Plan de la séance

I Point : Hermite

↓

II Splines pour fonction

↓

III Splines pour courbes quelconques (TP6)

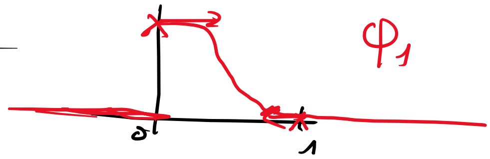
I Hermite : Donnée la grille

x_0	x_1	...	x_n	← Abscisses
y_0	y_1		y_n	← ordonnées
v_0	v_1		v_n	← pentes (dérivée).

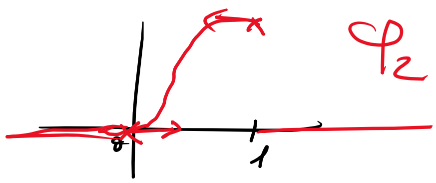
Dans la base d'Hermite définie par

φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4 poly de 3ième degré nuls en dehors de $[0;1]$

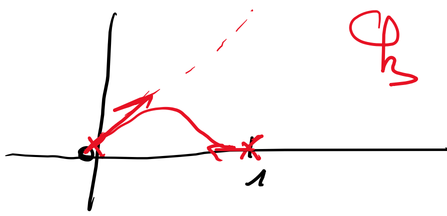
	$\varphi(0)$	$\varphi(1)$	$\varphi'(0)$	$\varphi'(1)$
φ_1	1	0	0	0
φ_2	0	1	0	0
φ_3	0	0	1	0
φ_4	0	0	0	1



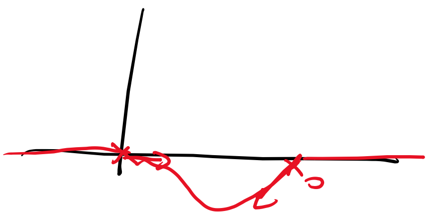
φ_1



φ_2



φ_3



sur chaque $[x_i, x_{i+1}]$

Soit $x \in [x_i, x_{i+1}]$, on pose $d = x_{i+1} - x_i$

$t = \dfrac{x - x_i}{d} \in [0;1]$

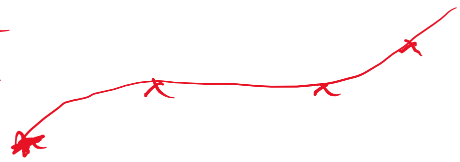
$$P(x) = y_i \cdot \varphi_1(t) + y_{i+1} \cdot \varphi_2(t) + d\left(V_i\, \varphi_3(t) + V_{i+1}\, \varphi_4(t)\right)$$

II Spline pour une fonction.

« Splines cubiques naturelles et uniformes »

on travaille sur

x_0	x_1	...	x_n
y_0	y_1		y_n



hypothèse : $\boxed{x_{i+1} - x_i = d \ \text{constant. Uniforme}}$

on cherche
- • P polynomiale de degré 3 sur chaque $[x_i ; x_{i+1}]$ — Cubiques
- (*) • P deux fois dériv et P'' continue sur $[x_0, x_n]$
- • $P''(x_0) = P''(x_n) = 0$ naturelles.

Astuce : on note $v_0, v_1 \ldots v_n$ les pentes en $x_0 \ldots x_n$

(*) se traduisent par un système d'inconnues $V_0 \ldots V_n$:

$$V = \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & & & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad Z = \frac{3}{d}\begin{array}{c} \begin{pmatrix} y_1 - y_0 \\ y_2 - y_0 \\ \vdots \\ y_{k+1} - y_{k-1} \\ \vdots \\ y_n - y_{n-1} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Posi ``0''} \\ \text{Posi } 1 \\ \\ \text{Posi } k \\ \\ \\ \end{array}$$

$$M \cdot V = Z. \qquad (\text{syst } (S))$$

On résout (S) $V = M^{-1} \cdot Z$

(M^{-1} sera donnée en annexe "partiel")

Désormais on dispose de

x_i
y_i
v_i

et on applique Hermite..

x_i	1	3	5	7
y_i	-1	2	3	1

$d = 2$ "l'espacement entre les x_i"

$$Z = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} y_1 - y_0 \\ y_2 - y_0 \\ y_3 - y_1 \\ y_3 - y_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \text{dernière position} \end{matrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2-(-1) \\ 3-(-1) \\ 1-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Résolvons $M \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 6 \\ -3/2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Curiosité : Pour 5 pts :

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matricielle spéciale sp. Cub. Unif. nat

