Week 8

SA23001071 杨哲睿

1. Brenner教材，第67页，习题2.x.6
2. Brenner教材，第67页，习题2.x.7
3. Brenner教材，第67页，习题2.x.8
4. Brenner教材，第67页，习题2.x.9
5. Brenner教材，第67页，习题2.x.10
6. Brenner教材，第67页，习题2.x.12
7. Johnson教材，第63页，2.3
8. Johnson教材，第63页，2.5
9. Johnson教材，第64页，2.7

2.x.6

Prove the claim in Remark 2.5.11:

In the symmetric case, u_h minimizes the quadratic functional:

$$Q(v) = a(v, v) - 2F(v)$$

over all $v \in V_h$

Proof: 因为$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V_h$

$$\begin{aligned} Q(v) - Q(u_h) &= a(v, v) - 2F(v) - a(u_h, u_h) + 2F(u_h) \\ &= a(v, v) - a(u_h, u_h) + 2F(u_h - v) \\ &= a(v, v) - a(u_h, u_h) + 2a(u_h, u_h - v) \\ &= a(v, v) + a(u_h, u_h) + 2a(u_h, v) \end{aligned}$$

因为在对称的情况下，有$a(u, v) = a(v, u)$成立，因此上式可以写为：

$$Q(v) - Q(u_h) = a(u_h - v, u_h - v) \geq 0 \Rightarrow Q(v) \geq Q(u_h) \quad \forall v \in V_h$$

因此u_h最小化了$Q(v)$

2.x.7

Prove that a contraction mapping is always continuous.

Proof: 设 T 为Banach空间$\mathbb{V}$上的压缩映射，存在 $0 \leq k < 1$ 使得：

$$\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{V}$$

设 $x_n \to x$ 为 $\mathbb{V}$ 中的收敛列，那么：

$$\|Tx_n - Tx\| \leq k\|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

即有：$Tx_n \to Tx \quad (n \to \infty)$

因此 T 是连续的。

2.x.8

Prove that the mapping $u \to Au$ in the proof of the Lax-Milgram is a linear map $V \to V'$.

Proof: 验证 A 是线性映射即可。

设 $u, v \in V$，那么：

$$A(u+v) = a(u+v, \cdot) = a(u, \cdot) + a(v, \cdot) = Au + Av$$

设 $u \in V$，$\alpha \in \mathbb{R}$，那么：

$$A(\alpha u) = a(\alpha u, \cdot) = \alpha a(u, \cdot) = \alpha A u$$

因此 A 是线性映射。

2.x.9

Prove that the solution u guaranteed by the Lax-Milgram Theorem satisfies

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{V'}$$

Proof: 由Lax-Milgram定理可知，存在唯一的 $u \in V$ 使得：

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

$$\alpha \|u\|^2 \leq a(u, u) = F(u) \leq \|F\|_{V'} \|u\|_V$$

因此：

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{V'}$$

2.x.10

For the differential equation

$$-u'' + ku' + u = f$$

find a value for k such that $a(v, v) = 0$ but $v \not\equiv 0$ for some $v \in H^1(0,1)$

Proof: 在这种情况下：

$$a(u, v) = \int_0^1 (u'v' + ku'v + uv) \, \mathrm{d}x$$

因此：

$$a(u, u) = \int_0^1 (u'(u' + ku) + u^2) \, \mathrm{d}x$$

令 $u(x) = x$，那么：

$$a(u, u) = \int_0^1 ((1 + kx) + x^2) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{k}{2} + \frac{1}{3}$$

令 $k = -\frac{5}{3}$，那么：

$$a(u, u) = 0$$

因此 $k = -\frac{5}{3}$ 时，$a(v, v) = 0$ 但 $v \not\equiv 0$。

2.x.12

Let $a(u, v) = \int_0^1 (u'v' + u'v + uv) \, \mathrm{d}x$ and $V = \{v \in W_2^1(0,1) : v(0) = v(1) = 0\}$.

Prove that $a(u,v)=\int_0^1 (v')^2+v^2\,\mathrm{d}x$ forall $v\in V$.

