FEM Report4

SA24229016 王润泽

2024 年 10 月 25 日

1 Introduction

编写程序求解 $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ 定义域范围的 Dirichlet 边值问题：

$$\begin{aligned} -\nabla^2 u = f \quad & \text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad & \text{on } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

有限元空间选取为分段连续线性多项式空间 V_h ，准确解为 $u(x,y) = (x-1)\sin(x)(y-1)\sin(y)$。

2 Algorithm

2.1 Variational Formulation

首先将 Dirichlet 边值问题转化为如下变分问题：

定义双线性形式：

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dxdy$$

线性形式

$$L(v) = \int_\Omega fv \, dxdy.$$

那么问题 (1) 的变分问题为：求 $u \in V = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$ ，使得对于所有 $v \in V$ ，有：

$$a(u,v) = L(v). \tag{2}$$

2.2 Finite Element Space

对于二维有限元问题，我们采用三角剖分的方法，将二维区域剖分为三角形网格集合 $\mathcal{T}_h = \{k_i\}$ ，每个三角形上定义一个局部的有限元空间。如图所示，三角网格面元单元数为 $2N^2$, 内部顶点数为 $(N-1)^2$，边界顶点数为 $4N$。

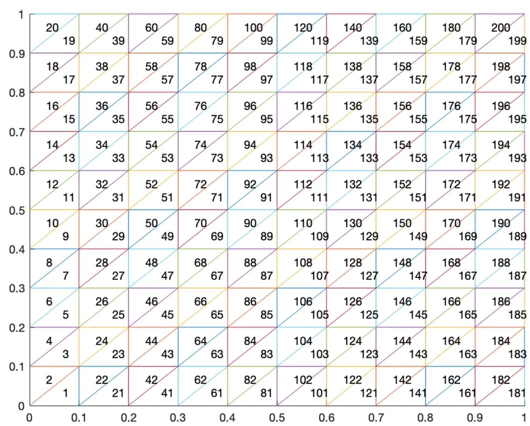

图 1: Triangulation

对于每个三角形 $k \in \mathcal{T}_h$, 由其三个顶点定义 P_1, P_2, P_3 ，我们选取一个分段线性多项式空间作为局部的基函数 $u(x, y)$:

$$u(x,y) = ax + by + c, \tag{3}$$

在三角形顶点处满足 $u(x_i, y_i) = u_i$ ，其中 (x_i, y_i) 为三角形顶点坐标，u_i 为顶点处的值，$i = 1, 2, 3$，u_i 即为待求解的值。将 $u(x, y)$ 转换成重心坐标的形式：

$$\begin{aligned} &u(x,y) = u_1 N_1(x,y) + u_2 N_2(x,y) + u_3 N_3(x,y) = \mathbf{N}^T \mathbf{u} \\ &N_i(x,y) = \frac{1}{2\Delta_k}(a_i x + b_i y + c_i) \\ &a_i = y_j - y_m, \quad b_i = x_m - x_j, \quad c_i = x_j y_m - x_m y_j \end{aligned} \tag{4}$$

$N_i(x, y)$ 为重心坐标函数, Δ_k 为三角形面积, i, j, m 为三角形顶点编号, 下标符合轮换对称性。注意：每个三角形的重心坐标 $\mathbf{N}_k$ 都是依赖于三角形的顶点坐标的。

此时，我们可以得到局部基函数的表达式，进而得到整个区域的基函数，定义有限元空间 V_h ：

$$V_h = \{v_h \in C(\Omega) : v_h|_k \in P_1(k), \forall k \in \mathcal{T}_h, v_h|_{\partial\Omega} = 0\}. \tag{5}$$

那么变分问题 (2) 转化为：求 $u_h \in V_h$ ，使得对于所有 $v_h \in V_h$ ，有：

$$a(u_h, v_h) = L(v_h). \tag{6}$$

2.3 Numerical Integration

设 u_h 为：

$$u_h = \sum_{k \in \mathcal{T}_h} \mathbf{N}_k^T \mathbf{u}_k \tag{7}$$

其中，u^k 为待求解的系数，对于共享顶点 P_i 的两个三角形 k_1, k_2 ，有 $u_i^{k_1} = u_i^{k_2}$。

对三角形 k 区域内的基函数 u_k 求偏导数，得到：

$$\begin{aligned}\nabla u_k(x,y) &= \nabla \mathbf{N}_k^T(x,y)\mathbf{u}^k \\ &= \frac{1}{2\Delta_k}\begin{bmatrix} a_1^k & a_2^k & a_3^k \\ b_1^k & b_2^k & b_3^k \end{bmatrix}\mathbf{u}_k \\ &= \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k\end{aligned} \tag{8}$$

由此，双线性泛函 $a(u_h, v_h)$ 可以写成：

$$\begin{aligned}a(u_h, v_h) &= \sum_{k \in \mathcal{T}_h} \int_k \nabla \mathbf{u}_k^T \nabla \mathbf{v}_k \, dxdy \\ &= \sum_{k \in \mathcal{T}_h} \int_k \mathbf{u}_k^T \mathbf{B}_k^T \mathbf{B}_k \mathbf{v}_k \, dxdy \\ &= \sum_{k \in \mathcal{T}_h} \mathbf{u}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{v}_k\end{aligned} \tag{9}$$

其中，$\mathbf{A}_k = \int_k \mathbf{B}_k^T \mathbf{B}_k \, dxdy$ 为局部刚度矩阵。

同理，线性泛函 $F(v_h)$ 可以写成：

$$\begin{aligned}F(v_h) &= \sum_{k \in \mathcal{T}_h} \int_k f \mathbf{v}_k \, dxdy \\ &= \sum_{k \in \mathcal{T}_h} \int_k f \mathbf{N}_k \mathbf{v}_k \, dxdy \\ &= \sum_{k \in \mathcal{T}_h} \mathbf{b}_k^T \mathbf{v}_k\end{aligned} \tag{10}$$

