10.x.5

Proof: $\forall v \in \mathbb{V}_h, a(u-v, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h$

根据有限元解的性质:

$$a(u_h, v) = F(v) \quad \forall v \in \mathbb{V}_h$$
$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in \mathbb{V}$$

那么:

$$\begin{aligned}
\|u-u_h\|_a &\le \|u-v\|_a + \|v-u_h\|_a \\
&\le \|u-v\|_a + \sup_{w\in\mathbb{V}_h} \frac{a(u_h-v,w)}{\|w\|_a} \\
&\le \|u-v\|_a + \sup_{w\in\mathbb{V}_h} \frac{a(u-u_h,w)+a(v-u,w)}{\|w\|_a} \\
&\le \|u-v\|_a + \sup_{w\in\mathbb{V}_h} \frac{a(u-u_h,w)}{\|w\|_a}
\end{aligned}$$

$$\forall v' \in \mathbb{V}_h, \|u-v\|_a^2 = a(u-v, u-v+v-v') = a(u-v, u-v') \le \|u-v\|\|u-v'\|$$

因此，$\|u-v\|_a \le \|u-w\|_a \quad \forall w \in \mathbb{V}_h$

对不等式同时取下确界，并代入:

$$\|u-u_h\|_a \le \inf_{v\in\mathbb{V}_h} \|u-v\|_a + \sup_{w\in\mathbb{V}_h} \frac{a(u-u_h,w)}{\|w\|_a}$$

10.x.8

$$|e|\|[[w]]\|_{L^2(e)}^2 \le C \sum_{T\in\mathcal{T}_e} h_T^2 |w|_{H^1}^2$$

考虑每一条边上的$[[w]]$，有: $[[w]] = w_1 n_1 + w_2 n_2$，并考虑到$\widehat{[[w]]}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$，其中 $\widehat{[[w]]}$ 表示将 $[[w]]$ 转换到$[0,1]$区间上，$\widehat{[[w]]}$是线性函数，那么:

$$\begin{aligned}
\|[[w]]\|_2^2 = \int_e |[[w]]|^2 \,\mathrm{d}x = \int_e (w_1 n_1 + w_2 n_2)^2 \,\mathrm{d}x &= \int_{[0,1]} |e|\widehat{[[w]]} \,\mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{4}|e|(\max|w_1 - w_2|)^2 \\
&\le \int_e w_1^2 + w_2^2 \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

对 $T \in \mathcal{T}_e$ 求和:

$$
\begin{aligned}
3\ |e|\ \|[[w]]\|_2^2 &\leq |e| \sum_{T\in\mathcal{T}_e} \int_e w_{1T}^2 + w_{2T}^2 \, \mathrm{d}x \\
&\leq |e| \sum_{T\in\mathcal{T}_e} \|w\|_{L^2(e)}^2 \\
&\leq C|e|^2 \sum_{T\in\mathcal{T}_e} |w|_{H^1(T)}^2 \quad \text{(Trace Theorem)}
\end{aligned}
$$

然而，h_T 是三角形的直径，e是某个三角形的边长，显然$h_T > e$，那么

$$
|e|\ \|[[w]]\|_2^2 \leq C \sum_{T\in\mathcal{T}_e} |w|_{H^1(T)}^2
$$