FEM Code Report2

SA24229016 王润泽

2024 年 9 月 22 日

1 Introduction

编写程序求解两点边值问题：

$$\begin{aligned} &-u'' = f, \quad 0 < x < 1, \\ &u(0) = u(1) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

选取等距网格剖分，有限元空间选取为分段连续线性多项式空间，每个单元的基函数利用单元 $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ 端点 x_{j-1}, x_j 得到。

2 Method

2.1 基函数

实验中采用等距网格划分，节点数为 N，节点处的值为 $u_i, h_i = x_i - x_{i-1}$ 。选取分片线性全局基函数 $\phi_i(x)$，并选取其张成的有限维线性空间进行求解，其定义如下：

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x \in I_i, \\ \dfrac{x_i - x}{h_{i+1}}, & x \in I_{i+1}, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases} \tag{2}$$

对于单元 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$，其局部基函数 ψ 定义如下：

$$\psi_i^0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_i - x}{h_i}, & x \in I_i, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases} \tag{3}$$

$$\psi_i^1(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x \in I_i, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4}$$

对于标准单元 $I = [0,1]$，其基函数 φ 定义如下：

$$\varphi^0(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in [0,1], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5}$$

$$\varphi^1(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{6}$$

2.2 刚度矩阵

局部刚度矩阵描述了双线性形式 $a(u,v)$ 在局部基函数上的表现，其定义如下：

$$\begin{aligned} k_i^{00} &= a(\psi_i^0, \psi_i^0) = \int_{I_i} \psi_i^0(x)'\psi_i^0(x)' = \frac{1}{h_i}, \\ k_i^{01} = k_i^{10} &= a(\psi_i^0, \psi_i^1) = \int_{I_i} \psi_i^0(x)'\psi_i^1(x)' = -\frac{1}{h_i}, \\ k_i^{11} &= a(\psi_i^1, \psi_i^1) = \int_{I_i} \psi_i^1(x)'\psi_i^1(x)' = \frac{1}{h_i}. \end{aligned} \tag{7}$$

对于等分剖分的单元，其刚度矩阵 K 定义如下：

$$k_i = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

对于内部单元 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$，其全局刚度矩阵 K_i 定义如下：

$$K_i = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i-1 \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \overset{\begin{array}{cccccc} & & i-1 & i & & \end{array}}{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}} \tag{9}$$

对于边界上 $I_1=[0,x_1]$ 和 $I_N=[x_{N-1},1]$ 的单元，其全局刚度矩阵 K_1 和 K_N 定义如下：

$$K_1=\frac{1}{h}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix} \tag{10}$$

$$K_{N+1}=\frac{1}{h}\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix} \tag{11}$$

得到全局刚度矩阵 A 为：

$$A=\sum_{i=1}^{N+1}K_i \tag{12}$$

2.3 载荷向量

取 $f(x)=-(2\cos x-(x-1)\sin(x)),u(x)=(x-1)\sin x$，得到载荷向量 F 分量为：

$$\begin{aligned}f_i=(f,\phi_i)&=\int_0^1 f\phi_i\,dx\\&=4(hj-1)\sin^2(h/2)sin(hj)/h-2\sin(h)\cos(hj)\end{aligned} \tag{13}$$

3 Results

实验得到的结果如下：

表 1: 误差分析

N	L^2 error	order	H^1 error	order
10	1.70×10^{-3}	-	5.39×10^{-2}	-
20	4.26×10^{-4}	2.00	2.69×10^{-2}	1.00
40	1.07×10^{-4}	2.00	1.34×10^{-2}	1.00
80	2.66×10^{-5}	2.00	6.68×10^{-3}	1.01

4 Discussion

本次实验与实验 1 相比，主要要区别在于从不同的角度构造刚度矩阵，实验 1 是以全局基函数来构造刚度矩阵，而实验 2 是从每个单元的局部基函数出发构造刚度矩阵。从结果来看，二者的误差收敛结果是一致的，且误差随着网格的细化而减小，误差的收敛阶数也是符合理论预期的，即 L^2 误差和 H^1 误差的收敛阶数分别为 2 和 1。

A Computer Code

```
    function [x, u_h] = fem_solver2(N,F_load)
    % Mesh generation
    a = 0; b = 1;  % Interval [0,1]
    h = (b - a) / N;  % Step size
    x = linspace(a, b, N+1);  % Mesh points
    A = sparse(N-1,N-1);
    % Construct the sparse matrix A
    for i = 2:N-1
        A(i-1,i-1) = A(i-1,i-1) + 1/h;
        A(i-1,i) = A(i-1,i) - 1/h;
        A(i,i-1) = A(i,i-1) - 1/h;
        A(i,i) = A(i,i) + 1/h;
    end
    A(1,1) = A(1,1) + 1/h;
    A(N-1,N-1) = A(N-1,N-1) + 1/h;
    % Construct the load vector F
    F = zeros(N-1, 1);
    for j = 1:N-1
        F(j) = F_load(j,h);
    end
    % Solve the linear system K * u_h = F
    u_h = A \ F;
    % Apply boundary conditions u(0) = 0 and u(1) = 0
    u_h = [0, u_h', 0];
end
```

Listing 1: FEM Solver