

Oraux de la MPX1 de Chaptal

Table des matières

(Centrale, Python, Cécile) — Autour de la fonction Γ et ses représentations	1
(Centrale, Cécile) — Autour de $SL_n(\mathbb{K})$	2
(Mines Télécom, Robert) — Une série et une intégrale	2
(Mines Télécom, Robert) — Condition suffisante de diagonalisabilité	2
(Mines-Ponts, Ali) — Équation fonctionnelle (opérateurs de somme)	3
(Mines-Ponts, Ali) — Équation fonctionnelle (morphisme de l'addition vers la multiplication)	3
(Mines-Ponts, Ali) — Dimension et diagonalisabilité	3
(Mines-Télécom, Aymane) — Autour des racines de P et P'	3
(Mines-Télécom, Aymane) — Nature d'une série dont le terme général est l'inverse d'une somme partielle divergente	3
(CCP, Aymane) — Un peu de projection	3
(CCP, Mathilde) — Calcul de distance à un hyperplan	4
(CCP, Paul) — Suites de noyaux qui passent par une année de prépa	4
(ENS LCR, Charles) — Étude probabiliste des records	4

(Centrale, Python, Cécile) — Autour de la fonction Γ et ses représentations

Posons $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt, n \geq 0$.

(1) Montrer que I_n converge et donner sa valeur.

On pose $v_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt, n \geq 0$.

(2) Montrer que v_n converge.

(3) Conjecturer un équivalent de v_n à une constante près à l'aide de Python.

(4) Démontrer qu'il s'agit bien d'un équivalent de v_n et déterminer la constante.

On pose $S_n = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$.

- (5) Analyser le comportement de S_n au voisinage de l'infini, à l'aide de Python.
- (6) Démontrer ce que vous voyez. ¹

(Centrale, Cécile) — Autour de $SL_n(\mathbb{K})$

On pose $SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(M) = 1\}$, dans la suite : \mathbb{K} est un surcorps commutatif de \mathbb{R} , ie : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

- On sait que $SL_n(\mathbb{K})$ est un sous groupe fermé de $GL_n(\mathbb{K})$ pour le produit matriciel, en effet : $SL_n(\mathbb{K}) = \text{Ker det} = \det^{-1}(\{1\})$, où : $\det : (GL_n(\mathbb{K}), \times) \rightarrow (\mathbb{K}^*, \times)$ est un morphisme de groupe multiplicatif.
- On prend $\|\cdot\|$ sous multiplicative, i.e. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

- (1) Montrer que pour tout $M \in SL_n(\mathbb{K}), \|M\| \geq 1$.
- (2) Montrer que pour tout $M \in SL_2(\mathbb{K}), M$ est semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pm 1 & \lambda \\ 0 & \pm \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

- (3) Pour tout $M \in SL_2(\mathbb{K})$, en déduire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle telle que : $M^2 = \exp(B)$.

(Mines Télécom, Robert) — Une série et une intégrale

On regarde $f : x \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(n!)^2}$ définie sur \mathcal{D} son domaine de convergence.

- (1) Déterminer \mathcal{D} (rayon de convergence)
- (2) Comparer avec $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp[2\sqrt{\pi} \sin(t)] dt$

(Mines Télécom, Robert) — Condition suffisante de diagonalisabilité

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, supposons que :

- (1) A^2 soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- (2) $\text{Sp}(A^2) \subset \mathbb{R}_+^*$

Montrer que A est diagonalisable.

¹. Indication : Montrer que la limite aperçu par Python est bien celle vers laquelle S_n tend quoi.

(Mines-Ponts, Ali) — Équation fonctionnelle (opérateurs de somme)

Trouver toutes les fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

(Mines-Ponts, Ali) — Équation fonctionnelle (morphisme de l'addition vers la multiplication)

Trouver toutes les fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{C} vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x)f(y)$$

(Mines-Ponts, Ali) — Dimension et diagonalisabilité

Soit $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $AB + BA = 0$.²

- (1) Montrer que n est pair.
- (2) Si $n = 2$, montrer que A et B sont diagonalisables.

(Mines-Télécom, Aymane) — Autour des racines de P et P'

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples.

- (1) Exprimer $\frac{P'}{P}$.³
- (2) Pour $a \in \mathbb{R}$, une racine de $P + aP'$ peut-elle être une racine de P ?
- (3) $P + aP'$ est-il scindé à racines simples?

(Mines-Télécom, Aymane) — Nature d'une série dont le terme général est l'inverse d'une somme partielle divergente

Soit $a_n = \left[\sum_{k=1}^n \ln^2(k) \right]^{-1}$.

Nature de $\sum_{n \geq 2} a_n$.

(CCP, Aymane) — Un peu de projection

Soit $(E, \|\cdot\|)$ euclidien, $u \in O(E)$.

On pose $v = u - \text{Id}_E$.

². Dites aussi : anticommutantes.

³. t'as dead ça chakal.

(1) Montrer que $\text{Ker } v = (\text{Im } v)^\perp$.

Soit $x \in E$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u^k(x)$.

(2) Montrer que $(u_n(x))_n$ tend vers la projection orthogonale de x sur $\text{Ker } v$.

(CCP, Mathilde) — Calcul de distance à un hyperplan

Posons $E = \mathbb{R}_2[X]$ en tant que \mathbb{R} -espace, muni du produit scalaire canonique ⁵.

On pose $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$.

(1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de E et en donner une base.

(2) Soit $P = X$, calculer la distance de P à F . ⁶

(CCP, Paul) — Suites de noyaux qui passent par une année de prépa

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On note $N = \bigcup_{i \geq 1} \text{Ker } u^i$.

Montrer que $E = \text{Im } u \oplus \text{Ker } u \iff N = \text{Ker } u$. ⁷

(ENS LCR, Charles) — Étude probabiliste des records

On travaillera dans \mathcal{S}_n l'ensemble des permutations sur $[[1, n]]$, on munit \mathcal{S}_n de la probabilité uniforme \mathbb{P} . ⁸

Pour $k \in [[1, n]]$, on dit que k est un record de $\sigma \in \mathcal{S}_n$ si k maximise σ sur $[[1, k]]$, autrement dit :

$$k = \max_{1 \leq i \leq k} \sigma(i)$$

On note $\mathcal{R}(\sigma)$ l'ensemble des records.

On note $X_k = \mathbb{1}_{k \in \mathcal{R}(\sigma)}$ la variable aléatoire indicatrice de records, i.e. 1 si k est un record ou 0 sinon.

4. Indication de l'énoncé : utiliser 1 pour décomposer x judicieusement.

5. Penser $\sum a_i b_i$ pour $(a_i), (b_i)$ les suites de coefficients respectifs

6. Indication donnée par l'examinateur : Se mettre dans une base orthonormée de F .

7. Indication donnée par l'examinateur : « On pourra prouver d'abord $E = \mathfrak{I}u \oplus \text{Ker } u \iff \text{Ker } u = \text{Ker } u^2$ ».

8. On pioche aléatoirement σ une permutation.

- (1) Donner la loi des X_k , $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- (2) X_k et X_{k-1} sont elles indépendantes pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$
- (3) Montrer l'indépendance mutuelle de la famille $(X_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ ⁹

9. Requiert une indication selon Charles.