Frequências naturais de vibração de cadeia circular e linear

Raíssa Vieira

Calculo

1. Cálculo das Frequências de Vibração

Para cada valor de N , calcule as frequências naturais de vibração para:

- Cadeia circular ternária(alternância --m--m2--m3--m--m2--m3--)
- Cadeia homogênea (todas as massas iguais) com pontas livres

In [17]:

```
## cadeia ternaria
# [m] --- k --- [m2] --- k --- [m3] em uma cadeia circular m se conecta com m3
## m e m2=3m e m3=5m
m = 1
m2 = 3*m
m3 = 5*m

## N tamanho da cadeira
N = 100

## cadeia homegenea
## todos os m são iguais
massas = [m]*N
```

$$Ku = \omega^2 Mu$$

Nas frequencias considerando uma serie harmonica chegamos em um problema de autovalor e geramos a matriz rigidez ((omega^2 M)+K) A = 0 -> K A = omega^2 M A e resolvemos a inversa como (inv(M) K) A = omega^2 A

```
eigvals, eigvecs = eigh(K, M)
```

Explicação física

- Modos normais de vibração com matriz rígida com diagonalização dinâmica
- Matriz deve ser densa em estrutura por causa da cadeia ternária que o sistema é muito grande com as massas variadas pois nessa cadeia, o uso de massas diferentes (1m, 3m, 5m) resulta em uma matriz de massa diagonal e uma matriz dinâmica geral não escalável, que quebra a esparsidade.

Matriz – caso circular

In [15]:

```
def gerar_matriz_rigidez_circular(N, k=1.0):
    K = np.zeros((N, N))
    for i in range(N):
        K[i, i] = 2 * k
        K[i, (i - 1) % N] = -k
        K[i, (i + 1) % N] = -k
    return K

# Exemplo
K_circular = gerar_matriz_rigidez_circular(10)
print(np.array_str(K_circular, precision=0, suppress_small=True))
```

```
[[ 2. -1.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0. -1.]
 [-1.  2. -1.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [ 0. -1.  2. -1.  0.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [ 0.  0. -1.  2. -1.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [ 0.  0.  0. -1.  2. -1.  0.  0.  0.  0.]
 [ 0.  0.  0.  0. -1.  2. -1.  0.  0.  0.]
 [ 0.  0.  0.  0.  0. -1.  2. -1.  0.  0.]
 [ 0.  0.  0.  0.  0.  0. -1.  2. -1.  0.]
 [ 0.  0.  0.  0.  0.  0.  0. -1.  2. -1.]
 [-1.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0. -1.  2.]]
```

Aqui percebe a conexão característica da cadeia circular que o final se conecta ao começo

