8.2

2022 年 11 月 13 日

修改题目为

对于 0/1 损失函数来说, 指数损失函数并非仅有的一致替代函数. 考虑式 (8.5), 试证明: 任意损失函数 $\ell(-f(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x}))$, 若对于 $\boldsymbol{f}H(\boldsymbol{x})$ 在区间 $[-\infty,\delta](\delta>0)$ 上单调递减, 则 ℓ 是 0/1 损失函数的一致替代函数.

$$
\begin{aligned}
L(H \mid \mathcal{D}) &= E_{\boldsymbol{x}\sim\mathcal{D}}[\ell(-yH(\boldsymbol{x}))] \\
&= P(y=1 \mid \boldsymbol{x})\ell(-H(\boldsymbol{x})) + P(y=-1 \mid \boldsymbol{x})\ell(H(\boldsymbol{x}))
\end{aligned}
$$

(L($-$U))函数的特点是: 在 $[-\infty,\delta]$ 区间是单调递减函数(无论其凹凸性如何), 在 $[\delta,+\infty]$ 区间, 可以是任意形状曲线, 无论其单调性如何。对该损失函数进行最小化时，所对应的横坐标位置 u^* 总是在 δ 右侧，也就是 $\mathrm{f}\,(x^*)\,\mathrm{H}\,(x^*) \geq 0 > 0$, 这说明 H(x) 与 f(x) 同正负号。因此 $\operatorname{sign}(\mathrm{H}\,(x^*)) = \mathrm{f}\,(x^*)$, 其结果与最小化 0/1 损失函数结果一致, 是一致替代函数。