Homework 5.

1.x.8. $f(\vec{x}) = |\vec{x}| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$|\alpha|=1$，不妨设 $\alpha=(0,0\ \cdots,\underset{i}{1},\cdots,0)$

$\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}|x| = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{\alpha_i}|x| = \frac{1}{2|x|}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{i=1} x_i^2\right) = \frac{x_i}{|x|} = \frac{x^{\alpha}}{|x|} \quad (\vec{x}\neq 0)$

1.x.9. 证明 $\psi\in C^{|\alpha|}(\Omega)$ 时，$D_w^{\alpha}(\psi)=D^{\alpha}(\psi)$

1° 当 $|\alpha|=0$ 时，对 $\forall\varphi\in C_0^{\infty}(\Omega)$，有 $\int_\Omega \psi\cdot\varphi\, dx = \int_\Omega \psi\cdot\varphi\, dx$ 显然

当 $|\alpha|=1$ 时，对 $\forall\varphi\in C_0^{\infty}(\Omega)$，设 $\alpha_i=1$，$\alpha_j=0$，$j\neq i$

$$\int_\Omega \psi\cdot\varphi^{\alpha}dx = \int_\Omega \psi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\cdot\varphi\, dx + \int_{\partial\Omega_i}\psi\cdot\varphi\, \vec{n}_i\cdot d\vec{s}_i$$

由于 $\varphi\in C_0^{\infty}(\Omega)$，$\varphi|_{\partial\Omega_i}=0$

所以 $\int_{\partial\Omega_i}\psi\cdot\varphi\,\vec{n}_i\cdot d\vec{s}_i = 0$

即 $\int_\Omega \psi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx = (-1)\int_\Omega \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\varphi\, dx$

由于 $\psi\in C^{|\alpha|} \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\in C^0\subset L^1_{loc}(\Omega)$，$\forall i$.

所以 $D_w^{\alpha}\psi = D^{\alpha}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \quad |\alpha|=1$

2° 假设对 $\forall\, |\alpha|<k\le n$ 成立，即 $\psi\in C^{|\alpha|}(\Omega)$

$$\int_\Omega \psi\, \varphi^{(\alpha)}dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \psi^{(\alpha)}\varphi\, dx$$

那么对 $|\alpha^*|=k$ 时，$\psi\in C^{|\alpha^*|}(\Omega) = C^{|\alpha|+1}(\Omega)$

设 $|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = k-1$，$\beta=(0,\cdots\underset{i}{1}\cdots 0)$

$\alpha^*=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i+1,\cdots\alpha_n) = \alpha+\beta$

$\Rightarrow \int_\Omega \psi\cdot\varphi^{(\alpha^*)}dx = \int_\Omega \psi\cdot(\varphi^{(\alpha)})^{(\beta)}dx$

考虑 $\varphi\in C_0^{\infty} \Rightarrow \varphi^{(\alpha)}\in C_0^{\infty}$

由1° $\Rightarrow \int_\Omega \psi\cdot\varphi^{(\alpha^*)}dx = (-1)\int_\Omega \psi^{(\beta)}(\varphi)^{(\alpha)}dx$

考虑 $\psi^{(\beta)}\in C^{|\alpha|}(\Omega)$，那么由假设：$|\alpha|<k\le n$

$\Rightarrow \int_\Omega \psi\cdot\varphi^{(\alpha^*)}dx = (-1)\cdot(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega (\psi^{(\beta)})^{(\alpha)}\varphi\, dx$.

$= (-1)^{|\alpha^*|}\int_\Omega \psi^{(\alpha^*)}\varphi\, dx$ （这里用到了强导数性质 $\psi^{(\alpha+\beta)} = \left(\psi^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = \left(\psi^{(\beta)}\right)^{(\alpha)}$）.

说明 $|\alpha^*|=k$ 时也成立

1.x.10.

假设 $j>1$ 时，$g_j = D_w^j f$ 存在，那么

$$\int_{-1}^{1} g_j(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|j|}\int_{-1}^{1} f(x)\,\varphi^{(j)}\,dx$$

考虑一阶弱导数

$$\int_{-1}^{1} f(x)\left(\varphi^{(j-1)}\right)^{(1)} dx = -\int_{-1}^{1} g(x)\,\varphi^{(j-1)}\,dx$$

其中 $g(x) = \begin{cases} 1 & x<0 \\ -1 & x>0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\left(\varphi^{(j)}\right) dx = \int_{-1}^{0}\varphi^{(j-1)}dx - \int_{0}^{1}\varphi^{(j-1)}dx$$

