SA23001071 杨哲睿

1.x.8

Prove that $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha |x| = \frac{x^\alpha}{|x|}$ for all $x \neq 0$ and $|\alpha| = 1$.

Proof: 令$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$，显然$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

$$\frac{\partial |x|}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{2\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} = \frac{x_i}{|x|}$$

这就说明了：

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha |x| = \frac{x^\alpha}{|x|}, \quad \forall x \neq 0, |\alpha| = 1$$

1.x.9

Prove proposition 1.2.7. (Hint: use integration by parts and the fact that $C^0 \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$)

Proof：我们采用递推法进行说明。取$\psi \in C^n(\Omega)$：

Step 1：对于$|\alpha| = 0$，定理成立，即

$$\int_\Omega \psi(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \psi(x) g(x)\,\mathrm{d}x$$

这是平凡的。

Step 2：对于 $|\alpha| = 1$，$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$， 由 Green 公式可知：

$$\int_\Omega \varphi(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \varphi(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \varphi(x)\psi(x)\boldsymbol{n}\cdot \mathrm{d}S$$

而因为φ在Ω 上有紧支集，从而

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(x)\psi(x)\boldsymbol{n}\cdot \mathrm{d}S = 0$$

因此

$$\int_\Omega \varphi(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \varphi(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x$$

成立，另外，因为 $\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \in C^0(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 那么对于 $|\alpha| = 1$，有：

$$D_w^\alpha \psi = \psi^{(\alpha)}$$

Step 3：假设对于 $|\alpha| < k \leq n$ 定理成立，即

$$\int_\Omega \psi^{(\alpha)}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \psi(x)\varphi^{(\alpha)}(x)\,\mathrm{d}x$$

证明对于 $|\alpha'| = k$ 成立。我们说明如下的事实： 对于如下的多重指标

$$\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i + 1, ..., \alpha_n), \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \beta = \left(0, ..., \underbrace{1}_{i\text{-th}}, ..., 0\right)$$

有:

$$D_w^{\alpha'}\psi=\psi^{(\alpha')}=D^{\beta}(D^{\alpha}\psi)$$

因为 $k\le n$，所以强导数 $D^{\alpha}\psi\in C^1(\Omega)$，利用Green公式，以及 φ 具有紧支集,

$$\int_\Omega \frac{\partial \psi^{(\alpha)}}{\partial x_i}\varphi(x)\,\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|+1}\int_\Omega \psi\frac{\partial \varphi^{(\alpha)}}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x$$

上面的式子就是:

$$\int_\Omega \psi^{\alpha'}\varphi(x)\,\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha'|}\int_\Omega \psi(x)\varphi^{(\alpha')}(x)\,\mathrm{d}x$$

另外，$D^{\alpha'}\psi\in C^0(\Omega)\subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$， 从而对于 $|\alpha'|=k$，$D_w^{\alpha'}\psi=D^{\alpha'}\psi$ 成立。

综上所述，对于$\psi\in C^{|\alpha|}$，有$D_w^{\alpha}\psi=D^{\alpha}\psi$.

1.x.10

Prove that weak derivatives of order greater than one of the function, f, in Example 1.2.5 do not exist.

$f(x)=1-|x|$

Proof：定义域为$[-1,1]$区间，不使用多重指标来表示导数。假设弱导数存在，对 $k\ge 2$，弱导数$D_w^k f=g_k\in L_{\mathrm{loc}}([-1,1])$，成立如下的:

$$\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega),\quad \int_{-1}^{1} g_k(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=(-1)^k\int_{-1}^{1} f(x)\varphi^{(k)}(x)\,\mathrm{d}x$$

因为其1阶弱导数存在，因此，对等式右端用一阶的弱导数替换:

$$\int_{-1}^{1} g_k(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=(-1)^{k-1}\int_{-1}^{1} g(x)\varphi^{(k-1)}(x)\,\mathrm{d}x$$

其中 $g(x)$ 为 $D_w^1 f$表达式如下:

$$g(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ -1 & x>0\end{cases}$$

那么，由 φ 有紧支集:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} g_k(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x&=(-1)^{k-1}\left(\int_{0}^{1}\varphi^{(k-1)}(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-1}^{0}\varphi^{(k-1)}(x)\,\mathrm{d}x\right)\\&=(-1)^{k-1}\left(\varphi^{(k-2)}(1)-\varphi^{(k-2)}(0)-\varphi^{(k-2)}(0)+\varphi^{(k-2)}(-1)\right)\\&=2\varphi^{(k-2)}(0)(-1)^k\end{aligned}$$

定义如下的函数，其中 $\xi>0$:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\exp\left(\frac{-|x|^k}{\xi^k-|x|^k}\right) & |x|\le\xi\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

