

Interpolation polynomiale :

"Par polynômes de Lagrange"

Problématique :  $\frac{x_0 \ x_1}{y_0 \ y_1} \dots \frac{x_n}{y_n}$

Trouvons polynôme  $P$  de degré  $= n$ ,  $P(x_i) = y_i$  pour  $0 \leq i \leq n$ .

1/ au niveau du code : Nous avons exprimé  $P$

dans la base canonique  $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ .

inconvénient: Résolution d'un système au niveau informatique et très sensible aux données initiales,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$  est inversible mathématiquement,

Mais au niveau représentation de float,

$$A \approx 0, \dots$$

Plus Généralement : La moindre perturbation dans

une matrice d'un système linéaire ( $AX=B$ ),

va engendrer des solutions  $\neq$ .

(Coup d'œil aux pb de conditionnement de matrices).

Direction que va prendre notre travail : Choisir une

base de polynômes adaptée à nos besoins:

- Peu de calculs finaux.

- Résultats immédiats

Exemple (exo posé en partie)

$$\begin{array}{c|cc|cc|cc|c} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline -6 & -2 & 1 & 4 & c \\ \hline \pi & \sqrt{3} & 2 & -4 & f \end{array} \quad \text{5 pts} \rightarrow \deg P = 4$$

Base de Lagrange:  $(L_0, L_1, \dots, L_5)$

$x$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$L_0(x)$	1	0	0	0	0
$L_1(x)$	0	1	0	0	0
$\vdots$ etc					
$L_4(x)$	0	0	0	0	1

Écriture de  $L_0$ :

.  $x_0, x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$  sont des racines de  $f$ .

.  $L_0$  est de degré 4 :

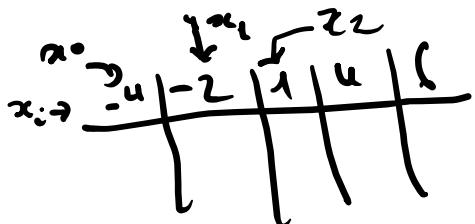
$$L_0(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

$$\text{or } L_0(x_0) = 1 \text{ donc } \therefore a(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)$$

$$a = \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}$$

Donc:  $L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}$

$$L_0(x) = \prod_{i \neq 0} \left( \frac{x-x_i}{x_0-x_i} \right)$$



$$L_0(x) = \frac{(x - x_0)(x - 1)(x - u)(x - l)}{(-x_0 - (-2))(-x_0 - 1)(-x_0 - u)(-x_0 - l)}$$

$$L_1(x) = \prod_{i \neq 1} \frac{x - x_i}{x_1 - x_i} = \frac{(x - (-u))(x - 1)(x - u)(x - l)}{(-2 - (-u))(-2 - 1)(-2 - u)(-2 - l)}$$

$$L_2(x) = \prod_{i \neq 2} \frac{x - x_i}{x_2 - x_i} = \frac{(x - (-u))(x - (-2))(x - u)(x - l)}{(1 - (-u))(1 - (-2))(1 - u)(1 - l)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - (-u))(x - (-2))(x - 1)(x - l)}{(4 - (-u))(4 - (-2))(4 - 1)(4 - l)}$$

Plus Généralement :

$$L_i^*(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Prop:  $L_0, L_1, \dots, L_n$  forment une base de  $\mathbb{R}_n[x]$

avec  $\mathbb{R}_n[x]$ : l'ensemble des polynômes à coeff réels de degré inférieur ou égal à n.