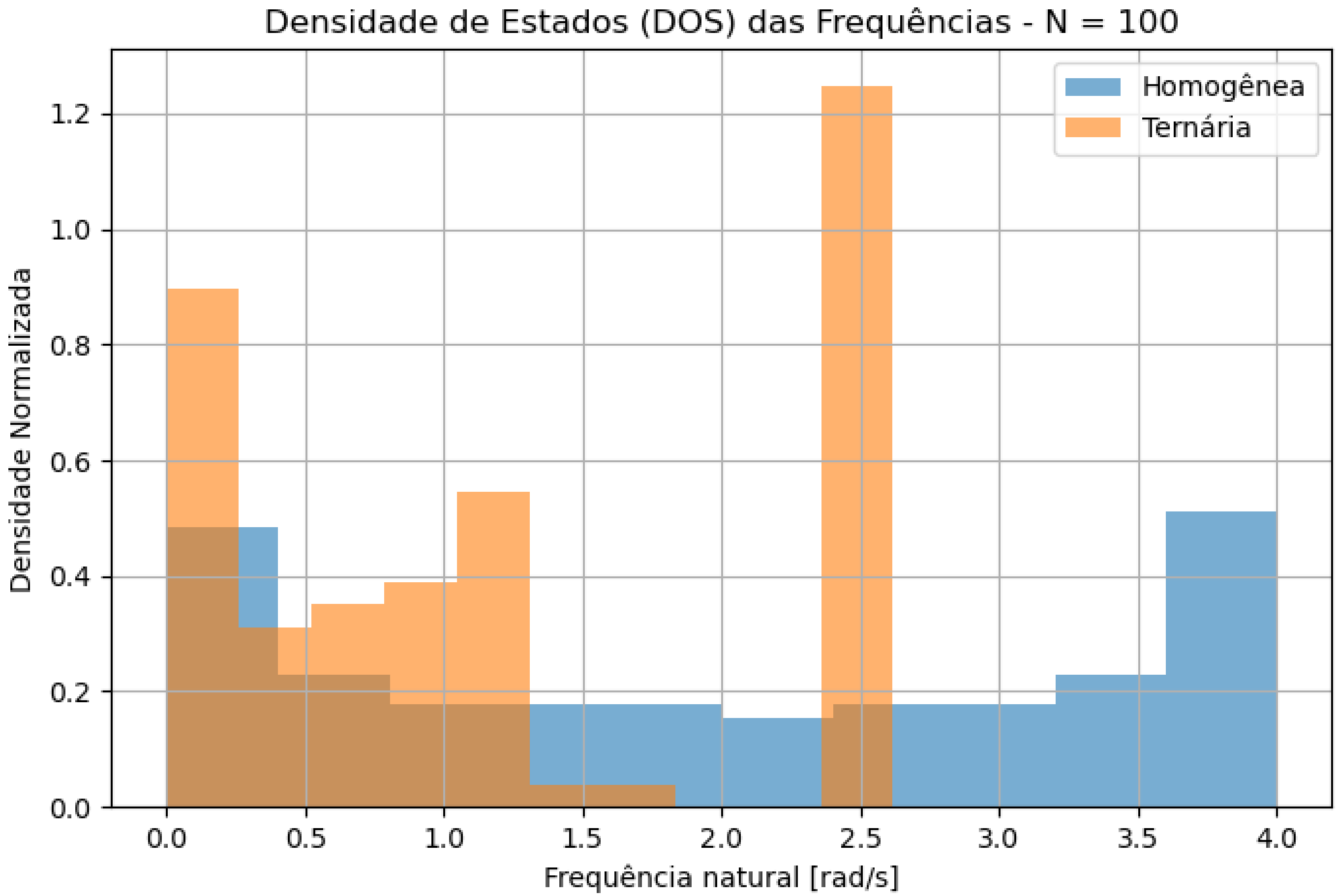
Construção da matriz circular

```
## Estrutura a matrix de zeros para comportar matriz diagonal de cadeira circula e linear
N=10
k=1
Matrix_zeros = np.zeros((N,N), int)
m = Matrix_zeros
for i in range(N):
    for i in range(N):
        if i == j:
            if i == 0: ## circular
                m[i,j] = (k[0] + k[N - 1])/ m[i]
            elif i == N-1: ## circular
                m[i,j] = (k[i - 1] + k[N - 1]) / m[i]
            else:
                m[i,j] = (k[i - 1] + k[i]) / m[i] ## fecha a matriz circular
        elif abs(i - j) == 1:## vizinhos imediatos i e j, sendo j=i+1 → vizinho à direita e j=i-1 → vizinho à esquerda
            k_index = min (i,j) ## 2 para 1
            m[i,j] = -k[k_index]/m[i]
        elif (i == N-1 and j == 0) or (i == 0 and j == N-1): ## sem vizinhos, agora em analisar cadeira linear
            m[i, j] = -k[N - 1] / m[i]
```