M^{-1} sera donnée

$\rightarrow M^{-1} =$

$$V = M^{-1} \times Z = \begin{pmatrix} \frac{26}{45} & -\frac{7}{45} & \frac{2}{45} & -\frac{1}{45} \\ -\frac{7}{45} & \frac{14}{45} & -\frac{4}{45} & \frac{2}{45} \\ \frac{2}{45} & -\frac{4}{45} & \frac{14}{45} & -\frac{7}{45} \\ -\frac{1}{45} & \frac{2}{45} & -\frac{7}{45} & \frac{26}{45} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9/2 \\ 6 \\ -3/2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{26}{45} \times \frac{9}{2} - \frac{7}{45} \times 6 + \frac{2}{45} \times (-3/2) - \frac{1}{45} \times (-3) \\ -\frac{7}{45} \times \frac{9}{2} + \frac{14}{45} \times 6 - \frac{4}{45} \times \frac{-3}{2} + \frac{2}{45} \times (-3) \\ \frac{2}{45} \times \frac{9}{2} - \frac{4}{45} \times 6 + \frac{14}{45} \times \frac{-3}{2} - \frac{7}{45} \times (-3) \\ -\frac{1}{45} \times \frac{9}{2} + \frac{2}{45} \times 6 - \frac{7}{45} \times -3/2 + \frac{26}{45} \times (-3) \end{pmatrix} \begin{matrix} = v_0 \\ = v_1 \\ = v_2 \\ = v_3 \end{matrix}$$

Donnons l'expression de P sur $[1;3]$. $d = 2$ $t = \frac{x-1}{2}$

$$P(x) = -1\,\varphi_1(t) - 2\varphi_2(t) + 2\left(v_0\,\varphi_3(t) + v_1\,\varphi_4(t)\right).$$

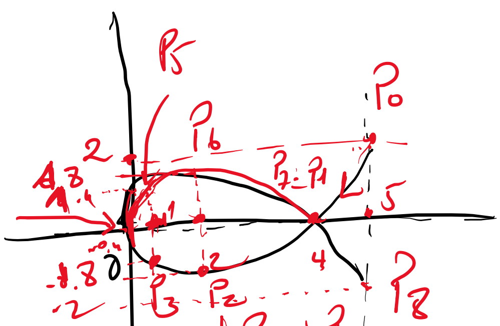
Autre Cas : sur $[3;5]$ (2, 3) $d = 5-3 = 2$ $t = \frac{x-3}{2}$

$$P(x) = 2\varphi_1(t) + 3\varphi_2(t) + 2\left(v_1\,\varphi_3(t) + v_2\,\varphi_4(t)\right)$$

* * *

Cas d'une courbe qlconque :

$O = P_4$



Grille

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
	5	4	2	1	0
	2	0	-1,8	-1,4	0

P_5	P_6	P_7	P_8
1	2	4	5
-1,4	1,8	0	-2

L'idée : notre courbe "α", c'est une courbe paramétrée

$$M \begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{vmatrix}$$

Le paramètre t

t	0	1	2	...	8
	P_0	P_1			P_8
	x_0	x_1	...		x_8

← $d = 1$: distance entre les valeurs de t

La première spline se fait entre les t et les x_i

Écrire la matrice M de dimension 9x9

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Résoudre $M.V_x = Z_x = \frac{3}{d} \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ x_2 - x_0 \\ x_3 - x_1 \\ \vdots \\ x_8 - x_6 \\ x_8 - x_7 \end{bmatrix}$ ici $d = 1$

$V_x = M^{-1} Z_x$

Appliquer Hermite $(T; X; V_x, x)$ avec $x \in T_{aff} = [\ \ ]$

np.linspace$(0, 8, 1000)$.

$\hookrightarrow X_{aff}$

On refait le même procédé en couplant les t_i avec les y_i

$$M . V_y = \frac{3}{d} \begin{bmatrix} y_1 - y_0 \\ y_2 - y_0 \\ \vdots \\ y_n - y_{n-1} \end{bmatrix}$$

résoudre on obtient les V_y

Appliquer Hermite (T, Y, V_y, x) pour $x \in T_{aff}$

$\hookrightarrow Y_{aff}$.

Plot (Y_{att}, Y_{att}) La vie est belle

Hermite & Splines ?