显然 $\psi(0)=1,\forall\xi>0,\psi^{(i-1)}(0)=0,\forall 0<i<k$，从而

$$\varphi(x) < 1 \Rightarrow \int_{-\xi}^{\xi} \varphi(x)^2 \, \mathrm{d}x \le 2\xi$$

对于先前的公式利用Cauchy不等式可知：

$$\|g_k\| \|\varphi\| > \left|2\varphi^{(k-2)}(0)(-1)^k\right| = 2\left|\varphi^{(k-2)}(0)\right| = 2$$

因为 $g_k \in L^1([-1,1])$，那么$g_k \in L^2([-1,1])$，即 $\|g_k\| = M_k < \infty$

$$M_k(2\xi) > 2 \quad \forall \xi > 0$$

令 $\xi \to 0$ 矛盾。因此高于1阶的弱导数都不存在。

1.x.13

Let $f(x) = |x|^r$ for a given real number r. Prove that f has first-order weak derivative on the unit ball provided that $r > 1 - n$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = r x_i |x|^{r-2}$$

首先验证，对于$r > 1 - n$它是L^1的。

$$\left|x_i |x|^{r-2}\right| \le |x|^{r-1}$$

以下说明 $|x|^{r-1}$在$\mathbb{R}^n$中的单位球B 有 L^1可积。

$$\begin{aligned}\int_B |x|^{r-1} \, \mathrm{d}x &= \int_0^1 n\omega_{n-1} |x|^{n-1} |x|^{r-1} \, \mathrm{d}|x| \\ &= n\omega_{n-1} \int_0^1 |x|^{n+r-2} \, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中的 $n\omega_{n-1}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面面积。因为 $r > 1 - n$，所以 $n + r > 1$，从而上面的积分

$$\int_B |x|^{r-1} \, \mathrm{d}x = \frac{n\omega_{n-1}}{n + r - 1}$$

而因为 $\left|x_i |x|^{r-2}\right| \le |x|^{r-1}$，从而 $x_i |x|^{r-2}$是L^1的。

还需要验证 $\forall \varphi \in C_0^\infty(B)$ 有

$$\int_B \varphi(x) f_i(x) \, \mathrm{d}x = -\int_B \varphi_i(x) f(x) \, \mathrm{d}x$$

设 $\varepsilon > 0$，以及闭球 $\bar{B}_\varepsilon = \{|x| \le \varepsilon\}$，那么对于区域 $B - \bar{B}_\varepsilon$利用Green公式有：

$$\begin{aligned}\int_B \varphi(x) f_i \, \mathrm{d}x &= \int_{B - \bar{B}_\varepsilon} \varphi(x) f_i(x) \, \mathrm{d}x + \int_{\bar{B}_\varepsilon} \varphi(x) f_i(x) \, \mathrm{d}x \\ &= -\int_{B - \bar{B}_\varepsilon} \varphi_i(x) f(x) \, \mathrm{d}x - \int_{\partial \bar{B}_\varepsilon} \varepsilon^r \varphi(x) n_i \, \mathrm{d}S + \int_{\bar{B}_\varepsilon} \varphi(x) f_i(x) \, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

一方面，因为 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$，从而在 $\forall x \in \bar{B}_\varepsilon$ 有 $|\varphi(x)| \le M < \infty$，

$$0 \leq \left| \int_{\partial \bar{B}_\varepsilon} \varepsilon^r \varphi(x) n_i \, \mathrm{d}S \right| \leq n\omega_{n-1}\varepsilon^{r+n-1} M \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

另一方面，因为 $\forall x \in \bar{B}_\varepsilon$，$|f_i| < |x|^{r-1}$，从而

$$0 \leq \left| \int_{\bar{B}_\varepsilon} \varphi(x) f_i(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq M\|f_i\|_1 \leq M \left\| |x|^{r-1} \right\|_1 \leq \frac{Mn\omega_{n-1}}{n+r-1}\varepsilon^{n+r-1} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

因此，令 $\varepsilon \to 0$ 可得:

$$\int_B \varphi(x) f_i(x) \, \mathrm{d}x = -\int_B \varphi_i(x) f(x) \, \mathrm{d}x$$

1.x.16

Let $n = 1$, $\Omega = [a, b]$, and $f \in W_1^1(\Omega)$. Prove that:

$$\int_a^b D_w^1 f(x) \, \mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

under the assumption that f is continious at a and b

Proof：构造如下的函数 φ 其中 $k > 1$

$$\varphi = \exp\left(-\frac{\left| x - \frac{a+b}{2} \right|^k}{\left(\frac{b-a}{2} \right)^k - \left| x - \frac{a+b}{2} \right|^k} \right)$$

