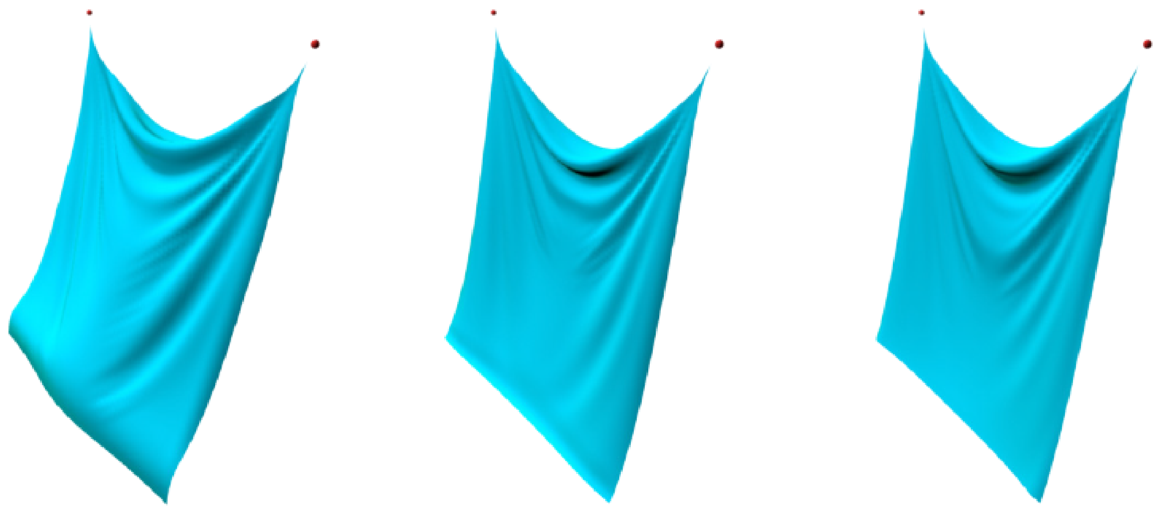
1. Background

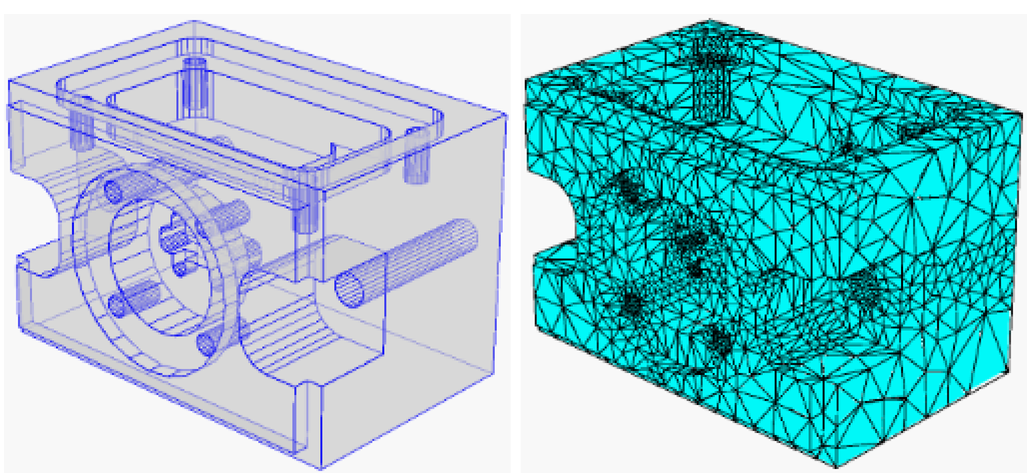
弹簧质点模型

- 一个弹簧质点系统就是由节点及节点之间的边所构成的图（Graph），也就是网格。网格图的每个顶点看为一个质点，每条边看为一根弹簧。
- 网格可以是二维网格 (Triangular meshes)，用于模拟布料、纸张等物体 (sheet objects)，如下图；也可以是三维体网格 (Tetrahedral meshes)，用于模拟体物体 (solid objects)，如后面段落介绍。



