Homework 8. Week 11

3.x.11

证明：给定结点值 $\Sigma_n=\{p(a), p^{(1)}(a), p^{(3)}(a), \dots p^{(2n-1)}(a) : a=0,1\}$，能确定唯一的 $2n+1$ 次多项式

proof：设 $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_{2n+1} x^{2n+1}$

有 $\begin{cases} p^{(i)}(0) = i!\,a_i & ① \\ p^{(i)}(1) = i!\,a_i + (i+1)!\,a_{i+1} + \cdots + \frac{(2n+1)!}{(2n+1-i)!} a_{2n+1} & ② \end{cases}$

$i = 0,1,3,\cdots,2n-1$，共 $2n+1$ 组线性方程

② − ① $\Rightarrow$ $p^{(i)}(1) - p^{(i)}(0) = (i+1)!\,a_{i+1} + \cdots \frac{(2n+1)!}{(2n+1-i)!} a_{2n+1}$ ③

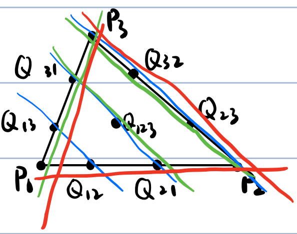
由①,③ 得关于 $\{a_i\}$ 的方程组，对应线性矩阵是满秩，$\det(A) \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} \times & \times & & \times \\ & \times & & \times \\ & & \ddots & \\ & & & \times \end{bmatrix} \qquad \mathrm{diag}(A) \neq 0,$$

因此方程解存在且唯一

Ex1. 对 P^3 函数，有 $u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 + a_6 x^3 + a_7 x^2 y + a_8 xy^2 + a_9 y^3$ 共 10 个参数。

对应单元三角结点，共有 10 个，每个结点取其值函数，共 10 个自由度。



要求满足 $N_i(\hat{P}_j) = \delta_{ij}$.

因此分别讨论：其中 $\lambda_i = \dfrac{\Delta P_j P_k P(x,y)}{\Delta P_{ijk}}$.

① 对顶点 P_i 有 $N_i(x,y) = \lambda_i(\lambda_i - \frac{1}{3})(\lambda_i - \frac{2}{3}) \cdot \frac{9}{2}$ $\quad i = 1,2,3$

② 对三等分点 Q_{ij} 有 $N_{ij}(x,y) = \lambda_i \cdot \lambda_j \cdot (\lambda_i - \frac{1}{3}) \cdot \frac{27}{2}$ $\quad i,j = 1,2,3$

③ 对形心点 Q_{123} 有 $N_{123}(x,y) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot 27$

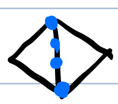
此时 $u(x,y) = u(P_1)N_1 + \cdots u(Q_{123})N_{123}$

可解唯一性：若 $u(\hat{P}_j) = 0$，那么将方程限制在边界点处，即 $\{P_i, Q_{ij}\}$，那么此时，

$u(x,y) = C\lambda_1\lambda_2\lambda_3$,

由于 $u(Q_{123}) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow u \equiv 0 \Rightarrow$ 插值有可解唯一性

连续性：在相邻三角形上，边界处插值函数由 4 个插值点确定，



得唯一的 P^3 多项式，由 Lagrange 插值连续性，有 C^0 连续