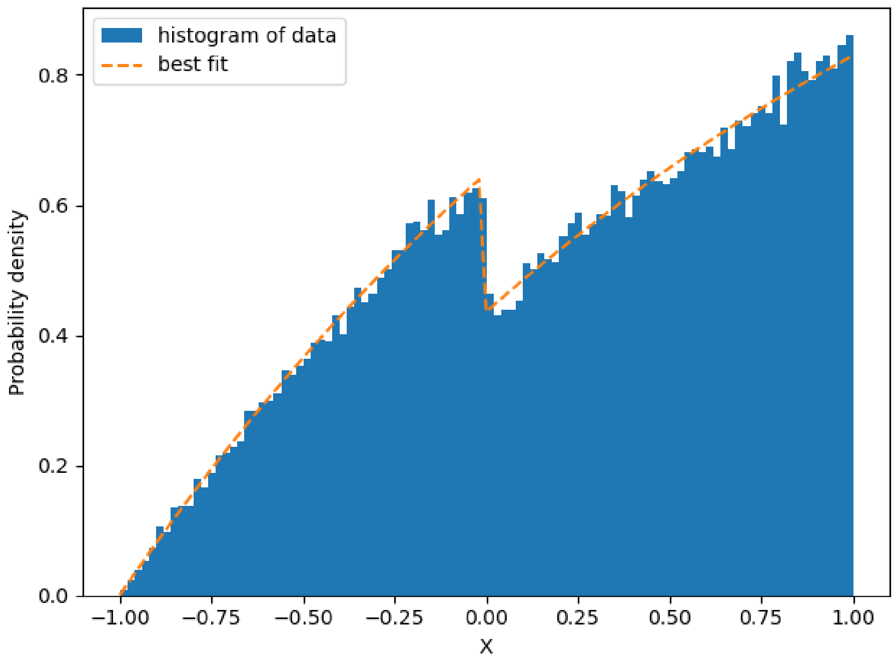
1. 设p(x)在$[-1，0)$上界$p(0-)<M_1=0.65$；$[0，1]$上界$p(1)<M_2=0.85$
2. 随机选择两个在[0，1]之间均匀分布的随机抽样 (ξ_1,ξ_2)，
3. 注意由于 M_1,M_2不同，在[-1, 0]与（0, 1]区间内随机数比例不同，满足 $M_1:M_2$
4. 判断条件：

$$\begin{aligned} M_1\xi_2\leq p(-1+2\xi_1) \qquad & -1+2\xi_1\in[-1,0) \\ M_2\xi_2\leq p(-1+2\xi_1) \qquad & -1+2\xi_1\in[0,1] \end{aligned}$$

   是否成立
5. 否，则舍去；是，则取 $x=-1+2\xi_1$

3 Experiment

在实验中定义 `pdf` 作为定义的函数，抽样1e5个数据点，且在不同区间按照一定比例分布，于是画出直方图与概率分布函数：



由图可见，这样的参数选取，通过舍选抽样法得到的抽样频数分布和密度分布函数性质相近，可见所得抽样确实服从 pdf 函数所代表的分布。

Summary

本实验主要对概率密度函数性质进行熟悉，同时掌握了对于复杂分布的抽样方法，即舍选法。并且利用分段的表示，提高了抽样效率。