FEM Code Report3 - 2nd Order

SA24229016 王润泽

2024 年 10 月 7 日

1 Introduction

编写程序求解两点边值问题：

$$\begin{aligned} &-u'' = f, \quad 0 < x < 1, \\ &u(0) = u(1) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

选取等距网格剖分，有限元空间选取分段二次多项式空间 V_h ，每个单元的基函数利用单元 $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ 端点 x_{j-1}, x_j 和中点 $x_{j-1/2} = \frac{x_{j-1}+x_j}{2}$ 得到。

2 Method

2.1 Variational Formulation

对于问题 (1)，转换成变分问题为：求 $u \in V = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = v(1) = 0\}$ ，使得对于所有 $v \in V$ ，有：

$$a(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in V, \tag{2}$$

其中 $a(u,v) = \int_0^1 u'v'\,dx$ ，$(f,v) = \int_0^1 fv\,dx$ 。

2.2 基函数

实验中采用等距网格划分，单元数为 N，节点处的值为 u_i , 步长 $h_i = x_i - x_{i-1} = h$ 。选取分片二次全局基函数 $\phi_i(x)$，并选取其张成的有限维二次空间 V_h 进行求解。

对于标准单元 $I = [0,1]$, 其标准单元型基函数定义如下：

$$\varphi^0(x) = \begin{cases} (2x-1)(x-1), & x \in [0,1], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3}$$

$$\varphi^1(x) = \begin{cases} 4x(1-x), & x \in [0,1], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4}$$

$$\varphi^2(x) = \begin{cases} (2x-1)x, & x \in [0,1], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5}$$

对于单元 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$，其局部基函数 ψ 定义如下：

$$\psi_i^0(x) = \varphi^0\left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right) \tag{6}$$

$$\psi_i^1(x) = \varphi^1\left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right) \tag{7}$$

$$\psi_i^2(x) = \varphi^2\left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right) \tag{8}$$

对每个节点 $x_i, x_{i-1/2}$ ，一共有 $2N+1$ 个对应的全局基函数 ϕ，定义如下：

$$\phi_i = \psi_i^2 + \psi_{i+1}^0 = \begin{cases} \left(2\frac{x - x_{i-1}}{h_i} - 1\right)\left(\frac{x_i - x}{h_i}\right), & x \in I_i, \\ \left(2\frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} - 1\right)\left(\frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}}\right), & x \in I_{i+1}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{9}$$

$$\phi_{i-1/2} = \psi_i^1 = \begin{cases} 4\left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i}\right)\left(\frac{x_i - x}{h_i}\right), & x \in I_i, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{10}$$

全局基函数形状如图 1 所示。由此可以得到由二次基函数张成的有限维空间 V_h 所定义的带解函数：

$$u_h = \sum_{i=1}^{N-1} u_i \phi_i + \sum_{i=1}^{N} u_{i-1/2} \phi_{i-1/2} \tag{11}$$

其中，$u_i, u_{i-1/2}$ 为待求解的系数。

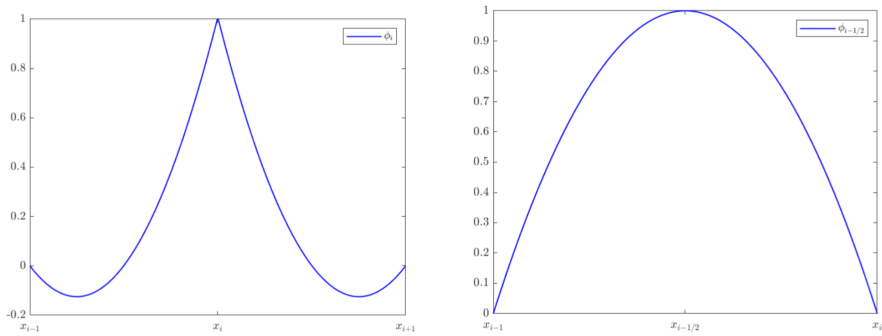

图 1: 全局基函数

2.3 刚度矩阵

局部刚度矩阵的系数为：

$$K_{l,m} = \int_{I_i} \psi_i^l(x)'\psi_i^m(x)'\,dx = \int_0^1 \phi^l(x)'\phi^m(x)'\,dx, \quad l,m = 0,1,2. \tag{12}$$

