作业

1
考虑二维两点边值问题 P_{2D}

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= f, \quad \text{in } \Omega \\
u &= 0, \quad \text{on } \Gamma
\end{aligned}
$$

其对应的变分问题(W_{2D})：找到 $u \in V$，满足

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V$$

极小化问题(M_{2D})：找到 $u \in V$

$$J(u) \le J(v) \quad \forall v \in V$$

(1) 写出 J 和 a 的表达式

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x$$

$$J(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - (f, u)$$

$$V = H_0^1$$

(2) 证明等价性：

P ⇒ W
因为

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= f, \quad \text{in } \Omega \\
u &= 0, \quad \text{on } \Gamma
\end{aligned}
$$

那么：$\forall v \in V$,因为 $v|_{\partial\Omega} = 0$

$$
\begin{aligned}
(f, v) &= (-\Delta, v) \\
&= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \,\mathrm{d}S \\
&= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x \\
&= a(u, v)
\end{aligned}
$$

因此原问题的解 u 是变分问题的解。

W ⇒ M
$\forall v \in V$:

$$
\begin{aligned}
J(v) &= J(u + (v - u)) \\
&= \frac{1}{2} a(u, u) + a(v - u, u) + a(v - u, v - u) - (f, v) \\
&= \frac{1}{2} a(u, u) + (f, -u) + a(v - u, v - u) \\
&\ge J(u)
\end{aligned}
$$

因此 u 是极小化问题的解。

M ⇒ W
$\forall v\in V$:考虑ε的函数f:

$$f(\varepsilon)=J(u+\varepsilon v)=\frac{1}{2}\big(a(u,u)+2\varepsilon a(u,v)+\varepsilon^2 a(v,v)\big)-(f,u+\varepsilon v)$$

对 ε 求导

$$f'(\varepsilon)=\varepsilon a(v,v)+a(u,v)-(f,v)$$

因为 $J(u)\leq J(v)\quad\forall v\in V$ ，那么

$$f'(0)=a(u,v)-f(v)=0$$

因为上式对 $\forall v\in V$ 成立，所以u也是变分问题的解。

W ⇒ P
因为 u 充分光滑，并利用$v|_{\partial\Omega}=0$，Green公式：

$$\int_\Omega v(-\Delta u)\,\mathrm{d}x=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x$$

$$0=a(u,v)-(f,v)=\int_\Omega(-\Delta u-f)v\,\mathrm{d}x$$

假设 $\exists x_0\in\Omega$，使得 $\Delta u+f>0$ 对以 x_0 为球心的 B恒成立，取 v为以B为支集的函数，在B内满足$v>0$，那么：

$$\int_\Omega(\Delta u+f)v\,\mathrm{d}x=\int_B(\Delta u+f)v\,\mathrm{d}x>0$$

因此这样的 x_0 不存在，从而 u 是原方程的解。

Brenner 0.x.9

Let V denote the space, and $a(\cdot,\cdot)$ the binlinear form. Prove the following coercivity result

$$\|v\|^2+\|v'\|^2\leq Ca(v,v)$$

Give the value for C. (Hint: see the hint in 0.x.6. For simplicity, restrict the result to $v\in V\cup C^1(0,1)$)

Hint in 0.x.6: 若 $w(0)=0, w\in L^2(0,1), a(w,w)<\infty$，考虑 w 的傅立叶变换：

$$w(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi}{2}x$$

那么：

$$\int_0^1(w(t))^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$$

考虑 w' 的傅立叶变换：

$$w'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}x$$

那么:

$$\int_0^1 (w'(t))^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{n\pi}{2}\right)^2$$

公式 $\int_0^1 w(t)^2 \,\mathrm{d}x \leq c\int_0^1 w'(t)^2 \,\mathrm{d}x$ 中的 c 在：$a_1 = 1, a_n = 0 \quad (n \geq 2)$时取最大值：$c = \frac{4}{\pi^2}$

因此:

$$\int_0^1 w(t)^2 \,\mathrm{d}x \leq \frac{4}{\pi^2}\int_0^1 w'(t)^2 \,\mathrm{d}x$$

即 $\|w\|^2 \leq \frac{4}{\pi^2}\|w'\|^2$

Proof: $V = \{v \in L^2(0,1) : a(v,v) < \infty \text{ and } v(0) = 0\}$,

$$a(v,v) = \int_0^1 v'(t)^2 \,\mathrm{d}t = \|v'\|^2$$

那么:

$$\|v\|^2 + \|v'\|^2 \leq \left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)a(v,v)$$