由 $\varphi \in C_0^\infty[\Omega]$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} g_j(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|j|}\left[2\varphi^{(j-2)}(0)\right]$$

两边取绝对值

$$\left|\int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)\,dx\right|^2 = 4\left|\varphi^{(j-2)}(0)\right|^2 \leq \|g\|^2\int_{-1}^{1}\varphi^2(x)\,dx.$$

由于 g_j 是 $f(x)$ 的 j 阶弱导数，

那么 $\|g_j\| < M_j < +\infty$，即 $4\left|\varphi^{(j-2)}(0)\right|^2 < M_j\|\varphi\|^2 \quad (*)$

考虑 $u_k = \begin{cases} \exp\left(\frac{-\varepsilon^k}{\varepsilon^k-|x|^k}\right) & x<\varepsilon \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$ $\quad u_k \in C_0^\infty(\Omega)$ 成立.

那么 $\|u_k\|^2 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u_k^2(x)\,dx \leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} 1\,dx < \varepsilon$

且有 $u_k^{(j)}(0) = \begin{cases} 1 & j=k \\ 0 & j<k. \end{cases}$

不妨令 $\varphi(x) = u_{j-2}(x)$

此时(*)：$4 < M\varepsilon$，取 ε 足够小，$\varepsilon < \frac{4}{M}$，

那么矛盾！

所以假设不成立。

1.x.13. : $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $f(x)=|x|^r$ $(|x|\leqslant 1)$，当 $r>1-n$ 时，证明 f 有一阶弱导数.

Proof: $|\alpha|=1$, $\alpha_i=1$, $\alpha_j=0$, $j\neq i$

令 $f_i=(\frac{\partial f}{\partial x})^\alpha=\frac{\partial f}{\partial x_i}=r x_i |x|^{r-2}$

先证：$f_i\in L^1(B)$，$B=\{x \mid |x|\leq 1\}$

$$\|f_i\|=\int_B|f_i|dx=\int_B r\cdot x_i|x|^{r-2}dx<r\int_B|x|^{r-1}dx$$

$$=r\cdot n\,W_{n-1}\int_0^1|x|^{r-1}|x|^{n-1}d|x|=\frac{rnW_{n-1}}{n+r-1}\quad(n+r-1>0)$$

$$<+\infty$$

其中 nW_{n-1} 是 n-单位球表面积.

所以 $|f_i|\in L^1(B)$ 成立.

再证：f_i 满足对 $\forall\varphi(x)\in L^1(B)$，有：$\int_B f(x)\varphi^{(\alpha)}(x)dx=-\int_B f_i\,\varphi(x)dx$.

对 取小球区间 $B_\varepsilon=\{x \mid |x|<\varepsilon\}$，$\bar{B}=B/B_\varepsilon$

那么：$\int_B f_i\varphi(x)\,dx=\int_{B_\varepsilon}f_i\varphi(x)dx+\int_{\bar{B}}f_i\varphi(x)dx$

$$=\int_{B_\varepsilon}f_i\varphi(x)dx+\int_{\partial\bar{B}}f(x)\varphi(x)\vec{n}_i d\vec{s}-\int_{\bar{B}}f(x)\varphi_i(x)dx$$

由于 $\varphi\in C_0^\infty(B)$，则有 φ 在 ∂B 上为 0，且 $|\varphi|\leqslant M$ 有界　　$\varepsilon^{r+n-1}W_{n-1}$

所以 一方面 $\left|\int_{\partial\bar{B}}f(x)\varphi(x)\vec{n}_i d\vec{s}\right|=\left|\int_{\partial B_\varepsilon}|\varepsilon|^r\varphi(x)\vec{n}_i d\vec{s}\right|\leqslant\varepsilon^r M\left|\int_{\partial B_\varepsilon}d\vec{s}\right|=nMW_{n-1}\varepsilon^{r+n-1}$ （nW_{n-1} 是 n-单位球表面积）

另一方面 $\left|\int_{B_\varepsilon}f_i\,\varphi(x)dx\right|=\left|\int_{B_\varepsilon}x_i|x|^{r-2}\varphi(x)\,dx\right|\leqslant M\int_0^\varepsilon|x|^{r-1}\cdot|x|^{n-1}nW_{n-1}\,d|x|=\frac{nMW_{n-1}}{n+r-1}\varepsilon^{n+r-1}$

以上可知　当 $\varepsilon\to 0$ 时　　$\bar{B}=B-B_\varepsilon\to B$

$$\left|\int_B f_i\varphi(x)dx-\left(-\int_{B-B_\varepsilon}f(x)\varphi_i(x)dx\right)\right|\leqslant C\cdot\varepsilon^{r+n-1}\to 0$$

