

# Oraux de la MPX1 de Chaptal

## Table des matières

(Centrale, Python, Cécile) — Autour de la fonction $\Gamma$ et ses représentations . . . . .	1
(Centrale, Cécile) — Autour de $SL_n(\mathbb{K})$ . . . . .	2
(Mines Télécom, Robert) — Une série et une intégrale . . . . .	2
(Mines Télécom, Robert) — Condition suffisante de diagonalisabilité . . . . .	2
(Mines-Ponts, Ali) — Équation fonctionnelle (opérateurs de somme) . . . . .	3
(Mines-Ponts, Ali) — Équation fonctionnelle (morphisme de l'addition vers la multiplication) . . . . .	3
(Mines-Ponts, Ali) — Dimension et diagonalisabilité . . . . .	3
(Mines-Télécom, Aymane) — Autour des racines de $P$ et $P'$ . . . . .	3
(Mines-Télécom, Aymane) — Nature d'une série dont le terme général est l'inverse d'une somme partielle divergente . . . . .	3
(CCP, Mathilde) — Calcul de distance à un hyperplan . . . . .	3
(ENS LCR, Charles) — Étude probabiliste des records . . . . .	4

## (Centrale, Python, Cécile) — Autour de la fonction $\Gamma$ et ses représentations

Posons  $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt, n \geq 0$ .

- (1) Montrer que  $I_n$  converge et donner sa valeur.

On pose  $v_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt, n \geq 0$ .

- (2) Montrer que  $v_n$  converge.  
 (3) Conjecturer un équivalent de  $v_n$  à une constante près à l'aide de Python.  
 (4) Démontrer qu'il s'agit bien d'un équivalent de  $v_n$  et déterminer la constante.

On pose  $S_n = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$ .

- (5) Analyser le comportement de  $S_n$  au voisinage de l'infini, à l'aide de Python.

(6) Démontrer ce que vous voyez.<sup>1</sup>

**(Centrale, Cécile) — Autour de  $SL_n(\mathbb{K})$**

On pose  $SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(M) = 1\}$ , dans la suite :  $\mathbb{K}$  est un surcorps commutatif de  $\mathbb{R}$ , ie :  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

- On sait que  $SL_n(\mathbb{K})$  est un sous groupe fermé de  $GL_n(\mathbb{K})$  pour le produit matriciel, en effet :  $SL_n(\mathbb{K}) = \text{Ker det} = \det^{-1}(\{1\})$ , où :  $\det : (GL_n(\mathbb{K}), \times) \rightarrow (\mathbb{K}^*, \times)$  est un morphisme de groupe multiplicatif.
- On prend  $\|\cdot\|$  sous multiplicative, i.e.  $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ .

- (1) Montrer que pour tout  $M \in SL_n(\mathbb{K}), \|M\| \geq 1$ .
- (2) Montrer que pour tout  $M \in SL_2(\mathbb{K}), M$  est semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pm 1 & \lambda \\ 0 & \pm \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Pour  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ .

- (3) Pour tout  $M \in SL_2(\mathbb{K})$ , en déduire qu'il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de trace nulle telle que :  $M^2 = \exp(B)$ .

**(Mines Télécom, Robert) — Une série et une intégrale**

On regarde  $f : x \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(n!)^2}$  définie sur  $\mathcal{D}$  son domaine de convergence.

- (1) Déterminer  $\mathcal{D}$  (rayon de convergence)
- (2) Comparer avec  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp[2\sqrt{\pi} \sin(t)] dt$

**(Mines Télécom, Robert) — Condition suffisante de diagonalisabilité**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , supposons que :

- (1)  $A^2$  soit diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- (2)  $\text{Sp}(A^2) \subset \mathbb{R}_+^*$

Montrer que  $A$  est diagonalisable.

---

1. Indication : Montrer que la limite aperçu par Python est bien celle vers laquelle  $S_n$  tend quoi.

**(Mines-Ponts, Ali) — Équation fonctionnelle (opérateurs de somme)**

Trouver toutes les fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

**(Mines-Ponts, Ali) — Équation fonctionnelle (morphisme de l'addition vers la multiplication)**

Trouver toutes les fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x)f(y)$$

**(Mines-Ponts, Ali) — Dimension et diagonalisabilité**

Soit  $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$  telles que  $AB + BA = 0$ .<sup>2</sup>

- (1) Montrer que  $n$  est pair.
- (2) Si  $n = 2$ , montrer que  $A$  et  $B$  sont diagonalisables.

**(Mines-Télécom, Aymane) — Autour des racines de  $P$  et  $P'$**

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  scindé à racines simples.

- (1) Exprimer  $\frac{P'}{P}$ .<sup>3</sup>
- (2) Pour  $a \in \mathbb{R}$ , une racine de  $P + aP'$  peut-elle être une racine de  $P$ ?
- (3)  $P + aP'$  est-il scindé à racines simples?

**(Mines-Télécom, Aymane) — Nature d'une série dont le terme général est l'inverse d'une somme partielle divergente**

Soit  $a_n = \left[ \sum_{k=1}^n \ln^2(k) \right]^{-1}$ .

Nature de  $\sum_{n \geq 2} a_n$ .

**(CCP, Mathilde) — Calcul de distance à un hyperplan**

Posons  $E = \mathbb{R}_2[X]$  en tant que  $\mathbb{R}$ -espace, muni du produit scalaire canonique<sup>4</sup>.

---

2. Dites aussi : anticommutantes.

3. t'as dead ça chakal.

4. Penser  $\sum a_i b_i$  pour  $(a_i), (b_i)$  les suites de coefficients respectifs

On pose  $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$ .

- (1) Montrer que  $F$  est un sous espace vectoriel de  $E$  et en donner une base.
- (2) Soit  $P = X$ , calculer la distance de  $P$  à  $F$ .<sup>5</sup>

---

### (ENS LCR, Charles) — Étude probabiliste des records

On travaillera dans  $\mathcal{S}_n$  l'ensemble des permutations sur  $[[1, n]]$ , on munit  $\mathcal{S}_n$  de la probabilité uniforme  $\mathbb{P}$ .<sup>6</sup>

Pour  $k \in [[1, n]]$ , on dit que  $k$  est un record de  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  si  $k$  maximise  $\sigma$  sur  $[[1, k]]$ , autrement dit :

$$k = \max_{1 \leq i \leq k} \sigma(i)$$

On note  $\mathcal{R}(\sigma)$  l'ensemble des records.

On note  $X_k = \mathbb{1}_{k \in \mathcal{R}(\sigma)}$  la variable aléatoire indicatrice de records, i.e. 1 si  $k$  est un record ou 0 sinon.

- (1) Donner la loi des  $X_k$ ,  $k \in [[1, n]]$ .
- (2)  $X_k$  et  $X_{k-1}$  sont elles indépendantes pour  $k \in [[2, n]]$
- (3) Montrer l'indépendance mutuelle de la famille  $(X_k)_{k \in [[1, n]]}$ <sup>7</sup>

---

5. Indication donnée par l'examinateur : Se mettre dans une base orthonormée de  $F$ .

6. On pioche aléatoirement  $\sigma$  une permutation.

7. Requiert une indication selon Charles.