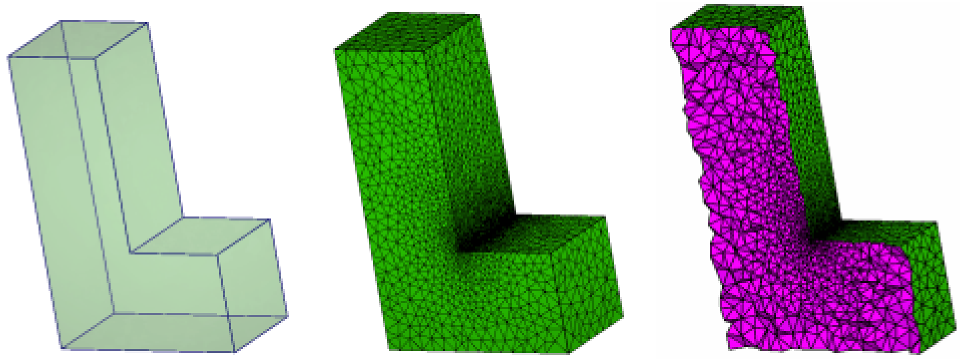
3D 四面体网格

- 对实体物体 (solid objects) 的模拟通常将实体剖分为四面体单元（当然也可以是其他形式单元的剖分，比如六面体单元），其实质就是 3D 空间的 graph：



3D 网格剖分生成

- 对于一个封闭的 3D 模型（通常由表面的顶点来表达，比如 obj，stl 文件等），如需要将其看成实体，需要对进行三角剖分从而得到四面体网格：



2. Method

问题：由前 n 帧信息，求得第 $n+1$ 帧信息（位移 $\boldsymbol{x}$，速度 $\boldsymbol{v}$）（设时间步长为 h）？

欧拉隐式方法

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n + h\boldsymbol{v}_{n+1},$$
$$\boldsymbol{v}_{n+1} = \boldsymbol{v}_n + h\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{f}_{int}(t_{n+1}) + \boldsymbol{f}_{ext}),$$

记

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_n + h\boldsymbol{v}_n + h^2\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{f}_{ext}, \tag{*}$$

则原问题转化为求解关于$\boldsymbol{x}$的方程：

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - h^2\boldsymbol{f}_{int}(\boldsymbol{x}) = 0,$$

利用牛顿法求解该方程，主要迭代步骤：

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - (\nabla\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{(k)}))^{-1}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{(k)}).$$

迭代初值可选为$\boldsymbol{x}^{(0)} = y$.

迭代得到位移x后更新速度$v_{n+1} = (x_{n+1} - x_n)/h$

上式中涉及关于弹力的求导，对于单个弹簧（端点为$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$），劲度系数为k，原长为l，有：4

$\boldsymbol{x}_1$所受弹力：

$$\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = k(||\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|| - l)\frac{\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1}{||\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2||}$$

$\boldsymbol{x}_2$ 所受弹力：

$$\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = -\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2),$$

对

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = k(||\boldsymbol{x}|| - l)\frac{-\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||},$$

求导有

$$\frac{d\boldsymbol{h}}{d\boldsymbol{x}} = k(\frac{l}{||\boldsymbol{x}||} - 1)\boldsymbol{I} - kl||\boldsymbol{x}||^{-3}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T.$$

带入弹力公式得:

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \boldsymbol{x}_1} = \frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)}{\partial \boldsymbol{x}_1} = k(\frac{l}{||\boldsymbol{r}||} - 1)\boldsymbol{I} - kl||\boldsymbol{r}||^{-3}\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^T$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \boldsymbol{x}_2} = -\frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \boldsymbol{x}_1}, \frac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial \boldsymbol{x}_1} = -\frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \boldsymbol{x}_1}, \frac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial \boldsymbol{x}_2} = \frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \boldsymbol{x}_1},$$

其中 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ ，对所有弹簧求导并组装即可求得力的导数（组装为稀疏矩阵，矩阵为对称阵）。

加速方法（projective dynamic）

> 【参考文献】 Tiantian Liu, et al. "Fast simulation of mass-spring systems." *Acm Transactions on Graphics (Pro. Siggraph Asia)* 32.6(2013):1-7.

在上述欧拉方法中，对于内力（为保守力）有:

$$\boldsymbol{f}_{int}(x) = -\nabla E(\boldsymbol{x})$$

故对方程$(*)$的求解可以转为为一个最小化问题:

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \min_x \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})^T \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + h^2 E(\boldsymbol{x})$$

同时对于弹簧的弹性势能可以描述为一个最小化问题:

$$\frac{1}{2}k(||\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2|| - r)^2 = \frac{1}{2}k \min_{||\boldsymbol{d}||=r} ||\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{d}||^2,$$

从而原问题转化为:

