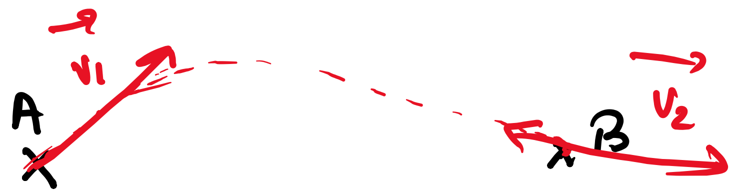
PARTIE 2 Approximation par Hermite :

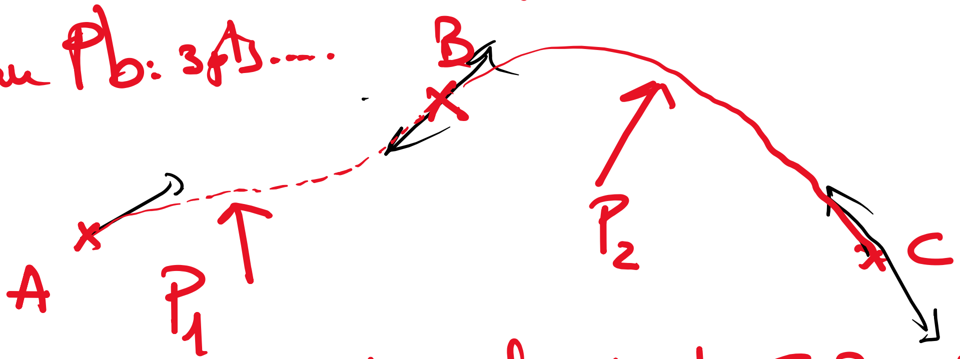
Intro :



- Position du Pb : . A, B donnés
  . $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ donnés

Puis-je trouver un morceau de courbe polynomiale de degré 3 tq qui passe par A et B ayant des tangentes en A et B dirigées par $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$?

- Suite du Pb : 3 pts ....



On va se limiter à des poly de degré 3 sur chaque segment :

- Gain en calcul
- " formel : ce que l'on sait faire sur un segment sera dupliqué.
- Plus de Pb Runge.

Posons le Pb autrement

	P_0	P_1	- - - - -	P_n
Abs	x_0	x_1	. . .	x_n
ordon	y_0	y_1	- - . - -	y_n
Vitesse	v_0	v_1	. . - - -	v_n

Vitesse → les dérivés :

Sur chaque $[P_k P_{k+1}]$, on cherche un poly de degré 3

f_k tq $\begin{cases} f_k(x_k) = y_k & \text{et } f_k'(x_k) = v_k \\ f_k(x_{k+1}) = y_{k+1} & \text{et } f_k'(x_{k+1}) = v_{k+1} \end{cases}$

L'idée style de Hermite : choix d'une base très adaptée :

La base d'Hermite $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$

φ_1 → Contrôle de la position de départ

φ_2 → Position finale

φ_3 → tgte départ

φ_4 → tgte arrivée.

$\varphi(x)$	$\varphi(0)$	$\varphi(1)$	$\varphi'(0)$	$\varphi'(1)$
φ_1	1	0	0	0
φ_2	0	1	0	0
φ_3	0	0	1	0
φ_4	0	0	0	1

Calcul de φ_1 :

$\varphi_1(0) = 1$, $\varphi_1'(0) = 0$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(1) = 0 \\ \varphi_1'(1) = 0 \end{array} \right.$ (*)

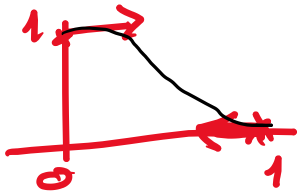
$(*) \Rightarrow \varphi_1(x) = (x-1)^2 (ax+b)$

or $\varphi_1(0) = 1 \Rightarrow \boxed{b = 1}$ $\quad$ dc $\varphi_1(x) = (x-1)^2 (ax+1)$

mais $\varphi_1'(x) = 2(x-1)(ax+1) + (x-1)^2 . a$

et $\varphi_1'(0) = 0$ donc $-2 + a = 0$ donc $a = 2$

$$\varphi_1(x) = (x-1)^2 (2x+1)$$



Calcul de φ_2 :

$\varphi_2(0) = \varphi_2'(0) = 0 \Rightarrow \varphi_2(x) = x^2 (ax+b)$

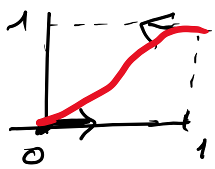
$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_2(1) = 1 \Rightarrow a + b = 1 \\ \varphi_2'(x) = 2x(ax+b) + x^2 a . \end{array} \right.$ et $\varphi_2'(1) = 0$ donc $2\underbrace{(a+b)}_{=1} + a = 0$

$2 + a = 0$

$a = -2$

$b = 3$

D'où : $\varphi_2(x) = x^2(-2x+3)$



I Base d'Hermite :

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
$\varphi(0)$	1	0	***0***	0
$\varphi(1)$	0	1	*0*	*0*
$\varphi'(0)$	0	0	*1*	*0*
$\varphi'(1)$	0	0	*0*	*1*

