FEM 书面作业 1

SA23001071 杨哲睿

2023 年 9 月 18 日

1 习题 1

假设 $V = \{w | w \in C[0,1],\ w'$ 是 $[0,1]$ 中的分片连续有界函数, $w(0) = w(1) = 0\}$，$w \in C[0,1]$ 满足

$$\int_0^1 wv \mathrm{d}x = 0, \quad \forall v \in V$$

证明:

$$w(x) = 0, \quad \forall x \in [0,1]$$

证明:

假设 $\exists x_0 \in (0,1), w(x_0) > \alpha > 0$ 因为 w 是连续函数, 所以 $\exists B(x_0, r) \subset (0,1)$ 使得 $\forall x \in B(x_0, r)$ 有 $f(x) > \alpha$，这是因为连续函数值域中开集的原像是开集。

考虑如下的函数:

$$v = \begin{cases} \frac{1}{r}(x - x_0 + r)^2, & x_0 - r \le x < x_0 - \frac{1}{2}r \\ -\frac{1}{r}(x - x_0)^2 + \frac{r}{2}, & x_0 - \frac{1}{2}r \le x < x_0 + \frac{1}{2}r \\ \frac{1}{r}(x - x_0 - r)^2, & x_0 - r \le x < x_0 - \frac{1}{2}r \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

不难验证：

$$v' = \begin{cases} \frac{2}{r}(x - x_0 + r), & x_0 - r \le x < x_0 - \frac{1}{2}r \\ -\frac{2}{r}(x - x_0), & x_0 - \frac{1}{2}r \le x < x_0 + \frac{1}{2}r \\ \frac{2}{r}(x - x_0 - r), & x_0 - r \le x < x_0 - \frac{1}{2}r \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2}$$

是分片连续的函数，并且 $v(0) = v(1) = 1$，因此 $v \in V$。

$$0 = \int_0^1 wv\mathrm{d}x > \alpha \int_{x_0-r}^{x_0+r} v\mathrm{d}x > 0 \tag{3}$$

产生矛盾。

因此 $\forall x \in (0,1), w(x) = 0$，由 w 的连续性可知，$w(0) = w(1) = 0$。综上：

$$w(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

2 习题 2

设 $f(x)$ 是光滑函数，给出两点边值问题

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

对应的变分问题。

解：

定义双线性型 $a(u,v) := \int_0^1 u'v'\mathrm{d}x$.

定义空间 $V = \left\{v : v \in L^2(0,1), a(v,v) < \infty, v(0) = v(1) = 0\right\}$.

对应的变分问题为：求 $u \in V$，使得

$$a(u,v) = (f,v) \quad \forall v \in V \tag{5}$$

3 习题 3

设 $f(x)$ 是光滑函数，给出两点边值问题

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x)) + u(x) = f, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

对应的变分问题。

解:

定义双线性型 $a(u,v) := \int_0^1 au'v' + uv\mathrm{d}x$.

定义空间 $V = \{v : v \in L^2(0,1), a(v,v) < \infty, v(0) = 0\}$.

此时:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 fv\mathrm{d}x \\ =&\int_0^1 -v(au')' + uv\mathrm{d}x \\ =&-\left(v(x)a(x)u'(x)\right)|_0^1 + \int_0^1 au'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x \\ =&\int_0^1 au'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x \\ =&a(u,v) \end{aligned} \tag{7}$$

从而，对应的变分问题为：求 $u \in V$，使得

$$a(u,v) = (f,v) \quad \forall v \in V \tag{8}$$

4 习题 4

假设函数 f 是分片线性的，$f(x) = \sum_{j=1}^N f_j\phi_j(x)$，证明：求解边值问题的有限元方法可以写成如下形式：

$$AU = MF$$

其中 M 是质量矩阵.

证明：假设求解的边值问题本身可以转化为一个变分问题，即存在双线性型 $a(u,v)$、内积 $(\cdot,\cdot)$ 和空间 V 使方程求解问题的解等价于找 $u \in V$，使得 $a(u,v) = (f,v) \forall v \in V$。

取 V_h 是 V 的有限维子空间，$\{\psi_i\}_{i=1}^M$ 是 V_h 上的一组基。在子空间 V_h 中，$u = \sum_{i=1}^M u_i \psi_i, v = \sum_{i=1}^M v_i \psi_i$，那么双线性型：

$$a(u,v) = a(\sum_{i=1}^N u_i \psi_i(x), \sum_{j=1}^N v_j \psi_j(x)) \quad = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u_i v_j a(\psi_i, \psi_j) \tag{9}$$

定义矩阵 $A \in \mathbb{R}^{M \times M}$,其中每个元素 $a_{ij} = a(\psi_i, \psi_j)$,向量 $W = (v_1, v_2, \cdots, v_M)^T$, $U = (u_1, u_2, \cdots, u_M)^T$，那么

$$a(u,v) = W^T A U \tag{10}$$

同时

$$\begin{aligned} (f,v) &= \left(\sum_{j=1}^N f_j \phi_j(x), \sum_{i=1}^M v_i \psi_i(x) \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M (\phi_j(x), \psi_i(x)) \end{aligned} \tag{11}$$

令 $F = (f_1, f_2, \cdots, f_N)^T$，矩阵 $M \in \mathbb{R}^{M \times N}$，其中每个元素为 $m_{ij} = (\phi_j(x), \psi_i(x))$，那么：

$$(f,v) = W^T M F \tag{12}$$

此时，变分问题转化为 $W^T A U = W^T M F, \forall W$，那么

$$AU = MF \tag{13}$$

这说明了求解边值问题的有限元方法能够写成(13)的形式.