Report16

> 王润泽 PB20020480

1 Question

以 $x_{n+1} = \lambda \sin(\pi x_n)$ 为迭代方程进行迭代

(1). 画出系统状态随参数λ的变化图，要求在图中体现出定值状态、倍周期分叉和混沌状态;

(2). 列出各个倍周期分叉处的 λ 值，求相应的 Feigenbaum 常数。

2 Analysis

主要使用迭代法进行计算，对于 $\lambda = 0.8$的系统，大致呈现如图1所示的类型，与一维 $Logistic$方法类似

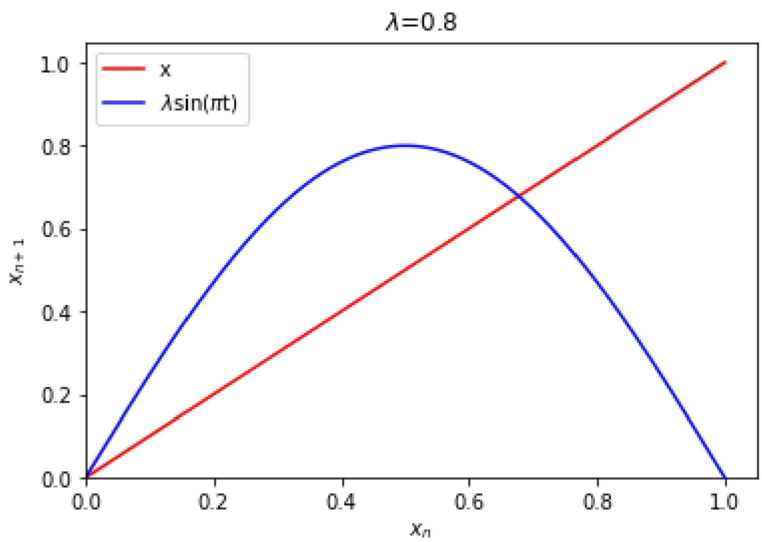

图1：迭代方程形式 对于有固定周期的态，结果与初始值无关，且在有限步迭代后必然收敛。然而对于混沌的体系，周期无穷，那么最终绘图的结果与初值也无关，不妨取初值为 $x_0=0.5$

设$\lambda \in (0,1)$，步长为 $\delta\lambda = 10^{-3}$，不断增大 λ 的值进行如下迭代:

初始值 $x_0 = 0.5$,$k = 1$，$\lambda_0 = 0$，$M = 5000$，$N = 1000$

1. 第k个λ取值为： $\lambda_k = \delta\lambda + \lambda_{k-1}$
2. 根据公式 $x_{n+1} = \lambda \sin(\pi x_n)$对 x_n进行M步迭代，再舍去，热化掉不稳地的点
3. 创建变量 `data=[]` ，再进行N步迭代，将新产生的点 x 加入到 `data` 中。

   但考虑到由于计算机有精度限制，所以在迭代时会有 $|x_i - x_j|$极小的情况，故为了避免这种情况要对 $|x_i - x_j| < 10^{-5}$的点舍去
4. 将当前的 λ_k与系统状态存储在 `lambs` 和 `data_list` 中