Proof: 首先考虑 $v\in C^\infty$， $v(0)=v(1)=0$，那么：

$$\int_0^1 v'v\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}v^2=\frac{1}{2}v(1)^2-v(0)^2$$

$$\begin{aligned}a(v,v)&=\int_0^1 (v'v'+v'v+vv)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 (v')^2+v^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

我们再考虑 $v\in V$ 的情况，由$C^\infty(\Omega)\cap W_1^2$ 在 W_1^2 中的稠密性可知，存在$c_n\to v$ 那么：

$$\begin{aligned}|a(c_n,c_n)-a(v,v)|&=|a(c_n,c_n)-a(c_n,v)+a(c_n,v)-a(v,v)|\\&\le C(\|c_n\|+\|v\|)\|c_n-v\|\to 0\quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

对于 $\int_0^1 (u')^2+u^2\,\mathrm{d}x$ 也是类似的，因此：

$$a(v,v)=\int_0^1 (v')^2+v^2\,\mathrm{d}x$$

2.3

Give a variational formulation of the problem:

$$\begin{gathered}u_{xxxx}=f\\u(0)=u''(0)=u'(1)=u'''(1)=0\end{gathered}$$

and show that the conditions are satisfied. Which boundary conditions are essential and which are natural? What is the interpretation of the boundary conditions if u represents the deflection of a beam?

选取空间$\mathbb{V}=\{u\in H^2:u(0)=0,u'(1)=0\}$，定义如下的：

$$a(u,v)=\int_0^1 u''v''\,\mathrm{d}x$$

$$f(v)=\int_0^1 f\cdot v\,\mathrm{d}x$$

变分问题为，$\mathbb{V}=\{u\in H^2:u(0)=u'(1)=0\}$，使得：

$$a(u,v)=f(v)$$

对于 $v\in\mathbb{V}$ 都成立。

验证对称性：

$$a(u,v)=\int_0^1 u''v''\,\mathrm{d}x=\int_0^1 v''u''\,\mathrm{d}x=a(v,u)$$

验证连续性：

$$
\begin{aligned}
a(u,v) &= \int_0^1 u''v''\,\mathrm{d}x \\
&\leq \|u''\|_{L^2}\|v''\|_{L^2} \\
&\leq \|u\|_{H^2}\|v\|_{H^2}
\end{aligned}
$$

验证椭圆性：

$$
u'(1)=0 \Rightarrow |u'(x)| \leq \int_0^1 |u''|\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_0^1 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 |u''|\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow |u'(x)|^2 \leq \|u''\|_2^2
$$

因此：

$$
\|u'\|_2^2 \leq \int_0^1 \|u''\|_2^2\,\mathrm{d}x = \|u''\|_2^2 \Rightarrow \|u'\|_2 \leq \|u''\|_2
$$

同理有：$\|u\|_2 \leq \|u'\|_2 \leq \|u''\|_2$ 对于：

$$
a(u,u) = \int_0^1 (u'')^2\,\mathrm{d}x = \|u''\|_2^2 \geq \frac{1}{3}\|u\|^2
$$

因此条件都是满足的。

2.5

Give a variational formulation of the inhomogeneous Neumann problem:

$$
\begin{cases}
-\Delta u + u = f & \text{in } \Omega \\
\frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{on } \Gamma
\end{cases}
$$

and check if the conditions are satisfied.

双线性形式：

$$
a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + uv\,\mathrm{d}x
$$

线性泛函：

$$
f(v) = \int_\Gamma vg\,\mathrm{d}S + \int_\Omega fv\,\mathrm{d}x
$$

选取空间为$\mathbb{V}=H^1(\Omega)$

那么变分问题为，找到 $u\in\mathbb{V}$，使得$\forall v\in\mathbb{V}, a(u,v)=f(v)$

验证对称性：

$$
a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + uv\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u + uv\,\mathrm{d}x = a(v,u)
$$

验证有界性：

$$
a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + uv\,\mathrm{d}x \leq \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}
$$

