3.1

Show that if $v \in P_r(I) = \left\{v : v(x) = \sum_{i=0} a_i x^i, x \in I, \text{where } a_i \in \mathbb{R}\right\}$, the set of polynomials of degree at most r on the interval I, and if v vanishes at $r+1$ distinct points on I, then $v \equiv 0$. Recall that if $v \in P_r(I)$ and $v(b) = 0$ for some $b \in I$ then $v(x) = (x-b)w(x)$ where $w \in P_{r-1}(I)$

Proof: 假设v在$x_i, i = 0, 1, ..., r$处，$v(x_i) = 0$ 都成立，那么：

$$p(x) = \prod_{i=0}^{r} (x - x_i)$$

是 $v(x)$ 的一个因式，即 $v(x) = w(x)p(x)$

但 $p(x)$ 是一个 $r+1$ 次的多项式，$v(x)$只是一个 r 次的多项式，那么显然$w = 0$。即$v(x) \equiv 0$

补充

证明Lagrange型矩形双二次单元形状函数插值的唯一可解性和连续性。

Proof:

对于 $[-1,1] \times [-1,1]$ 单元，其上的矩形双二次单元形状函数一共有 9 个为：

$$\varphi_{i,j}(x,y) = L_i(x)L_j(y) \quad i,j = -1,0,1$$

其中的：

$$L_{-1} = \frac{1}{2}x(x-1), L_0 = 1 - x^2, L_1 = \frac{1}{2}x(x+1)$$

每个单元在 $(i,j) \quad i,j = -1,0,1$ 处各有1个自由度，函数值为 $u_{i,j}$，那么对于一个单元上的插值函数为：

$$u(x,y) = \sum_{i,j=-1}^{1} u_{i,j}\varphi_{i,j}(x,y)$$

唯一可解性：若 u 满足

$$u(i,j) = 0 \quad \forall i,j = -1,0,1$$

那么：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{9\times 9} \begin{pmatrix} u_{-1,-1} \\ u_{-1,0} \\ \vdots \\ u_{1,1} \end{pmatrix} = 0$$

左侧的矩阵就是单位阵，所以$u_{i,j}$只有零解，即$u(x,y) \equiv 0$。

连续性：对于相邻的两个单元，其公共边界上，例如 $x = x_0$ 上的函数都是y的二次函数，但这两个函数有三个相同的点，所以这两个函数是相同的， 即函数在公共边界上是连续的。