Homework4

> PB20020480 王润泽

5.9 本题以井字棋（圈与十字游戏）为例练习博弈中的基本概念。定义 X_n 为恰好有 n 个 X 而没有 O 的行、列或者对角线的数目。同样 O_n 为正好有个 n 的 O 行、列或者对角线的数目。效用函数给 $X_3 = 1$ 的棋局 $+1$ ，给 $O_3 = 1$ 的棋局 -1 。所有其他终止状态效用值为 0 。对于非终止状态，使用线性的评估函数定义为 $Eval(s) = 3X_2(s) + X_1(s) - (3O_2(s) + O_1(s))$ 。

1. **估算可能的井字棋局数**

   A： 九个格子双方轮流下棋，至少要两个回合后（5次）先手才能决出胜负，对应的有7种赢法，对于输方则有 C_6^2 种选择可能，故在第5轮决出胜负时，有 $6 * C_6^2 = 120$ 种。

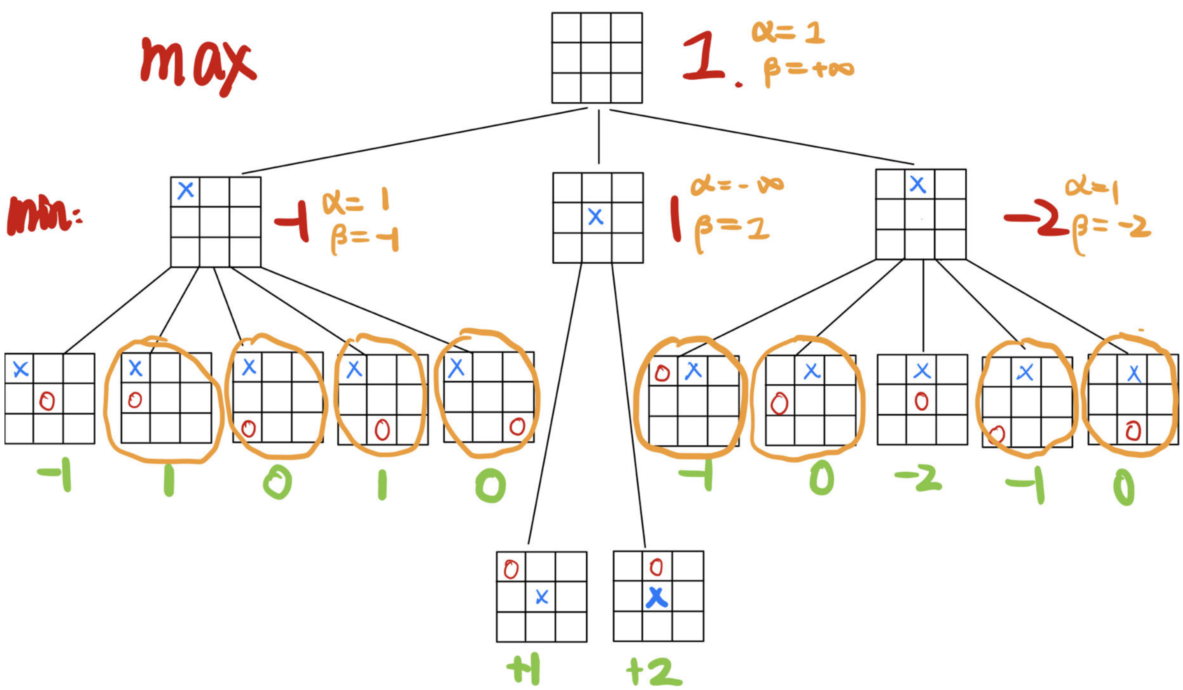
   若在第6轮决出胜负，则属于后手赢。如果是赢家对角线，那么输方有 C_6^3种可能；如果是赢家是行、列赢，则输方有 $C_6^3 - 2$种。故在第6轮决出胜负时，有 148 种