即 $C = 1 + \frac{4}{\pi^2}$

Brenner 0.x.10

Let V denote the space, and $a(\cdot,\cdot)$ the binlinear form. Prove the following version of sobolev's inequality:

$$\|v\|_{\max}^2 \leq Ca(v,v)$$

Give the value for C. (Hint: see the hint in 0.x.6. For simplicity, restrict the result to $v \in V \cup C^1(0,1)$)

Proof: 因为$(\sup|v|)^2 = \sup v^2$，利用 Cauchy不等式:

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t v'(x) \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^t 1 \cdot v'(x) \,\mathrm{d}x \\ &\leq \sqrt{t}\sqrt{\int_0^t v'(x)^2 \,\mathrm{d}x} \end{aligned}$$

那么:

$$v(t)^2 \leq t\int_0^t v'(x)^2 \,\mathrm{d}x$$

两边同取上确界:

$$\sup v^2 \leq \sup\left(t\int_0^t v'(x)^2 \,\mathrm{d}x\right) \leq \int_0^1 v'(x)^2 \,\mathrm{d}x$$

因此：

$$\|v\|_{\max}^{2} \leq a(v, v) \quad \forall v \in V$$

即题目中常数 $C = 1$，取 $v(x) = x$ 可使上式成立。

Johnson 1.7

Formulate a difference method for 1.16 in the case when Ω is square

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \quad\; u = 0 & \text{on } \Omega \end{cases}$$

using the difference approximation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \sim \frac{u(x_1 + h, x_2) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1 - h, x_2)}{h^2}$$

and a corresponding approximation for $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$. Compare with example 1.1.

在这一题，我们沿用 Example 1.1 的记号。对于非边界点i，利用上述公式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \approx \frac{u_{i+N} + u_{i-N} - 2u_i}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \approx \frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{h^2}$$

泊松方程改写为差分方程如下：

$$-\left(\frac{u_{i+N} + u_{i-N} - 2u_i}{h^2} + \frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{h^2} \right) = f(x_i)$$

简化为：

$$-u_{i+1} + 4u_i - u_{i-1} - u_{i-N} - u_{i+N} = h^2 f(x_i)$$

假设 $f(x)$ 充分光滑，那么有限元法中，方程组右端的 b_i 可以近似为：

$$b_i = \int \varphi_i f(x) \,\mathrm{d}x = h^2 (f(x_i) + O(h))$$

观察差分方程获得的方程组和右端项，可以发现在这种近似的情况下，两个方法获得的方程组是相同的。

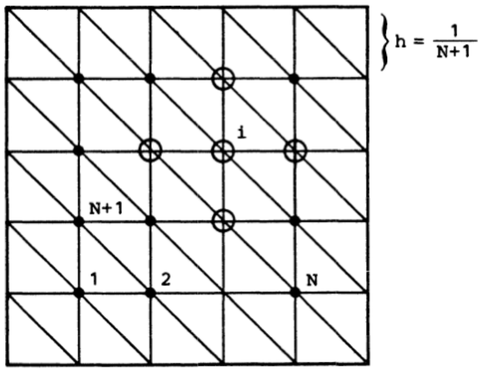

Fig 1.10

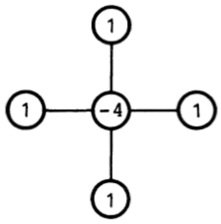

Fig 1.11

In this case the linear system (1.21) reads as follows:

$$
(1.25)\qquad
\begin{array}{r}
\text{row } N+1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\begin{bmatrix}
4 & -1 & 0 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\
-1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & \cdot & \cdot \\
0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & \cdot & \cdot \\
-1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 \\
\cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
0 & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 0 & -1 & 4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\xi_1 \\ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ \\ \xi_M
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b_1 \\ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ \\ b_M
\end{bmatrix}.
$$

Figure 1: Example 1.1

Johnson 1.15

Prove that (1.35) and (1.36) are equivalent (cf the proof of theorem 1.1).

