3.x.1

Let m and k be non-negative integers and let P be a polynomial in one variable of degree $2m+k+1$. Suppose that $P^j(a)=0$ for $a=0,1$ and $j=0,...,m$ and further that $P(\xi_j)=0$ for $0<\xi_1<...<\xi_k<1$

Proof: 这样的条件说明了：

1. x^{m+1} 是它的因式
2. $(x-1)^{m+1}$ 是它的因式
3. $(x-\xi_j), j=1...k$ 是它的因式

因此：

$$P=C(x)x^{m+1}(x-1)^{m+1}\prod_{j=1}^{k}(x-\xi_j)$$

其中 $x^{m+1}(x-1)^{m+1}\prod_{j=1}^{k}(x-\xi_j)$ 是一个多项式，次数为$2m+k+2$，而P的次数为 $2m+k+1<2m+k+2$，因此：

$$C\equiv 0$$

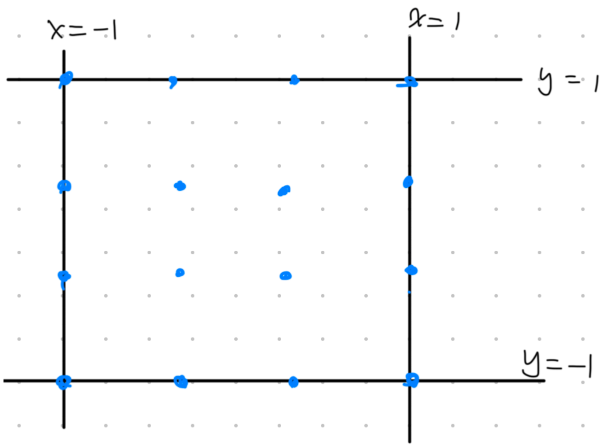
那么 $P\equiv 0$

3.x.8

Let K be any rectangle. There exist constants c_j^i such that for $\varphi\in\mathcal{P}_3$, $\varphi(w_i)=\sum_{j=1}^{12}c_j^i\varphi(z_j)$ for $i=1,2,3,4$ then let

$$\mathcal{P}=\left\{\varphi\in\mathcal{Q}_3:\varphi(w_i)-\sum_{j=1}^{12}c_j^i\varphi(z_j)=0, i=1,2,3,4\right\}$$

and $\mathcal{N}$ as depicted. Then $(\mathcal{K},\mathcal{P},\mathcal{N})$ is a finite element.



Proof: c_j^i 存在性的证明：设 $N_i\varphi=\varphi(z_i)$ $i=1,2,...,12$ 那么 $N_i\in\mathcal{P}_3{'}$，假设 $\varphi\in\mathcal{P}_3$ 使得

$$N_i\varphi=0,\quad i=1,2,...,12$$

那么：$\varphi=C(x^2-1)(y^2-1)$ 但因为 φ 是 $\mathcal{P}_3$ 的元素，因此 $C=0,\varphi\equiv 0$。这说明了 $\text{span}\{N_i\}=\mathcal{P}_3{'}$，因此 $N\in\mathcal{P}_3', N:\varphi\mapsto\varphi(w_j)$ 可以表示为 N_i 的线性组合，即 $\exists c_j^i$ 使得

$$\varphi(w_i) = \sum_j c_j^i \varphi(z_j)$$

这说明了题目中的常数c_j^i是存在的。

插值的唯一可解性：设$\varphi \in \mathcal{Q}_3, \varphi(z_j) = 0, j = 1...12$ 因为$\varphi(w_i) = \sum_{j=1}^{12} c_j^i \varphi(z_j) = 0$，因此$\varphi(x)$在这 12 个点上都为 0，

考虑其限制到 $x = 1, x = -1, x = \frac{1}{3}, x = -\frac{1}{3}$ 上，在这些直线上，都是三次多项式，因此 $\varphi(x, y) = C(x^2 - 1)(x^2 - \frac{1}{9})$。然而 $\varphi \in \mathcal{Q}_3$ 因此 $C = 0$，这说明 $\varphi \equiv 0$，因此其具有唯一可解性。

连续性：对于邻接的两个三角形，其在边界上是一个单变量的三次多项式，这个三次多项式有四个重合点，因此在边界上的不同元的插值函数是相等的。 因此这个插值具有 C^0 连续。

3.x.11

Prove that the set of nodal variables:

$$\Sigma_n = \{P(a), P'(a), P^{(3)}(a), ..., P^{(2n-1)}(a) : a = 0, 1\}$$

determine unique polynomials (in one variable) of degree $2n + 1$.

Proof: 设 $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{2n+1} x^{2n+1}$，那么：

$$\begin{cases} P^{(i)}(0) = i! a_i \\ P^{(i)}(1) = i! a_i + (i+1)! a_{i+1} + \frac{(i+2)!}{2!} a_{i+2} + ... + \frac{(2n+1)!}{(2n+1-i)!} a_{2n+1} \end{cases}$$

一共有 $2n + 2$ 个方程和$2n + 2$个未知数，因此方程组一定是有解的，我们只需要证明，这个解是唯一的。

设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都满足这个方程组，那么 $E(x) = P(x) - Q(x)$ 在 Nodal variables 上都为 0.

