FEM - 第三周作业 2 Neumann 边值问题

SA23001071 杨哲睿

2023 年 10 月 5 日

1 Introduction

编写程序求解两点边值问题:

$$\begin{cases} -u'' = f & 0 < x < 1 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

选取等距网格剖分，有限元空间选取分段线性多项式空间 V_h，选取准确解 $u(x) = x^2(x-1)^2$ 算出满足方程的 $f(x)$。

2 Method

定义线性空间：$V \times \mathbf{R} = H^1([0,1]) \times \mathbb{R}$，定义双线性型：

$$a((u,c),(v,d)) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x + c\int_0^1 v\mathrm{d}x + d\int_0^1 u\mathrm{d}x$$

定义内积：

$$(f,v) = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x$$

变分问题为：找 $(u,c) \in V$，使得 $\forall (v,d) \in V$

$$a((u,c),(v,d)) = (f,v) \tag{2}$$

有限维空间：$V_h \times \mathbb{R}$ 其中 $V_h = u : u \in C^0$,在每个区间上为分段线性多项式。

实验中采用等距网格划分，节点数为 $N+1$，$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$，节点处的值为 u_i，$h = u_{i+1} - u_i$。选取基函数为 ϕ_i，并选取其张成的有限维线性空间进行求解，全局基函数

定义如下:

$$\phi_0 = \begin{cases} \frac{x_1-x}{x_{j+1}} & 0 \le x \le x_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \phi_i = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} & x_{j-1} \le x < x_j \\ \frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j} & x_j \le x < x_{j+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \phi_n = \begin{cases} \frac{x-x_{n-1}}{1-x_{n-1}} & x_{n-1} \le x \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3}$$

对于单元 $[x_{i-1}, x_i]$ 局部基函数为:

$$\phi_0^i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x_{i-1} \le x \le x_i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \phi_1^i(x) = \begin{cases} \frac{x_i-x}{x_i-x_{i-1}}, & x_{i-1} \le x \le x_i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4}$$

标准单元 $[0, 1]$ 对应的形函数为:

$$\phi_0(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \phi_1(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5}$$

局部刚度矩阵的系数计算:

$$\begin{aligned} K_{0,0} &= a(\phi_0^i, \phi_0^i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{h} \\ K_{1,1} &= a(\phi_1^i, \phi_1^i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{h} \\ K_{0,1} &= K_{1,0} = a(\phi_0^i, \phi_1^i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} -\frac{1}{h^2} \mathrm{d}x = -\frac{1}{h} \end{aligned} \tag{6}$$

因此局部刚度矩阵为:

$$K = \begin{pmatrix} K_{0,0} & K_{0,1} \\ K_{1,0} & K_{1,1} \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

全局刚度矩阵:

$$A = \sum_{i=1}^{N+1} K_i \tag{8}$$

从而:

$$A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

计算 (f, ϕ_j) 得:

$$f_j = \int_0^1 f \phi_j \mathrm{d}x = h(f(x_j) + O(h)) \tag{10}$$

其次，计算如下的：

$$d\int_0^1 v\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{N} dv(x_i)\int_0^1 \phi_i(x)\mathrm{d}x \tag{11}$$

令

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v(x_0) \\ v(x_1) \\ \vdots \\ v(x_N) \\ d \end{pmatrix} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u(x_0) \\ u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_N) \\ c \end{pmatrix} \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \\ 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

那么 $a((u,c),(v,d)) = (f,v)$ 可以写为：

$$\mathbf{V}^T\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{V}^T \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1N} & \int_0^1 \phi_1\mathrm{d}x \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{N1} & \dots & A_{NN} & \int_0^1 \phi_N\mathrm{d}x \\ \int \phi_1\mathrm{d}x & \dots & \int_0^1 \phi_N\mathrm{d}x & 0 \end{pmatrix} \mathbf{U} = \mathbf{V}^T\mathbf{F} \tag{13}$$

因此，求解如下的线性方程组：

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \tag{14}$$

3 Results

实验选取 $u(x) = x^2(x-1)^2$，那么 $-u''(x) = -2x(1-3x+2x^2)$。对于求得的系数，先进行插值，然后进行梯形公式数值积分。求得的 $\int_0^1 u(x)\mathrm{d}x = 0$，因此精确解应为 $x^2(x-1)^2 - \frac{1}{30}$。可以看出，该方法对 L^2 误差为 2 阶，对 H^1 误差为一阶。其理由与前两次实验相同。

表 1： 误差分析

n	L^2 error	order	H^1 error	order
10	3.402e-03	—	1.021e-01	—
20	8.557e-04	1.99	5.092e-02	1.004
40	2.142e-04	1.99	2.518e-02	1.016
80	5.359e-05	1.99	1.229e-02	1.034

Reference

FEniCS – 11. Poisson equation with pure Neumann boundary conditions