1.35:

$$\langle u - u_h, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V_h$$

1.36:

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u - v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in V_h$$

Proof: 1.35 $\Rightarrow$ 1.36: $\forall v \in V_h, u_h - v \in V_h$ 那么：

$$\langle u - u_h, u_h - v \rangle = 0$$

因此：

$$
\begin{aligned}
\|u - v\|_{H^1}^2 &= \langle u - v, u - v \rangle \\
&= \langle u - u_h + u_h - v, u - u_h + u_h - v \rangle \\
&= \langle u - u_h, u - u_h \rangle + \langle u - v, u - v \rangle \\
&\geq \|u - u_h\|_{H^1}
\end{aligned}
$$

因此1.36成立。下证1.36⇒1.35，$\forall v \in V_h$，定义如下的函数：

$$f(\varepsilon) = \|u - u_h + \varepsilon v\|_{H^1}$$

因为1.36成立，所以 $f'(0) = 0$，立刻得到：

$$\langle u - u_h, v \rangle = 0$$

即 1.35成立。综上1.35与1.36等价。

Johnson 1.16

Show that the problem

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

can be given the follow variational formulation: Find $u \in V$ such that

$$(u', v') = (f, v) \quad \forall v \in V$$

where $V = \{v \in H^1(I) : v(0) = 0\}$. Formulate a Finite element method for this problem using piecewise linear functions. Determine the corresponding linear system of equations in the case of a uniform partition and study in particular how the boundary condition $u'(1) = 0$ is approximated by the method.

Solution:

首先说明变分问题和原问题是等价的。若 u 是原问题的解，那么 $\forall v \in V$:

$$\begin{aligned}(u', v') &= u'(1)v(1) - u'(0)v(0) - (u'', v) \\ &= (f, v)\end{aligned}$$

因此 u 是变分问题的解。另一方面若 u 是变分问题的解:

$$u'(1)v(1) = (u'' + f, v)$$

假设 $\exists x_0, u'' + f > 0$，若解是光滑的，那么存在区间 $[x_1, x_2]$ $u'' + f > 0 \quad \forall x_1 < x < x_2$

这说明，取

$$v = \begin{cases} -(x - x_1)(x - x_2) & x_1 < x < x_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

有

$$0 = u'(1)v(1) = (u'' + f, v) > 0$$

因此 $(u'' + f, v) = 0 \quad \forall v \in V$，另外，取 $v(x) = x$，可得到 $u'(1) = 0$。所以变分问题的解是原问题的解。

下面描述其有限元解：取 $V_h = \{v : v \text{ 为分片连续线性函数}, v(0) = 0\}$。有限元解为：找 $u_h \in V_h$，使得

$$({u_h}', {v_h}') = (f, v_h) \quad \forall v \in V_h$$

设 $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_n = 1, \quad h = x_i - x_{i-1}$ 全局基函数为

$$\varphi_i = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x_{i-1} \le x < x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x_i \le x < x_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \qquad \varphi_n = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} & x_{n-1} < x \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

那么

$$u_h = \sum_{i=1}^{n} u_{h(x_i)} \varphi_i$$

计算全局刚度矩阵：

$$({\varphi_i}', {\varphi_i}') = \frac{2}{h}, \quad ({\varphi_i}', {\varphi_{i-1}}') = ({\varphi_{i-1}}', {\varphi_i}') = -\frac{1}{h} \quad \forall i < n$$

对于 $i = n$：

$$({\varphi_n}', {\varphi_n}') = \frac{1}{h}, (\varphi_{n'}, {\varphi_{n-1}}') = -\frac{1}{h}$$

因此全局刚度矩阵为：

$$K = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_i = (f, \varphi_i) \approx \frac{1}{h} f(x_i) \quad f_n = (f, \varphi_n) \approx \frac{1}{2h} f(1)$$

将节点值组合成向量：$U = \left(u_{h(x_1)}, u_{h(x_2)}, ..., u_{h(x_n)}\right)^T$那么有限元法求解如下的线性方程组：

$$KU = F$$

1.17

Show that the problem (M) and (V) of this section are equivalent.

(V): Find $u \in H^1(\Omega)$, s.t.

$$a(u, v) = (f, v) + < g, v >$$

where $a(u, v) = \int_{\Omega} (\Delta u \cdot \Delta v + uv) \, \mathrm{d}x$

(M): Find $u \in H^1$ such that $F(u) \leq F(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$ where

$$F(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v) - < g, v >$$

Proof: 假设 u 是 (V) 的解，$\forall v \in V$，因为 $u - v \in V$，那么：

$$a(u, u - v) = (f, u - v) + < g, u - v >$$

那么：

$$\begin{aligned} F(v) = F(u + (v - u)) &= \frac{1}{2} a(u, u) + \frac{1}{2} a(v - u, v - u) - (f, u) - < g, u > \\ &= F(u) + \frac{1}{2} a(v - u, v - u) & \geq F(u) \end{aligned}$$