因为：

$$E(0) = E'(0) = E'''(0) = ... = E^{(2n-1)}(0) = 0$$

那么 $E = A_1 x^2 + A_2 x^4 + ... + A^n x^{2n}$

先考虑：

$$E^{(2n-1)}(0) = E^{(2n-1)}(1) = 0 \Rightarrow \exists \xi \text{ s.t. } E^{(2n)}(\xi) = 0 \Rightarrow A^n = 0$$

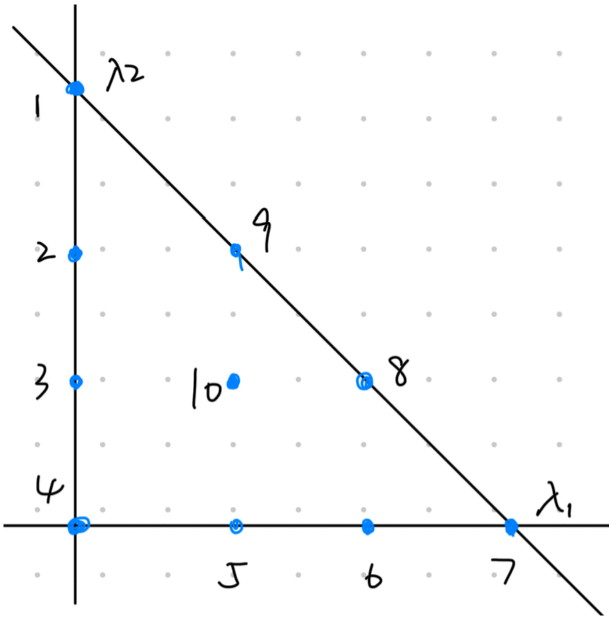
再考虑：

$$E^{(2n-3)}(0) = E^{(2n-3)}(1) = 0 \Rightarrow \exists \xi \text{ s.t. } E^{(2n-2)}(\xi) = 0 \Rightarrow A^{n-1} = 0$$

以此类推，可知 $A^i = 0,\ \forall i$，那么 $E = 0$，即 $P \equiv Q$，唯一性得证。

Ex.1

写出三角形单元 Lagrange 型三次单元形状函数基函数，并证明插值的唯一可解性和连续性



标号如上，基于面积坐标

$$N_1=\frac{9}{2}\lambda_2\left(\lambda_2-\frac{1}{3}\right)\left(\lambda_2-\frac{2}{3}\right)$$

$$N_2=\frac{27}{2}\lambda_3\left(\lambda_2-\frac{1}{3}\right)\lambda_2$$

$$N_3=\frac{27}{2}\lambda_3\left(\lambda_3-\frac{1}{3}\right)\lambda_2$$

$$N_4=\frac{9}{2}\lambda_3\left(\lambda_3-\frac{1}{3}\right)\left(\lambda_3-\frac{2}{3}\right)$$

$$N_5=\frac{27}{2}\lambda_3\lambda_1\left(\frac{2}{3}-\lambda_1\right)$$

$$N_6=\frac{27}{2}\lambda_3\left(\lambda_1-\frac{1}{3}\right)\lambda_1$$

$$N_7=\frac{9}{2}\lambda_1\left(\lambda_1-\frac{1}{3}\right)\left(\lambda_1-\frac{2}{3}\right)$$

$$N_8=\frac{27}{2}\lambda_2\lambda_1\left(\lambda_1-\frac{1}{3}\right)$$

$$N_9=\frac{27}{2}\lambda_2\lambda_1\left(\frac{2}{3}-\lambda_1\right)$$

$$N_{10}=27\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

插值的唯一可解性：

假设P在 10 个节点上都是0，将其限制到 1234, 4567, 7891 这三个直线上，在直线上四个点三次函数是零，因此， P 有 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ 这个因式，$P=C\lambda_1\lambda_2\lambda_3$，因为$P$是一个三次多项式，从而 C 是一个常数。

但是$P\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=0$，从而$C=0$，那么$P\equiv 0$。因此插值有唯一可解性。

插值的连续性：

对于邻接的两个三角元，其在边界上是一个单变量的三次多项式，这个三次多项式有四个重合点，因此在边界上的不同元的插值函数是相等的。因此这个插值具有 C^0 连续性。

Ex2

证明 Hermite 型矩形双三次单元形状函数的插值唯一性。

Proof: 矩形单元双三次 Hermite 插值的自由度是四个节点上的函数值，偏导数值，以及二阶混合偏导数值。

假设 $P(z)=P_x(z)=P_y(z)=P_{xy}(z)=0$ 在四个节点上都成立，那么 P 限制到在这条边上都是零，因此 P 有因式 $(x-x_i)(y-y_i)$，因此 $P=C(x^2-1)(y^2-1)$，因为 $P_{xy}(1,1)=0$ 那么

$$0=4C\Rightarrow C=0$$

因此 $P\equiv 0$，因此插值有唯一可解性。