有限元方法代码作业 2 报告

SA23001071 杨哲睿

2023 年 9 月 22 日

1 Introduction

编写程序求解两点边值问题

$$\begin{cases} -u'' = f, & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

选取等距网格剖分，有限元空间选取分段线性多项式空间 V_h。其中，选取了 $f(x) = -(2\cos x - (x-1)\sin x)$，已知其解为 $u(x) = (x-1)\sin x$。完成求解后，使用 L^2 范数和 H^1 范数计算误差并讨论结果。

2 Method

定义双线性型 $a(u,v) = \int_0^1 u'v'\mathrm{d}x$，内积 $(f,g) = \int_0^1 f \cdot g\mathrm{d}x$。那么问题 (1) 的变分问题是

找 $u \in V = \{v \in C[0,1], v(0) = v(1) = 0\}$，使得 $a(u,v) = (f,v)$，$\forall v \in V$ 都成立.

实验中采用等距网格划分，节点数为 N，节点处的值为 u_i，$h = u_{i+1} - u_i$。选取基函数为 ϕ_i，并选取其张成的有限维线性空间进行求解，全局基函数定义如下：

$$\phi_i = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & x_{j-1} \le x < x_j \\ \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} & x_j \le x < x_{j+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2}$$

对于单元 $[x_{i-1}, x_i]$ 局部基函数为:

$$\phi_0^i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \le x \le x_i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \phi_1^i(x) = \begin{cases} \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \le x \le x_i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3}$$

标准单元 $[0, 1]$ 对应的形函数为:

$$\phi_0(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \phi_1(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4}$$

局部刚度矩阵的系数计算:

$$\begin{aligned} K_{0,0} &= a(\phi_0^i, \phi_0^i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{h} \\ K_{1,1} &= a(\phi_1^i, \phi_1^i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{h} \\ K_{0,1} &= K_{1,0} = a(\phi_0^i, \phi_1^i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} -\frac{1}{h^2} \mathrm{d}x = -\frac{1}{h} \end{aligned} \tag{5}$$

因此局部刚度矩阵为:

$$K = \begin{pmatrix} K_{0,0} & K_{0,1} \\ K_{1,0} & K_{1,1} \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

对于内部的单元 $[x_{i-1}, x_i]$，其对应到全局的矩阵为:

$$K_i = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i-1 \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & i-1 & i & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{N \times N} \end{array} \tag{7}$$

对于边界上的 $[0, x_1]$:

$$K_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{N \times N} \tag{8}$$

对于 $[x_N, 1]$:

$$K_{N+1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{h} \end{pmatrix}_{N\times N} \tag{9}$$

全局刚度矩阵:

$$A = \sum_{i=1}^{N+1} K_i \tag{10}$$

从而:

$$A = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

计算 (f, ϕ_j) 得:

$$\begin{aligned} f_j &= \int_0^1 f\phi_j \mathrm{d}x \\ &= \frac{4(hj-1)\sin^2(h/2)\sin(hj)}{h} - 2\sin(h)\cos(hj) \end{aligned} \tag{12}$$

因此为求解节点上的值, 只需要求解出 $AU = F$，其中:

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \tag{13}$$

在估计 L^2 和 H^1 误差进行时，先对于求出的 u_h 进行线性插值，然后再使用梯形公式来进行近似积分值，不存在较大的精度问题。

3 Results

实验得到的结果如下:

表 1: 误差分析表

n	L^2 error	order	H^1 error	order
10	1.41E-03	–	4.90E-02	–
20	3.86E-04	1.87	2.56E-02	0.93
40	1.01E-04	1.93	1.31E-02	0.96
80	2.6E-05	1.95	6.62E-3	0.98

观察到，该方法对 L^2 误差具有二阶精度，对 H^1 误差具有一阶精度.

4 Discussion

本节着重进行误差分析，令 $v \in V_h$ 为一分片线性函数，满足:

$$v(x_i) = u(x_i) \quad \forall i = 1, 2, \cdots, N \tag{14}$$

其中 u 是两点边值问题的古典解。令 $e = v - u$, 那么

考虑区间 $[a, b]$ 上的 C^1 函数 f，满足 $f(a) = f(b) = 0$，那么 $|f| < \frac{b-a}{2} \max |f'|$，积分

$$\int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x < \frac{(b-a)^2}{2} \max |f'| \tag{15}$$

对 e, e' 反复利用该结论以及微分中值定理可知，对于 e, e' 有如下的最大误差估计:

$$\begin{cases} \sup_x |e'| \leq C_1 h \sup_x |u''| \\ \sup_x |e| \leq C_2 h^2 \sup_x |u''| \end{cases} \tag{16}$$

那么

$$\begin{cases} ||u - v||_2 =\leq C_1 \cdot h^2 \sup_x |u''| \\ ||u' - v'||_2 =\leq C_2 \cdot h \sup_x |u''| \end{cases} \tag{17}$$

代入 L^2 误差和 H 误差的表达式中可知，其在 L^2 意义下有二阶精度，H^1 意义下有一阶精度。

这说明了，第一次作业存在问题。在排查之后，发现在 H^1 范数的计算上出现了明显的错误。