Oraux de la MPX1 de Chaptal

Table des matières

(Centrale, Python, Cécile) — Autour de la fonction Γ et ses représentations

Posons $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t, n \geq 0$.

(1) Montrer que I_n converge et donner sa valeur.

On pose $v_n = \int_0^{+\infty} \left(1+\dfrac{t}{n}\right)^n e^{-t}\,\mathrm{d}t, n \geq 0$.

(2) Montrer que v_n converge.
(3) Conjecturer un équivalent de v_n à une constante près à l'aide de Python.
(4) Démontrer qu'il s'agit bien d'un équivalent de v_n et déterminer la constante.

On pose $S_n = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{n^k}{k!}$.

(5) Analyser le comportement de S_n au voisinage de l'infini, à l'aide de Python.

(6) Démontrer ce que vous voyez. [1]

(Centrale, Cécile) — Autour de $SL_n(\mathbb{K})$

On pose $SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(M) = 1\}$, dans la suite : $\mathbb{K}$ est un surcorps commutatif de $\mathbb{R}$, ie : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- On sait que $SL_n(\mathbb{K})$ est un sous groupe fermé de $GL_n(\mathbb{K})$ pour le produit matriciel, en effet : $SL_n(\mathbb{K}) = \operatorname{Ker}\det = \det^{-1}(\{1\})$, où : $\det : (GL_n(\mathbb{K}), \times) \to (\mathbb{K}^*, \times)$ est un morphisme de groupe multiplicatif.
- On prend $\|\cdot\|$ sous multiplicative, i.e. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

(1) Montrer que pour tout $M \in SL_n(\mathbb{K})$, $\|M\| \geq 1$.
(2) Montrer que pour tout $M \in SL_2(\mathbb{K})$, M est semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pm 1 & \lambda \\ 0 & \pm\lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

(3) Pour tout $M \in SL_2(\mathbb{K})$, en déduire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle telle que : $M^2 = \exp(B)$.

(Mines Télécom, Robert) — Une série et une intégrale

On regarde $f : x \mapsto \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{(n!)^2}$ définie sur $\mathcal{D}$ son domaine de convergence.

(1) Déterminer $\mathcal{D}$ (rayon de convergence)
(2) Comparer avec $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp\left[2\sqrt{\pi}\sin(t)\right] \mathrm{d}t$

(Mines Télécom, Robert) — Condition suffisante de diagonalisabilité

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, supposons que :

(1) A^2 soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
(2) $\mathrm{Sp}(A^2) \subset \mathbb{R}_+^*$

Montrer que A est diagonalisable.

1. Indication : Montrer que la limite aperçu par Python est bien celle vers laquelle S_n tend quoi.

(Mines-Ponts, Ali) — Équation fonctionnelle (opérateurs de somme)

Trouver toutes les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

(Mines-Ponts, Ali) — Équation fonctionnelle (morphisme de l'addition vers la multiplication)

Trouver toutes les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y)$$

(Mines-Ponts, Ali) — Dimension et diagonalisabilité

Soit $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $AB + BA = 0$. [2]

(1) Montrer que n est pair.
(2) Si $n = 2$, montrer que A et B sont diagonalisables.

(Mines-Télécom, Aymane) — Autour des racines de P et P'

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples.

(1) Exprimer $\dfrac{P'}{P}$
(2) Pour $a \in \mathbb{R}$, une racine de $P + aP'$ peut-elle être une racine de P ?
(3) $P + aP'$ est-il scindé à racines simples ?

(Mines-Télécom, Aymane) — Nature d'une série dont le terme général est l'inverse d'une somme partielle divergente

Soit $a_n = \left[\sum_{k=1}^n \ln^2(k)\right]^{-1}$.

Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} a_n$.

(CCP, Mathilde) — Calcul de distance à un hyperplan

Posons $E = \mathbb{R}_2[X]$ en tant que $\mathbb{R}$-espace, muni du produit scalaire canonique [3].

On pose $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$.

2. Dites aussi : anticommutantes.
3. Penser $\sum a_i b_i$ pour $(a_i), (b_i)$ les suites de coefficients respectifs

(1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de E et en donner une base.
(2) Soit $P = X$, calculer la distance de P à F. [4]

(ENS LCR, Charles) — Étude probabiliste des records

On travaillera dans $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations sur $[[1, n]]$, on munit $\mathcal{S}_n$ de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. [5]

Pour $k \in [[1, n]]$, on dit que k est un record de $\sigma \in \mathcal{S}_n$ si k maximise σ sur $[[1, k]]$, autrement dit :

$$k = \max_{1 \leq i \leq k} \sigma(i)$$

On note $\mathcal{R}(\sigma)$ l'ensemble des records.

On note $X_k = \mathbb{1}_{k \in \mathcal{R}(\sigma)}$ la variable aléatoire indicatrice de records, i.e. 1 si k est un record ou 0 sinon.

(1) Donner la loi des X_k, $k \in [[1, n]]$.
(2) X_k et X_{k-1} sont elles indépendantes pour $k \in [[2, n]]$
(3) Montrer l'indépendance mutuelle de la famille $(X_k)_{k \in [[1,n]]}$ [6]

---

4. Indication donnée par l'examinateur : Se mettre dans une base orthonormée de F.
5. On pioche aléatoirement σ une permutation.
6. Requiert une indication selon Charles.