   以此类推第七轮决出胜负时有 444 种，第八轮有 96种，第九轮有118 种

   以上可能的局数有 926 种，估算大概是 900 种左右（未考虑对称性）

2. **考虑对称性，给出从空棋盘开始的深度为2 的完整博弈树（即，在棋盘上一个X一个O的棋局）。**

   A: 博弈树如下：（永远 X 先手）



3. **标出深度为2的棋局的评估函数值。**

   如上图绿字

4. **使用极小极大算法标出深度为1和0的棋局的倒推值,并根据这些值选出最佳的起始行棋。**

   如上图红字，最佳落子为中央处

5. **假设结点按对 $\alpha - \beta$ 剪枝的最优顺序生成，圈出使用 $\alpha - \beta$ 剪枝将被剪掉的深度为2的结点。**

   由于是按照最优顺序生成，所以第一层首先搜索的是中央处，第二层都优先搜索到最小的结点。如上图橙色圈出。

5.8 考虑**图5.17**中描述的两人游戏。

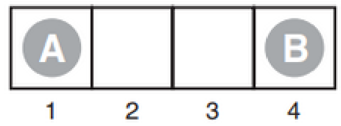
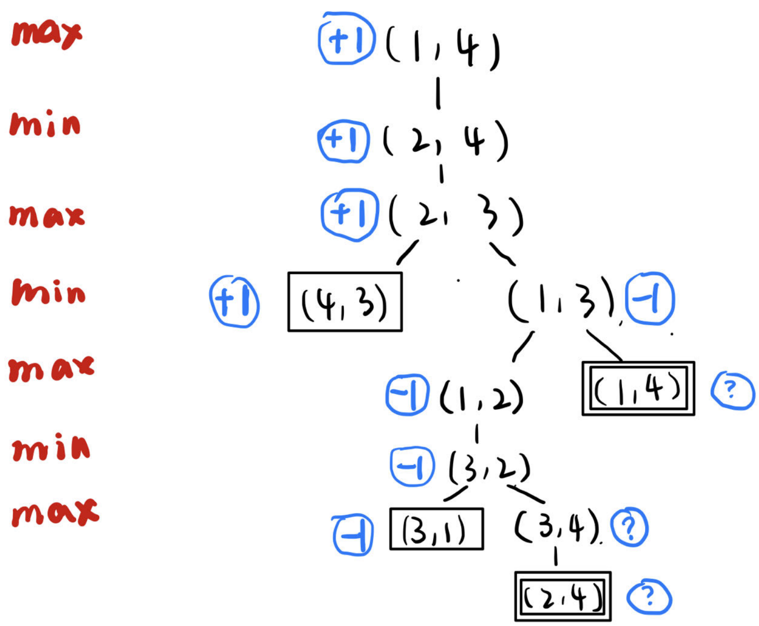


Figure 5.17 The starting position of a simple game. Player A moves first. The two players take turns moving, and each player must move his token to an open adjacent space in either direction. If the opponent occupies an adjacent space, then a player may jump over the opponent to the next open space if any. (For example, if A is on 3 and B is on 2, then A may move back to 1.) The game ends when one player reaches the opposite end of the board. If player A reaches space 4 first, then the value of the game to A is $+1$; if player B reaches space 1 first, then the value of the game to A is -1.

1. **根据如下约定画出完整博弈树:**
   - 每个状态用 (s_A, s_B) 表示，其中 s_A 和 s_B 表示棋子的位置
   - 每个终止状态用方框画出，用圆圈写出它的博弈值。
   - 把循环状态（在到根结点的路径上已经出现过的状态）画上双层方框。由于不清楚他们的值，在圆圈里标记一个“? ”



2. **给出每个结点倒推的极小极大值（也标记在圆圈里)。解释怎样处理“?”值和为什么这么处理。**

   如上图所示， **?** 值一定是 $\{-1, 1\}$ 中的某个值，故采取如下策略:

$$\mathrm{MAX}: \max\{-1, ?\} = ?, \max\{+1, ?\} = +1, \max\{?, ?\} = ?$$
$$\mathrm{MIN}: \min\{-1, ?\} = -1, \min\{+1, ?\} = ?, \min\{?, ?\} = ?$$

3. **解释标准的极小极大算法为什么在这棵博弈树中会失败，简要说明你将如何修正它，在**（b）**的图上画出你的答案。你修正后的算法对于所有包含循环的游戏都能给出最优决策吗?**

   因为在标准的极小极大值算法中采取的策略是深度优先搜索，所以遇到循环的状态会导致无线递归的情况。

解决方法是，由于博弈的所有情况是可穷尽的，故在搜索过程中记录下过去访问过的历史结点，当新的结点出现重复时则进行标记为 **?** ，并终止搜索。

该方法不能对所有循环的游戏保证都给出最优结果，如果当所有叶子结点只有 **?** ，那么会造成最终的结果为 **?** 的不定状态，给不出最优结果。

4. **这个4-方格游戏可以推广到n个方格，其中n>2。证明如果是n偶数，A一定能赢；而是n奇数，则A一定会输。**

   数学归纳法：

   当 $n=3$ 时，因为A先手，所以第一步为 $(2,3)$，则这会导致在第二步时B取胜 $(1,2)$

   当 $n=4$ 时，由上面的博弈图可以看出 A 取胜

   假设 $n=2m$ 时，A取胜。

   那么，当 $n=2m+2$时，由游戏规则必然会由于双方在一个来回中的移动后，使得问题归约到 $n-2=2m$ 的问题，此时 A 取胜。同理 $n=2m+1$ 为奇数时 A 一定会输

5.13 请给出 $\alpha-\beta$ 剪枝正确性的形式化证明。要做到这一点需考虑**图5.18**。问题为是否要剪掉结点 n_j ,它是一个**MAX**结点，是 n_1 的一个后代。基本的思路是当且仅当 n_1 的极小极大值可以被证明独立于 n_j 的值时，会发生剪枝.

