FEM Code Report3 - Neumann

SA24229016 王润泽

2024 年 10 月 7 日

1 Introduction

编写程序求解两点边值问题：

$$\begin{aligned} -u'' &= f, \quad 0 < x < 1, \\ u'(0) &= u'(1) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

选取等距网格剖分，有限元空间选取为分段连续线性多项式空间，每个单元的基函数利用单元 $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ 端点 x_{j-1}, x_j 得到。

2 Method

2.1 Variational Formulation

定义线性空间：$V \times R = H^1_{[0,1]} \times \mathbb{R}$。

对于任意 $(u, c) \in V \times R, (v, d) \in V \times R$，定义双线性形式：

$$a((u,c),(v,d)) = \int_0^1 u'v'\,dx + c\int_0^1 v\,dx + d\int_0^1 u\,dx.$$

定义内积：

$$(f, v) = \int_0^1 fv\,dx$$

那么原问题转换成变分问题为：求 $(u, c) \in V \times R$，使得对于所有 $(v, d) \in V \times R$，有：

$$a((u,c),(v,d)) = (f, v). \tag{2}$$

2.2 FEM 基函数

实验中采用等距网格划分，节点数为 N+1，$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$，节点处的值为 u_i, 步长为 $h_i = x_i - x_{i-1}$ 。选取分片线性全局基函数 $\phi_i(x)$，并选取其张成的有限维线性空间进行求解，其定义如下：

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x \in I_i, \\ \dfrac{x_i - x}{h_{i+1}}, & x \in I_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3}$$

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{h_1}, & x \in I_1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}, \quad \phi_N(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{N-1}}{h_N}, & x \in I_N, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4}$$

对于单元 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$，其局部基函数 ψ 定义如下：

$$\psi_i^0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_i - x}{h_i}, & x \in I_i, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}, \quad \psi_i^1(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x \in I_i, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5}$$

对于标准单元 $I = [0, 1]$，其基函数 φ 定义如下：

$$\varphi^0(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in [0, 1], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}, \quad \varphi^1(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{6}$$

2.3 刚度矩阵

局部刚度矩阵描述了双线性形式 $a(u, v)$ 在局部基函数上的表现，其定义如下：

$$\begin{aligned} k_i^{00} &= a(\psi_i^0, \psi_i^0) = \int_{I_i} \psi_i^0(x)' \psi_i^0(x)' = \frac{1}{h_i}, \\ k_i^{01} = k_i^{10} &= a(\psi_i^0, \psi_i^1) = \int_{I_i} \psi_i^0(x)' \psi_i^1(x)' = -\frac{1}{h_i}, \\ k_i^{11} &= a(\psi_i^1, \psi_i^1) = \int_{I_i} \psi_i^1(x)' \psi_i^1(x)' = \frac{1}{h_i}. \end{aligned} \tag{7}$$

对于等分剖分的单元，其刚度矩阵 K_i 定义如下：

$$K_i = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

得到全局刚度矩阵 A 为：

$$A = \sum_{i=1}^{N+1} K_i \tag{9}$$

即：

$$A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)} \tag{10}$$

另外，由二次型的定义，计算：

$$d\int_0^1 u\,dx = d\sum_{i=0}^{N} u(x_i)\int_0^1 \phi_i(x)\,dx \tag{11}$$

其中：

$$\int_0^1 \phi_i(x)\,dx = \frac{1}{h_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1 \tag{12}$$

$$\int_0^1 \phi_0(x)\,dx = \frac{1}{h_1}, \quad \int_0^1 \phi_N(x)\,dx = \frac{1}{h_N} \tag{13}$$

2.4 荷载向量

对于荷载向量，计算：

$$f_i = \int_0^1 f\phi_i\,dx \approx hf(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N-1 \tag{14}$$

$$f_0 = \int_0^1 f\phi_0\,dx \approx \frac{hf(x_0)}{2}, \quad f_N = \int_0^1 f\phi_N\,dx \approx \frac{hf(x_N)}{2} \tag{15}$$

2.5 数值解

那么变分问题：$a((u,c),(v,d))=(f,v)$ 可以转化为求解线性方程组：

$$V^T K U = V^T \begin{pmatrix} A_{00} & \cdots & A_{0N} & \int_0^1 \phi_0\,dx \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{N0} & \cdots & A_{NN} & \int_0^1 \phi_N\,dx \\ \int_0^1 \phi_0\,dx & \cdots & \int_0^1 \phi_N\,dx & 0 \end{pmatrix} U = V^T F \tag{16}$$

对任意 $V=(v_0,v_1,\cdots,v_N,d)^T$ 成立。

因此只需求解 $KU=F$ ，即可得到 $U=(u_0,u_1,\cdots,u_N,c)^T$，为问题 (1) 的数值解。

3 Results

实验中选择 $u(x)=x^2(x-1)^2, f(x)=-12x^2+12x-2$。由于求解系数是受到下面约束限制得到的结果。

$$\int_0^1 \hat{u}\,dx = 0 \tag{17}$$

所以在比较误差时，应当对数值解加上一个常数项，使得满足约束。即：

$$\hat{u}_h = u_h + \int_0^1 u\,dx \tag{18}$$

由此得到误差的定义：

$$L^2 = \|\hat{u}_h - u\|_2 \tag{19}$$

$$H^1 = \|\hat{u}_h - u\|_2 + \|\hat{u}_h' - u'\|_2 \tag{20}$$

结果如下：可以看出，该方法对 L^2 误差为 2 阶，对 H^1 误差为一阶, 与前两次实验相同。

N	L^2 error	order	H^1 error	order
10	3.40E-03		1.03E-01	
20	8.56E-04	1.991	5.15E-02	0.997
40	2.14E-04	1.998	2.57E-02	1.002
80	5.36E-05	1.999	1.28E-02	1.005