FEM 第二次书面作业

杨哲睿 SA23001071

2023 年 9 月 24 日

1 习题 1

证明如下命题：假设 f 充分光滑，那么

$$(f, \phi_i) = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})(f(x_i) + O(h)) \tag{1}$$

其中 $h = \max h_i$

证明：因为 f 充分光滑，所以存在在 x_i 处的 Taylor 展开式如下：

$$f(x_i + s) = f(x_i) + f'(x_i)s + O(s^2) = f(x_i) + O(s) \tag{2}$$

因此：

$$\begin{aligned}
(f, \phi_i) &= \int_0^1 f(x)\phi_i(s)\mathrm{d}s \\
&= \int_{-h_i}^{h_{i+1}} f(x_i + s)\phi(x_i + s)\mathrm{d}s \\
&= \int_{-h_i}^{h_{i+1}} f(x_i)\phi(x_i + s) + \phi_i(x_i + s)O(h)\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{3}$$

因为 $h = \max_i h_i$，所以积分式中 $|s| < h$：

$$\begin{aligned}
(f, \phi_i) &= \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})(f(x_i) + 2O(h)) \\
&= \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})(f(x_i) + O(h))
\end{aligned} \tag{4}$$

□

2 习题 2

设 $h=\max_{1\le i\le n}(x_i-x_{i-1})$，证明

$$\|u-u_I\|\le Ch^2\|u''\| \tag{5}$$

提示：利用 $w(0)=0$ 说明：

$$\int_0^1 w(x)^2\mathrm{d}x\le\bar{c}\int_0^1 w'(x)^2\mathrm{d}x \tag{6}$$

以及在 $w(0)=w(1)=0$ 的前提下，寻找尽量小的 $\bar{c}$。

证明：

首先考虑提示的内容，先考虑 $w(0)=0$ 的情况：

$$\begin{aligned} w(t)&=\int_0^t w'(x)\mathrm{d}x\\ &=\int_0^t 1\cdot w'(x)\mathrm{d}x\\ \text{(By Cauchy Inequality)}&\le\left(\int_0^t 1^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_0^t w'(x)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{7}$$

因此

$$w(t)^2\le t\int_0^t w'(x)^2\mathrm{d}x \tag{8}$$

因此：

$$\begin{aligned}\int_0^1 w(x)^2\mathrm{d}x&\le\int_0^1\left(t\int_0^t w'(x)^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\\ &\le\|t\|_1\|\int_0^t w'(x)^2\mathrm{d}x\|_\infty\\ &=\frac{1}{2}\int_0^1 w'(x)^2\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{9}$$

那么，在 $w(0)=0$ 的情况下，该不等式成立，且 $\bar{c}=\frac{1}{2}$

$w(0)=w(1)=0$ 的情况，类似的有：

$$\begin{aligned} w(t)&=\int_1^t w'(x)\mathrm{d}x\\ &\le\left(\int_t^1 1^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_t^1 w'(x)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{10}$$

因此

$$w(t)^2 \le (1-t)\int_t^1 w'(x)^2\mathrm{d}x \tag{11}$$

那么:

$$\int_t^1 w^2\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}(1-t)^2\int_t^1 w'(x)^2\mathrm{d}x \tag{12}$$

那么

$$\begin{aligned}2\int_0^1 w(x)^2\mathrm{d}x &= \int_0^\alpha w(x)^2\mathrm{d}x + \int_\alpha^1 w(x)^2\mathrm{d}x \\ &\le \alpha^2\int_0^\alpha w'(x)^2\mathrm{d}x + (1-\alpha)^2\int_\alpha^1 w'(x)^2\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{13}$$

令 $F = \int_0^\alpha w'(x)^2\mathrm{d}x$，$M = \int_0^1 w'(x)^2\mathrm{d}x$，那么:

$$2\int_0^1 w(x)^2\mathrm{d}x \le \alpha^2 F + (1-\alpha)^2(M-F) \tag{14}$$

右侧函数取最大值时，$\alpha = \frac{1}{2}$，$F = M/2$，这说明:

$$2\int_0^1 w(x)^2\mathrm{d}x \le M/4 = \frac{1}{4}\int_0^1 w'(x)^2\mathrm{d}x \tag{15}$$

这说明在 $w(0) = w(1) = 0$ 的情况下，$\bar{c} = \frac{1}{8}$

下面证明原本的定理。令 $e(x) = u(x) - u_I(x)$，考察 $[x_{i-1}, x_{i+1}]$，满足:

$$e(x_{i-1}) = e(x_i) = e(x_{i+1}) \tag{16}$$

这说明，存在 ξ_{i-1}, ξ_i 使得 $e'(\xi_{i-1}) = e'(\xi_i) = 0$

利用证明的引理:

$$\begin{aligned}\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} e'(x)^2\mathrm{d}x &\le \frac{1}{4}(\xi_i - \xi_{i-1})\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} e''(x)^2\mathrm{d}x \\ &\le h\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} e''(x)^2\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{17}$$

那么，对于 e 有:

$$\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} e(x)^2\mathrm{d}x \le \frac{1}{8}h^2\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} e'(x)^2\mathrm{d}x \tag{18}$$

与此同时，可以对 e, e' 也建立不等式：

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} e(x)^2 \mathrm{d}x \leq \frac{1}{8}h^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} e'(x)^2 \mathrm{d}x \tag{19}$$

对 i 求和：

$$\begin{aligned}\int_0^1 e(x)^2 \mathrm{d}x &\leq (\frac{1}{8}h^2) \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} e'(x)^2 \mathrm{d}x \\ &\leq (\frac{1}{8}h^2) \sum_{i=1}^{N} (\frac{1}{8}h^2) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} e''(x)^2 \mathrm{d}x\end{aligned} \tag{20}$$

考虑到 $u_I'' = 0$ 立刻得到：

$$\|u - u_I\| \leq \frac{1}{8}h^2 \|u''\| \tag{21}$$

$\square$