FEM Code Report5

SA24229016 王润泽

2024 年 11 月 30 日

1 Introduction

编写程序求解 $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ 定义域范围的 Dirichlet 边值问题：

$$\begin{aligned} -\nabla^2 u = f \quad \text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

有限元空间选取为分段连续二次多项式空间 V_h

$$V_h = \{v_h \in C(\Omega) : v_h|_k \in P^2(k), \forall k \in \mathcal{T}_h, v_h|_{\partial\Omega} = 0\}. \tag{2}$$

要求，准确解为 $u(x,y) = (x-1)\sin(x)(y-1)\sin(y)$。

2 Algorithm

2.1 Variational Formulation

首先将 Dirichlet 边值问题转化为如下变分问题：

定义双线性形式：

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dxdy$$

线性形式

$$L(v) = \int_\Omega fv \, dxdy.$$

那么问题 (1) 的变分问题为：求 $u \in V = \{v \in H^2(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$ ，使得对于所有 $v \in V$ ，有：

$$a(u,v) = L(v). \tag{3}$$

2.2 Finite Element Space

为了进行数值求解，选择一个分段连续二次多项式空间 $V_h \subset V$ 进行求解。变分问题 (3) 的离散化形式为：Find $u_h \in V_h$ such that

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \tag{4}$$

2.2.1 Triangulation

首先，对于二维有限元问题，我们采用三角剖分的方法，将二维区域剖分为三角形网格集合 $\mathcal{T}_h = \{k_i\}$ ，每个三角形上定义一个局部的有限元空间。

考虑到我们采取的是分段连续二次多项式空间 V_h ，因此我们需要在每个局部三角形上定义一个二次多项式空间 $P^2(k)$，

$$P^2(k) = \mathrm{span}\{1, x, y, x^2, xy, y^2\}. \tag{5}$$

共有 6 个基函数，因此我们选择三角形的 3 个顶点和 3 个边中点作为基函数的支撑点，如图 1 所示.

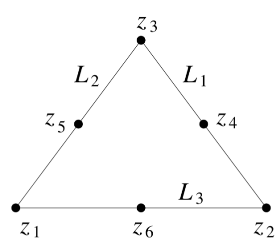

图 1: quadratic basis function

2.2.2 Local Basis Function

对于每个三角形 $k \in \mathcal{T}_h$, 由其三个顶点定义 P_1, P_2, P_3 和三个边中点 P_4, P_5, P_6，我们选取一个分段二次多项式空间作为局部的基函数 $u(x, y)$:

$$u(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2, \tag{6}$$

在三角形顶点处满足 $u(P_i) = u_i$ ，其中 P_i 为三角形顶点和边中点的全局坐标，u_i 为顶点处的值，$i = 1, 2, ..., 6$，u_i 即为待求解的值。此时对于每个点的基函数 $N_i(x, y)$ 满足：

$$N_i(P_j) = \delta_{ij}, \tag{7}$$

容易得到，基函数的表达式为：

$$N_1(x,y) = \lambda_1(2\lambda_1 - 1) \tag{8}$$

$$N_2(x,y) = \lambda_2(2\lambda_2 - 1) \tag{9}$$

$$N_3(x,y) = \lambda_3(2\lambda_3 - 1) \tag{10}$$

$$N_4(x,y) = 4\lambda_2\lambda_3 \tag{11}$$

$$N_5(x,y) = 4\lambda_3\lambda_1 \tag{12}$$

$$N_6(x,y) = 4\lambda_1\lambda_2 \tag{13}$$

其中，λ_i 为重心坐标函数，满足：

$$\begin{aligned} &\lambda_i(x,y) = \frac{1}{2\Delta_k}(a_i x + b_i y + c_i) \\ &a_i = y_j - y_m, \quad b_i = x_m - x_j, \quad c_i = x_j y_m - x_m y_j \end{aligned} \tag{14}$$

Δ_k 为三角形面积, i, j, m 为三角形顶点编号, 下标符合轮换对称性，且有 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$。

2.2.3 Stiffness Matrix

对于每个单位三角形 $\hat{k}$ 区域内的基函数 $\hat{N}_i(\lambda_1, \lambda_2)$ 求偏导数，根据双线性泛函 $a(\cdot,\cdot)$ 的定义，对于单位三角形局部刚度矩阵 $\hat{A}_k$ 可以写成：

$$\left(\hat{\mathbf{A}}_k\right)_{ij} = \int_{\hat{k}} \nabla \hat{N}_i \cdot \nabla \hat{N}_j \, d\lambda_1 d\lambda_2 \tag{15}$$

$$\hat{\mathbf{A}}_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \tag{16}$$

