

Oraux de la MPX1 de Chaptal

Table des matières

(Centrale, Python, Paul) — Complexité moyenne d'un tri rapide . . .	1
(Centrale, Python, Momo) — Autour de la concentration de la mesure	2
(Centrale, Python, Cécile) — Autour de la fonction Γ et ses représen-	
tations	3
(Centrale, Cécile) — Autour de $SL_n(\mathbb{K})$	3
(Mines Télécom, Robert) — Une série et une intégrale	4
(Mines Télécom, Robert) — Condition suffisante de diagonalisabilité .	4
(Mines-Ponts, Ali) — Équation fonctionnelle (opérateurs de somme) .	4
(Mines-Ponts, Ali) — Équation fonctionnelle (morphisme de l'addition	
vers la multiplication)	4
(Mines-Ponts, Ali) — Dimension et diagonalisabilité	5
(Mines-Télécom, Aymane) — Autour des racines de P et P'	5
(Mines-Télécom, Aymane) — Nature d'une série dont le terme général	
est l'inverse d'une somme partielle divergente	5
(CCP, Aymane) — Un peu de projection	5
(CCP, Mathilde) — Calcul de distance à un hyperplan	5
(CCP, Paul) — Suites de noyaux qui passent par une année de prépa .	6
(CCP, Samy) — Opérateur de translation	6
(ENS LCR, Charles) — Étude probabiliste des records	6

(Centrale, Python, Paul) — Complexité moyenne d'un tri rapide

Soient X_1, \dots, X_n des VA d'un espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$.

On pose $M_n = \max_{i \in [[1, n]]} X_i$ et H_n la n -ième somme partielle de la série harmonique.

L'objectif est de déterminer l'espérance de M_n .¹

- (1) Dans cette partie, supposons que les $(X_i)_i$ suivent une loi uniforme et sont à valeurs dans $[[1, N]]$.

1. Contexte et intérêt : calculer des complexités moyennes, évaluer des coûts amortis dans des algorithmes qui reçoivent en entrée des données suivant une loi uniforme, gaussienne, ...

- a. Coder `EspU(n, N)` qui renvoie l'espérance de M_n pour n, N donnés. ²
- b. Calculer l'espérance de M_n pour $N \in \{50, 100, 200\}$ et $n = 100$. Comparer à $N \frac{n}{n+1}$. Conjectures ?
- (2) Dans cette partie, supposons que les $(X_i)_i$ suivent une loi géométrique de paramètre p .
 - a. Coder `EspG(n, p)` qui renvoie $\mathbb{E}(M_n)$.
 - b. Supposons que $p = 1/2$, calcul de $\mathbb{E}(M_n)$ pour $n \in \{100, 200, 500\}$. Calculer $\frac{-H_n}{\ln(1-p)}$ et $1 - \frac{H_n}{\ln(1-p)}$. Conjectures ?
- (3) Soit X une VA admettant un moment d'ordre 2.

Montrer :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$$

et

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1) \mathbb{P}(X > k)$$

Annexe Python fournie : `import numpy.random as rnd` et donc il sera possible de s'en servir pour simuler les lois. Voici la documentation : <https://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/routines.random.html>

(Centrale, Python, Momo) — Autour de la concentration de la mesure

Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$ à diagonale nulle et telles que :

$$\forall i < j, m_{ij} \sim \mathcal{B}\left(p_n = \frac{\lambda \ln(n)}{n}\right) \text{ (indépendantes)}$$

- (1) Construire M à l'aide d'une fonction : `def mat(\lambda, n)`
- (2) Définir une fonction `def prob(\lambda, n)` qui renvoie la probabilité de quelque chose... ³
- (3) On prend $\lambda \in \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2k}{10} \mid k \in [[0, 5]] \right\}$ et $n \in \{50 + 100k \mid k \in [[0, 5]]\}$.

2. Question orale : Résultat mathématiques justifiant la démarche utilisée ?

3. À clarifier.

Calculer $(\text{Prob}(\lambda, n))_{(\lambda, n)}$ avec Python et les mettre dans une liste.