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \min_{x, \boldsymbol{d} \in \boldsymbol{U}} \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{M} + h^2\boldsymbol{L})\boldsymbol{x} - h^2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{J}\boldsymbol{d} - \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{y}$$

其中

$$\boldsymbol{U} = \{\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \ldots, \boldsymbol{d}_s), \boldsymbol{d}_s \in R^3, ||\boldsymbol{d}_i|| = l_i\}(l_i\text{为第}\boldsymbol{i}\text{个弹簧原长}),$$

The matrices $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{3m\times 3m}, \mathbf{J} \in \mathbb{R}^{3m\times 3s}$ are defined as follows:

$$\mathbf{L} = \left(\sum_{i=1}^{s} k_i \mathbf{A}_i \mathbf{A}_i^{\mathsf{T}}\right) \otimes \mathbf{I}_3, \ \mathbf{J} = \left(\sum_{i=1}^{s} k_i \mathbf{A}_i \mathbf{S}_i^{\mathsf{T}}\right) \otimes \mathbf{I}_3$$

where $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^m$ is the incidence vector of i-th spring, i.e., $A_{i,i_1} = 1, A_{i,i_2} = -1$, and zero otherwise. Similarly, $\mathbf{S}_i \in \mathbb{R}^s$ is the i-th spring indicator, i.e., $S_{i,j} = \delta_{i,j}$. The matrix $\mathbf{I}_3 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ is the identity matrix and $\otimes$ denotes Kronecker product. Note that the matrix $\mathbf{L}$ is nothing but a stiffness-weighted Laplacian of the mass-spring system graph.

从而可以对 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{d}$ 迭代优化求得该优化问题的解：

$$\boldsymbol{x}\text{优化：求解方程}(\boldsymbol{M} + h^2\boldsymbol{L})\boldsymbol{x} = h^2\boldsymbol{J}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{y}\text{（这里可以预分解矩阵）}$$

$$\boldsymbol{d}\text{优化：}\boldsymbol{d}_i = l_i\frac{\boldsymbol{p}_{i_1} - \boldsymbol{p}_{i_2}}{||\boldsymbol{p}_{i_1} - \boldsymbol{p}_{i_2}||}\text{（这里}l_i\text{为第}\boldsymbol{i}\text{个弹簧原长，}\boldsymbol{p}_{i_1}\text{，}\boldsymbol{p}_{i_2}\text{为其两端点），}$$

重复迭代过程直到收敛。

3.边界条件和约束

通常模拟过程中物体会有各种约束或额外条件，例如物体被固定了几个点，对某些点施W加外力（如重力、浮力、风力等）。

外力条件

- 物体受到的外力可以直接加在模拟的外力项中，其导数为 0
- 对于重力，可以将其加在外力中，另一方面，重力为保守力，也可以将重力势能加在能量项中与弹性势能进行合并

位移约束

这里主要考虑固定部分质点的情形，有两种方法处理：

- 第一种方法是在每一帧中求出该点的内力，再施加与该内力大小相同，方向相反的外力，但与上一种情形不同的是，若该内力对位移导数不为 0，则该外力对位移导数也不为 0，需要将其导数考虑进去；
- 第二种方法为仅考虑真正的自由坐标，降低问题的维数，具体如下：

将所有n个质点的坐标列为列向量 $x \in R^{3n}$，将所有 m 个自由质点坐标（无约束坐标）列为列向量 $x_f \in R^{3m}$,则两者关系：

$$\boldsymbol{x}_f = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{K}^T \boldsymbol{x}_f + \boldsymbol{b},$$

其中 $K \in R^{3m\times 3n}$ 为单位阵删去约束坐标序号对应行所得的稀疏矩阵，b 为与约束位移有关的向量，计算为 $b = x - K^T K x$, 若约束为固定质点则 b 为常量。由此我们将原本的关于 x 的优化问题转化为对 x_f 的优化问题：欧拉隐式方法中求解方程为：

$$\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_f) = K(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - h^2 \boldsymbol{f}_{int}(\boldsymbol{x})) = 0$$

$$\text{梯度：} \nabla_{x_f} \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_f) = K \nabla_x \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) K^T$$

加速方法中优化问题中 x 迭代步骤转化为求解关于 x_f 的方程：

$$K(\boldsymbol{M} + h^2 \boldsymbol{L}) K^T \boldsymbol{x}_f = K(h^2 \boldsymbol{J}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{M} + h^2 \boldsymbol{L})\boldsymbol{b})$$

4. Summary

- 实现弹簧质点模型的欧拉隐式方法及加速方法

5. Reference