转换到全局坐标系下时，如果我们三角化过程满足，每个三角形 k 是标准直角三角形，

且三角形的面积为 $\Delta_k = \frac{h^2}{2}$，那么有：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial \lambda_1}, \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial \lambda_2} \\
\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda_1,\lambda_2)}\right| &= h^2
\end{aligned}
$$

此时，我们可以得到局部刚度矩阵 A_k ：

$$
\int_k \nabla N_i \cdot \nabla N_j \, dxdy = \int_{\hat{k}} \nabla \hat{N}_i \cdot \nabla \hat{N}_j \, d\lambda_1 d\lambda_2 \tag{17}
$$

即：

$$
\mathbf{A}_k = \hat{\mathbf{A}}_k \tag{18}
$$

在构造全局刚度矩阵时，只需将局部刚度矩阵 $\mathbf{A}_k$ 按照顶点索引的位置加到全局刚度矩阵 $\mathbf{A}$ 的对应位置上即可。比如，对于三角形 k 的局部刚度矩阵的元素 a_{12} 对应的分别是 u_1^k 和 u_2^k ，那么只要找到顶点 P_1^k 和 P_2^k 的全局索引，将 a_{12} 加到全局刚度 $\mathbf{A}$ 的对应位置上即可。

2.2.4 Load Vector

同理，对于单位三角形 $\hat{k}$ 区域内的基函数 $\hat{N}_i(\lambda_1,\lambda_2)$ ，根据线性泛函 $L(\cdot)$ 的定义，对于单位三角形局部载荷向量 $\hat{\mathbf{b}}_k$ 可以写成：

$$
\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{b}}_k)_i &= \int_{\hat{k}} f\hat{N}_i \, d\lambda_1 d\lambda_2 \\
&\approx f(P_i)\int_{\hat{k}} \hat{N}_i \, d\lambda_1 d\lambda_2
\end{aligned} \tag{19}
$$

$$
\hat{\mathbf{b}}_k = \begin{bmatrix} f(P_1) \\ f(P_2) \\ f(P_3) \\ f(P_4) \\ f(P_5) \\ f(P_6) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{bmatrix} \tag{20}
$$

转换到全局坐标系下时有：

$$
b_k = \hat{b}_k \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda_1,\lambda_2)}\right| = \hat{b}_k h^2 \tag{21}
$$

3 Results

(1). 求解出满足方程的 $f(x,y)$

$$\begin{aligned} f(x,y) = & ((x-1)\cdot\sin(x) - 2\cos(x))\cdot(y-1)\cdot\sin(y) \\ & ((y-1)\cdot\sin(y) - 2\cos(y))\cdot(x-1)\cdot\sin(x) \end{aligned} \tag{22}$$

(2). 对区域采用三角形网格剖分 $\mathcal{T}_h$ ，给出总网格个数、对应的内部结点和边界结点的个数：

对于整个空间，得到三角网格面元单元数为 $2N^2$, 内部顶点数为 $(2N-1)^2$，边界顶点数为 $8N$，

(3). 输出初始网格的结点编号和三角单元的编号方式: 如图 2 所示.

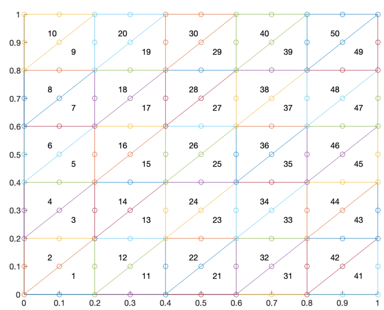

图 2: Triangulation

(4). 输出初始网格对应的刚度矩阵的非零元的图像: 如图 3 所示.

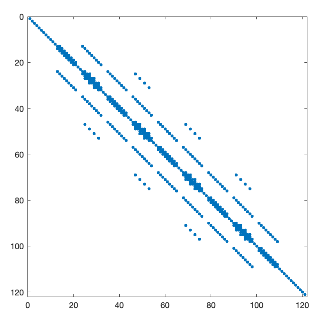

图 3: Stiffness Matrix

(6). 求解有限元问题，测试程序，并计算 L^2, H^1 误差和误差阶。

网格总数	总内部结点数	总边界点数	L^2 error	order	H^1 error	order
200	361	80	9.72E-07		8.04E-05	
800	1521	160	9.61E-08	3.338	1.80E-05	2.163
3200	6241	320	1.01E-08	3.253	4.19E-06	2.100
12800	25281	640	1.12E-09	3.169	1.01E-06	2.057

误差分析：因为选择了 2 次的 Lagrange 单元，那么它的插值误差是 $O(h^3)$ 的，对于导数的误差是 $O(h^2)$ 这和我们期望的误差阶是相同的。