FEM Code Report 1

SA24229016 王润泽

2024 年 9 月 14 日

1 Introduction

编写程序求解以下两点边值问题 (1)：

$$
\begin{aligned}
&-u'' = f, \quad 0 < x < 1, \\
&u(0) = u(1) = 0.
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中取 $f(x) = -(2\cos x - (x-1)\sin x)$，已知其解析解为 $u(x) = (x-1)\sin x$。

2 Method

给定双线性形式 $a(u,v)$ 和内积 (f,g)，定义如下：

$$
\begin{aligned}
a(u,v) &= \int_0^1 u'v'\,dx, \\
(f,g) &= \int_0^1 f\cdot g\,dx.
\end{aligned}
$$

由此，问题 (1) 转变为变分问题 (2)：

寻找 $u \in \mathcal{V} = \{v \in C[0,1], v(0) = v(1) = 0\}$，使得对所有 $v \in \mathcal{V}$，均有：

$$
a(u,v) = (f,v). \tag{2}
$$

实验中采用等距网格划分，节点数为 $N+2$，在每个节点处的函数值记为 u_i，且已知 $u_0 = 0, u_{N+1} = 0$ ，网格步长为 $h = 1/N$。选取基函数 φ_i，并通过这些基函数所张成的有限维线性空间 $V_h = \mathrm{span}\{\varphi_i\}$ 进行求解。此时得到原问题的离散形式解为：$u_h = \sum_{i=1}^N u_i\varphi_i$，其中 u_i 为待求解的系数, 而 $v_h = \sum_{i=1}^N v_i\varphi_i$。

此时变分问题的离散形式为问题 (3)：

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} u_i a(\varphi_i, \varphi_j) v_j \\ (f, v_h) &= \sum_{i=1}^{N} f_i v_i \end{aligned} \tag{3}$$

实验中基函数定义如下：

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i), \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4}$$

得到公式 (3)中刚度矩阵各项：

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} -\dfrac{1}{h}, & |i-j| = 1 \\ \dfrac{2}{h}, & i = j \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5}$$

因此，刚度矩阵为：

$$A = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

同理，根据公式 (4)，得到对各个基函数与 f 的内积，即荷载向量各项为：

$$f_i = (f, \varphi_i) = \int_0^1 f \varphi_i \, dx = 4(hj-1)\sin^2(h/2) sin(hj)/h - 2\sin(h)\cos(hj) \tag{7}$$

以上，得到变分问题的离散形式为，对任意的 $V = (v_1, v_2, \cdots, v_N)^T$，有：

$$V^T A U = V^T F \tag{8}$$

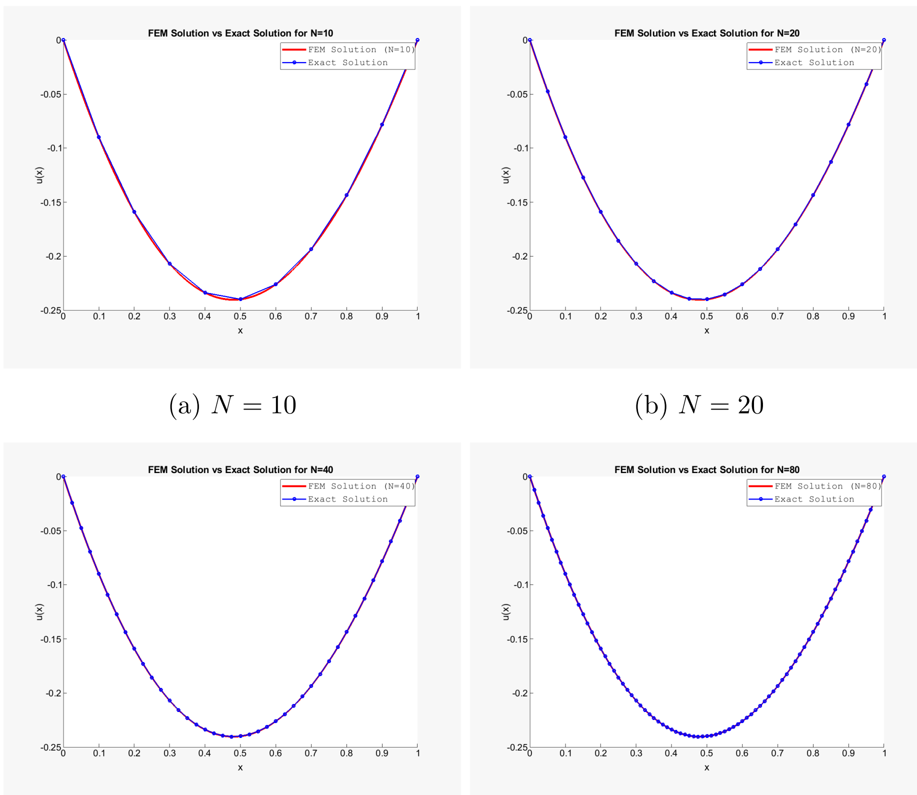
进一步，只要求解出 $AU = F$ 即可得到 U，即为问题 (1) 的数值解，其中：

$$\begin{aligned} U &= (u_1, u_2, \cdots, u_N)^T, \\ F &= (f_1, f_2, \cdots, f_N)^T. \end{aligned} \tag{9}$$

