Oraux de la MPX1 de Chaptal

Table des matières

(Centrale, Python, Aymane) — Actions de groupes planquées et permutations

Soit A partie de E, on note $\sigma \cdot A = \sigma(A)$ pour σ une permutation.

On note B_n le nombre de partitions à n éléments.

(1) Calcul de B_1, B_2, B_3.

(2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

(3) Écrire `B(n)` qui renvoie la liste $(B_k)_{k\in[[0,n]]}$. Vérifier que $B_6 = 203$.

(4) À l'aide de Python, calculer : $B_{p+m} - B_m - B_{m+1}$ pour $m \in [[0, 50]], p \in \{2, 3, 5, 7\}$.

(5) Pour P, Q deux partitions, on introduit la relation : $P \sim Q$ si $\exists k \in \mathbb{Z}, Q = c^k \circ P$ où $c = (1, \ldots, p)$ permutation de $[[1, p + m]]$.

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

(6) Soit P partition, supposons $P \neq cP$, montrer alors : $\{P, cP, \ldots, c^{p-1}P\}$ est une classe d'équivalence pour $\sim$.

(7) Si $P = cP$, montrer qu'il y a une alternative (?).

(8) En déduire $B_{p+m} = B_m + B_{m+1} \pmod p$.

(Centrale, Python, Paul) — Complexité moyenne d'un tri rapide

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des VA d'un espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$.

On pose $M_n = \max_{i\in[[1,n]]} X_i$ et H_n la n-ième somme partielle de la série harmonique.

L'objectif est de déterminer l'espérance de M_n. [1]

(1) Dans cette partie, supposons que les $(X_i)_i$ suivent une loi uniforme et sont à valeurs dans $[[1, N]]$.

a. Coder `EspU(n, N)`\$ qui renvoie l'espérance de M_n pour n, N donnés. [2]

b. Calculer l'espérance de M_n pour $N \in \{50, 100, 200\}$ et $n = 100$. Comparer à $N\dfrac{n}{n+1}$. Conjectures ?

(2) Dans cette partie, supposons que les $(X_i)_i$ suivent une loi géométrique de paramètre p.

a. Coder `EspG(n, p)` qui renvoie $\mathbb{E}(M_n)$.

b. Supposons que $p = 1/2$, calcul de $\mathbb{E}(M_n)$ pour $n \in \{100, 200, 500\}$. Calculer $\dfrac{-H_n}{\ln(1-p}$ et $1 - \dfrac{H_n}{\ln(1-p)}$. Conjectures ?

(3) Soit X une VA admettant un moment d'ordre 2.

Montrer :

1. Contexte et intérêt : calculer des complexités moyennes, évaluer des coûts amortis dans des algorithmes qui reçoivent en entrée des données suivant une loi uniforme, gaussienne, ...
2. Question orale : Résultat mathématiques justifiant la démarche utilisée ?

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$$

et

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)\mathbb{P}(X > k)$$

Annexe Python fournie : `import numpy.random as rnd` et donc il sera possible de s'en servir pour simuler les lois. Voici la documentation : https://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/routines.random.html

(Centrale, Python, Momo) — Autour de la concentration de la mesure

Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$ à diagonale nulle et telles que :

$$\forall i < j, m_{ij} \sim \mathcal{B}\left(p_n = \frac{\lambda \ln(n)}{n}\right) \text{ (indépendantes)}$$

(1) Construire M à l'aide d'une fonction : `def mat(\lambda, n)`

(2) Définir une fonction `def prob(\lambda, n)` qui renvoie la probabilité de quelque chose... [3]

(3) On prend $\lambda \in \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2k}{10} \middle| k \in [[0,5]] \right\}$ et $n \in \{50 + 100k \mid k \in [[0,5]]\}$.

Calculer $(\mathrm{Prob}(\lambda, n))_{(\lambda,n)}$ avec Python et les mettre dans une liste.

(4) Soit X_n le nombre de coefficients non nuls de M, déterminer la loi de $\frac{X_n}{2}$, puis $\mathbb{E}(X_n)$ et enfin $\mathbb{V}(X_n)$.

