1. Sequences and associated limiting statements

সংজ্ঞা: ০। $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ হলে $\{f(1), f(2),\ldots\} = \{f_1, f_2, f_3,\ldots\}$-কে আমরা **ক্রম** বলি।

আমাদের কাছে একটি ক্রম রযেছে, যেটি যথেচ্ছ ভাবে নিজেদের কাছে বা কোনো বিন্দুর বা বিন্দুসমূহের্ কাছে থাকতে পারে, অথবা পরস্পরের থেকে দূরে সরতে থাকে। একটি যেকোনো ক্রম কে আমরা $\{x_1, x_2,\ldots\} =: \{x_n\}_{n\geqslant 1}$ দ্বারা প্রকাশ করি।

সংজ্ঞা: ১। যদি তারা কোনো বিন্দু x-এর কাছিকাছি যেতে থাকে, তাহলে আমরা তাকে বলব **অভিসারি ক্রম্**, এবং এই কাছে যাওযার প্রক্রিয়া কে বলব **অভিসরন্**। যেকোনো $\epsilon > 0$ এর জন্য একটি যথার্থ $n := n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ পাওয়া যাবে যাতে $|x_n - x| < \epsilon$; অর্থাৎ, আমরা সন্ত বিন্দুর থেকে এই ক্রম এর দূরত্ব যথেচ্ছ ভাবে কমাতে পারি।

<u>উদাহরণ:</u> $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8},\ldots\right\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n\geqslant 0}$;প্রত্যেক বিন্দু পূর্বের বিন্দু হতে শূন্যের (0) এর আরোও কাছে।

সংজ্ঞা: ২। যদি তারা একে অপরের থেকে দূরে সরতে থাকে, তাহলে আমরা তাকে বলব **অপসারি ক্রম্**, এবং এই রক্রিয়া কে বলব **অপসরন**।

<u>উদাহরণ:</u> $\{1, 2, 3, 4, 5,\ldots\} = \{n\}_{n\geqslant 1}$।

প্রথমেই লক্ষ্ম করা যায়, যে <u>অভিসরন এর জন্য বিন্দুদের পরস্পর কাছাকাছি হওয়া **প্রয়োজন**</u> (it is **necessary** for the points of the sequence to be close to each other); কারণ এই, যে অপসারি ক্রম এর প্রত্যেক বিন্দু একে ওপরের থেকে যথেষ্ট দূরে থাকে (elements of a divergent sequence stay far apart from each other)।

তবে <u>এটি যথেষ্ট শর্ত নয় </u>(not a sufficient condition)। <u>উদাহরণ:</u> $\{y_n\}_{n\geqslant 1}$; $y_k := \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m}$, এবং

$$y_i - y_{i+1} = \frac{1}{i+1} \to 0 \text{ as } i।$$

সংজ্ঞা: ৩। একটি অভিসারি ক্রম যেখানে গিয়ে শেষ হতে চায়, সেই বিন্দু কে বলা হোক **সন্তবিন্দু** বা **সীমা**।

- তাহলে এরকম কোনোও ক্রম কোথায় যাবে: $\{1, -1, 1, -1, 1, -1,\ldots\} = \left\{(-1)^n\right\}_{n\geqslant 0}$?

  এটি এমন একটি ক্রম যেটি দুটি বিন্দু তে যেতে পারে, জোড় সূচক সংখ্যাগুলি যাচ্ছে ১-এ ও বিজোড় সূচক সংখ্যাগুলি যাচ্ছে -১-এ। অর্থাৎ, এই ক্রম এর মধ্যেই দুটি **উপক্রম** (subsequence) রয়েছে, যেগুলি নিজেরাই অভিসারি।
- **এক সন্ত বিন্দুর যেকোনো অশূণ্য সসীম প্রতিবেশের ভিতর সম্পর্কিত ক্রমটির অসীম সংখ্যক সদস্য বর্তমান।** তার মানেই যে ক্রম্টি অভিসারি তা ভুল ধারনা।

- **একই ভাবে বলা যায় যে, কোনও অভিসারি ক্রম এর সন্ত বিন্দুর যেকোনো অশূণ্য সসীম প্রতিবেশের বাহিরে ক্রমটির বড়ো জোড় সসীম সংখ্যক সদস্য বর্তমান।**

সংজ্ঞা: ৪। $M := \{n_k\}_{k\geqslant 1} \subset \mathbb{N}$ হলে $\{x_j\}_{j\in M}$ কে $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ এর **উপক্রম** বলা হয়। M কে গণনযোগ্য অসীম হতে হবে অভিসরন এর জন্য।