那么可认 $f_i(x)=f^{(\alpha)}(x)=D_w^{(\alpha)}f(x)$ 为弱导数

1.x.16. 在 $\Omega=[a,b]$，$f\in W_1^1$ 时，证明：$\int_a^b D_w^1 f\,dx = f(b)-f(a)$，其中 f 在 $x=a,b$ 处连续.

proof. 由弱导数的定义：对 $\forall \varphi(x)\in C_0^1[a,b]$ 有

$$\int_a^b f\cdot\varphi'\,dx = -\int_a^b (D_w^1 f)\cdot\varphi\,dx$$

$$1-\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^k-\left(\frac{b-a}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{k^2}\right)^k}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^k\cdot\frac{1}{k}}$$

那么，不妨取 $\varphi(x)=\exp\left(-\dfrac{|x-\frac{a+b}{2}|^k}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^k-|x-\frac{a+b}{2}|^k}\right)$

$\varphi(x)$ 满足 $\forall x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$，$\varepsilon>0$，令 $\varepsilon=\dfrac{b-a}{2k^2}$，当 $\varepsilon\to0$，$k\to\infty$.

$$\varphi(x) > \exp\left(-\frac{|x-\frac{a+b}{2}|^k}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^k}\right)\geq \exp\left(-\left|1-\frac{1}{k^2}\right|^k\right)\geq 1-\frac{1}{k}$$

且当 $\varepsilon\to0$ 时，$\varphi(a+\varepsilon)=\varphi(b-\varepsilon)\to0$.

$$\varphi'(x)=\varphi(x)\cdot\frac{k\,|x-\frac{b+a}{2}|^{k-1}}{\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^k-|x-\frac{b+a}{2}|^k\right)^2}\leq\frac{2}{k(b-a)}$$

即当 $\varepsilon\to0$，$|\varphi'(x)|\to0$

所以：对于

$$\left|\int_a^b D_w^1 f\cdot dx-(f(b)-f(a))\right| = \left|\int_a^b D_w^1 f(x)\,dx-\int_a^b D_w^1 f(x)\cdot\varphi(x)\,dx-\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx-(f(b)-f(a))\right|$$

$$\leq \underbrace{\left|\int_a^b D_w^1 f(x)\,dx-\int_a^b D_w^1 f(x)\cdot\varphi(x)\,dx\right|}_{①}+\underbrace{\left|\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx+f(b)-f(a)\right|}_{②}$$

对于①：考虑到：$1-\varphi(x)\leq\frac{1}{k}$ 有

$$\left|\int_a^b D_w^1 f(x)\,dx-\int_a^b D_w^1 f(x)\cdot\varphi(x)\,dx\right|\leq \|D_w^1 f\|_1\cdot\int_a^b|1-\varphi(x)|\,dx\leq\frac{b-a}{k}\|D_w^1 f\|_1$$

对于②：考虑将积分拆成分段，对 $\varepsilon>0$

$$\left|\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx-f(a)+f(b)\right|\leq\left|\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}f(x)\varphi'(x)\,dx\right|+\left|\int_a^{a+\varepsilon}f(x)\varphi'(x)\,dx-f(a)\right|+\left|\int_{b-\varepsilon}^b f(x)\varphi'(x)+f(b)\right|$$

考虑到：$|\varphi'(x)|<\dfrac{2}{k(b-a)}$

$$\left|\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}f(x)\varphi'(x)\,dx\right| < \|f\|_1\cdot(b-a)\cdot\sup_{x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]}|\varphi'(x)| < \|f\|_1(b-a)\cdot\frac{2}{k(b-a)}=\frac{2\|f\|_1}{k}.$$

考虑到 $f(x)$ 在 $x=a$ 的连续，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\,\delta$，$|f(x)-f(a)|<\delta$

$$\left|\int_a^{a+\varepsilon}f(x)\varphi'(x)dx-f(a)\right| = \left|\int_a^{a+\varepsilon}\left(f(x)\varphi'(x)-f(a)\varphi'(x)\right)dx+f(a)\left(\int_a^{a+\varepsilon}\varphi'(x)dx-1\right)\right|$$

$$\leq \delta\left|\int_a^{a+\varepsilon}\varphi'(x)\,dx\right|+\left|f(a)\int_a^{a+\varepsilon}\varphi'(x)dx-1\right|$$

$$=\delta|\varphi(a+\varepsilon)|+|f(a)(\varphi(a+\varepsilon)-1)|$$

$$\leq\frac{f(a)}{k}+\delta$$

同理 $$\left|\int_{b-\varepsilon}^b f(x)\varphi'(x)+f(b)\right|\leq\frac{f(b)}{k}+\delta$$

