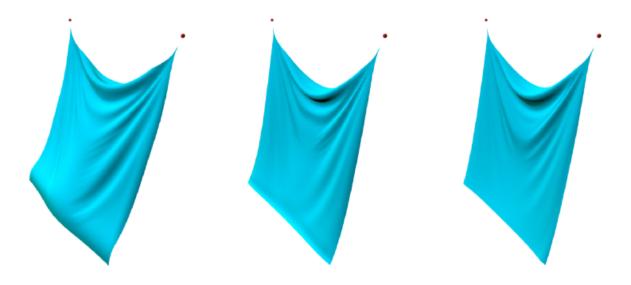
1. Background

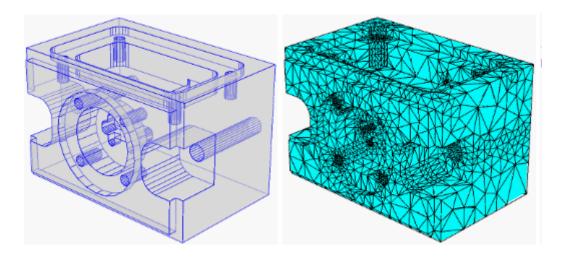
弹簧质点模型

- 一个弹簧质点系统就是由节点及节点之间的边所构成的图(Graph),也就是网格。网格图的每个顶点 看为一个质点,每条边看为一根弹簧。
- 网格可以是二维网格 (Triangular meshes),用于模拟布料、纸张等物体 (sheet objects),如下图;也可以是三维体网格 (Tetrahedral meshes),用于模拟体物体 (solid objects),如后面段落介绍。



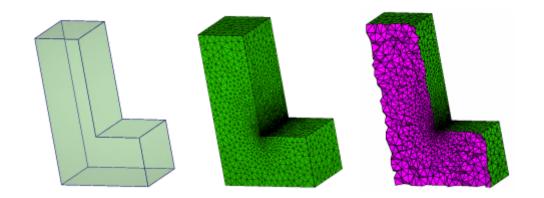
3D 四面体网格

• 对实体物体 (solid objects) 的模拟通常将实体剖分为四面体单元(当然也可以是其他形式单元的剖分,比如六面体单元),其实质就是 3D 空间的 graph:



3D 网格剖分生成

• 对于一个封闭的 3D 模型(通常由表面的顶点来表达,比如 obj, stl 文件等),如需要将其看成实体,需要对进行三角剖分从而得到四面体网格:



2. Method

问题:由前 n 帧信息,求得第 n+1 帧信息(位移 $m{x}$,速度 $m{v}$)(设时间步长为 h)?

欧拉隐式方法

$$egin{aligned} oldsymbol{x}_{n+1} &= oldsymbol{x}_n + h oldsymbol{v}_{n+1}, \ oldsymbol{v}_{n+1} &= oldsymbol{v}_n + h oldsymbol{M}^{-1} (oldsymbol{f}_{int}(t_{n+1}) + oldsymbol{f}_{ext}), \end{aligned}$$

记

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_n + h\boldsymbol{v}_n + h^2\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{f}_{ext}, \tag{*}$$

则原问题转化为求解关于x的方程:

$$oldsymbol{g}(oldsymbol{x}) = oldsymbol{M}(oldsymbol{x} - oldsymbol{y}) - h^2 oldsymbol{f}_{int}(oldsymbol{x}) = 0,$$

利用牛顿法求解该方程,主要迭代步骤:

$$m{x}^{(k+1)} = m{x}^{(k)} - (
abla m{g}(m{x}^{(k)}))^{-1} m{g}(m{x}^{(k)}).$$

迭代初值可选为 $oldsymbol{x}^{(0)}=y$.

迭代得到位移x后更新速度 $v_{n+1}=(x_{n+1}-x_n)/h$

上式中涉及关于弹力的求导,对于单个弹簧(端点为 $m{x}_1$, $m{x}_2$),劲度系数为 $m{k}$,原长为 $m{l}$,有:4 $m{x}_1$ 所受弹力:

$$m{f}_1(m{x}_1,m{x}_2) = k(||m{x}_1-m{x}_2||-l)rac{m{x}_2-m{x}_1}{||m{x}_1-m{x}_2||}$$

 x_2 所受弹力:

$$m{f}_2(m{x}_1,m{x}_2) = -m{f}_1(m{x}_1,m{x}_2),$$

对

$$oldsymbol{h}(oldsymbol{x}) = k(||oldsymbol{x}||-l)rac{-oldsymbol{x}}{||oldsymbol{x}||},$$

求导有

$$\frac{d\boldsymbol{h}}{d\boldsymbol{x}} = k(\frac{l}{||\boldsymbol{x}||} - 1)\boldsymbol{I} - kl||\boldsymbol{x}||^{-3}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T.$$

带入弹力公式得:

$$rac{\partial oldsymbol{f}_1}{\partial oldsymbol{x}_1} = rac{\partial oldsymbol{h}(oldsymbol{x}_1 - oldsymbol{x}_2)}{\partial oldsymbol{x}_1} = k(rac{l}{||oldsymbol{r}||} - 1)oldsymbol{I} - kl||oldsymbol{r}||^{-3}oldsymbol{r}^T$$

$$rac{\partial m{f}_1}{\partial m{x}_2} = -rac{\partial m{f}_1}{\partial m{x}_1}, rac{\partial m{f}_2}{\partial m{x}_1} = -rac{\partial m{f}_1}{\partial m{x}_1}, rac{\partial m{f}_2}{\partial m{x}_2} = rac{\partial m{f}_1}{\partial m{x}_1},$$

其中 $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$,对所有弹簧求导并组装即可求得力的导数(组装为稀疏矩阵,矩阵为对称阵)。

加速方法 (projective dynamic)

【参考文献】 Tiantian Liu, et al. "Fast simulation of mass-spring systems." *Acm Transactions on Graphics (Pro. Siggraph Asia*) 32.6(2013):1-7.

