FEM Code Report 1

SA24229016 王润泽

2024 年 9 月 13 日

1 Introduction

编写程序求解以下两点边值问题：

$$\begin{aligned} &-u'' = f, \quad 0 < x < 1, \\ &u(0) = u(1) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

其中取 $f(x) = -(2\cos x - (x-1)\sin x)$，已知其解析解为 $u(x) = (x-1)\sin x$。

2 Method

给定双线性形式 $a(u, v)$ 和内积 (f, g)，定义如下：

$$a(u, v) = \int_0^1 u'v'\,dx, \tag{2}$$

$$(f, g) = \int_0^1 f \cdot g\,dx. \tag{3}$$

由此，问题 (1) 的变分形式为：寻找 $u \in \mathcal{V} = \{v \in C[0, 1], v(0) = v(1) = 0\}$，使得对所有 $v \in \mathcal{V}$，均有：

$$a(u, v) = (f, v). \tag{4}$$

实验中采用等距网格划分，节点数为 $N + 1$，在每个节点处的函数值记为 u_i，网格步长为 $h = 1/N$。选取基函数 φ_i，并通过这些基函数所张成的有限维线性空间进行求解。此时得到原问题的离散形式解为：$u_h = \sum_{i=1}^N u_i\varphi_i$，其中 u_i 为待求解的系数, 而 $v_h = \sum_{i=1}^N v_i\varphi_i$。

基函数定义如下：

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i), \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases} \tag{5}$$

对于公式 (2)离散化得到：

$$a(\varphi_i,\varphi_j)=\begin{cases}-\dfrac{1}{h}, & |i-j|=1\\ \dfrac{2}{h}, & i=j\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \tag{6}$$

因此，刚度矩阵为：

$$A=\frac{1}{h}\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\end{bmatrix} \tag{7}$$

根据公式 (3)，得到对各个基函数与 f 的内积，即荷载向量各项为：

$$f_i=(f,\varphi_i)=\int_0^1 f\varphi_i\,dx=4(hj-1)\sin^2(h/2)sin(hj)/h-2\sin(h)\cos(hj) \tag{8}$$

以上，得到变分问题的离散形式为，对任意的 $V=(v_1,v_2,\cdots,v_N)^T$，有：

$$V^TAU=V^TF \tag{9}$$

进一步，只要求解出 $AU=F$ 即可得到 U，即为问题 (1) 的数值解，其中：

$$\begin{aligned}U&=(u_1,u_2,\cdots,u_N)^T,\\ F&=(f_1,f_2,\cdots,f_N)^T.\end{aligned} \tag{10}$$

3 Results

3.1 数值拟合效果

3.2 误差分析

已知其解析解为：

$$u(x)=(x-1)\sin x. \tag{11}$$

完成数值求解后，使用 L^2 范数和 H^1 范数计算误差，并对结果进行讨论。L^2 范数的定义为：

$$\|e\|_{L^2}=\left(\int_0^1(u(x)-u_h(x))^2\,dx\right)^{1/2}, \tag{12}$$

H^1 范数的定义为：

$$\|e\|_{H^1}=\left(\int_0^1\left((u(x)-u_h(x))^2+(u'(x)-u_h'(x))^2\right)dx\right)^{1/2}. \tag{13}$$

4 Discussion

A Computer Code