3 Experiment

3.1 状态变换图

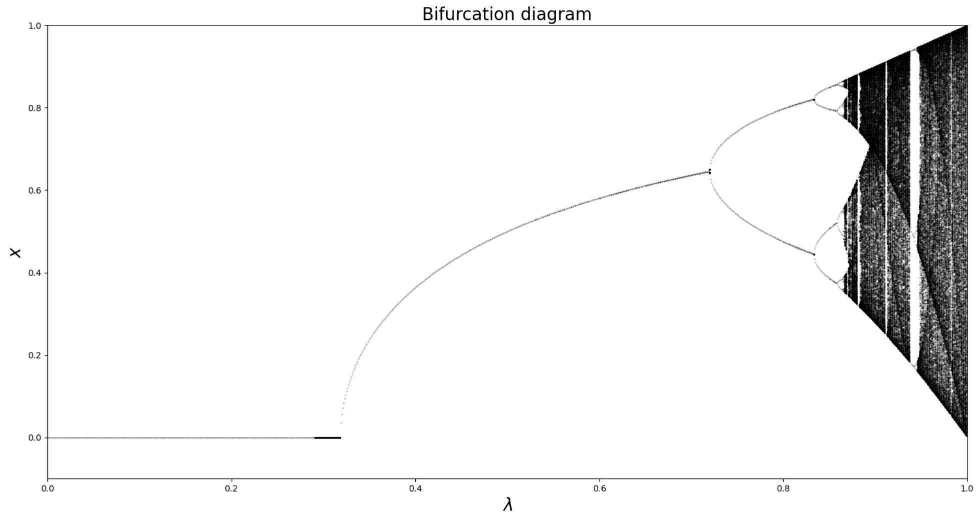

图2：倍周期分岔到混沌示意图

图 2 是将 λ 从 0 变化到 1 所生成出来的一个图像。当 λ <0.3 时，迭代序列稳定地收敛到 0。当 λ 在 0.3 附近时，短暂地出现了一次倍周期分岔。当0.33 < λ < 0.7时，迭代序列收敛到单一值。当 λ > 0.7 时，迭代序列分别展现出倍周期分岔和混沌的形态。

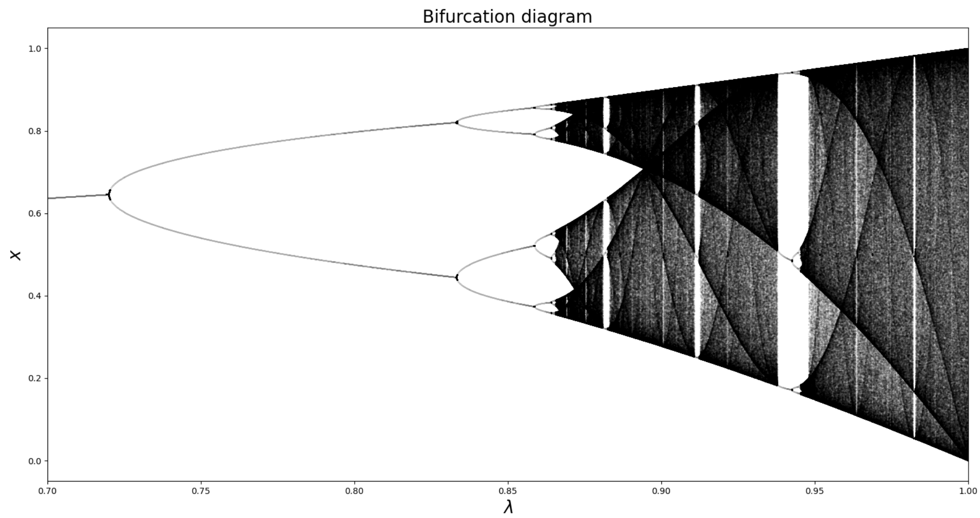

图3：局部放大图

将图 2 在0.7 < λ< 1的位置放大，得到图 3，从图中可以清晰地看到有 T=2、 T=4、T=8、T=16 的分岔点。

3.2 分叉处的 λ 值与 Feigenbaum 常数

3.2.1 横轴方向倍周期分岔中的标度行为

λ_m 按以下的几何级数（幂函数）收敛到 λ_∞

$$\lambda_\infty - \lambda_m = A\delta^{-m}(m \gg 1)$$

A 是依赖于迭代函数的常数，而 δ 是不依赖于 迭代函数的普适常数

为了找到分叉点，可以调整 λ的区间和精度，放大局部图像，使得可求出更加准确的分叉处λ值。

此时取 $\lambda \in [7.15, 7.25] \cup [0.83, 0.835] \cup [0.85, 0.87], \delta\lambda = 10^{-6}$，程序可输出对应周期数与 λ 值，数据存储在 `Feigenbaum_size.csv` 文件中，在分叉处，或许是因为计算精度有限，周期会出现波动，故要在周期稳定时取值较为合适，观察表格中的数据与公式得到下表

$$\text{Feigenbaum } \delta = \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_{m+1} - \lambda_m} = \frac{\Delta\lambda_m}{\Delta\lambda_{m+1}}$$

m	T	λ_m	$\Delta\lambda_m$	δ
1	$1 \to 2$	0.720043		
2	$2 \to 4$	0.833299	0.113256	
3	$4 \to 8$	0.858621	0.025322	4.472632
4	$8 \to 16$	0.864089	0.005468	4.630944
5	$16 \to 32$	0.865261	0.001172	4.665529
6	$32 \to 64$	0.865514	0.000253	4.632411