验证椭圆性：

$$a(u,u)=\int_\Omega (\nabla u)^2+u^2\,\mathrm{d}x=\|u\|_{H^1}^2$$

验证f 的连续性：

$$\begin{aligned}
f(v)&=\int_\Gamma vg\,\mathrm{d}S+\int_\Omega fv\,\mathrm{d}x\\
&\le \|v\|_{L^2(\Gamma)}\|g\|_{L^2(\Gamma)}+\|v\|_{L^2(\Omega)}\|f\|_{L^2(\Omega)}\\
&\le C\|v\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|v\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|g\|_{L^2(\Gamma)}+\|v\|_{H^1(\Omega)}\|f\|_{L^2(\Omega)}\\
&\le \left(C\|g\|_{L^2(\Omega)}+\|f\|_2\right)\|v\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

因此条件都是成立的。

2.7

Eq.2.27:

$$\begin{gathered}
a(u,v)=L(v)\\
a(u,v)=\int_\Omega k(x)\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\\
L(v)=\int_\Omega fv\,\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_2} gv\,\mathrm{d}S
\end{gathered}$$

原问题的解是变分问题的解：对于任意的$v\in\mathbb{V}$，一方面：

$$\begin{aligned}
\int_\Omega -k(x)\Delta uv\,\mathrm{d}x&=\int_{\Omega_1}-\chi_1 v\Delta u\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega_2}-\chi_2 v\Delta u\,\mathrm{d}x\\
&=\int_{\Omega_1}\chi_1\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega_1}\chi_2\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\\
&\quad-\int_{\partial\Omega_1}\chi_1 v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S-\int_{\partial\Omega_2}\chi_2 v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S\\
&=\int_\Omega k(x)\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x-\int_{\Gamma_2} vq\cdot n\,\mathrm{d}x-\int_S v\left(\chi_1\frac{\partial u_1}{\partial n}-\chi_2\frac{\partial u_2}{\partial n}\right)\mathrm{d}S
\end{aligned}\tag{1}$$

另一方面：

$$\int_\Omega -k(x)\Delta uv\,\mathrm{d}x=\int_\Omega fv\,\mathrm{d}x$$

那么：

$$\int_\Omega k(x)\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x-\int_S v\left(\chi_1\frac{\partial u_1}{\partial n}-\chi_2\frac{\partial u_2}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=\int_{\Gamma_2} vq\cdot n\,\mathrm{d}x+\int_\Omega fv\,\mathrm{d}x$$

即：

$$a(u,v) - \int_S v\left(\chi_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - \chi_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}\right) \mathrm{d}S = L(v) \quad \forall v \in \mathbb{V}$$

由S 上的条件可知：

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in \mathbb{V}$$

因此u 是变分问题的解。另一方面，设 u 是变分问题的解，因为$u|_{\Gamma_1} = 0$,所以 Equation 1 还是成立的。同时 $\forall v \in \mathbb{V}$：

$$\int_\Omega k(x) \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} v g \, \mathrm{d}S$$

那么：

$$\int_\Omega v(f + k(x)\Delta u) \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} v(q \cdot n - g) \, \mathrm{d}S - \int_S v\left(\chi_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - \chi_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}\right) \mathrm{d}S = 0$$

取$\mathbb{V}$中任意的在Ω_1内具有紧支集的函数v，那么：

$$\int_{\Omega_1} \chi_1(f + \chi_1 \Delta u) \, \mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in \mathbb{V}, v|_{\Omega - \Omega_1} \equiv 0 \Rightarrow f + \chi_1 \Delta u = 0 \text{ in } \Omega_1$$

同理，在Ω_2 内也有$f + \chi_2 \Delta u = 0$

那么：

$$\int_{\Gamma_2} v(q \cdot n - g) \, \mathrm{d}S - \int_S v\left(\chi_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - \chi_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}\right) \mathrm{d}S = 0$$

取特殊的 $v \in \mathbb{V}_0$ 使得 $v|_{\partial\Omega} = 0$，那么：

$$\int_S v\left(\chi_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - \chi_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}\right) \mathrm{d}S = 0 \quad \forall v \in \mathbb{V}_0$$

从而：

$$\chi_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - \chi_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0$$

因此：

$$\int_{\Gamma_2} v(q \cdot n - g) \, \mathrm{d}S = 0 \quad \forall v \in \mathbb{V} \Rightarrow q \cdot n = g \text{ on } \Gamma_2$$

因此变分问题的解是原问题的解。