Week 6

SA23001071 杨哲睿

1.x.1

Suppose that Ω is bounded and that $1 \le p \le q \le \infty$. Prove $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ (Hint: use Holders inequality.) Give examples to show that the inclusion is strict if $p < q$ and false if Ω is not bounded.

Proof:

Holder inequality:

$$\forall \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega) \quad \|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

设 $f \in L^q(\Omega), q < \infty$，即 $\|f\|_q < +\infty$，即

$$\left(\int_\Omega |f|^q \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty \Rightarrow \int_\Omega |f|^q \,\mathrm{d}x < +\infty$$

那么:

$$\int_\Omega |f|^p \cdot 1 \,\mathrm{d}x \le \left(\int_\Omega (|f|^p)^{\frac{q}{p}} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_\Omega 1 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{q-p}{q}} = \left(\int_\Omega |f|^q \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{p}{q}} (m(\Omega))^{\frac{q}{q-p}}$$

考虑到$m(\Omega) < +\infty$，那么

$$\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}x < +\infty$$

即 $\|f\|_p < \infty, f \in L^{p(\Omega)}$。如果 $q = \infty$，即有

$$\operatorname{ess\,sup}\{f(x)\} = M < \infty$$

那么使得 $|f(x)| > M$ 的 x 组成零测集，那显然$\forall p < \infty$:

$$\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}x < m(\Omega) M^p < \infty$$

此时 $f \in L^p$ 依然是成立的。综上，$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega), \forall 1 \le p \le q \le \infty$

下面的例子是说 $p < q$ 时，包含关系严格的：考虑定义在$\Omega = (0, 1)$ 上的函数 $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$，它明显不是$L^2$的，因为:

$$\int_{(0,1)} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int_{(0,1)} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \infty$$

但它是L^1的，这是因为:

$$\int_{(0,1)} f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{(0,1)} \frac{1}{2\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = 1 < \infty$$

下面的例子是说，$m(\Omega) < \infty$ 是必要的：考虑定义在 $\Omega = [1, \infty)$ 上的函数 $f(x) = \frac{1}{x}$，它是L^2的:

$$\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1$$

但它不是L^1的:

$$\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty$$

1.x.2

Show that the set of bounded, continuous functions on a domain Ω forms a Banach space with norm $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$

Proof: 任取f_n 为 $C(\Omega)$ 中的柯西列，即

$$\|f_n - f_m\| \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

定义

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

这样的定义是合理的，因为 $\forall x \in \Omega$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

即 $f_{n(x)}$ 是柯西列。

若不然，即$\exists \varepsilon > 0, \forall N, \exists m, n > N$ 由$f_n - f_m \in C(\Omega)$可知，存在开球 $B_N(x)$ 满足 $|f_n - f_m|$在 $B_N(x)$ 上恒大于 ε，而$m(B_N(x)) > 0$，这与 $\|f_n - f_m\| \to 0$ 矛盾。

首先，$\|f - f_n\| \to 0 \quad (n \to \infty)$：任取 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n, m > N$

$$\|f_m - f_n\| < \varepsilon$$

即 $\forall x \in \Omega, |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$，在其中令$m \to \infty$，可得

$$\forall x, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

这就是

$$\|f_n - f\| \to 0 \quad (N \to \infty)$$

我们需要说明，$f(x)$ 是连续的：固定x，任取$\forall \varepsilon > 0$，因为 $\|f_n - f\| \to 0$，所以存在n使得：

$$\forall x \in \Omega, \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

而 $f_n \in C(\Omega)$ 所以 $\exists \delta > 0$，使得 $\left|f_{n(x)} - f_{n(y)}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$，此时

$$|f(x) - f(y)| < \left|f(x) - f_{n(y)}\right| + |f_n(x) - f(x)| + |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$$

这说明 f 连续，即$f \in C(\Omega)$。

我们还需要说明 $f(x)$ 是有界的。首先存在n使得：

$$\|f_n - f\| < 1 \Rightarrow \forall x \in \Omega\ |f_n(x) - f(x)| < 1$$

而 f_n 本身是有界的，即$\sup_x\left|f_{n(x)}\right| = M < \infty$ 那么：

$$|f(x)| \leq |f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| = M + 1 < \infty$$

所以f是有界的。

综上我们说明了任何柯西列都收敛，因此Ω上的有界连续函数全体构成Banach空间。

1.x.3

Suppose that Ω is bounded and that $f_j \to f$ in $L^p(\Omega)$. Using Holder’s inequality prove that:

$$\int_\Omega f_j(x)\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{as } j \to \infty$$

Proof:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|f_j(x) - f(x)\right| \mathrm{d}x &\leq \left(\int_\Omega \left|f_j - f\right|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega 1\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p-1}} \\ &= \left(\int_\Omega \left|f_j - f\right|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} (m(\Omega))^{\frac{p}{p-1}}\end{aligned}$$

一方面 Ω 有界，即 $m(\Omega) < \infty$；另一方面 $f_j \to f$，即 $\int_\Omega \left|f_j - f\right| \mathrm{d}x \to 0\ (j \to \infty)$。那么

$$\int_\Omega \left|f_j(x) - f(x)\right| \mathrm{d}x \to 0 \quad (j \to \infty)$$

而

$$0 \leq \left|\int_\Omega f_j(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_\Omega \left|f_j(x) - f(x)\right| \mathrm{d}x$$

那么

$$\int_\Omega f_j(x)\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{as } j \to \infty$$

1.x.6

Let $\Omega = [0,1]$ and $1 \leq p < \infty$. Show that the function f defined:

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \log|x - r_n|$$

is in $L^p(\Omega)$, and moreover, that $\left\|f - f_j\right\|_p \to 0 \quad \text{as } j \to \infty$ (Hint: first show that $\log x \in L^p$ and then use the fact that L^p is a Banach space)

Proof: 首先 $\log x \in L^p$，这是因为：

$$\int_{[0,1]} |\log x|^p \,\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-x} x^p \,\mathrm{d}x = \Gamma(p+1) < \infty$$

同理，

$$
\begin{aligned}
\int_{[0,1]} |\log(x-r_n)|^p \,\mathrm{d}x &= \int_{[0,r_n]} |\log(x-r_n)|^p \,\mathrm{d}x + \int_{[r_n,1]} |\log(x-r_n)|^p \,\mathrm{d}x \\
&< 2\Gamma(p+1) < \infty
\end{aligned}
$$

定义 $f_j(x) = \sum_{n=1}^{j} 2^{-n} \log|x-r_n|$，显然 $f_j \in L^{p(\Omega)}$。那么：$\forall j,k > N$

$$
\begin{aligned}
\|f_j - f_k\| &= \left\| \sum_{n=j+1}^{k} 2^{-n} \log|\ x - r_n| \right\| \\
&\leq \sum_{n=j+1}^{k} 2^{-n} \|\log|x-r_n|\| \\
&< 2\Gamma(p+1) \sum_{n=j+1}^{k} 2^{-n} \\
&= 2^{2-n}\Gamma(p+1) \to 0 \quad (N \to \infty)
\end{aligned}
$$

这说明了 $\{f_j\}$ 是Cauchy列，而 $L^{p(\Omega)}$ 是Banach空间，所以其收敛到函数$f \in L^p(\Omega)$