Interpolation polynomiale :

"Par polynômes de Lagrange"

Problématique : $x_0, x_1, \dots, x_n$
$y_0, y_1, \dots, y_n$

Trouvons polynôme P de degré $= n$, $P(x_i) = y_i$ pour $0 \leq i \leq n$.

1/ La séance du 10 oct : Nous avons exprimé P dans la base canonique $(1, x, x^2 \dots x^n)$.

inconvénient : Résolution d'un système au niveau informatique est très sensible aux données initiales,

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-22} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 10^{-22} \end{pmatrix}$$

et inversible mathématiquement, mais au niveau représentation des float,

$$A \simeq 0, \dots$$

Plus Généralement : La moindre perturbation dans une matrice d'un système linéaire $(AX = B)$, va engendrer des solutions $\neq$.

(Coup d'oeil aux Pb de conditionnement de matrices).

Direction que va prendre notre travail : choisir une base de polynômes adaptée à nos besoin:

- Peu de calculs fineux.
- Résultats immédiats

Exemple (exo posé en Partiel)

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
-4	-2	1	4	6
π	$\sqrt{3}$	2	-4	7

5 pts $\longrightarrow$ $\deg P = 4$

Base de Lagrange:

$(\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \dots \mathcal{L}_5)$

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
$\mathcal{L}_0(x)$	1	0	0	0	0
$\mathcal{L}_1(x)$	0	1	0	0	0
⋮ etc					
$\mathcal{L}_4(x)$	0	0	0	0	1

Ecriture de $\mathcal{L}_0$:

- x_1, x_2, x_3 et x_4 sont des racines de $\mathcal{L}_0$
- $\mathcal{L}_0$ est de degré 4 :

$$\mathcal{L}_0(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

or $\mathcal{L}_0(x_0) = 1$ donc $1 = a(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)$

$$a = \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}$$

D'où :

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}$$

$$\mathcal{L}_0(x) = \prod_{i\neq 0}\left(\frac{x-x_i}{x_0-x_i}\right)$$

x_i	x_0	x_1	x_2		
$x_i \to$	-4	-2	1	4	6

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{(x-(-2))(x-1)(x-4)(x-6)}{(-4-(-2))(-4-1)(-4-4)(-4-6)}$$

$$\mathcal{L}_1(x) = \prod_{i\neq 1} \frac{x-x_i}{x_1-x_i} = \frac{(x-(-4))(x-1)(x-4)(x-6)}{(-2-(-4))(-2-1)(-2-4)(-2-6)}$$

$$\mathcal{L}_2(x) = \prod_{i\neq 2} \frac{x-x_i}{x_2-x_i} = \frac{(x-(-4))(x-(-2))(x-4)(x-6)}{(1-(-4))(1-(-2))(1-4)(1-6)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-(-4))(x-(-2))(x-1)(x-6)}{(4-(-4))(4-(-2))(4-1)(4-6)}$$

Plus Généralement :

$$\boxed{\mathcal{L}_i(x) = \prod_{j\neq i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}}$$

Prop : $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$ forment bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

avec $\mathbb{R}_n[X]$: l'ensemble des polynômes à coeff réels de degré inférieur ou égal à n.

Preuve : $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$ car $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Il suffit de prouver que $(\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n)$ famille libre : $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathcal{L}_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, 0 \leq i \leq n$

c'est parti : soit $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n$ des réels tels que

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathcal{L}_i = 0$$

$$\underline{\forall x \in \mathbb{R}}, \quad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathcal{L}_i(x) = 0$$

* En particulier si l'on prend $x = x_0$.

$$\alpha_0 \mathcal{L}_0(x_0) + \alpha_1 \underbrace{\mathcal{L}_1(x_0)}_{=0} + \dots + \alpha_n \underbrace{\mathcal{L}_n(x_0)}_{=0} = 0$$

{vaut 1 en x_0
admet $x_1 \dots x_n$ comme racines

admet $x_0, x_2 \dots x_n$ comme racines

admet $x_0, x_1 \dots x_{n-1}$ comme racines

$$\alpha_0 \times 1 = 0 \qquad \boxed{\alpha_0 = 0}$$

* puis $x = x_1$ donne $\alpha_1 = 0$.
* et $x = x_2, x_3 \dots, x_n$ $\quad \dots \quad \alpha_n = 0$

Pour résumer $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

D'où $(\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1 \dots \mathcal{L}_n)$ base de $\mathbb{R}_n[X]$

* * * *

On peut donc exprimer le polynôme $\underline{P}$ recherché comme C.L des $\mathcal{L}_i$:

$$\underline{P}(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \mathcal{L}_i(x).$$

cherchons les coeff c_i :

P vérifie $P(x_i) = y_i \quad 0 \leq i \leq n$

$i=0 \quad P(x_0) = y_0$ se traduit par :

$$C_0 \underbrace{\mathcal{L}_0(x_0)}_{=1} + C_1 \underbrace{\mathcal{L}_1(x_0)}_{=0} + \dots + C_n \underbrace{\mathcal{L}_n(x_0)}_{=0} = y_0$$

$$\boxed{C_0 = y_0}$$

$i=1 \quad P(x_1) = y_1$

$$C_0 \underbrace{\mathcal{L}_0(x_1)}_{=0} + C_1 \underbrace{\mathcal{L}_1(x_1)}_{1} + C_2 \underbrace{\mathcal{L}_2(x_1)}_{0} + \dots$$

$$\dots + C_n \underbrace{\mathcal{L}_n(x_1)}_{0} = y_1$$

$$C_1 = y_1$$

etc : $P(x_i) = y_i \Rightarrow C_i = y_i$

$$\boxed{\text{Conclusion : } P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \mathcal{L}_i(x)}$$

Retour à notre exemple : $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ et $\mathcal{L}_4$

les (x_i) donnent les $\mathcal{L}_i$

-4	-2	1	4	6
π	$\sqrt{3}$	2	-4	7

$$P(x) = \pi \mathcal{L}_0(x) + \sqrt{3}\mathcal{L}_1(x) + 2\mathcal{L}_2(x) - 4\mathcal{L}_3(x)$$
$$+ 7\mathcal{L}_4(x).$$

TP2 consiste en l'automatisation du calcul des L_i et de P.

I * une simulation avec $y_i = \sin(x_i)$

II * " " " $y_i = f(x_i)$ ou

$$f(x) = \frac{1}{1+10x^2}$$

__Remarque__ : "Caper" les axes :

exple pour I : $0 \leq x \leq 2\pi$

$-1 \leq y \leq 1$

II : $-5 \leq x \leq 5$

$-4 \leq y \leq 4$