- (4) Soit X_n le nombre de coefficients non nuls de M , déterminer la loi de $\frac{X_n}{2}$, puis $\mathbb{E}(X_n)$ et enfin $\mathbb{V}(X_n)$.

Soit Z_n le nombre de « je m'en rappelle plus ». ⁴ (pas grave, ça n'importe pas trop)

- (5) Montrer que : $\mathbb{P}(Z_n \geq 1) \leq \mathbb{E}(Z_n)$ et $\mathbb{P}(Z_n = 0) \mathbb{E}(Z_n)^2 \leq \mathbb{V}(Z_n)$. ⁵

(Centrale, Python, Cécile) — Autour de la fonction Γ et ses représentations

Posons $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt, n \geq 0$.

- (1) Montrer que I_n converge et donner sa valeur.

On pose $v_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt, n \geq 0$.

- (2) Montrer que v_n converge.
 (3) Conjecturer un équivalent de v_n à une constante près à l'aide de Python.
 (4) Démontrer qu'il s'agit bien d'un équivalent de v_n et déterminer la constante.

On pose $S_n = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$.

- (5) Analyser le comportement de S_n au voisinage de l'infini, à l'aide de Python.
 (6) Démontrer ce que vous voyez. ⁶

(Centrale, Cécile) — Autour de $SL_n(\mathbb{K})$

On pose $SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(M) = 1\}$, dans la suite : \mathbb{K} est un surcorps commutatif de \mathbb{R} , ie : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

- On sait que $SL_n(\mathbb{K})$ est un sous groupe fermé de $GL_n(\mathbb{K})$ pour le produit matriciel, en effet : $SL_n(\mathbb{K}) = \text{Ker det} = \det^{-1}(\{1\})$, où : $\det : (GL_n(\mathbb{K}), \times) \rightarrow (\mathbb{K}^*, \times)$ est un morphisme de groupe multiplicatif.
- On prend $\|\cdot\|$ sous multiplicative, i.e. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

- (1) Montrer que pour tout $M \in SL_n(\mathbb{K}), \|M\| \geq 1$.
 (2) Montrer que pour tout $M \in SL_2(\mathbb{K}), M$ est semblable à une matrice de la forme :

4. Verbatim.

5. Ce qu'est Z_n n'est pas très important, mais on peut supposer qu'elle est au moins de moment d'ordre 2.

6. Indication : Montrer que la limite aperçu par Python est bien celle vers laquelle S_n tend quoi.

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pm 1 & \lambda \\ 0 & \pm \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

- (3) Pour tout $M \in SL_2(\mathbb{K})$, en déduire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle telle que : $M^2 = \exp(B)$.

(Mines Télécom, Robert) — Une série et une intégrale

On regarde $f : x \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(n!)^2}$ définie sur \mathcal{D} son domaine de convergence.

- (1) Déterminer \mathcal{D} (rayon de convergence)
- (2) Comparer avec $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp[2\sqrt{\pi} \sin(t)] dt$

(Mines Télécom, Robert) — Condition suffisante de diagonalisabilité

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, supposons que :

- (1) A^2 soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- (2) $\text{Sp}(A^2) \subset \mathbb{R}_+^*$

Montrer que A est diagonalisable.

(Mines-Ponts, Ali) — Équation fonctionnelle (opérateurs de somme)

Trouver toutes les fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

(Mines-Ponts, Ali) — Équation fonctionnelle (morphisme de l'addition vers la multiplication)

Trouver toutes les fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{C} vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x)f(y)$$

(Mines-Ponts, Ali) — Dimension et diagonalisabilité

Soit $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $AB + BA = 0$.⁷

- (1) Montrer que n est pair.
- (2) Si $n = 2$, montrer que A et B sont diagonalisables.

(Mines-Télécom, Aymane) — Autour des racines de P et P'

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples.

- (1) Exprimer $\frac{P'}{P}$.⁸
- (2) Pour $a \in \mathbb{R}$, une racine de $P + aP'$ peut-elle être une racine de P ?
- (3) $P + aP'$ est-il scindé à racines simples?