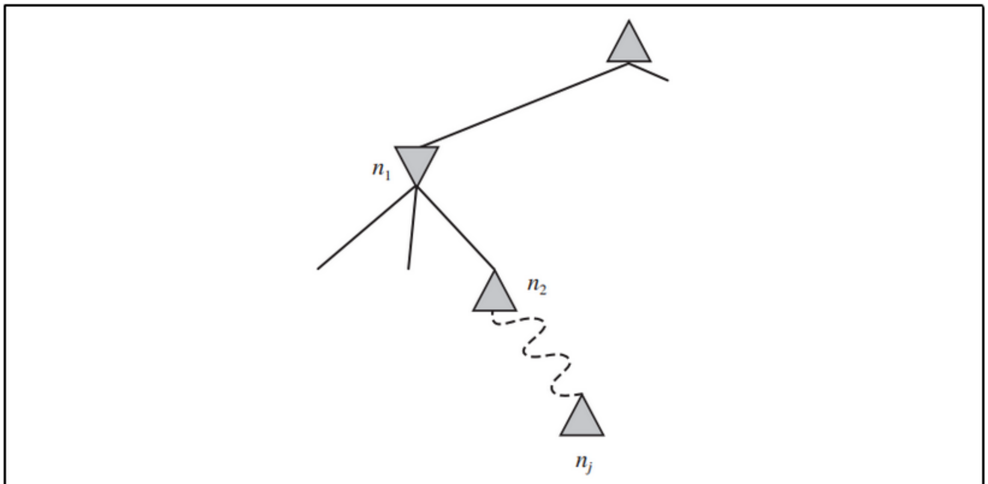


Figure 5.18 Situation when considering whether to prune node n_j.

1. **n_1 的值是所有后代结点的最小值: $n_1=\min(n_2,n_{21},\dots,n_{2b_2})$ 。请为 n_2 找到类似的表达式，以得到用 n_j 表示的 n_1 的表达式。**

$$n_2=\max(n_3,n_{31},\cdots,n_{3b_3})$$
$$\cdots$$
$$n_{j-1}=\min(n_j,n_{j1},\cdots,n_{jb_j})$$

   嵌套循环，可得到 $n_1=\min(\max(\cdots\min(n_j,n_{j1},\cdots,n_{jb_j})),n_{21},\dots,n_{2b_2})$

2. **深度为 i 的结点 n_i 的极小极大值已知，l_i 是在结点 n_i 左侧结点的极小值（或者极大值)。同样， r_i 是在 n_i 右侧的未探索过的结点的极小值(或者极大值)。用 l_i 和 r_i 的值重写 n_1 的表达式**

   由题意可知，对任意层都已知左侧结点而未知右侧，即采取深度优先搜索的方式，那么有

$$\begin{aligned}n_1&=\min(l_2,n_2,r_2)=\min(l_2,\max(l_3,n_3,r_3),r_2)\\&=\cdots=\min(l_2,\max(l_3,\min(\cdots\min(l_j,n_j,r_j),r_3)r_2)\end{aligned}$$

3. **现在重新形式化表达式，来说明为了向 n_1 施加影响， n_j 不能超出由 l_i 值得到的某特定界限。**

   由于 n_j 是一个 **MAX** 结点，故为了向 n_1 施加影响，得在每次 $\min - \max$过程中被选出，而由于 n_1 是一个 **MIN** 结点，所以 j 是偶数，下面证明 n_j 的界限范围:

   - 在 $j-1$ 层，为了对 n_1 产生影响，所以必须在此层中 $n_j = \min(l_j, n_j, r_j) = n_j$,由于 r_i 未知，所以至少要保证 $n_j \leq l_j$
   - 在 $j-2$ 层，同理得 $n_{j-2} = \max(l_{j-1}, n_{j-1}, r_{j-1}) = \max(l_{j-1}, n_j, r_{j-1})$，至少有 $n_j \geq l_{j-1}$
   - 以此类推，得到 $\max(l_3, l_5 \cdots, l_{j-1}) \leq n_j \leq \min(l_2, l_4, \cdots, l_j)$

   由于j 为奇数时为 **MAX** 结点， j 为偶数时是 **MIN** 结点，所以令 α 为 **MAX** 结点下界，β 为 **MIN** 结点上界。得到 $\alpha \leq n_j \leq \beta$ 时，n_j 会对 n_1 产生影响的必要条件；反之，当 $\alpha \geq \beta$ 时，则 n_j 一定不会对 n_1 产生影响。

4. **假设 n_j 是MIN结点的情况，请重复上面的过程**

   - n_j 是 **MIN** 结点，j 为奇数
   - $n_{j-1} = \max(l_j, n_j, r_j)$，至少有 $n_j \geq l_j$
   - $n_{j-2} = \min(l_{j-1}, n_j, r_{j-1})$，至少有 $n_j \leq l_{j-1}$
   - 依次类推得到 $\max(l_3, l_5 \cdots, l_j) \leq n_j \leq \min(l_2, l_4, \cdots, l_{j-1})$