- একটি ক্রমের মধ্যে থেকে অসীম সংখ্যক উপ্‌ক্রম বেছে নেওয়া সম্ভব।
- **একটি অভিসারি ক্রম এর যেকোন উপক্রম-ই এর সন্ত বিন্দু তে অভিসারি।** তা না হলে এমন একটি উপক্রম রযেছে যেটি এক্‌ অপর বিন্দু তে সন্ত। $\epsilon > 0$ দেওয়া থাকলে এমন কিছু $n, k \in \mathbb{N}$ পাওয়া যাবে যাতে ,
  $0 < |x_0 - x| \leqslant |x_n - x| + |x_{n_k} - x_n| + |x_{n_k} - x_0| < \dfrac{\epsilon}{3} + \dfrac{\epsilon}{3} + \dfrac{\epsilon}{3} = \epsilon \;\Rightarrow\Leftarrow$ (কারণ, ϵ এর থেকে $|x - x_0|$ বড়ো)।
- **একটি ক্রম এর প্রত্যেক উপক্রমই যদি এক বিন্দু তে সন্ত, তাহলে, গোটা ক্রমটি সেই বিন্দুতে সন্ত।**

<u>ফলাফল ১:</u> **যে কোনো অভিসারি ক্রম কিছু উচ্চ ও নিম্ন মান দ্বারা আবদ্ধ।** (তাদের যথাক্রমে **উচ্চবেষ্টক (supremum)** ও **নিম্নবেষ্টক (infimum)** বলা যাক্‌।)
তা না হলে প্রত্যেক M-এর জন্য পাওয়া যাবে $n := n(M) \in \mathbb{N} : |x_n| > M$। অর্থাৎ, একটি উপক্রম এমন আছে যেটি অপসারি।

- সহজ কথা, একটি অভিসারি ক্রমকে আবদ্ধ বলা যেতে পারে।

এবার, একটি অভিসারি ক্রম $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ এর উপর নজর দেওয়া যাক। $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ সমূহটির উচ্চবেষ্টক ($\sup$) n এর সাথে হ্রাসমান ও নিম্নবেষ্টক ($\inf$) বর্দ্ধমান। (এ অবশ্যই সত্য কারণ, একটি সদস্য তুলে দিলে যে কোনও সমূহের নিম্নমান বেড়ে যাবে।) **প্রমাণ করা** এক্ষেত্রে সহজ যে $\sup$ ও $\inf$ একে অপরের যথেচ্ছ কাছাকাছি আসতে থাক্‌ছে। এদের মাত্রাদিগকে যথাক্রমে **গুরুসীমা** ($\limsup_n x_n$) ও **লঘুসীমা** ($\liminf x_n$) বলা হলে এও বলা যায়, যে এরা উভয়ই সমান।

- গুরুসীমা ও লঘুসীমা সমান না হলে ক্রমটি অভিসারি নয়।

<u>দ্রষ্টব্য ১:</u> $\left\{\left(1 + (-1)^n\right) + (-1)^n \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

ক্রমে বর্তমান নিম্নবেষ্টক উপক্রম: $\left\{-\dfrac{1}{2k} : k \in \mathbb{N}\right\}$; উচ্চবেষ্টক উপক্রম: $\left\{2 + \dfrac{1}{2k} : k \in \mathbb{N}\right\}$;
লঘুসীমা: 0; গুরুসীমা: 2
অভিসারি নয়।

<u>দ্রষ্টব্য ২:</u> $\left\{(1+(-1)^n)-(-1)^n\frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}\right\}$

ক্রমে বর্তমান নিম্নবেষ্টক উপক্রম:0; উচ্চবেষ্টক উপক্রম: 2;
লঘুসীমা: 0; গুরুসীমা: 2
অভিসারি নয়।

<u>দ্রষ্টব্য ৩:</u> $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$
শূণ্য থেকে এক এর মধ্যে প্রত্যেকটি সংখ্যাই নিজের উপর একটি অভিসারি ক্রম দেখতে পায়। এবং তারা যথাক্রমে নিজের নিজের লঘুসীমা, গুরুসীমা।

আগেই বলা হয়েছে যে একটি অভিসারি ক্রম আবদ্ধ। বিপরীত ঘটনা টি ব্যাখ্যা করেছেন বোল্‌জানো-ওয়ায়ার্স্ট্রাস্‌ (Bolzano and Weierstrass)।

<u>উপপাদ্য ১ (বোল্‌জানো-ওয়ায়াস্ট্রাস্‌):</u> **একটি আবদ্ধ অসীম সদস্য সমূহে একটি অভিসারি উপক্রম বর্তমান।** (Every bounded sequence has a convergent subsequence.)
সমূহটির উচ্চবেষ্টক ধরলাম U। সমূহটির মধ্যে একটি বর্দ্ধমান উপক্রম X নেওয়া যাক (এরকম বর্দ্ধমান উপক্রম নেওয়া সম্ভব কেন?)। তাহলে যেকোনো $\epsilon > 0$ এর জন্য X-এর একটি সদস্য পাওয়া যাবে $(U-\epsilon, U]$-এ। তাহলে আমরা একটি ক্রম গঠন করছি,যেটি U-এ যায়।

- এটি দেখে ভাবা অন্তত বেশ সহজ্‌, কারণ মনে করা যাক, যে একটি ছোট জায়গায় অসংখ্য সদস্য থাকলে সেগুলি অল্প জায়গায় গিজ্‌গিজ করবে।