(Mines-Télécom, Aymane) — Nature d'une série dont le terme général est l'inverse d'une somme partielle divergente

Soit $a_n = \left[\sum_{k=1}^n \ln^2(k) \right]^{-1}$.

Nature de $\sum_{n \geq 2} a_n$.

(CCP, Aymane) — Un peu de projection

Soit $(E, \|\cdot\|)$ euclidien, $u \in O(E)$.

On pose $v = u - \text{Id}_E$.

- (1) Montrer que $\text{Ker } v = (\text{Im } v)^\perp$.

Soit $x \in E$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u^k(x)$.

- (2) Montrer que $(u_n(x))_n$ tend vers la projection orthogonale de x sur $\text{Ker } v$.

(CCP, Mathilde) — Calcul de distance à un hyperplan

Posons $E = \mathbb{R}_2[X]$ en tant que \mathbb{R} -espace, muni du produit scalaire canonique¹⁰.

7. Dites aussi : anticommutantes.

8. t'as dead ça chakal.

9. Indication de l'énoncé : utiliser 1 pour décomposer x judicieusement.

10. Penser $\sum a_i b_i$ pour $(a_i), (b_i)$ les suites de coefficients respectifs

On pose $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$.

- (1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de E et en donner une base.
- (2) Soit $P = X$, calculer la distance de P à F .¹¹

(CCP, Paul) — Suites de noyaux qui passent par une année de prépa

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On note $N = \bigcup_{i \geq 1} \text{Ker } u^i$.

Montrer que $E = \text{Im } u \oplus \text{Ker } u \iff N = \text{Ker } u$.¹²

(CCP, Samy) — Opérateur de translation

Soit \mathcal{S} l'espace des suites à valeurs complexes.

Soit $L \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ tel que $\forall u \in \mathcal{S}, L(u) = u'$ où $\forall n \in \mathbb{N}, u'_n = u_{n+1}$.¹³

- (1) Déterminer, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Ker}(L - \lambda \text{Id})$ et $\text{Ker}(L - \lambda \text{Id})^2$.

Soit \mathcal{F} l'ensemble des suites vérifiant la relation suivante :

$$(*) \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+4} = \frac{1}{2}u_{n+3} + 3u_{n+2} - \frac{7}{2}u_{n+1} + u_n$$

- (2) Montrer que : $\mathcal{F} = \text{Ker} \left(L - \frac{1}{2} \text{Id} \right) \oplus \text{Ker}(L + 2\text{Id}) \oplus \text{Ker}(L - \text{Id})^2$

- (3) En déduire la dimension et une base de \mathcal{F} .

Soit \mathcal{S}_B l'ensemble des suites bornées vérifiant $(*)$.

- (4) Déterminer la dimension et une base de \mathcal{S}_B .

(ENS LCR, Charles) — Étude probabiliste des records

On travaillera dans \mathcal{S}_n l'ensemble des permutations sur $[[1, n]]$, on munit \mathcal{S}_n de la probabilité uniforme \mathbb{P} .¹⁴

Pour $k \in [[1, n]]$, on dit que k est un record de $\sigma \in \mathcal{S}_n$ si k maximise σ sur $[[1, k]]$, autrement dit :

11. Indication donnée par l'examinateur : Se mettre dans une base orthonormée de F .

12. Indication donnée par l'examinateur : « On pourra prouver d'abord $E = \Im u \oplus \text{Ker } u \iff \text{Ker } u = \text{Ker } u^2$ ».

13. Soit donc, un opérateur de translation.

14. On pioche aléatoirement σ une permutation.

$$k = \max_{1 \leq i \leq k} \sigma(i)$$

On note $\mathcal{R}(\sigma)$ l'ensemble des records.

On note $X_k = \mathbb{1}_{k \in \mathcal{R}(\sigma)}$ la variable aléatoire indicatrice de records, i.e. 1 si k est un record ou 0 sinon.

- (1) Donner la loi des X_k , $k \in [[1, n]]$.
- (2) X_k et X_{k-1} sont elles indépendantes pour $k \in [[2, n]]$
- (3) Montrer l'indépendance mutuelle de la famille $(X_k)_{k \in [[1, n]]}$ ¹⁵

15. Requiert une indication selon Charles.