不难验证，$\varphi \in C_0^\infty[a, b]$，以及对于$\varepsilon = \frac{b-a}{2k^2}$，$\forall a + \varepsilon < x < b - \varepsilon$

$$1 \geq \varphi(x) > \exp\left(-\frac{\left| x - \frac{a+b}{2} \right|^k}{\left(\frac{b-a}{2} \right)^k} \right) \geq \exp\left(-\left| 1 - \frac{1}{k^2} \right|^k \right) \geq \left| 1 - \frac{1}{k^2} \right|^k \geq 1 - \frac{1}{k}$$

通过弱导数定义可得:

$$\int_a^b D_w^1 f(x) \varphi(x) \, \mathrm{d}x = -\int_a^b \varphi'(x) f(x) \, \mathrm{d}x$$

此时

$$\left| \int_a^b D_w^1 f(x) \varphi(x) \, \mathrm{d}x - \int_a^b D_w^1 f(x) \, \mathrm{d}x \right| < \frac{b-a}{k} \|D_w^1 f(x)\|_1$$

因为 f 在 a, b 连续，所以对 $\delta > 0$，当 ε 充分小时，

$$\forall a \leq x \leq a + \varepsilon, |f(x) - f(a)| < \delta$$
$$\forall b \leq x \leq b + \varepsilon, |f(x) - f(b)| < \delta$$

考虑如下的积分:

$$\int_a^b \varphi' f \, \mathrm{d}x = \int_a^{a+\varepsilon} \varphi' f(x) \, \mathrm{d}x + \int_{b-\varepsilon}^b \varphi' f(x) \, \mathrm{d}x + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \varphi' f(x) \, \mathrm{d}x$$

对于

$$\left|\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \varphi' f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \|f\|_1 \sup_{a+\varepsilon<x<b-\varepsilon} (\varphi'(x))$$

因为 $\varphi'(x) < \frac{2}{k(b-a)}$ 所以:

$$\left|\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \varphi' f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{2\|f\|_1}{k(b-a)}$$

另外

$$\begin{aligned}\left|\int_{a}^{a+\varepsilon} \varphi'(x) f(x)\,\mathrm{d}x - f(a)\right| &= \left|f(a)\left(\int_a^{a+\varepsilon} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x - 1\right) + \int_a^{a+\varepsilon} \varphi'(x)(f(x)-f(a))\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le |(1-\varphi(a+\varepsilon))f(a)| + \delta\left|\int_a^{a+\varepsilon} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \frac{1}{k} f(a) + \delta\end{aligned}$$

同理:

$$\left|\int_{b}^{b-\varepsilon} \varphi'(b) f(x)\,\mathrm{d}x + f(b)\right| \le \frac{1}{k} f(b) + \delta$$

因此:

$$\left|\int_a^b \varphi' f\,\mathrm{d}x - (f(a)-f(b))\right| \le \frac{f(a)+f(b)}{k} + 2\delta + \frac{2\|f\|_1}{k(b-a)}$$

因此，利用弱导数定义，有:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b D_w^1 f(x)\,\mathrm{d}x - (f(b)-f(a))\right| &\le \left|\int_a^b D_w^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b D_w^1 f \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\quad + \left|\int_a^b \varphi' f\,\mathrm{d}x - (f(a)-f(b))\right| \\ &\le \frac{f(a)+f(b)}{k} + 2\delta + \frac{2\|f\|_1}{k(b-a)} + \frac{b-a}{k}\left\|D_w^1 f(x)\right\|_1\end{aligned}$$

中令 $\delta \to 0, k \to \infty$ ，并利用$f \in W_1^1 \Rightarrow \left\|D_w^1 f(x)\right\|_1 < \infty, \|f\| < \infty$ 可得:

$$\int_a^b D_w^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

1.x.20

Prove Sobolev’s inequality in the case of $n=1$, i.e. that $\Omega = [a,b]$ and show that

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le C\|u\|_{W_1^1(\Omega)}$$

Proof: 我们先考虑 $u \in C^\infty[a,b] \cap W_1^1[a,b]$ 的情况， 因为

$$u(x)=u(a)+\int_a^x u'(t)\,\mathrm{d}t$$

那么:

$$|u(x)|\leq|u(a)|+\int_a^x|u'(t)|\,\mathrm{d}t\leq|u(a)|+\|u'\|_1$$

上面的式子对于所有的a都是成立的，而:

$$\|u\|_1=\int_a^b|u|\,\mathrm{d}x\geq(b-a)\inf_{a\leq x\leq b}|u(x)|$$

从而

$$\forall x\in[a,b],\quad |u(x)|\leq\frac{1}{b-a}\|u\|_1+\|u'\|_1$$

令 $C=\max\left\{(b-a)^{-1},1\right\}$ 那么$\|u\|_\infty=\sup_{x\in[a,b]}\leq C\left(\|u\|_1+\|u'\|_1\right)$