因此 u 是 (M) 的解。

假设 u 是 (M) 的解，定义如下的函数

$$f(\varepsilon) = F(u + \varepsilon v)$$

因为 $F(u) \le F(v)\ \forall v \in V$，所以$\varepsilon = 0$是 f 的极小点，即有 $f'(\varepsilon) = 0$，化简得到：

$$a(u,v) - (f,v) - < g, v >= 0$$

因此 u 是 (V) 的解。

1.18

Let Ω be a bounded domain in the plane and let the boundary Γ of Ω be devided into two parts Γ_1 and Γ_2. Give a variational formulation of the following problem:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = u_0 & \text{on } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{on } \Gamma_2 \end{cases}$$

where f, u_0 and g are given functions. Then formulate a finite element method for this problem. Also give an interpretation of this problem in mechanics or physics.

Solution:

Varitional Formulation: Find $u \in \mathbb{V}$, such that:

$$a(u,v) = (f,v) + < g, v >\ \forall v \in \mathbb{V}_0$$

where

$$\mathbb{V} = \left\{ v \in H^1 : v|_{\Gamma_1} = u_0 \right\}, \quad \mathbb{V}_0 = \left\{ v \in H^1 : v|_{\Gamma_1} = 0 \right\}$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x$$

$$(f,v) = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x$$

$$< g, v >= \int_{\Gamma_2} g v \,\mathrm{d}S$$

then $\forall v \in \mathbb{V}_0$:

$$\int_\Omega (-\Delta u) v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_2} v \frac{\partial u}{\partial n} \,\mathrm{d}S$$

设u为原问题的解：

$$\int_\Omega f v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega (-\Delta u) v \,\mathrm{d}x$$

利用上式，有：

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} g v \,\mathrm{d}S$$

因此原问题的解是变分问题的解。

设 u 是变分问题的解：

$$\int_\Omega (-\Delta u) v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} g v \,\mathrm{d}S - \int v \frac{\partial u}{\partial n} \,\mathrm{d}S$$

整理得：

$$\int_\Omega (\Delta u + f) v \,\mathrm{d}x = \int_{\Gamma_2} v \left(g - \frac{\partial u}{\partial n} \right) \mathrm{d}S$$

$$\int_\Omega (\Delta u + f) v \,\mathrm{d}x = \int_{\Gamma_2} v g \,\mathrm{d}S$$

如果$u'' + f$充分光滑，且在 $x_0 \in \Omega$ $\Delta u + f > 0$，那么存在 $v \in \mathbb{V}_0$ 在 $v|_{\partial\Omega} = 0$ 使得

$$0 = \int_\Omega (\Delta u + f) v \,\mathrm{d}x > 0$$

因此 $u'' + f = 0$ $\forall x \in \Omega$，且 $\int_\Omega (\Delta u + f) v \,\mathrm{d}x = 0$。这说明 $\int_{\Gamma_2} v \left(g - \frac{\partial u}{\partial n} \right) \mathrm{d}S = 0$ $\forall v \in \mathbb{V}_0$，同理可得 $g - \frac{\partial u}{\partial n} = 0$。

因此u也是原问题的解。这说明我们构造的变分问题和原问题的解是等价的。

FEM的构造如下。考虑
$\mathbb{V}_h \coloneqq \left\{ v : v \text{ 为分片线性函数}, v|_{\Gamma_1} = u_0 \right\}, \mathbb{V}_{h0} = \left\{ v : v \text{ 为分片线性函数}, v|_{\Gamma_1} = 0 \right\}$，找 $u \in \mathbb{V}_h$，s.t.

$$a(u, v) = (f, v) + < g, v > \quad \forall v \in \mathbb{V}_{h0}$$

物理解释为：设有线性弹性模型控制的材料，其构型空间为 Ω，定义Ω上的形变为将$x \in \Omega$形变到n维空间的$u(x)$。因为材料为线性材料，假设在构型空间的每一点有外力，那么其稳定状态的控制方程可以写为：

$$-\Delta_x u(x) = f$$

对于材料边界 $\partial\Omega$，一部分Γ_1是固定边界，即有

$$u = u_0 \quad \text{on } \Gamma_1$$

另一部分为受给定负载（外力）的边界 Γ_2，那么：

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{on } \Gamma_2$$

即得到原本的定解问题。