表 1：分岔横向距离和 Feigenbaum 常数计算

即前后分岔间距的比值趋向于一个常数：4.669201609

3.2.2 纵轴方向倍周期分岔的标度行为

如下图所示，取 $x = 0.5$,其纵向标度的比值趋于一个常数，即

$$\frac{d_m}{d_{m+1}} \to \alpha = 2.502907875095892822283902873 \quad (m \to \infty)$$

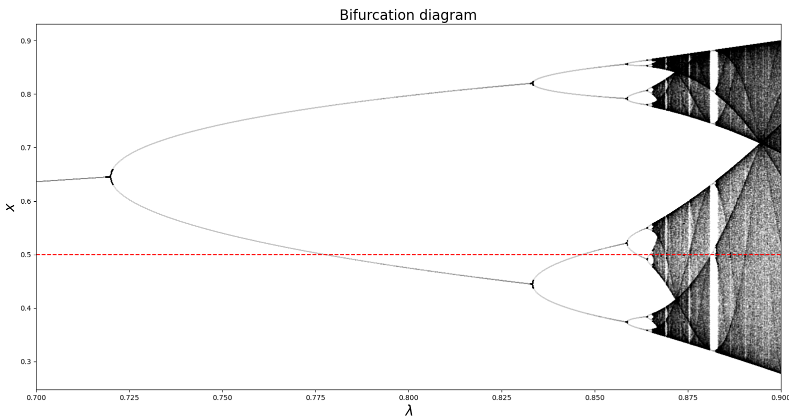

图4：纵向距离交点示意图

对于此题如果取在 $x = 0.5$处的值，计算分岔的纵向间距比值，可以看到Feigenbaum α是趋于理论值的。

而计算机精度有限，故实验中选择了 $0.4995 < x < 0.5005$之间的值输出。同时要注意相同周期数，不同分叉之间纵向距离不一定相同，所以要取在 $x = 0.5$分叉处的纵向距离才能得到正确的结果。

数据保存在 `Feigenbaum_alpha.csv` 中，如下表所示

m	T	d_m	α
1	2	0.277659	
2	4	0.047581	5.83550
3	8	0.019911	2.52277
4	16	0.007477	2.66296
5	32	0.003082	2.42602

表 2：分岔纵向距离和 Feigenbaum 常数计算

结果已经比较接近理论值：2.502907875

3.3 更大范围内变化

如果将区间范围调整到 $\lambda \in [-2, 2]$范围，可以看到迭代序列出现了负值，这和迭代函数的函数取值是吻合的，同时呈现处一定的对称性

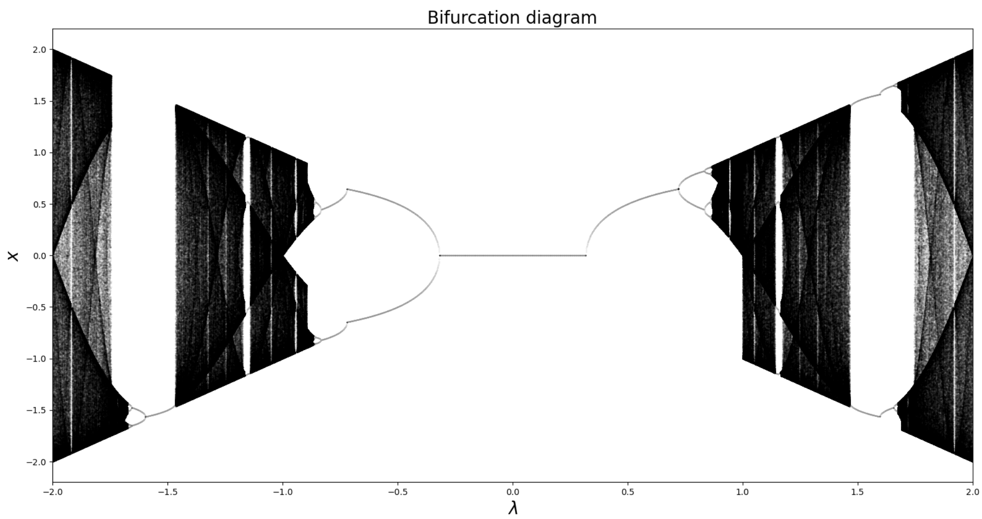

图5：更大范围内状态的变化

4 Summary

利用迭代序列 $x_{n+1} = \lambda \sin(\pi x_n)$ 进行迭代，观察到了迭代序列随 λ 会从定值变化到周期再变化到混沌。而且验证了 Feigenbaum 常数是一个和迭代序列无关的普适常数。