3 Results

3.1 数值拟合效果

通过调整 $N = \{10, 20, 40, 80\}$ 的值，得到不同的数值解，与解析解进行比较，如图 1 所示。



(a) $N = 10$

(b) $N = 20$

(c) $N = 40$

(d) $N = 80$

图 1: 北大天元绘制的拟合图像

3.2 误差分析

由于已知其解析解为：

$$u(x) = (x-1)\sin x. \tag{10}$$

完成数值求解后，使用 L^2 范数和 H^1 范数计算误差，对结果进行讨论。

L^2 范数的定义为：

$$\|e\|_{L^2} = \left(\int_0^1 (u(x) - u_h(x))^2 \, dx \right)^{1/2}, \tag{11}$$

H^1 范数的定义为：

$$\|e\|_{H^1} = \left(\int_0^1 \left((u(x) - u_h(x))^2 + (u'(x) - u_h'(x))^2 \right) dx \right)^{1/2}. \tag{12}$$

其中，实验中利用差分计算导数。

得到如下结果：

表 1: 误差分析

N	L^2 error	order	H^1 error	order
10	1.70×10^{-3}	-	5.39×10^{-2}	-
20	4.26×10^{-4}	2.00	2.69×10^{-2}	1.00
40	1.07×10^{-4}	2.00	1.34×10^{-2}	1.00
80	2.66×10^{-5}	2.00	6.68×10^{-3}	1.01

4 Discussion

本节着重进行误差分析，令 $v \in V_h$ 为一分片线性函数，满足：

$$v(x_i) = u(x_i) \quad \forall i = 1, 2, \cdots, N \tag{13}$$

其中 u 是两点边值问题的古典解。

令 e = v - u, 那么考虑区间 $[a, b]$ 上的 C^1 函数 f, 满足 $f(a) = f(b) = 0$，那么 $|f| < \frac{b-a}{2} \max |f'|$，积分

$$\int_a^b |f(x)| dx < \frac{b-a}{2} \max |f'| \tag{14}$$

结合上式和微分中值定理可得，对于 e, e' 有：

$$\begin{aligned} \sup_x |e'| &\leq C_1 h \sup_x |u''| \\ \sup_x |e| &\leq C_2 h^2 \sup_x |u''| \end{aligned} \tag{15}$$

那么：

$$\begin{aligned} ||u-v||_2 &\le C_1 h^2 \sup_x |u''| \\ ||u'-v'||_2 &\le C_2 h \sup_x |u''| \end{aligned} \tag{16}$$

因此，L^2 误差和 H^1 误差的阶数分别为 2 和 1，和实验结果一致。

A Code

```
function [x, u_h] = fem_solver(N,F_load)
    % Mesh generation
    a = 0; b = 1;  % Interval [0,1]
    h = (b - a) / N;  % Step size
    x = linspace(a, b, N+1);  % Mesh points
    % Preallocate index and value arrays for the sparse matrix
    I = zeros(3*N-5, 1);  % Row indices
    J = zeros(3*N-5, 1);  % Column indices
    S = zeros(3*N-5, 1);  % Non-zero values
    index = 0;  % Index counter
    % Construct the sparse matrix K

    for i = 1:N-1
        index = index + 1;
        % Diagonal element
        I(index) = i;J(index) = i;S(index) = 2/h;
        if i > 1
            % Lower diagonal element
            index = index+1;I(index) = i;J(index) = i-1;S(index) = -1/h;
        end
        if i < N-1
            % Upper diagonal element
            index = index+1;I(index) = i;J(index) = i+1;S(index) = -1/h;
        end
    end

    % Construct the sparse matrix K using the sparse function
    K = sparse(I, J, S, N-1, N-1);
    % Construct the load vector F
```

```
    F = zeros(N-1, 1);
    for j = 1:N-1
        F(j) = F_load(j,h);
    end
    % Solve the linear system K * u_h = F
    u_h = K \ F;
    % Apply boundary conditions u(0) = 0 and u(1) = 0
    u_h = [0, u_h', 0];
end
```

Listing 1: FEM Solver

```
% Main script: Call FEM solver and plot results for different N values
Ns = [10, 20, 40, 80];  % Different values for N
u_exact = @(x) (x - 1) .* sin(x);  % Exact solution
u_exact_der = @(x) sin(x)+(x-1).*cos(x);
% Load function integrate f*phi
F_load = @(i,h) 4*(h*i - 1) * sin(h/2)^2 * sin(h*i)/h - 2*sin(h) * cos(h*i);

num = 10000;
delta_x = 1/num;
x = linspace(0,1,num);
u_exact_values = u_exact(x);
L2_error_list = zeros(1,4);
L2_diff_error_list = zeros(1,4);

for i = 1:length(Ns)
    N = Ns(i);
    % Call FEM solver to get mesh points and FEM solution
    [x_sample, u_sample] = fem_solver(N,F_load);
    % Calculate the exact solution at mesh points
    u_h = interp1(x_sample,u_sample, x);
    % Compute the L2 norm error
    L2_error = sqrt(sum((u_h - u_exact_values).^2)*delta_x);
    u_diff_h = diff(u_h)/delta_x;
    u_diff_exact = diff(u_exact_values)/delta_x;
    L2_diff_error = sum((u_diff_h - u_diff_exact).^2)*delta_x;
    L2_diff_error = sqrt(L2_error^2 + L2_diff_error);
    % Print the error
```

```
    fprintf('L2 norm error with N=%d: %e\n', N, L2_error);
    fprintf('LH1 norm error with N=%d: %e\n', N, L2_diff_error);
    L2_error_list(i) = L2_error;
    L2_diff_error_list(i) = L2_diff_error;
end

for i = 2:length(Ns)
    N_now = Ns(i);
    N_old = Ns(i-1);
    order_l2 = log(L2_error_list(i-1)/L2_error_list(i))/log(N_now/N_old);
    order_l2_diff = log(L2_diff_error_list(i-1)/L2_diff_error_list(i))/log(
        N_now/N_old);
    fprintf("N:%d, L2 order:%e, LH1 order:%e\n",N_now,order_l2,order_l2_diff);
end
end
```

Listing 2: Main Code