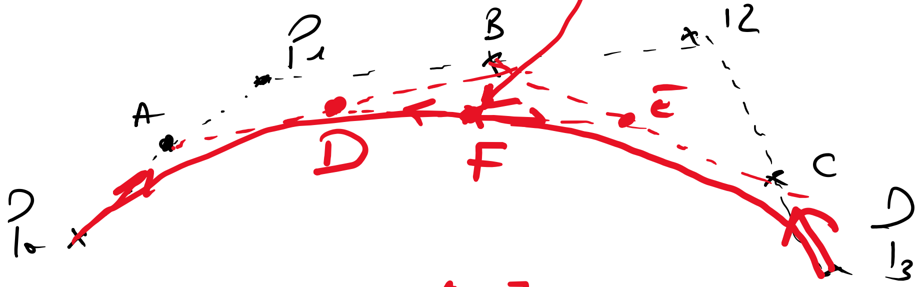
Courbe de Bezier

On se donne des points $P_0, P_1 \dots P_n$: Points de contrôle.

Notre démarche ne consiste pas à faire passer un polynôme par ces $n+1$ points, mais, de trouver une courbe $\mathcal{C}$ qui va passer par P_0 et par P_n, et la + « proche » des autres points $P_1, \dots P_{n-1}$.

Savoir reproduire exigible. $t = 1/2$

Par milieux successif : le pt final $F \in \mathcal{C}$

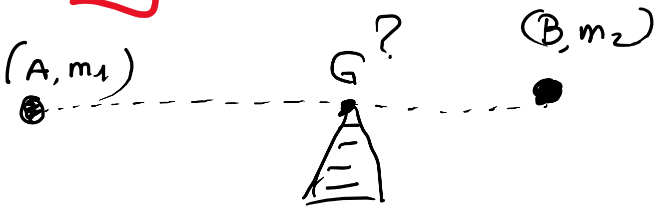


Retenir pour $t = 1/2$: le segment $\boxed{[DE]}$ est tangent à $\mathcal{C}$

$\vec{P_0P_1}$ et $\vec{P_2P_3}$ sont tangent à $\mathcal{C}$.

On peut le faire avec $t \in [0;1]$, il nous faut généraliser la notion de milieu d'un segment :

Notion de Barycentre :



Soit (A, m_1) : A pt et m_1 masse affectée au pt A

(B, m_2) : B . . . m_2 . . . .

$\boxed{m_1+m_2 \neq 0}$

on cherche (G, m_1+m_2) pt d'équilibre :

$$(*) \quad \boxed{m_1 \vec{AG} + m_2 \vec{BG} = \vec{0}}$$

$$(*) \Leftrightarrow m_1\left(\vec{OG} - \vec{OA}\right) + m_2\left(\vec{OG} - \vec{OB}\right) = \vec{0}$$

$$(m_1+m_2)\vec{OG} - m_1\vec{OA} - m_2\vec{OB} = \vec{0}$$

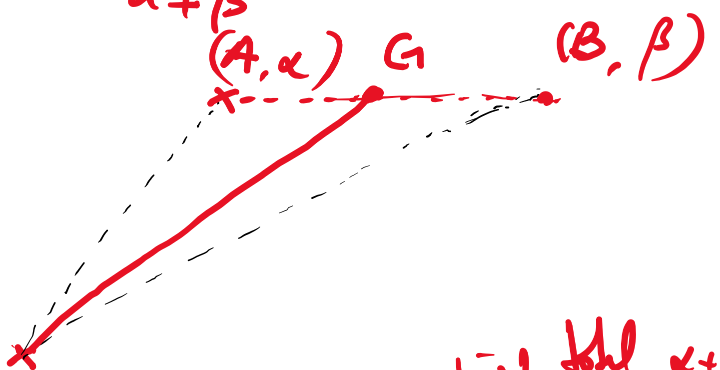
$$(m_1+m_2)\vec{OG} = m_1\vec{OA} + m_2\vec{OB}$$

$$\boxed{\vec{OG} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{OA} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{OB}}$$

Résumé G est le barycentre du système $\{(A,\alpha), (B,\beta)\}$:

$$\vec{OG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\vec{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{OB} \quad . \qquad \alpha+\beta \neq 0$$