Preuve:  $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1$  car

$(1, x, x^2, \dots, x^n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[x]$

Il suffit de prouver que  $(L_0, L_1, \dots, L_n)$

famille libre :  $\sum_{i=0}^n d_i L_i = 0 \Rightarrow d_i = 0, \forall i \leq n$

c'est parti : soit  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des réels tels que

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot L_i = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^n a_i L_i(x) = 0$$

\* En particulier si l'on prend  $x = x_0$ .

$$a_0 L_0(x_0) + a_1 L_1(x_0) + \dots + a_n L_n(x_0) = 0$$

Vaut à  $x=x_0$   
admet  $x_1, x_2, \dots, x_n$   
comme racines

"  
admet  $x_0, x_1, \dots, x_n$   
comme racines

"  
admet  $x_0, x_1, \dots, x_n$   
comme racines

$$a_0 \times 1 = 0$$

$$\boxed{a_0 = 0}$$

\* puis  $x = x_1$  donne  $a_1 = 0$ :  
\* et  $x = x_2, x_3, \dots, x_n$ , ...,  $a_n = 0$

Pour résoudre  $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$

D'où  $(L_0, L_1, \dots, L_n)$  base de  $\mathbb{R}_n[x]$

\* \* \* \*

On peut donc exprimer le poly<sup>nom</sup>  $P$  recherche comme C.L des  $L_i$ :

$$P(x) = \sum_{i=0}^n c_i L_i(x)$$

cherchons les coeff  $c_i$ :

P vérifie  $P(x_i) = y_i \quad 0 \leq i \leq n$

$i=0 \quad P(x_0) = y_0$  se traduit par :

$$c_0 L_0(x_0) + c_1 L_1(x_0) + \dots + c_n L_n(x_0) = y_0$$

$\parallel_1 \qquad \qquad \parallel_0$

$$\boxed{c_0 = y_0}$$

$$i=1 \quad P(x_1) = y_1$$

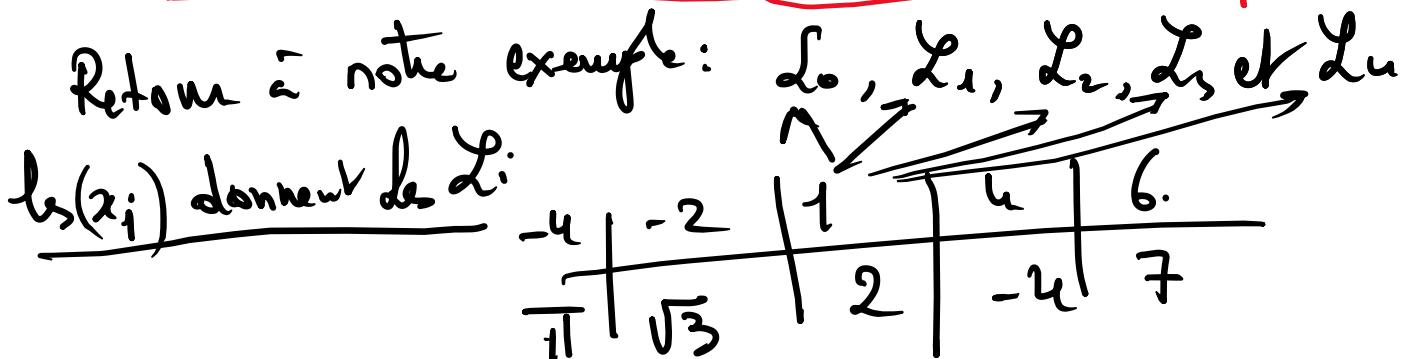
$$c_0 L_0(x_1) + c_1 L_1(x_1) + c_2 L_2(x_1) + \dots + c_n L_n(x_1) = y_1$$

$\parallel_0 \qquad \qquad \parallel_1 \qquad \qquad \dots \parallel_n$

$$c_1 = y_1$$

etc :  $P(x_i) = y_i \Rightarrow c_i = y_i$

Conclusion :  $P(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x)$



$$P(x) = \pi L_0(x) + \sqrt{3} L_1(x) + 2 L_2(x) - 4 L_3(x) + 7 L_4(x)$$

TP<sub>2</sub> Consiste en l'automatisation  
du calcul des  $L_i$  et de  $P$ .

I : une simulation avec  $y_i = \sin(x_i)$   
 II : ...  
 $f(x) = \frac{1}{1+10x^2}$

Rémarque : "Caper" les axes :  
exple pour I :

$$0 \leq x \leq 2\pi$$

$$-1 \leq y \leq 1$$

II :  $-5 \leq x \leq 5$

$$-4 \leq y \leq 4$$