所以结合 ①，②

$$\left|\int_a^b D_w^1 f\cdot dx-(f(b)-f(a))\right|\leq\frac{f(a)+f(b)}{k}+2\delta+\frac{2\|f\|_1}{k}+\frac{b-a}{k}\|D_w^1 f\|_1$$

因为 $f\in W_1^1$，所以 $\|f\|_1\leq M_1<+\infty$，$\|D_w^1 f\|_1\leq M_2<+\infty$

所以当 $\varepsilon\to0$，$k\to+\infty$，$\delta\to0\Rightarrow\left|\int_a^b D_w^1 f dx-(f(b)-f(a))\right|\to0$ 成立.

1.x.20

考虑对 $\forall x_0 \in [a,b]$，有 $u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^{b} u'(t)dt$

$$\Rightarrow |u(x)| \le |u(x_0)| + \int_{x_0}^{b} |u'(t)| dt$$

$$\Rightarrow |u(x)| \le |u(x_0)| + \|u'\|_1$$

$$\Rightarrow |u(x)| \le \inf_{x_0} |u(x_0)| + \|u'\|_1 = \frac{1}{b-a}\int_a^b \inf_{x_0} |u(x_0)| dx_0 + \|u'\|_1$$

$$\Rightarrow |u(x)| \le \frac{1}{b-a} \|u\|_1 + \|u'\|_1$$

$$\Rightarrow \sup_x |u(x)| \le C(\|u\|_1 + \|u'\|_1) \qquad C = \max\{\frac{1}{b-a}, 1\}$$

$$\Rightarrow \|u\|_\infty \le C(\|u\|_1 + \|u'\|_1)$$

下证对 $u \in W_1^1$ 成立.

由于 $C^\infty \cap W_1^1$ 在 W_1^1 中是稠密的，那么：

$$\forall u \in W_1^1[a,b],\ \exists \text{序列 } \{u_n\} \in C^\infty,\ \text{有 } \lim_{n\to\infty} u_n = u$$

那么对 $\forall \{u_n\}$：$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_\infty = \|u\|_\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_1 + \|u_n'\|_1 = \|u\| + \|u'\| = \|u\|_{W_1^1}$$

$$\Rightarrow \|u\|_\infty \le C\|u\|_{W_1^1} \qquad C = \max\{\frac{1}{b-a}, 1\} \qquad \#$$

1.x.21. 证明：$\Omega = [a,b]$，$\forall f \in W_1^1(\Omega)$，$f$ 是连续的.

proof：由 1.x.20，有 $n \to 0$

$$\|u_n - u\|_\infty \le C\|u_n - u\|_{W_1^1} \to 0$$

$u_n \in C^\infty$，且 L^∞ 完备. ∴ $\mathrm{ess}\sup_x |u_n - u_m| = \sup_x |u_n - u_m|$

所以 $\sup_x |u_n - u_m| \to 0 \quad (n, m \to \infty)$

$C[a,b]$ 是按 $\sup|f|$ 完备的.

所以 $\sup|u_n - u| \to 0$ 即 $u_n \to u \in C[a,b]$

1.x.30. 证明，$\forall 1 \le p \le \infty$，$\exists C$ 满足

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \le C \cdot \|v\|_{L^p(\Omega)}^{1-\frac{1}{p}} \|v\|_{W_p^1(\Omega)}^{\frac{1}{p}} \qquad \forall v \in W_p^1$$

proof：令 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 在极坐标下

$$v(1,\theta)^p = r^2 v(r,\theta)^p \Big|_0^1$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v(r,\theta)^p) dr$$

$$= \int_0^1 \left(2rv^p + pr^2 v^{p-1}\frac{\partial v}{\partial r}\right)dr$$

$$= \int_0^1 \left(2rv^p + pr^2 v^{p-1}\, \nabla v\cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial r}\right)dr$$

$$\leq \int_0^1 \left(2rv^p + 2pr^2 v^{p-1}\frac{\|\nabla v\|}{r}\right)dr$$

那么 $\|v\|^p_{L^p(\partial\Omega)} = \int_0^{2\pi} v^p(1,\theta)d\theta \leq \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(2v^p + 2p\ v^{p-1}\|\nabla v\|\right) r\,dr\,d\theta$

