FEM - 第三周作业 1 二次有限元

SA23001071 杨哲睿

2023 年 10 月 5 日

1 Introduction

编写程序求解两点边值问题:

$$\begin{cases} -u'' = f & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

选取等距网格剖分，有限元空间选取分段二次多项式空间 V_h，选取准确解 $u(x) = (x-1)\sin(x)$ 算出满足方程的 $f(x)$。

2 Method

定义双线性型 $a(u,v) = \int_0^1 u'v'\mathrm{d}x$，内积 $(f,g) = \int_0^1 f \cdot g\mathrm{d}x$。那么变分问题是

找 $u \in V = \{v \in H^1[0,1], v(0) = v(1) = 0\}$，使得 $a(u,v) = (f,v)$，$\forall v \in V$ 都成立.

实验中采用等距网格划分，单元数为 N，节点处的值为 $u_i = u(x_i) = u(ih)$，$h = 1/N$。选取分段二次多项式空间。标准单元形函数为:

$$\phi_0 = \begin{cases} (2x-1)(x-1) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2}$$

$$\phi_1 = \begin{cases} 4x(1-x) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3}$$

$$\phi_2 = \begin{cases} (2x-1)x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

局部基函数:

$$\phi_0^i = \phi_0(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}) \tag{6}$$

$$\phi_1^i = \phi_1(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}) \tag{7}$$

$$\phi_2^i = \phi_2(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}) \tag{8}$$

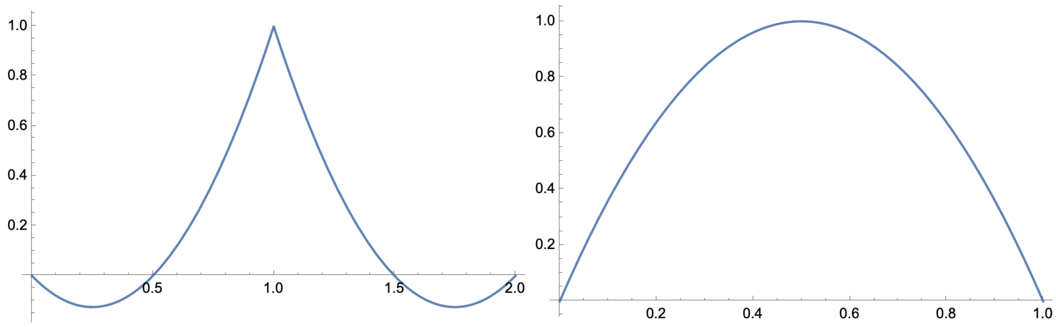
$$\tag{9}$$

全局基函数共 $2n+1$ 个，为:

$$\phi_i = \phi_2^i + \phi_0^{i+1} = \begin{cases} \left(2\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} - 1\right)\left(\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} - 1\right) & x_{i-1} \le x \le x_i \\ \left(2\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} - 1\right)\left(\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}\right) & x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall i = 1, 2, ..., N-1 \tag{10}$$

$$\phi_{i+1/2} = \begin{cases} \phi_1^i = 4\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\left(1 - \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right) & x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall i = 0, 1, ..., N-1 \tag{11}$$

形状如下图所示



(a) ϕ_i (b) $\phi_{i+1/2}$

局部刚度矩阵的系数计算:

$$K_{l,m} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} {\phi_l^i}' {\phi_m^i}' \mathrm{d}x = \frac{1}{h}\int_0^1 \phi_l' \phi_m' \mathrm{d}x \tag{12}$$

因此局部刚度矩阵为:

$$K = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \tag{13}$$

全局刚度矩阵:

$$A = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} \frac{16}{3} & -\frac{8}{3} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ -\frac{8}{3} & \frac{14}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3} & \frac{16}{3} & \frac{8}{3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{14}{3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{14}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{8}{3} & \frac{16}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2N-1)\times(2N-1)} \tag{14}$$

计算 (f, ϕ_j) 得:

$$\begin{aligned} f_j &\approx \frac{1}{3} h f(x_j) \\ f_{j+1/2} &\approx \frac{2}{3} h(x_{j+1/2}) \end{aligned} \tag{15}$$

因此为求解节点上的值, 只需要求解出 $AU = F$，其中:

$$U = \begin{pmatrix} u_{1/2} \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_{N-1/2} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_{1/2} \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \\ f_{N-1/2} \end{pmatrix} \tag{16}$$

3 Results

对于求得的系数，先进行插值，然后进行梯形公式数值积分。可以看出，有限元方法的 L^2 误差是三阶的，H^1 误差是二阶的。

表 1: 误差分析

n	L^2 error	order	H^1 error	order
10	8.0262e-6	—	1.6270e-03	—
20	1.0015e-6	3.00	4.1150e-04	1.98
40	1.2514e-7	3.00	1.0293e-04	1.99
80	1.5640e-8	3.00	2.5476e-05	2.00

4 Discussion

利用误差方程可知:

$$(u - u_h, v) = 0 \quad \forall v \in V_h \tag{17}$$

因也就是说：

$$\|u_h - u\| \le \|v - u\| \quad \forall v \in V_h \tag{18}$$

不妨考虑 u_I 为 u 的分片二次插值函数。在区间 $[a,b]$ 上，满足：

$$u(a) = u_I(a) \quad u(b) = u_I(b) \quad u(\frac{a+b}{2}) = u_I(\frac{a+b}{2}) \tag{19}$$

对于 $f = u - u_I$，在 $[a,b]$ 有三个零点，从而 f'' 在 $[a,b]$ 有一个零点。令 $M = \max_{x\in[a,b]} |f'''(x)| = \max_{x\in[a,b]} |u'''(x)|$

$$\sup |f''| < C(b-a)M \tag{20}$$

$$\sup |f'| < C(b-a)^2 M \tag{21}$$

$$\sup |f| < C(b-a)^3 M \tag{22}$$

即对于每个区间 $[x_{i-1}, x_i]$，有：

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f|^2 \mathrm{d}x < Ch^7 M \tag{23}$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (|f|')^2 \mathrm{d}x < Ch^5 M \tag{24}$$

对所有区间求和可知：

$$\int_0^1 |f|^2 \mathrm{d}x < Ch^6 M \tag{25}$$

$$\int_0^1 |f|^2 \mathrm{d}x < Ch^4 M \tag{26}$$

$$\tag{27}$$

那么：

$$\|u_h - u\|_{L^2} < \|u_I - u\| = O(h^3) \tag{28}$$

$$\|u_h' - u'\| \le \|u_I' - u'\| = O(h^2) \tag{29}$$

$$\tag{30}$$

即该有限元方法对 L^2 误差有 3 阶精度，对 H^2 误差有 2 阶精度。