

複合材料概論講義

薛子承

2025年2月22日

1 導論

複合材料是一種由兩種或多種不同物理性質的材料組合而成的材料。常見應用包括航太、航海、汽車工業和結構工程。

2 均質化理論 (Homogenization Theory)

2.1 代表體積元素 (Representative Volume Element, RVE)

代表體積元素是一個微觀尺度的模型，可用來描述異質材料的平均性質。

關鍵概念：

- 必須足夠大以涵蓋材料的統計特性。
- 必須足夠小以確保合理的計算時間。

2.2 均質化方法

對於不熟悉的新材料，可用Voigt 與Reuss 平均來求出材料性質的上下界。

2.2.1 Voigt 平均 (等應變假設)

假設複合材料內的每個相具有相同的應變，即：

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_M \quad (1)$$

由於應變相等，總應力可表示為：

$$\sigma_M = f_1 \sigma_1 + f_0 \sigma_0 \quad (2)$$

應力與剛度的關係為：

$$\sigma_i = C_i \varepsilon_i \quad (3)$$

代入應變條件：

$$\sigma_M = f_1 C_1 \varepsilon_M + f_0 C_0 \varepsilon_M \quad (4)$$

整理後得到Voigt 平均剛度：

$$C_M^V = f_1 C_1 + f_0 C_0 \quad (5)$$

2.2.2 Reuss 平均（等應力假設）

假設複合材料內的每個相具有相同的應力，即：

$$\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma_M \quad (6)$$

總應變可表示為：

$$\varepsilon_M = f_1 \varepsilon_1 + f_0 \varepsilon_0 \quad (7)$$

由於應變與柔度的關係：

$$\varepsilon_i = S_i \sigma_i, \quad S = C^{-1} \quad (8)$$

代入等應力條件：

$$\varepsilon_M = f_1 S_1 \sigma_M + f_0 S_0 \sigma_M \quad (9)$$

整理後得到Reuss 平均柔度：

$$S_M = f_1 S_1 + f_0 S_0 \quad (10)$$

取逆矩陣即可求得Reuss 平均剛度：

$$C_M^R = (S_M^R)^{-1} \quad (11)$$

3 古典層板理論（Classical Laminate Theory, CLT）

3.1 假設

- 層壓板由多層纖維增強層疊而成。
- 每一層為正交異向性材料。
- 平面應力狀態：

$$\sigma_{33} = 0, \quad \tau_{13} = 0, \quad \tau_{23} = 0 \quad (12)$$

3.2 應力-應變關係推導

在古典層板理論中，層壓板的應力與應變滿足：

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N} \\ \mathcal{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中：

- \mathcal{A} 為面內剛度矩陣，在疊層「平衡」時 $\mathcal{A}_{16} = \mathcal{A}_{26} = 0$ 。
- \mathcal{B} 為彎-拉耦合矩陣，在疊層「對稱」時為零矩陣。
- \mathcal{D} 為彎曲剛度矩陣，在疊層「反對稱」時 $\mathcal{D}_{16} = \mathcal{D}_{26} = 0$ 。

這些矩陣的計算方式為：

$$\mathcal{A} = \sum_{j=1}^N \bar{Q}_j (h_j - h_{j-1}) \quad (14)$$

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \bar{Q}_j (h_j^2 - h_{j-1}^2) \quad (15)$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^N \bar{Q}_j (h_j^3 - h_{j-1}^3) \quad (16)$$

其中 \bar{Q}_j 為第 j 層的剛度矩陣， h_j 與 h_{j-1} 分別是該層的上下邊界位置。

使用應變-曲率關係，平面應變與曲率的表達式如下：

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{0xx} + z\kappa_{xx}, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{0yy} + z\kappa_{yy}, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{0xy} + z\kappa_{xy} \quad (17)$$

這些方程用於計算層壓板在外力作用下的變形行為。

4 應用案例

- **無人機結構**：碳纖維強化複合材料可減輕重量並提升剛度。
- **航太工程**：使用層壓板技術設計高强度、輕量化結構。
- **壓力容器**：適當選擇纖維角度（如 $\pm 45^\circ$ ）可有效提升抗扭性能。

5 設計原則

5.1 一般原則

1. 疊層應平衡 ($\mathcal{A}_{16} = \mathcal{A}_{26} = 0$) 以避免法向/剪切耦合。
2. 疊層應對稱 ($\mathcal{B} = \mathcal{O}$)，以避免固化過程中導致翹曲。
3. 疊層不應為反對稱 ($\mathcal{D}_{16} = \mathcal{D}_{26} = 0$)，以避免彎曲扭轉耦合。
4. 至少10% 的纖維應該與4 個主要方向(0,-45,+45,90) 的每一個方向對齊。這就是所謂的10% 準則，以避免意外的負載狀態。
5. 應避免多層連續的單向層材有相同的方向（以減少分層剝離的風險）。
6. 為了改善彎曲剛度，應將 0° 層放置在盡可能遠離中性軸的位置。
7. 將編織層放在外側，以防止撞擊造成的裂開和損壞。

5.2 管件、壓力容器

- **0 度（軸向）**：使管材能夠抵抗縱向彎曲和軸向拉伸/壓縮
- **90 度（環向）**：抵抗內部/外部壓力，使管材保持圓潤，並在傳統纖維纏繞中提供加固
- **± 45 度**：抵抗純扭轉的理想纖維角度。
- **中間其他角度**：管材很少只施加一個負載，因此一根管材至少需要結合上述2 個角來承受組合負載。大多數組合負載可以用纖維以中間角度承載。例如：
 - 對於內部壓力，環向應力是縱向應力的兩倍，使用大約 $\pm 55^\circ$ 。

- 對於外部壓力，為了抵抗屈曲，使用大約 $\pm 65^\circ$ 。
- 對於准各向同性層壓板，使用 $\pm 22.5^\circ$ 和 $\pm 67.5^\circ$ 交替層。
- 對於帶有扭矩的彎矩，適合選用 $\pm 5^\circ$ 到 $\pm 25^\circ$ 之間的角度。