其中，$\mathbf{b}_k = \int_k f(x,y)\mathbf{N}_k(x,y) \, dxdy$ 为局部载荷向量。

因此只需求解线性方程组：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v} &= \mathbf{b}^T\mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in V_h \\
\leftrightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{u} &= \mathbf{b}
\end{aligned} \tag{11}
$$

其中，$\mathbf{A} = \sum_{k\in\mathcal{T}_h} \mathbf{A}_k$ 为全局刚度矩阵，为对称正定矩阵，$\mathbf{b} = \sum_{k\in\mathcal{T}_h} \mathbf{b}_k$ 为全局载荷向量。

2.4 Numerical Results

我们采取如图 1 所示的等分剖分，每个三角形的直角边长为 $h = 1/N$ ，共有 $2N^2$ 个三角形，$(N+1)^2$ 个顶点。

这样每个三角形的面积为 $\Delta_k = h^2/2$ ，如果选择顶点索引时，始终让直角边出现在三角形的第二个标号上，且采用逆时针顺序规划索引，那么局部刚度矩阵为：

$$
\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \tag{12}
$$

在构造全局刚度矩阵时，只需将局部刚度矩阵 $\mathbf{A}_k$ 按照顶点索引的位置加到全局刚度矩阵 $\mathbf{A}$ 的对应位置上即可。比如，对于三角形 k 的局部刚度矩阵的元素 a_{12} 对应的分别是 u_1^k 和 u_2^k ，那么只要找到顶点 P_1^k 和 P_2^k 的全局索引，将 a_{12} 加到全局刚度 $\mathbf{A}$ 的对应位置上即可。

同理，局部载荷向量为：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}_k &= \int_k f(x,y)\mathbf{N}_k(x,y)\,dxdy \\
&\approx \begin{bmatrix} f(x_1^k, y_1^k) \\ f(x_2^k, y_2^k) \\ f(x_3^k, y_3^k) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \int_k N_1(x,y)\,dxdy \\ \int_k N_2(x,y)\,dxdy \\ \int_k N_3(x,y)\,dxdy \end{bmatrix} \\
&= \frac{h^2}{6} \begin{bmatrix} f(x_1^k, y_1^k) \\ f(x_2^k, y_2^k) \\ f(x_3^k, y_3^k) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{13}
$$

在构造全局载荷向量时，只需将局部载荷向量 $\mathbf{b}_k$ 按照顶点索引的位置加到全局载荷向量 $\mathbf{b}$ 的对应位置上即可。

2.5 Boundary Condition

对于边界条件 $u = 0$ ，我们期望最终边界顶点的系数 u_i 为 0。

采取的方法是：如果 $u_i = 0$, 将刚度矩阵 $\mathbf{A}$ 的除对角线外的第 i 行和第 i 列置元素为 0，同时设置对角线元素值 $\mathbf{A}_{ii}$ 为 1。对应的载荷向量 $\mathbf{b}$ 的第 i 个元素也置为 0。

最终，可以得到如下图所示的全局刚度矩阵：

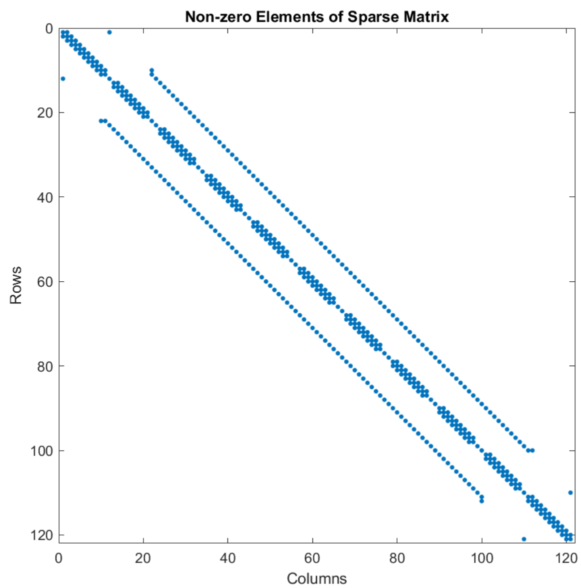

图 2: Stiffness Matrix

3 Results

(1). 求解出满足方程的 $f(x, y)$

$$
\begin{aligned}
f(x,y) =& ((x-1)\cdot\sin(x) - 2\cos(x))\cdot(y-1)\cdot\sin(y) \\
& ((y-1)\cdot\sin(y) - 2\cos(y))\cdot(x-1)\cdot\sin(x)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

(2). 对区域采用三角形网格剖分 $\mathcal{T}_h$ ，给出总网格个数、对应的内部结点和边界结点的个数：

使用等距剖分，每个三角形的直角边长为 $h = 1/N$ ，共有 $2N^2$ 个三角形，$(N+1)^2$ 个顶点，内部顶点数为 $(N-1)^2$ ，边界顶点数为 $4N$。

(3). 输出初始网格的结点编号和三角单元的编号方式: 图 1。

(4). 有限元空间选取分片线性多项式空间。

(5). 输出初始网格对应的刚度矩阵的非零元的图像: 图 2。

(6). 求解有限元问题，测试程序，并计算 L^2, H^1 误差和误差阶。

N	L^2 error	order	H^1 error	order
10	4.93E-04		9.27E-03	
20	1.23E-04	1.997	4.32E-03	1.102
40	3.09E-05	1.999	2.09E-03	1.046
80	7.72E-06	2.000	1.03E-03	1.021