Soit Z_n le nombre de « je m'en rappelle plus ». [4] (pas grave, ça n'importe pas trop)

(5) Montrer que : $\mathbb{P}(Z_n \geq 1) \leq \mathbb{E}(Z_n)$ et $\mathbb{P}(Z_n = 0)\,\mathbb{E}(Z_n)^2 \leq \mathbb{V}(Z_n)$. [5]

3. À clarifier.
4. Verbatim.
5. Ce qu'est Z_n n'est pas très important, mais on peut supposer qu'elle est au moins de moment d'ordre 2.

(Centrale, Python, Cécile) — Autour de la fonction Γ et ses représentations

Posons $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t, n \geq 0$.

(1) Montrer que I_n converge et donner sa valeur.

On pose $v_n = \int_0^{+\infty} \left(1+\dfrac{t}{n}\right)^n e^{-t}\,\mathrm{d}t, n \geq 0$.

(2) Montrer que v_n converge.
(3) Conjecturer un équivalent de v_n à une constante près à l'aide de Python.
(4) Démontrer qu'il s'agit bien d'un équivalent de v_n et déterminer la constante.

On pose $S_n = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{n^k}{k!}$.

(5) Analyser le comportement de S_n au voisinage de l'infini, à l'aide de Python.
(6) Démontrer ce que vous voyez. [6]

(Centrale, Cécile) — Autour de $SL_n(\mathbb{K})$

On pose $SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(M) = 1\}$, dans la suite : $\mathbb{K}$ est un surcorps commutatif de $\mathbb{R}$, ie : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- On sait que $SL_n(\mathbb{K})$ est un sous groupe fermé de $GL_n(\mathbb{K})$ pour le produit matriciel, en effet : $SL_n(\mathbb{K}) = \operatorname{Ker}\det = \det^{-1}(\{1\})$, où : $\det : (GL_n(\mathbb{K}), \times) \to (\mathbb{K}^*, \times)$ est un morphisme de groupe multiplicatif.
- On prend $\|\cdot\|$ sous multiplicative, i.e. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

(1) Montrer que pour tout $M \in SL_n(\mathbb{K})$, $\|M\| \geq 1$.
(2) Montrer que pour tout $M \in SL_2(\mathbb{K})$, M est semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pm 1 & \lambda \\ 0 & \pm\lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

(3) Pour tout $M \in SL_2(\mathbb{K})$, en déduire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle telle que : $M^2 = \exp(B)$.

(Mines Télécom, Robert) — Une série et une intégrale

On regarde $f : x \mapsto \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{(n!)^2}$ définie sur $\mathcal{D}$ son domaine de convergence.

6. Indication : Montrer que la limite aperçu par Python est bien celle vers laquelle S_n tend quoi.

(1) Déterminer $\mathcal{D}$ (rayon de convergence)

(2) Comparer avec $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp\left[2\sqrt{\pi}\sin(t)\right]\,\mathrm{d}t$

(Mines Télécom, Robert) — Condition suffisante de diagonalisabilité

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, supposons que :

(1) A^2 soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
(2) $\mathrm{Sp}(A^2) \subset \mathbb{R}_+^*$

Montrer que A est diagonalisable.

(Mines Télécom, Paul) — Série avec une bonne tronche d'arctangente

Définissons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n + xn^2}$.

(1) Convergence de f ? Montrer que f est continue sur son domaine de convergence.

(2) Équivalent de f en 0 et $+\infty$.

(Mines Télécom, Paul) — Espaces stables mais pas sur leurs appuis

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

On a : $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$.

Décrire les sous espaces stables par u.

(Mines Télécom, Arthur) — Le bon vieux trick $\log - \exp$ et la DES

Montrer la convergence de $\sum \ln \dfrac{(2n+1)n}{(2n-1)(n+1)}$ et calculer sa somme.

(Mines Télécom, Arthur) — Endomorphisme de moyennage

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Posons :

$$\begin{array}{rccl}\varphi : & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & \left\{\begin{array}{rccl} F(f) : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} f(0) \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ si } x \in]0,1] \end{cases}\end{array}\right.\end{array}$$

(1) Justifier que φ est bien définie.

(2) Donner les valeurs propres de φ et ses vecteurs propres.

(Mines-Ponts, Ali) — Équation fonctionnelle (opérateurs de somme)

Trouver toutes les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

(Mines-Ponts, Ali) — Équation fonctionnelle (morphisme de l'addition vers la multiplication)

Trouver toutes les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y)$$

(Mines-Ponts, Ali) — Dimension et diagonalisabilité

Soit $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $AB + BA = 0$. [7]

(1) Montrer que n est pair.
(2) Si $n = 2$, montrer que A et B sont diagonalisables.

