FEM - 第 10 周作业

SA23001071 杨哲睿

2023 年 11 月 27 日

1 Introduction

编写程序求解两点边值问题:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad (x,y) \in \Omega = [0,1] \times [0,1] \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

选取等距网格剖分，有限元空间选取分段线性多项式空间 V_h，选取准确解 $u(x,y) = (x-1)\sin(x)(y-1)\sin y$ 算出满足方程的 $f(x,y)$。

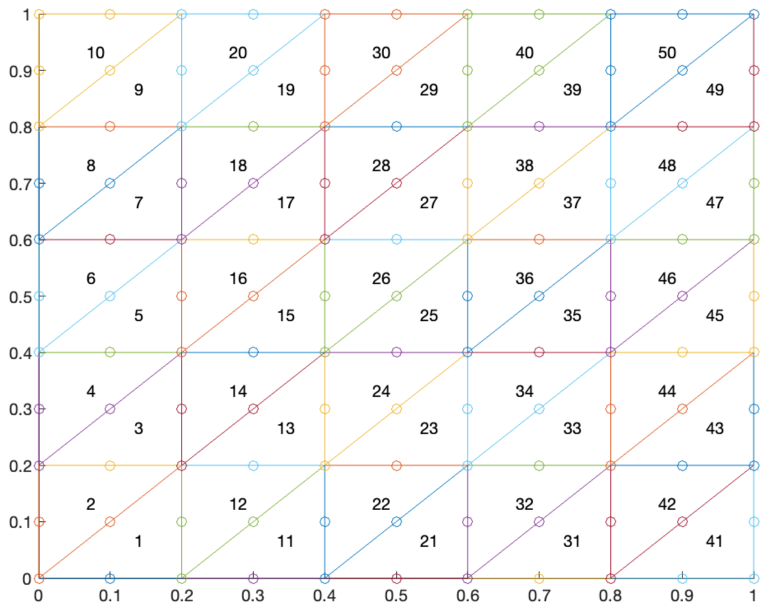
$$f(x,y) = (-2\cos x - (x-1)\sin x)(y-1)\sin y + (-2\cos y - (y-1)\sin y)(x-1)\sin x \tag{2}$$

2 Method

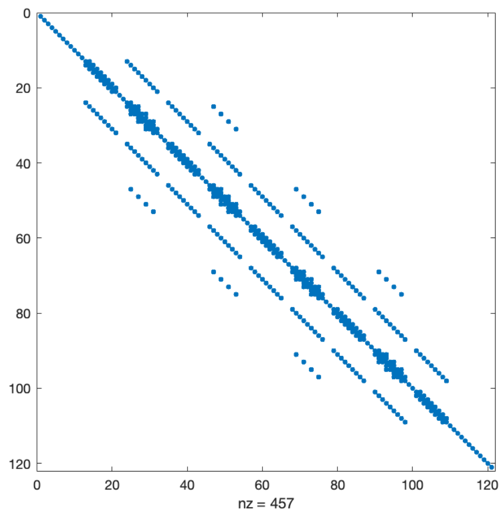
定义双线性型 $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x$，内积 $(f,g) = \int_\Omega f \cdot g \mathrm{d}x$。那么变分问题是找 $u \in V = \{v \in H^1[0,1], v|_\Omega = 0\}$，使得 $a(u,v) = (f,v)$，$\forall v \in V$ 都成立.
有限元空间为:

$$V_h = \left\{ v | v \in C(\Omega), v|_K \in P^2(K), K \in \mathcal{T}_h, v|_{\partial\Omega} = 0 \right\} \tag{3}$$

实验中采用三角网格划分，单元数为 $2N^2$ 如下，内部点数 $(2N-1)^2$，边界点数 $8N$。



对应的刚度矩阵为:



该刚度矩阵的构造采用了上课所说的第二种方法。先不考虑边界节点和内部点的区别，而直接构造刚度矩阵。由于我们采用的是零边界条件，所以可以将边界点 i 对应矩阵中的元素

$$K_{ij} = K_{ji} = 0 \quad \forall i \neq j \quad K_{ii} = 1 \tag{4}$$

按照这样的规则进行赋值。

局部刚度矩阵的计算：由于我们选取的是相当规则的单元，因此其局部刚度矩阵是容易直接计算的。对于标准形函数

$$\bar{\phi}_1 = 2(1-x-y)(\frac{1}{2}-x-y) \tag{5}$$
$$\bar{\phi}_2 = 4x(1-x-y) \tag{6}$$
$$\bar{\phi}_3 = 2x(x-\frac{1}{2}) \tag{7}$$
$$\bar{\phi}_4 = 4xy \tag{8}$$
$$\bar{\phi}_5 = 2y(y-\frac{1}{2}) \tag{9}$$
$$\bar{\phi}_6 = 4y(1-x-y) \tag{10}$$

其计算得到的矩阵为：

$$K = \left(\int_\Omega \nabla\bar{\phi}_i \cdot \nabla\bar{\phi}_j \mathrm{d}x\right) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{8}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \tag{11}$$

而经过变换后到局部基函数，所对应的矩阵也是完全相同的。以单元 1 为例。坐标变换为

$$\phi = \bar{\phi}\left(1-\frac{1}{h}x, \frac{1}{h}y\right) \tag{12}$$

那么

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x} &= -\frac{1}{h}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= \frac{1}{h}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial y} \end{aligned} \tag{13}$$

这说明了对于局部基函数：

$$\int_\Omega \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j \mathrm{d}x = \frac{1}{h^2}\int_\Omega \nabla\bar{\phi}_i \cdot \nabla\bar{\phi}_j \mathrm{d}x \tag{14}$$

而三角形的面积恰好是 $\frac{1}{2h^2}$，因此如果我们合理地规划顶点，始终让直角边出现在三角形的第一个标号上，那么实际上每一个局部刚度矩阵就是 K。这在构造稀疏矩阵系数时可以极大的简化操作。

3 Results

对于求得的系数，先进行 Lagrange 插值，然后进行梯形公式数值积分。可以看出，有限元方法的 L^2 误差是 3 阶的，H^1 误差是 2 阶的。

表 1: 误差分析

网格总数	总内部结点数	总边界点数	L^2 error	order	H^1 error	order
200	361	80	9.7205e-7	—	7.8018e-05	—
800	1521	160	9.6136e-08	3.3379	1.761e-05	2.1474
3200	6241	320	1.0087e-8	3.2526	4.1409e-06	2.0884
12800	25281	640	1.1216e-9	3.1689	1.0005e-6	2.0492

误差分析：因为选择了 2 次的 Lagrange 单元，那么它的插值误差是 $O(h^3)$ 的，对于导数的误差是 $O(h^2)$ 这和我们计算得到的误差阶是相同的。