由于 $\frac{1}{q} = 1-\frac{1}{p} \Rightarrow p = q(p-1) \Rightarrow p-1 = \frac{p}{q}$

$$\|v\|^p_{L^p(\partial\Omega)} \leq \int_\Omega 2p\, v^{\frac{p}{q}}\cdot(v + \|\nabla v\|)\,d\Omega. \quad (p\geq 1)$$

$$\leq 2p\cdot\left(\int_\Omega v^{\frac{p}{q}\cdot q}d\Omega\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left[\int_\Omega (v+\|\nabla v\|)^p d\Omega\right]^{\frac{1}{p}} \quad (\text{Hölder})$$

$$\leq 2p\cdot \|v\|_p^{\frac{p}{q}}\cdot\left[\int_\Omega 2^{p-1}(v^p + \|\nabla v\|^p)\,d\Omega\right]^{\frac{1}{p}} \quad (\text{Jensen})$$

$$= C\cdot\|v\|_p^{\frac{p}{q}}\,\|v\|_{W_p^1}$$

得 $\|v\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\cdot\|v\|^{\frac{1}{q}}_{L^p(\Omega)}\cdot\|v\|^{\frac{1}{p}}_{W_p^1(\Omega)}$

对单位球 Ω 已知 $|\Omega|<+\infty$, $|\partial\Omega|<+\infty$

所以对 $\|v\|_{L^\infty(\partial\Omega)} = \lim_{p\to\infty}\|v\|_{L^p(\partial\Omega)}$

$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \lim_{p\to\infty}\|v\|_{L^p(\Omega)}$.

2.X.6. 在双线性泛函 $a(\cdot,\cdot)$ 满足 对称, 连续有界, 强制性时

有对 $\forall\, v\in V_h$, $\exists 1\ u_h$ 满足

$$F(v) = a(u_h, v).$$

那么 $Q(v) - Q(u_h) = a(v,v) - 2F(v) - a(u_h,u_h) + 2F(u_h)$

$= a(v,v) - a(u_h,u_h) + 2F(u_h - v)$

$= a(v,v) - a(u_h,u_h) + 2a(u_h, u_h - v)$

$= a(v,v) + a(u_h,u_h) - 2a(u_h, v)$

$= a(u_h - v, u_h - v)$

$= \|u_h - v\|_E \geq 0$

得 $Q(v) \geq Q(u_h)$ 当且仅当 $v = u_h$ 时取等

所以 u_h 是 $Q(v)$ 最小值点.

2.x.7. T为 Banach空间压缩映射，即

$\forall\ x,y \in V$, $V \in$ Banach Space，$\exists\, 0 \le k < 1$

$\|Tx - Ty\| \le k\|x-y\|$

那么对序列 $\{v_n\}$，由 Banach Space 完备性有：$\exists\, v \in V$，$\|v_n - v\| \le \frac{1}{n}$ 收敛

那么对 $\{v_n\}$ $\|Tv_n - Tv\| \le k\|v_n - v\| \le \frac{k}{n} \to 0 \quad (n\to\infty)$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} Tv_n = Tv$，$\Rightarrow$ T 是连续的

2.x.8. 对 $u,v \in V$

$A(u+v) = a(u+v,\cdot) = a(u,\cdot) + a(v,\cdot) = Au + Av$

对 $\lambda \in \mathbb{R}$

$A(\lambda u) = a(\lambda u,\cdot) = \lambda a(u,\cdot) = \lambda A(u)$

这里用到了 $a(\cdot,\cdot)$ 的双线性.

2.x.9. 由 Lax-Milgram 定理，$\exists\, u$，对 $\forall\, v$ 有

$$a(u,v) = F(v)$$

那么 $a(u,u) = F(u) \le \|F\|_{V'} \cdot \|u\|_V \quad \left(\|F\|_{V'} = \sup\limits_{u\in V} \frac{\|Fu\|_{V'}}{\|u\|_V}\right)$

由强制性，$\exists\,\alpha$，$\alpha\|u\|_V^2 \le a(u,u)$

$\Rightarrow \quad \|u\|_V \le \frac{1}{\alpha}\|F\|_{V'}$

2.x.10. $\int_0^1 f\cdot v\,dx = \int_0^1 (-u'' + ku' + u)v\,dx \qquad V = \{v \in H^1(0,1),\ v(0) = 0\}$

$= \int_0^1 (u'v' + ku'v + uv)\,dx$

def: $a(u,v) = \int_0^1 (u'v' + ku'v + uv)\,dx$

$a(v,v) = \int_0^1 v'^2 + kv'v + v^2\,dx$

不妨令 $v(x) = x \in V$，那么.

$a(v,v) = \frac{1}{2} + \frac{k}{2} + \frac{1}{3}$

当 $k = -\frac{5}{3}$ 时 $a(v,v) = 0$ 且 $v \neq 0$