O ici est quelconque :



O : la main : je ressens poids total $\alpha+\beta$

O = A

$$\vec{AG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\underbrace{\vec{AA}}_{\vec{0}} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$$

$$\boxed{\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}}$$

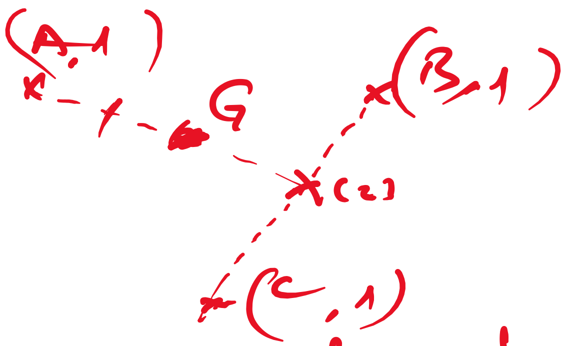
$$\boxed{\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,\overrightarrow{BA}}$$

Cas de 3 pts (A,α), (B,β), (C,γ)

$$s = \alpha+\beta+\gamma \neq 0$$

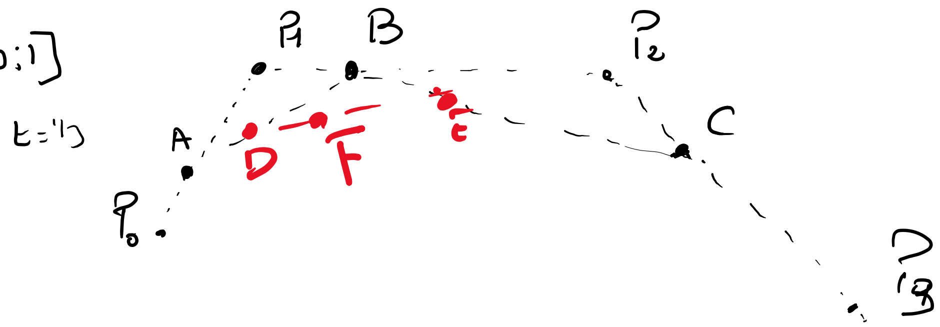
$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{s}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{s}\overrightarrow{OB} + \frac{\gamma}{s}\overrightarrow{OC}$$

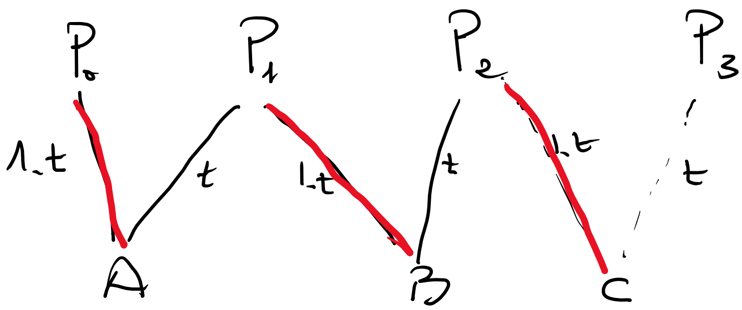
si $\alpha=\beta=\gamma$ alors G centre de gravité de ABC



