

FEM - 第 6 周作业

SA23001071 杨哲睿

2023 年 10 月 13 日

```
Command Window
>> fullExp
10.0000    0.0005    0.0089
20.0000    0.0001    0.0042
40.0000    0.0000    0.0021
80.0000    0.0000    0.0010

10.0000         NaN         NaN
20.0000    1.9969    1.0689
40.0000    1.9992    1.0298
80.0000    1.9998    1.0135

Elapsed time is 0.026473 seconds.
```

图 1: Test on MacBook Pro (M1 32g), 按照群里的说法是不是可以不看了。

1 Introduction

编写程序求解两点边值问题:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & (x, y) \in \Omega = [0, 1] \times [0, 1] \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

选取等距网格剖分, 有限元空间选取分段线性多项式空间 V_h , 选取准确解 $u(x, y) = (x - 1) \sin(x)(y - 1) \sin y$ 算出满足方程的 $f(x, y)$ 。

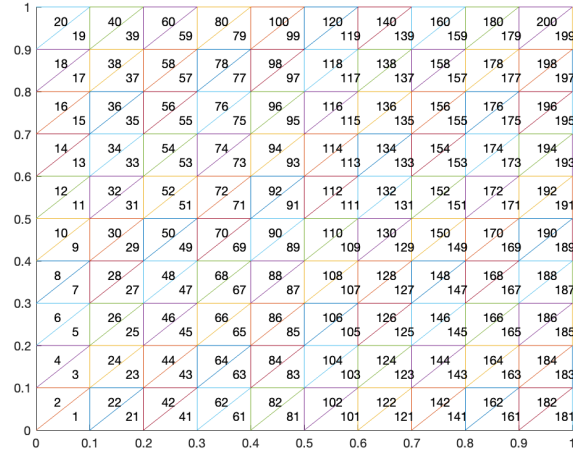
$$f(x, y) = (-2 \cos x - (x - 1) \sin x)(y - 1) \sin y + (-2 \cos y - (y - 1) \sin y)(x - 1) \sin x \quad (2)$$

2 Method

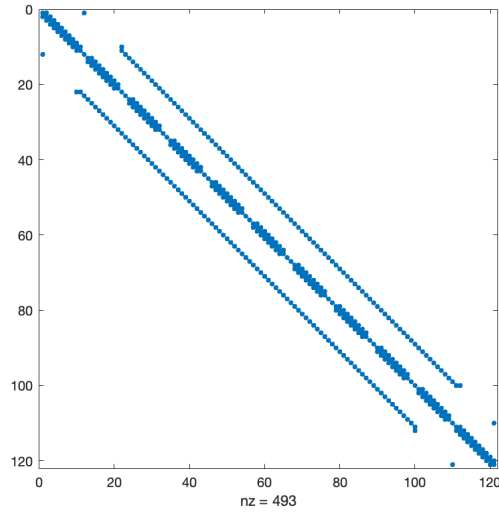
定义双线性型 $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$, 内积 $(f, g) = \int_{\Omega} f \cdot g dx$ 。那么变分问题是找 $u \in V = \{v \in H^1[0, 1], v|_{\Omega} = 0\}$, 使得 $a(u, v) = (f, v)$, $\forall v \in V$ 都成立。
有限元空间为:

$$V_h = \{v|v \in C(\Omega), v|_K \in P^1(K), K \in \mathcal{T}_h, v|_{\partial\Omega} = 0\} \quad (3)$$

实验中采用三角网格划分, 单元数为 $2N^2$ 如下, 内部点数 $(N-1)^2$, 边界点数 $4N$ 。



对应的刚度矩阵为:



该刚度矩阵的构造采用了上课所说的第二种方法。先不考虑边界节点和内部点的区别，而直接构造刚度矩阵。由于我们采用的是零边界条件，所以可以将边界点 i 对应矩阵中的元素

$$K_{ij} = K_{ji} = 0 \quad \forall i \neq j \quad K_{ii} = 1 \quad (4)$$

按照这样的规则进行赋值。

局部刚度矩阵的计算：由于我们选取的是相当规则的单元，因此其局部刚度矩阵是容易直接计算的。对于标准形函数

$$\bar{\phi}_1(x, y) = 1 - x - y \quad (5)$$

$$\bar{\phi}_2(x, y) = x \quad (6)$$

$$\bar{\phi}_3(x, y) = y \quad (7)$$

其计算得到的矩阵为：

$$\left(\int_{\Omega} \nabla \bar{\phi}_i \cdot \nabla \bar{\phi}_j dx \right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

而经过变换后到局部基函数，所对应的矩阵也是完全相同的。以单元 1 为例。坐标变换为

$$\phi = \bar{\phi} \left(1 - \frac{1}{h}x, \frac{1}{h}y \right) \quad (9)$$

那么

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\frac{1}{h} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{1}{h} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \end{aligned} \quad (10)$$

这说明了对于局部基函数：

$$\int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx = \frac{1}{h^2} \int_{\Omega} \nabla \bar{\phi}_i \cdot \nabla \bar{\phi}_j dx \quad (11)$$

而三角形的面积恰好是 $\frac{1}{2h^2}$ ，因此如果我们合理地规划顶点，始终让直角边出现在三角形的第一个标号上，那么实际上每一个局部刚度矩阵就是

$$K = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

这在构造稀疏矩阵系数时可以极大的简化操作。

3 Results

对于求得的系数，先进行插值，然后进行梯形公式数值积分。可以看出，有限元方法的 L^2 误差是 2 阶的， H^1 误差是 1 阶的。

表 1: 误差分析

网格总数	总内部结点数	总边界点数	L^2 error	order	H^1 error	order
200	81	40	4.929e-04	—	8.862434e-03	—
800	361	80	1.234e-04	1.99	4.224e-03	1.06
3200	1521	160	3.089e-05	1.99	2.068e-03	1.02
12800	6241	320	7.723e-06	1.99	1.024e-03	1.01