计算可得：

$$K = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} \frac{7}{3}, & -\frac{8}{3}, & \frac{1}{3} \\ -\frac{8}{3}, & \frac{16}{3}, & -\frac{8}{3} \\ \frac{1}{3}, & -\frac{8}{3}, & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \tag{13}$$

全局刚度矩阵：

$$A = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} \frac{16}{3} & -\frac{8}{3} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{8}{3} & \frac{14}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{8}{3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{14}{3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{14}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{8}{3} & \frac{16}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2N-1)\times(2N-1)} \tag{14}$$

2.4 荷载向量

对于荷载向量 F 的分量计算为 $f_i = (f, \phi_i)$ ，$f_{i-1/2} = (f, \phi_{i-1/2})$，Taylor 展开近似计算可得：

$$\begin{aligned} f_i &\approx \frac{1}{3} h f(x_i) \\ f_{i-1/2} &\approx \frac{2}{3} h f(x_{i-1/2}) \end{aligned} \tag{15}$$

2.5 数值解

对于离散问题，只需求解 $AU = F$ 即可得到 U，即为问题 (1) 的数值解，其中：

$$U = \begin{pmatrix} u_{1/2} \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_{N-1/2} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_{1/2} \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_{N-1/2} \end{pmatrix} \tag{16}$$

3 Results

实验中选择 $f(x) = 2\pi^2 \sin(\pi x)$ 作为右端项，$u(x) = \sin(\pi x)$ 作为精确解。取 $N = 10, 20, 40, 80$，分别计算 L^2 误差和 H^1 误差。

对于求得的系数，先进行插值，然后进行梯形公式数值积分。实验得到的结果如表 1，可以看出在二次多项式空间下，有限元方法的 L^2 误差是三阶的，H^1 误差是二阶的

表 1: 误差分析

N	L^2 error	order	H^1 error	order
10	1.63E-03		8.03E-06	
20	4.12E-04	3.00	1.00E-06	1.98
40	1.03E-04	3.00	1.25E-07	2.00
80	2.56E-05	3.00	1.56E-08	2.01

4 Discussion

根据误差方程：

$$< u - u_h, v >= 0, \quad \forall v \in V_h \tag{17}$$

等价于：

$$||u - u_h|| \leq ||u - v||, \quad \forall v \in V_h \tag{18}$$

假设 u_I 是 u 的分片二次插值函数，在区间 $[a, b]$ 上，满足：

$$u(a) = u_I(a), \quad u(b) = u_I(b), \quad u(\frac{a+b}{2}) = u_I(\frac{a+b}{2}) \tag{19}$$

定义函数 $f(x) = u(x) - u_I(x)$，那么 $f(a) = f(b) = f(\frac{a+b}{2}) = 0$，由微分中值定理可得：f'(x) 在区间 $[a, b]$ 上至少有两个零点，即 $f''(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上至少有一个零点。因此可以得到：

$$\begin{aligned} \sup |f''| &< C(b-a)M, \\ \sup |f'| &< C(b-a)^2 M \\ \sup |f| &< C(b-a)^3 M \end{aligned} \tag{20}$$

其中，$M = \sup |u''|$ ，C 为常数。

由此可知，对于每个区间 I_i，有：

$$\int_{I_i} |u - u_h|^2 \, dx \leq Ch^7 M \int_{I_i} |u' - u_h'|^2 \, dx \leq Ch^5 M \tag{21}$$

对于整个区间 $[0, 1]$，有：

$$\begin{aligned} ||u - u_h||^2 &\leq Ch^6 M \\ ||u' - u_h'||^2 &\leq Ch^4 M \end{aligned} \tag{22}$$

由此可以证明，对于二次多项式空间，有限元方法的 L^2 误差是三阶的，H^1 误差是二阶的：

$$\begin{aligned} ||u - u_h|| &= O(h^3) \\ ||u' - u_h'|| &= O(h^2) \end{aligned} \tag{23}$$