TP n° 2 – Interpolation polynomiale et base de Lagrange

Introduction

Le but de ce TP est d'explorer variante de la méthode directe afin d'interpoler une fonction par un polynôme vue lors du TP n° 1.

Soit :

- $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ une subdivision d'un intervalle $[a\,;\,b]$;
- f une fonction dont on connaît les valeurs $y_i = f(x_i)$, pour i allant de 0 à n.

Objectif

On cherche un polynôme P de degré au maximum égal à n et tel que :

$$y_i = P(x_i), \text{ pour } 0 \text{ allant de } 1 \text{ à } n$$

On travaille dans la base de Lagrange $(L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n)$ avec $L_k(x) = 1$ pour $x = x_k$, $L_k(x) = 0$ pour $x = x_i$ où $i \neq k$, pour tout k compris entre 1 et n.

On cherche P sous la forme :

$$P = a_0 + a_1.L_1 + a_2.L_2 + \ldots + a_n.L_n$$

Questions

1. Que vaut $L_k(x)$?
2. Après avoir traduit $y_i = P(x_i)$, pour i allant de 0 à n, expliquer pourquoi $a_k = y_k$.
3. Tracer sur un même graphique une fonction f $\left(f = sin \text{ puis } f = \dfrac{1}{1+10x^2}\right)$ ainsi que son polynôme d'interpolation associé.

Attendus

Chaque binôme devra rendre :

- Un compte rendu succint (suivre l'énoncé pour le plan) ;
- Un code (Python) qui fonctionne.

Indications et contenu souhaitable :

1. Entrées : a, b, n et f (par exemple $f = sin$ sur $[0\,;\,2\pi]$, $n = 10$, $20\ldots$).
2. Ecrire une fonction Base qui prend en paramètres X, k, x et qui renvoie $L_k(x)$.
3. Ecrire une fonction qui évalue le polynôme de Lagrange en x réel donné.
4. Passer à l'affichage en choisissant le nombre de points (au-dessus de 500) pour tracer f et P.
5. Phénomène de Runge : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Ph%C3%A9nom%C3%A8ne_de_Runge`