On obtient : $\varphi_1(x) = (x-1)^2(1+2x)$

$\varphi_2(x) = x^2(3-2x)$

$\varphi_3(x) = x(x-1)^2$

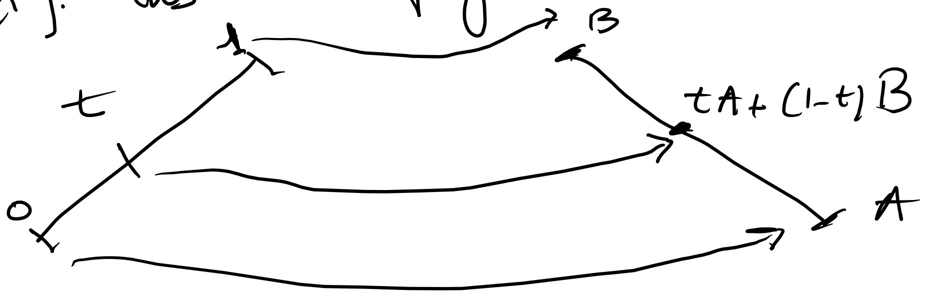
$\varphi_4(x) = (x-1).x^2$

important pour la suite.

• Résolution du Pb pour 2 pts A et B

A	B
x_A	x_B
y_A	y_B
v_A	v_B

Admettons que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ soit une base de $\mathbb{R}_3[X]$: ens des poly de degré ≤ 3



Idée : Tout point M de $[AB]$ s'écrit $(1-t)A + tB$.

Travailler sur $[AB]$ revient à travailler sur $[0;1]$

0	1
y_0	y_1
v_0	v_1

$$P(x) = a\varphi_1(x) + b\varphi_2(x) + c\varphi_3(x) + d\varphi_4(x)$$

$$\begin{cases} P(0) = y_0 \Rightarrow \\ P(1) = y_1 \Rightarrow \end{cases} \qquad \begin{aligned} a &= y_0 \\ b &= y_1. \end{aligned}$$

$$P'(x) = a\varphi_1'(x) + b\varphi_2'(x) + c\varphi_3'(x) + d\varphi_4'(x)$$

or $\begin{cases} P'(0) = v_0 \\ P'(1) = v_1 \end{cases}$ donc $\begin{aligned} c \times 1 &= v_0 \\ \ldots \quad d \times 1 &= v_1 \end{aligned}$ $\qquad \begin{aligned} c &= v_0 \\ d &= v_1 \end{aligned}$

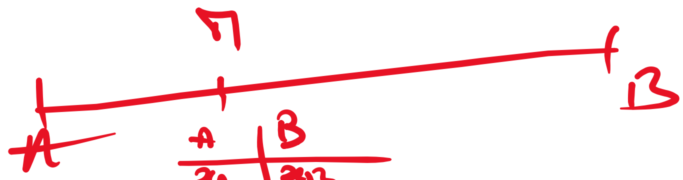
D'où :

$$\boxed{P(x) = y_0\varphi_1(x) + y_1\varphi_2(x) + v_0\varphi_3(x) + v_1\varphi_4(x)}$$

$0 \leq x \leq 1.$

Pb résolu sur $[0,1]$

Mais comment faire sur $[AB]$:



A	B
x_A	x_B
y_A	y_B
v_A	v_B

$M = (1-t)A + tB$

$x = (1-t)x_A + t\,x_B$

idem pour y.

$x = x_A + t(x_B - x_A)$

$$t = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \in [0;1]$$

Notons $\varphi(x)$ notre polynôme. $x_A \leq x \leq x_B$

$$\varphi(x) = A\,\varphi_1(t) + B\,\varphi_2(t) + C\varphi_3(t) + D\,\varphi_4(t)$$

- $\underline{x = x_A}$, $t = 0$

$$\varphi(x_A) = y_A \Rightarrow A = y_A$$

- $\underline{x = x_B}$, $t = 1$

$$\varphi(x_B) = y_B \Rightarrow B = y_B$$

$\varphi'(x_A) = V_A$

$\varphi'(x_B) = V_B$

Attention à la dérivation :

$$\varphi'(x) = A.\,\varphi_1'(t)\cdot\frac{dt}{dx} + B\,\varphi_2'(t)\,\frac{dt}{dx} + C\,\varphi_3'(t)\frac{dt}{dx} + D\varphi_4'(t)\,\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x_B - x_A}$$

$$\begin{cases} \varphi'(x_A) = V_A \Rightarrow \\ t = 0 \end{cases} \quad C \cdot 1 \times \frac{1}{x_B - x_A} = V_A$$

$$\boxed{C = (x_B - x_A)\,V_A}$$

IDEM $\quad D = (x_B - x_A)\,V_B$

Pb résolu sur [AB] : $\quad t = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \quad d = x_B - x_A$

$$\varphi(x) = y_A\,\varphi_1(t) + y_B\,\varphi_2(t) + d\left(V_A\cdot\varphi_3(t) + V_B\,\varphi_4(t)\right)$$