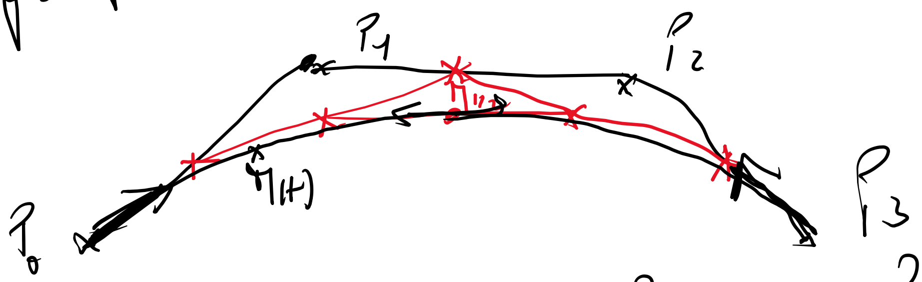
Partiel

interpoler en
* base canonique
* Lagrange
* Newton

Bezier : 4 pts de contrôle P_0, P_1, P_2, P_3

Courbe passe par P_0 et P_3

$t = 1/2$



$M(t)$ définie par $x(t) = B_{(3,0)}(t)\, x_0 + B_{(3,1)}(t)\, x_1 + B_{(3,2)}(t)\, x_2 + B_{(3,3)}(t)\, x_3$

$$y(t) = B_{(3,0)}(t)\, y_0 + B_{(3,1)}(t)\, y_1 + B_{(3,2)}(t)\, y_2 + B_{(3,3)}(t)\, y_3$$

$$M(t) = \sum_{k=0}^{3} B_{(3,k)}(t) \cdot P_k$$

Formule générale des poly de Bernstein :

$$B_{(n,k)}(t) = \binom{n}{k} (1-t)^k \cdot t^{n-k}$$

Ce n'est pas grave $B_{(n,k)}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$

$n=3$ $B_{(3,0)}(t) = t^3$

$$B_{(3,1)}(t) = 3(1-t)t^2$$

$$B_{(3,2)}(t) = 3(1-t)^2 t$$

$$B_{(3,3)}(t) = (1-t)^3$$

1 1
1 2 1
1 3 3 1

* Canonique

x	-1	0	1	2
y	2	1	5	0

4 pts → deg = 3

↳ $(1, x, x^2, x^3)$

on cherche $P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

(*) $$V \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_3 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}}_{Y}$$ avec V matrice de Vandermonde :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & (-1)^2 & (-1)^3 \\ 1 & 0 & 0^2 & 0^3 \\ 1 & 1 & 1^2 & 1^3 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \end{pmatrix}$$

$A = V^{-1} \times Y$ → donne P.

(*) $$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 2 \\ a_0 = 1 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 5 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_1 + a_2 - a_3 = 1 & L_1 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 4 & L_2 \\ a_1 + 2a_2 + 4a_3 = -1/2 & L_3 \end{cases}$$

$L_1 + L_2$: $2a_2 = 5$ $\boxed{a_2 = 5/2}$

$L_1 + L_3$: $3a_2 + 3a_3 = 1/2$

$a_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - 3a_2\right) = \frac{1}{6} - 5/2 = -\frac{14}{6} = -\frac{7}{3}$

$a_3 = -7/3$

L_2 : $a_1 = 4 - a_2 - a_3 = 4 - 5/2 + 7/3 = \frac{24 - 15 + 14}{6} = 23/6$

D'où $P(x) = 1 + \frac{23}{6} x + \frac{5}{2} x^2 - \frac{7}{3} x^3$.

Lagrange

1	2	4	5
5	-1	6	1

Base de Lagrange adaptée :

$$L_1 = \frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-4)(1-5)}$$

$$L_2 = \frac{(x-1)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-4)(2-5)}$$

$$L_3 = \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-5)}$$

$$L_4 = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-4)}$$

$$P(x) = 5L_1(x) - 1\,L_2(x) + 6\,L_3(x) + 1\,L_4(x).$$

	1	2	4	5
$L_1(x)$	1	0	0	0
$L_2(x)$	0	1	0	0
$L_3(x)$	0	0	1	0
$L_4(x)$	0	0	0	1

Newton :

$N_0(x) = 1$

$N_1(x) = x-1$

$N_2(x) = (x-1)(x-3)$

$N_3(x) = (x-1)(x-3)(x-4)$

x_i	y_i			
1	2			
3	1	$\frac{1-2}{3-1} = \frac{-1}{2}$		
4	3	$\frac{3-2}{4-1} = \frac{1}{3}$	$\frac{\frac{1}{3}-(-\frac{1}{2})}{4-3} = 5/6$	
5	-1	$\frac{-1-2}{5-1} = \frac{-3}{4}$	$\frac{\frac{-3}{4}-(\frac{-1}{2})}{5-3} = \frac{-\frac{3}{4}+2/4}{2} = \frac{-1}{8}$	$\frac{-\frac{1}{8}-5/6}{5-4} = \frac{-3-20}{24} = \frac{-23}{24}$

$$P(x) = 2 \times N_0(x) - \frac{1}{2} \times N_1(x) + \frac{5}{6} N_2(x) - \frac{23}{24} N_3(x).$$

That's all