Homework 4

1. 假设 Ω 有界, $1 \le p \le q \le +\infty$, 证明: $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$

prove: 1° 对 $\forall f \in L^q(\Omega)$, $q < +\infty$

$$\left(\int_\Omega |f|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty \Rightarrow \int_\Omega |f|^q dx < +\infty$$

由 Hölder 不等式

$\forall \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $f \in L^p$, $g \in L^q$ $\|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

$$\Rightarrow \int_\Omega |f|^p \cdot 1 \, dx \le \int_\Omega (|f|^q)^{\frac{p}{q}} dx \int_\Omega (1)^{1-\frac{p}{q}} dx$$

$$\le \left(\int_\Omega (f)^q\right)^{\frac{p}{q}} \cdot m(\Omega)^{1-\frac{p}{q}}$$

有界性满足: $m(\Omega) < +\infty$

$$\Rightarrow \int_\Omega (f)^p dx < +\infty$$

$$\Rightarrow f \in L^p$$

2° $q = +\infty$, 即

$$\text{ess. sup}\{f(x)\} = M < +\infty$$

那么 $|f(x)| > M$ 的 x 组成零测集, $\forall p < \infty$

$$\int_\Omega |f|^p dx < m(\Omega) M^p < \infty$$

$\Rightarrow f \in L^q$, 即 $L^q \subset L^p$

以上 1°, 2°, 当 $1 \le p \le q < +\infty$, $L^q \subset L^p$

包含是严格的:

. $p=1$, $q=2$, $\Omega = (0,1)$ $f = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

由于 $\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \infty \Rightarrow f \notin L^2$

但 $\int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 1 < \infty \Rightarrow f \in L^1$.

此时说明, $\exists f \in L^1$, $f \notin L^2$, 即 $L^2 \subset L^1$ 是严格的

边界是有界的: 若 $\Omega = [1, \infty)$, $f = \frac{1}{x}$

则 $\|f\|_2^2 = \int_\Omega \frac{1}{x^2} dx = 1 \Rightarrow f \in L^2$

$\|f\|_1 = \int_\Omega \frac{1}{x} dx = \infty \Rightarrow f \notin L^1$

2. 证明：在 Ω 上有界连续的函数 可以组成一个 $\|\cdot\|_{L_\infty}$ 定义下的 Banach Space.

proof: 1° 由集合中 f_n 的连续性

任取 f_n 为 $C(\Omega)$ 中 Cauchy 列 即

$\|f_n - f_m\|_\infty \to 0 \quad (n, m \to \infty)$

定义 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

这样：$\forall x \in \Omega \quad |f_n(x) - f_m(x)| \to 0 \quad (n, m \to 0)$.

那么：$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, m > N$ 时：$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$.

即对 $\forall x, \varepsilon > 0, \exists N, \; n, m > N \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

令 $m \to \infty \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

即得 $\lim\limits_{\substack{N\to\infty \\ n>N}} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \Omega, \frac{\varepsilon}{3} > 0, \exists n$，有 $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

由 $f_n(x) \in C(\Omega) \Leftrightarrow \forall \frac{\varepsilon}{3} > 0, \exists \delta, \quad \|x - y\| < \delta$，有 $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$

那么对，$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, n$，对 $\forall x, y$ 满足 $\|x - y\| < \delta$ 有

$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$

$\leq \varepsilon$

$\Rightarrow f(x)$ 是连续的

2° 由 f_n 是有界的，即 $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_x |f_n(x)| = M < \infty$

那么，由 $\forall 0 < \varepsilon < +\infty$，$\exists n$，$\|f_n - f_n\| < \varepsilon$ 可知

$\forall x \in \Omega \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow |f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)| = M + \varepsilon < +\infty$,

$f(x)$ 是有界的.

以上 Ω 上连续有界函数全体 构成带 $\|\cdot\|_\infty$ 的 Banach 空间

3. 在有界域 Ω 上. $\|f_j - f\|_p \to 0$, $j\to\infty$, 证明 $\int_\Omega f_j(x)dx \to \int_\Omega f(x)dx$, $j\to\infty$

Proof: 由 Hölder 不等式

$$\int_\Omega |f_j(x)-f(x)|dx \leq \left(\int_\Omega |f_j(x)-f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_\Omega (1)\right)^{\frac{p}{p-1}}$$
$$= \left(\int_\Omega |f_j(x)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot m(\Omega)^{\frac{p}{p-1}}$$

由 Ω 有界性, $\exists M>0$, $m(\Omega) < M < +\infty$

由 $\|f_j-f\|_p \to 0$, $j\to\infty \Rightarrow \forall \frac{\varepsilon}{M}>0$, $\exists n$, $j>n$ 时.

$$\left(\int_\Omega |f_j(x)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{M}$$

因此, 对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists n$, $j>n$

$$0 < \left|\int_\Omega f_j(x)dx - \int_\Omega f(x)dx\right| \leq \int_\Omega |f_j(x)-f(x)|dx \leq \frac{\varepsilon}{M}\cdot M = \varepsilon.$$

即 $\int_\Omega f_j(x)dx \to \int_\Omega f(x)dx$, $j\to\infty$

4. 证明, $\Omega=[0,1]$, $1\leq p<\infty$, $f(x)\in L^p(\Omega)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\log|x-r_n|$$

Proof: 首先证: $\log x \in L^p$

$$\int_0^1 |\log x|^p dx = \int_0^\infty e^{-x}x^p dx = \Gamma(p+1) < +\infty$$

所以:

$$\int_0^1 |\log(x-r_n)|^p dx = \int_0^{r_n} |\log(r_n-x)|^p dx + \int_{r_n}^1 |\log(x-r_n)|^p dx$$
$$< 2\int_0^1 |\log x|^p dx = 2\Gamma(p+1) < +\infty$$

即 $g_n = \log|x-r_n| \in L^p$

令 $f_i = \sum_{n=1}^{i} 2^{-n} g_n$, $f_i\in L^p(\Omega)$.

对 $\forall$, $j>i>N$

$$\Rightarrow \|f_i - f_j\|_p = \left\|\sum_{n=i+1}^{j} 2^{-n} g_n\right\|_p$$
$$\leq \sum_{n=i+1}^{j} \|2^{-n} g_n\|_p$$
$$\leq 2\Gamma(p+1)\sum_{n=j+1}^{i} 2^{-n} < 2^{2-N}\cdot\Gamma(p+1)$$

当 $N\to\infty$ 时, $\|f_i-f_j\|_p \to 0$ $i,j>N$.

所以 $\{f_i\}$ 是 Cauchy 列, 具有完备性,

$L^p \in$ Banach Spaces. $\Rightarrow$ f_j 收敛到 $f\in L^p$