HISTOGRAMA DE DENSIDADE

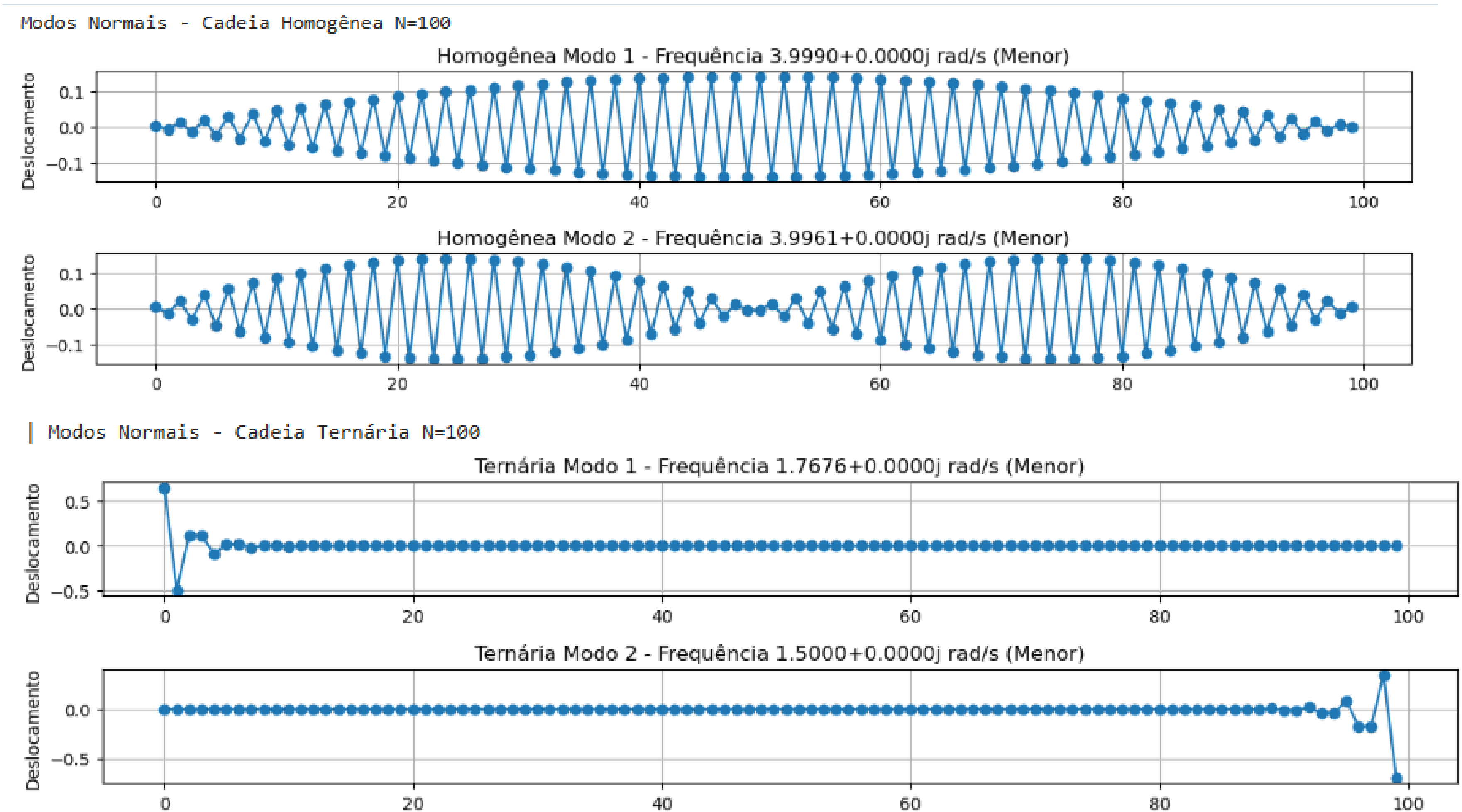
Como observa se a cadeia homogênea esta correta mas a Ternária pelo uso da matrix esparsa quebra devido a variação nas massas

```
==== Cadeia para N = 100 ====
```



Frequências

Visível como com a cadeira homogênea funciona mas com a cadeia ternaria quebra



🧪 Principais Conceitos Abordados

🔹 Distribuição das Frequências Naturais

- **Homogênea:** Distribuição contínua e suave.
- **Ternária:** Lacunas (band gaps) na densidade de estados, refletindo periodicidade.

🔹 Padrões de Modos Vibracionais

- **Baixa frequência:**
  - Homogênea → ondas suaves e estendidas.
  - Ternária → padrões modulados e alternados.
- **Alta frequência (Ternária):**
  - Modos localizados → confinamento vibracional em regiões específicas.

🔹 Efeito do Tamanho da Cadeia (N)

- Testado para N = 100, 1.000 e 10.000.
- Quanto maior o sistema, mais evidentes ficam os:
  - **Band gaps**
  - **Modos localizados**
  - **Modulações periódicas**