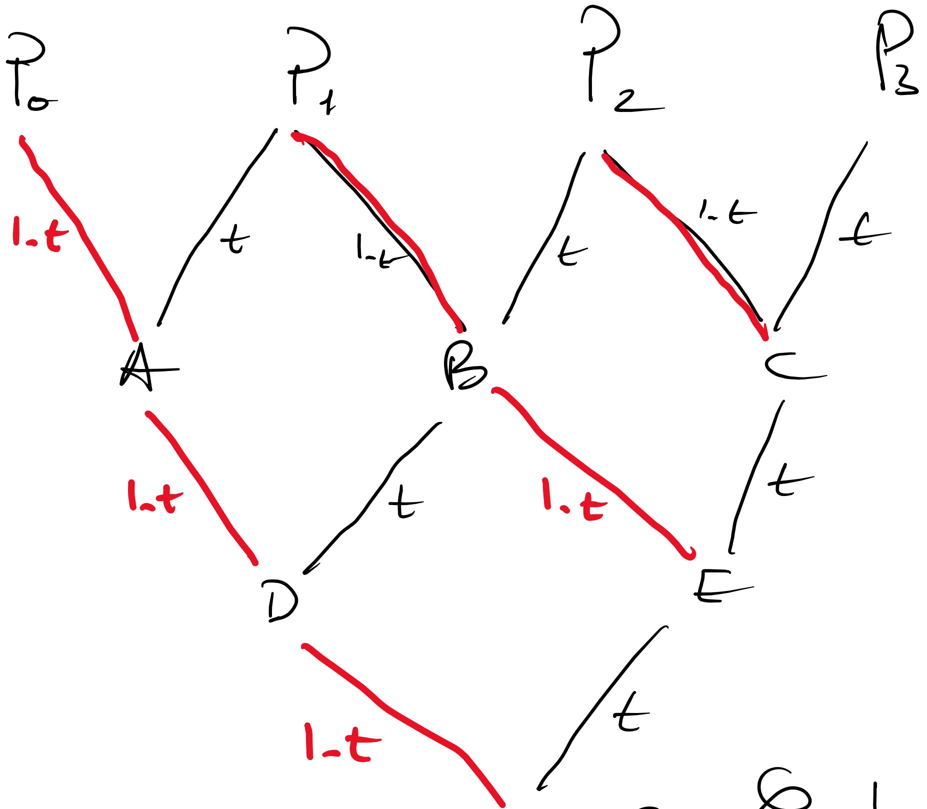
Retour aux courbes de Bezier

$t \in [0;1]$





Pour des raisons techniques : je refais



F $\in$ $\mathcal{C}$ de Bezier

il suffit de faire varier t de [0 ; 1], pour avoir $\mathcal{C}$.

- $(P_0, (1-t))$ et $(P_1, t) \longrightarrow A$

* $\overrightarrow{OA} = (1-t)\overrightarrow{OP_0} + t\,\overrightarrow{OP_1}$ (voir $A = \text{bary}$ de $(P_0, 1-t)$ et (P_1, t) (*))

$\downarrow$

Simplification des notations :

* $A = (1-t)P_0 + tP_1$

$\Updownarrow$

* $\begin{cases} x_A = (1-t)x_0 + t x_1 \\ y_A = (1-t)y_0 + t y_1 \end{cases}$

$$F = \underbrace{(1-t)^3}_{B_{(3,0)}(t)} P_0 + \overbrace{\underline{3(1-t)^2 . t}}^{B_{(3,1)}(t)} P_1 + \underline{3(1-t)t^2} P_2 + \underline{t^3} P_3 \qquad (F)$$

Les coeff $(1-t)^3$, $3(1-t)^2 t$, $3(1-t)t^2$ et t^3 ne sont rien d'autres que les termes du développement de $\left((1-t)+t\right)^3 =$

$$(1-t)^3 + 3(1-t)^2 t + 3(1-t)t^2 + t^3$$

Ce sont des polynômes de degré nbre de points de contrôle -1.

Def : On appelle polynômes de Bernstein de degré n, les polynômes $B(n,k)$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$B(n,k)(t) = \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} . t^k$$

$n = 3$ $\quad B(3,0)(t) = \binom{3}{0} (1-t)^3 t^0 = (1-t)^3$

$B(3,1)(t) = \binom{3}{1} (1-t)^2 . t^1 = 3 . (1-t)^2 . t$

Courbe de Bezier $(P_0, P_1 \ldots \ldots P_n)$:

l'ensemble des points $M(t)$ tq :

$$M(t) = \sum_{k=0}^{n} B_{(n,k)}(t) \; P_k \qquad \text{généralise (F)}$$

$\Uparrow$

Posons

$x(t)$, et $y(t)$ les coordonnées de $M(t)$

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=0}^{n} B_{(n,k)}(t) \cdot x_k \\ y(t) = \sum_{k=0}^{n} B_{(n,k)}(t) \cdot y_k \end{cases}$$

Pour le TP : $N = 500$

T = np.linspace (0, 1, N)

chaque t dans T $\to x(t) \to$ Xaff

$ \to y(t) \to$ Yaff

Plot (Xaff, Yaff)