

# Maksimalisasi Koefisien Korelasi yang Disempurnakan: Teori Matematika

## 1 Koefisien Korelasi yang Disempurnakan (ECC)

Koefisien Korelasi yang Disempurnakan (ECC) digunakan untuk mengukur kesesuaian antara dua profil gambar: gambar referensi  $I_r(x)$  dan gambar terdistorsi  $I_w(y)$ . Kriteria ECC didefinisikan sebagai:

$$EECC(p) = \left\| \frac{\bar{\mathbf{I}}_r}{\|\bar{\mathbf{I}}_r\|} - \frac{\bar{\mathbf{I}}_w(p)}{\|\bar{\mathbf{I}}_w(p)\|} \right\|^2, \quad (1)$$

dengan:

- $\bar{\mathbf{I}}_r$ : Versi rata-rata nol dari vektor intensitas untuk gambar referensi.
- $\bar{\mathbf{I}}_w(p)$ : Versi rata-rata nol dari vektor intensitas untuk gambar yang diubah dengan parameter  $p$ .
- $p$ : Vektor parameter yang mengontrol transformasi geometrik.

Tujuan utamanya adalah memaksimalkan korelasi yang didefinisikan sebagai:

$$\phi(p) = \frac{\bar{\mathbf{I}}_r^\top \bar{\mathbf{I}}_w(p)}{\|\bar{\mathbf{I}}_r\| \|\bar{\mathbf{I}}_w(p)\|}. \quad (2)$$

Fungsi ini tidak terpengaruh oleh distorsi fotometrik seperti perubahan kontras dan kecerahan.

## 2 Transformasi Geometrik

Transformasi koordinat dimodelkan secara parametrik:

$$y = \psi(x; p), \quad (3)$$

dengan:

- $x = [x_1, x_2]^\top$ : Koordinat dalam gambar referensi.
- $y = [y_1, y_2]^\top$ : Koordinat dalam gambar terdistorsi.
- $\psi(x; p)$ : Fungsi transformasi parametrik (misalnya, affine, homografi).

### 3 Formulasi Optimasi

Masalah penyelarasan dapat dirumuskan sebagai:

$$\min_p E(p) = \min_p \|\mathbf{I}_r - \mathbf{I}_w(\psi(x; p))\|^2. \quad (4)$$

Untuk mengakomodasi perubahan intensitas, model fotometrik dapat ditambahkan:

$$\min_{p, \theta} E(p, \theta) = \min_{p, \theta} \sum_{x \in T} |I_r(x) - \gamma \cdot I_w(\psi(x; p)) - \beta|^2, \quad (5)$$

dengan  $\gamma$  dan  $\beta$  adalah parameter untuk kontras dan bias.

Dalam ECC, kita hanya berfokus pada komponen geometrik dengan menormalkan vektor intensitas agar memiliki rata-rata nol.

### 4 Pendekatan Linear

Transformasi non-linear  $I_w(\psi(x; p))$  didekati menggunakan ekspansi Taylor orde pertama:

$$I_w(\psi(x; p)) \approx I_w(\psi(x; \tilde{p})) + J(\tilde{p})\Delta p, \quad (6)$$

dengan:

- $J(\tilde{p})$ : Matriks Jacobian yang dihitung pada parameter saat ini  $\tilde{p}$ .
- $\Delta p = p - \tilde{p}$ : Vektor perubahan parameter.

Dengan demikian, vektor intensitas untuk gambar yang terdistorsi menjadi:

$$\mathbf{I}_w(p) \approx \mathbf{I}_w(\tilde{p}) + G(\tilde{p})\Delta p, \quad (7)$$

dengan  $G(\tilde{p})$  adalah Jacobian yang memetakan perubahan parameter ke perubahan intensitas.

### 5 Algoritma Iteratif

#### 5.1 Forward Additive ECC

Metode ini memperbarui parameter secara iteratif:

$$p_j = p_{j-1} + \Delta p, \quad (8)$$

dengan  $\Delta p$  diperoleh dengan memaksimalkan fungsi objektif yang didekati:

$$\phi(\Delta p | \tilde{p}) = \frac{\bar{\mathbf{I}}_r^\top (\bar{\mathbf{I}}_w + G\Delta p)}{\|\bar{\mathbf{I}}_r\| \|\bar{\mathbf{I}}_w + G\Delta p\|}. \quad (9)$$

#### 5.2 Inverse Compositional ECC

Dalam varian yang lebih efisien ini, peran gambar referensi dan gambar yang terdistorsi dibalik. Jacobian dihitung sekali untuk gambar referensi:

$$p \leftarrow \psi^{-1}(x; p). \quad (10)$$

Hal ini mengurangi kompleksitas komputasi secara signifikan.

## 6 Hubungan dengan Metode SSD

ECC dibandingkan dengan metode Sum of Squared Differences (SSD) seperti Lucas-Kanade:

- ECC mengoptimalkan korelasi yang dinormalisasi, membuatnya tahan terhadap distorsi fotometrik.
- SSD meminimalkan perbedaan intensitas, yang sensitif terhadap perubahan kecerahan.

## 7 Evaluasi Performa

### 7.1 Metode Pengukuran Error

Error kuadrat pada iterasi ke- $j$  didefinisikan sebagai:

$$e(j) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \|\psi(x_i; p_r) - \psi(x_i; p_j)\|^2. \quad (11)$$

Mean Squared Distance (MSD) dihitung sebagai rata-rata error untuk beberapa eksperimen.

### 7.2 Hasil Simulasi

Hasil simulasi menunjukkan bahwa ECC memiliki:

- Konvergensi lebih cepat.
- Ketahanan yang lebih baik terhadap noise dan distorsi fotometrik.
- Kompleksitas komputasi yang lebih rendah pada varian komposisi inversi.

## 8 Kesimpulan

Metode ECC menyediakan solusi yang efisien dan tahan terhadap masalah penyalarsan gambar dengan memaksimalkan koefisien korelasi yang disempurnakan. Metode ini melampaui metode berbasis SSD tradisional seperti Lucas-Kanade, terutama dalam kondisi sulit seperti noise dan distorsi fotometrik.