我们还需要证明，对于 $u\in W_1^1$ 都是成立的:

因为 $C^\infty[a,b]\cap W_1^1[a,b]$ 在 $W_1^1[a,b]$ 内稠密，所以$\forall u\in W_1^1[a,b]$，存在序列$C^\infty[a,b]\ni u_n\to u$

同时，考虑到

$$\|u_m-u_n\|_\infty\leq C\left(\|u_m-u_n\|_1+\|{u_m}'-{u_n}'\|_1\right)=C\|u_m-u_n\|_{W_1^1}\to 0\quad(n,m\to\infty)$$

那么由L^∞的完备性可知，$u_n\to u\in L^\infty$这说明了，

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}=\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_\infty\leq C\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_{W_1^1(\Omega)}=C\|u\|_{W_1^1(\Omega)}$$

1.x.21

Let $\Omega=[a,b]$. Prove that all functions in $W_1^1(\Omega)$ are continuous (have a continuous representative).

Prove:

沿用上一题的 $W_1^1(\Omega)$中的$u_n\to u$，那么

$$\|u_n-u\|_{L^\infty}\leq C\|u_n-u\|_{W_1^1}\to 0\quad(n\to\infty)$$

我们还能说明，由于 $u_n\in C^\infty[a,b]$，所以:

$$\operatorname*{ess\,sup}_x|u_n-u_m|=\sup|u_n-u_m|$$

那么 $\sup|u_n-u_m|\to 0\quad(n,m\to\infty)$，而 $C[a,b]$ 按 $\sup|f|$ 是完备的，所以 $u_n\to u\in C[a,b]$

1.x.30

Suppose Ω is as in Proposition 1.6.3, and let p be an real number in the range $1\leq p\leq\infty$. Prove that there is a constant C such that

$$\|v\|_{L^p(\partial\Omega)}\leq C\|v\|_{L^p(\Omega)}^{1-\frac{1}{p}}\|v\|_{W_p^1(\Omega)}^{\frac{1}{p}},\quad\forall v\in W_p^1(\Omega)$$

Explain what this means in the case $p=\infty$.

Proof: 考察极坐标表达的$v(r,\theta)$，不妨设$v \ge 0$,

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{p}{q} = p - 1 \Rightarrow p = \frac{p}{q} + 1$$

$$\begin{aligned}
v(1,\theta)^p &= \left(r^2 v(r,\theta)^p\right)\big|_0^1 \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v(r,\theta)^{\frac{p}{q}+1}\right) \mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 2\left(r v^{\left(\frac{p}{q}\right)+1} + \frac{p}{q} r^2 v^{\frac{p}{q}} \frac{\partial v}{\partial r}\right) \mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 2\left(r v^{\left(\frac{p}{q}\right)+1} + \frac{p}{q} r^2 v^{\frac{p}{q}} (\nabla v) \cdot \frac{(x,y)}{r}\right)(r,\theta) \,\mathrm{d}r \\
&\le \int_0^1 2\left(v^{\frac{p}{q}+1} + p\|\nabla v\| v^{\frac{p}{q}}\right) r \,\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

再对 θ 积分，并令 $C = \max\{2, 2p\}, q = 1 - \frac{1}{p}$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} v^p \,\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} v(1,\theta)^p \,\mathrm{d}\theta \\
&\le \int_0^{2\pi}\int_0^1 2\left(v^{\frac{p}{q}+1} + p\|\nabla v\| v^{\frac{p}{q}}\right) r \,\mathrm{d}r \\
&\le \int_\Omega C v^{\frac{p}{q}} (v + \|\nabla v\|) \,\mathrm{d}x \\
&\le C\left(\int_\Omega v^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega (v + \|\nabla v\|)^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le C\left(\int_\Omega v^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega 2^{p-1}\left(v^p + \|\nabla v\|^p\right) \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(Jensen Inequality)} \\
&\le 2C \|v\|_p^{\frac{p}{q}} \|v\|_{W_p^1} \quad \text{(Holder Inequality)}
\end{aligned}$$

即对 $p < \infty$：

$$\|v\|_{L^p(\partial\Omega)} \le C \|v\|_{L^p(\Omega)}^{1-\frac{1}{p}} \|v\|_{W_p^1(\Omega)}^{\frac{1}{p}}, \quad \forall v \in W_p^1(\Omega)$$

而因为我们考虑的是单位球，即有$0 < m(\Omega) < \infty, 0 < m(\partial\Omega) < \infty$，在这种情况下

$$\|v\|_{L^\infty(\partial\Omega)} = \lim_{p\to\infty}, \quad \|v\|_{L^p(\partial\Omega)} \|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \lim_{p\to\infty} \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

因此该定理对 $p = \infty$ 成立。