在上述欧拉方法中,对于内力(为保守力)有:

$$f_{int}(x) = -\nabla E(x)$$

故对方程(*)的求解可以转为为一个最小化问题:

$$oldsymbol{x}_{n+1} = \min_{x} rac{1}{2} (oldsymbol{x} - oldsymbol{y})^T oldsymbol{M} (oldsymbol{x} - oldsymbol{y}) + h^2 E(oldsymbol{x})$$

同时对于弹簧的弹性势能可以描述为一个最小化问题:

$$rac{1}{2}k(||m{p}_1-m{p}_2||-r)^2 = rac{1}{2}k\min_{||m{d}||=r}||m{p}_1-m{p}_2-m{d}||^2,$$

从而原问题转化为:

$$oldsymbol{x}_{n+1} = \min_{oldsymbol{x}, oldsymbol{d} \in oldsymbol{U}} rac{1}{2} oldsymbol{x}^T (oldsymbol{M} + h^2 oldsymbol{L}) oldsymbol{x} - h^2 oldsymbol{x}^T oldsymbol{J} oldsymbol{d} - oldsymbol{x}^T oldsymbol{M} oldsymbol{y}$$

其中

$$U = \{d = (d_1, d_2, \dots, d_s), d_s \in R^3, ||d_i|| = l_i\}(l_i$$
为第 i 个弹簧原长),

The matrices $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{3m \times 3m}$, $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{3m \times 3s}$ are defined as follows:

$$\mathbf{L} = \left(\sum_{i=1}^{s} k_i \mathbf{A}_i \mathbf{A}_i^{\mathsf{T}}\right) \otimes \mathbf{I}_3, \ \mathbf{J} = \left(\sum_{i=1}^{s} k_i \mathbf{A}_i \mathbf{S}_i^{\mathsf{T}}\right) \otimes \mathbf{I}_3$$

where $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^m$ is the incidence vector of *i*-th spring, i.e., $A_{i,i_1} = 1, A_{i,i_2} = -1$, and zero otherwise. Similarly, $\mathbf{S}_i \in \mathbb{R}^s$ is the *i*-th spring indicator, i.e., $S_{i,j} = \delta_{i,j}$. The matrix $\mathbf{I}_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ is the identity matrix and \otimes denotes Kronecker product. Note that the matrix \mathbf{L} is nothing but a stiffness-weighted Laplacian of the mass-spring system graph.

从而可以对x, d 迭代优化求得该优化问题的解:

$$m{x}$$
优化:求解方程 $(m{M}+h^2m{L})m{x}=h^2m{J}m{d}+m{M}m{y}$ (这里可以预分解矩阵) $m{d}$ 优化: $m{d}_i=l_irac{m{p}_{i_1}-m{p}_{i_2}}{||m{p}_{i_1}-m{p}_{i_2}||}$ (这里 l_i 为第 i 个弹簧原长, $m{p}_{i_1}$, $m{p}_{i_2}$ 为其两端点),

重复迭代过程直到收敛。

3.边界条件和约束

通常模拟过程中物体会有各种约束或额外条件,例如物体被固定了几个点,对某些点施W加外力(如重力、 浮力、风力等)。

外力条件

- 物体受到的外力可以直接加在模拟的外力项中, 其导数为 0
- 对于重力,可以将其加在外力中,另一方面,重力为保守力,也可以将重力势能加在能量项中与弹性势能进行合并

位移约束

这里主要考虑固定部分质点的情形,有两种方法处理:

- 第一种方法是在每一帧中求出该点的内力,再施加与该内力大小相同,方向相反的外力,但与上一种情形不同的是,若该内力对位移导数不为 0,则该外力对位移导数也不为 0,需要将其导数考虑进去;
- 第二种方法为仅考虑真正的自由坐标,降低问题的维数,具体如下:

将所有n个质点的坐标列为列向量 $x\in R^{3n}$,将所有 m 个自由质点坐标(无约束坐标)列为列向量 $x_f\in R^{3m}$,则两者关系:

$$oldsymbol{x}_f = oldsymbol{K} oldsymbol{x}$$

$$oldsymbol{x} = oldsymbol{K}^T oldsymbol{x}_f + oldsymbol{b},$$

其中 $K\in R^{3m\times 3n}$ 为单位阵删去约束坐标序号对应行所得的稀疏矩阵,b 为与约束位移有关的向量,计算 为 $b=x-K^TKx$,若约束为固定质点则 b 为常量。由此我们将原本的关于 x 的优化问题转化为对 x_f 的优化问题:欧拉隐式方法中求解方程为:

$$egin{aligned} oldsymbol{g}_1(oldsymbol{x}_f) &= K(oldsymbol{M}(oldsymbol{x} - oldsymbol{y}) - h^2 oldsymbol{f}_{int}(oldsymbol{x})) = 0 \ \end{aligned}$$
梯度: $abla_x oldsymbol{g}_1(oldsymbol{x}_f) &= K
abla_x oldsymbol{g}(oldsymbol{x}) K^T \end{aligned}$

加速方法中优化问题中x 迭代步骤转化为求解关于 x_f 的方程:

$$K(\boldsymbol{M} + h^2 \boldsymbol{L}) K^T \boldsymbol{x}_f = K(h^2 \boldsymbol{J} \boldsymbol{d} + \boldsymbol{M} \boldsymbol{y} - (\boldsymbol{M} + h^2 \boldsymbol{L}) \boldsymbol{b})$$

4. Summary

• 实现弹簧质点模型的欧拉隐式方法及加速方法

5. Reference