(Mines-Télécom, Aymane) — Autour des racines de P et P'

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples.

(1) Exprimer $\dfrac{P'}{P}$ [8]
(2) Pour $a \in \mathbb{R}$, une racine de $P + aP'$ peut-elle être une racine de P ?
(3) $P + aP'$ est-il scindé à racines simples ?

7. Dites aussi : anticommutantes.
8. t'as dead ça chakal.

(Mines-Télécom, Aymane) — Nature d'une série dont le terme général est l'inverse d'une somme partielle divergente

Soit $a_n = \left[\sum_{k=1}^{n} \ln^2(k)\right]^{-1}$.

Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} a_n$.

(CCP, Aymane) — Un peu de projection

Soit $(E, \|\cdot\|)$ euclidien, $u \in O(E)$.

On pose $v = u - \mathrm{Id}_E$.

(1) Montrer que $\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Im} v)^{\perp}$.

Soit $x \in E$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \dfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} u^k(x)$.

(2) Montrer que $(u_n(x))_n$ tend vers la projection orthogonale de x sur $\operatorname{Ker} v$. [9]

(CCP, Mathilde) — Calcul de distance à un hyperplan

Posons $E = \mathbb{R}_2[X]$ en tant que $\mathbb{R}$-espace, muni du produit scalaire canonique [10].

On pose $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$.

(1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de E et en donner une base.
(2) Soit $P = X$, calculer la distance de P à F. [11]

(CCP, Paul) — Suites de noyaux qui passent par une année de prépa

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On note $N = \bigcup_{i\geq 1} \operatorname{Ker} u^i$.

Montrer que $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u \iff N = \operatorname{Ker} u$. [12]

---

9. Indication de l'énoncé : utiliser 1 pour décomposer x judicieusement.
10. Penser $\sum a_i b_i$ pour $(a_i), (b_i)$ les suites de coefficients respectifs
11. Indication donnée par l'examinateur : Se mettre dans une base orthonormée de F.
12. Indication donnée par l'examinateur : « On pourra prouver d'abord $E = \Im u \oplus \operatorname{Ker} u \iff \operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$ ».

(CCP, Samy) — Opérateur de translation

Soit $\mathcal{S}$ l'espace des suites à valeurs complexes.

Soit $L \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ tel que $\forall u \in \mathcal{S}, L(u) = u'$ où $\forall n n \mathbb{N}, u'_n = u_{n+1}$. [13]

(1) Déterminer, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Ker}(L - \Lambda \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(L - \Lambda \mathrm{Id})^2$.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des suites vérifiant la relation suivante :

$$(*) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+4} = \frac{1}{2} u_{n+3} + 3u_{n+2} - \frac{7}{2} u_{n+1} + u_n$$

(2) Montrer que : $\mathcal{F} = \mathrm{Ker}\left(L - \frac{1}{2}\mathrm{Id}\right) \oplus \mathrm{Ker}(L + 2\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(L - \mathrm{Id})^2$

(3) En déduire la dimension et une base de $\mathcal{F}$.

Soit $\mathcal{S}_B$ l'ensemble des suites bornées vérifiant $(*)$.

(4) Déterminer la dimension et une base de $\mathcal{S}_B$.

(ENS LCR, Charles) — Étude probabiliste des records

On travaillera dans $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations sur $[[1, n]]$, on munit $\mathcal{S}_n$ de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. [14]

Pour $k \in [[1, n]]$, on dit que k est un record de $\sigma \in \mathcal{S}_n$ si k maximise σ sur $[[1, k]]$, autrement dit :

$$k = \max_{1 \leq i \leq k} \sigma(i)$$

On note $\mathcal{R}(\sigma)$ l'ensemble des records.

On note $X_k = \mathbb{1}_{k \in \mathcal{R}(\sigma)}$ la variable aléatoire indicatrice de records, i.e. 1 si k est un record ou 0 sinon.

(1) Donner la loi des X_k, $k \in [[1, n]]$.
(2) X_k et X_{k-1} sont elles indépendantes pour $k \in [[2, n]]$
(3) Montrer l'indépendance mutuelle de la famille $(X_k)_{k \in [[1,n]]}$ [15]

13. Soit donc, un opérateur de translation.
14. On pioche aléatoirement σ une permutation.
15. Requiert une indication selon Charles.