• Interpolation poly de Base canonique

• Mise en oeuvre : "Outils pour les 3 groupes"

→ Wims F4 « Prise en main".

• Exo type partiel.

Mots clé : • Base canonique

• Matrice de Vandermonde : "Inversibilité".

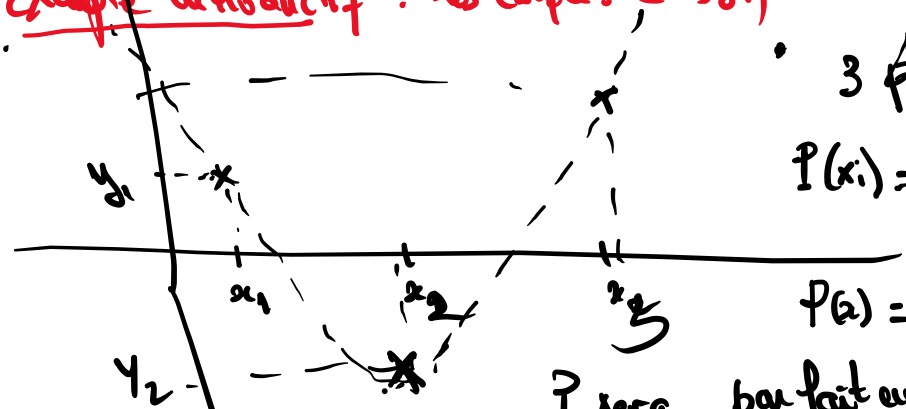
• Phénomène de Runge " Sensibilisation"

↓

TP_1 : $f(x) = \frac{1}{1+10x^2}$.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Ph%C3%A9nom%C3%A8ne_de_Runge

Exemple introductif : les couples (x_i, y_i) sont donnés.



• 3 pts → poly de degré 2

$P(x_i) = y_i \quad 1 \leq i \leq 3$

$P(x) = ax^2 + bx + c \times 1$

P sera parfaitement déterminé si l'on détermine les coeff a, b et c :

les coeff a, b et c sont les coordonnées de P dans la base $(1, x, x^2)$

Cas général :

• On appelle une grille de points un tableau

x_0	x_1	. . .	x_n
y_0	y_1	. . .	y_n

c'est la donnée de n+1 points

Problématique TP1 → TP4 : Trouver un polynôme P

tel que $P(x_i) = y_i$ pour $0 \leq i \leq n$. (*)

on démontre que P sera de degré n (au maximum)

(Retenir (n+1) points exigent P de degré n)

Nous allons exprimer P dans la base canonique

$\mathcal{B}_0 = (1, x, x^2, \ldots, x^n)$

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

$a_0, a_1, \ldots a_n$ représentent les coordonnées (inconnues) de P dans la base $\mathcal{B}_0$.

Traduisons la relation (*)

$$(S)\left\{\begin{array}{ll}
\bullet\ P(x_0) = y_0 : & a_0 1 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\
\bullet\ P(x_1) = y_1 : & a_0 1 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\
\vdots & \vdots \\
\bullet\ P(x_n) = y_n : & a_0 1 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n
\end{array}\right.$$

Remarques:

- (S) est un système avec n+1 inconnues $a_0, a_1, \ldots a_n$
- (S) comporte n+1 équations.
- $(x_0, x_1, \ldots x_n)$, $(y_0, y_1, \ldots y_n)$ sont données.

Traduction matricielle :

Notons * $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ notre inconnue.

* $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

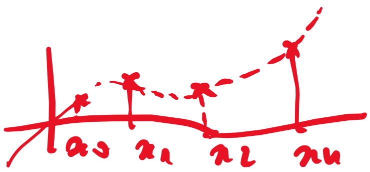
Notons V la matrice des coefficients :

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

matrice de Vandermonde
elle est aussi notée $V(x_0, x_1, \dots, x_n)$

$$\boxed{(S) \iff V.A = Y}$$

équation matricielle d'inconnue A



dans notre cas x_i sont distincts deux à deux

<u>Prop</u> : Quand les x_i sont $\neq$, V est inversible

Cela va être notre cas, on pourra donc résoudre (S) sous numpy.
On récupèrera l'unique solution $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.
D'où : un polynôme unique $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

<u>Pour le TP</u>

X	x_0	x_1	$\dots$	x_n
Y	y_0	y_1	$\dots$	y_n

* X et Y vont être des listes de même taille $n+1$
* n : entrée.
* f fonction connue telle que $y_i = f(x_i)$

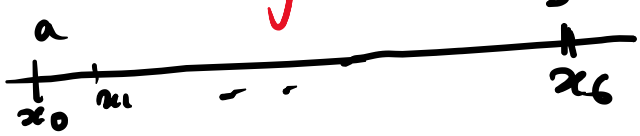
Trouver P tq $y_i = P(x_i)$ avec P de degré n

Tracer C_f et C_P et estimer l'écart max entre les deux.

ORGANISATION

- $f = \sin$.
- On travaillera sur $[a, b]$ $\quad (a = 0,\ b = 2\pi)$.
- n en entrée $\quad (n = 6)$
- Découper de manière uniforme $[a, b]$

"linspace"



$$X = \text{linspace}(a, b, n)$$

$$Y = f(X)$$

Il nous faut la matrice de Vandermonde : numpy le fait, Attention aux options :

* increasing
* decreasing

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & x_0^n \\ 1 & & \vdots \\ 1 & & \\ 1 & & x_n^n \end{pmatrix} \qquad \cancel{\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_n^n & \cdots & & x_1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Résoudre $VA = Y$: $A = \text{linalg}(V, Y)$

Donc P polynôme clé en main.

Affichage minimum 500 pts

$$X_{aff} = \text{linspace}(a, b, 500)$$

$$Y_{exact} = f(X_{aff})$$

$$Y_{estim} = P(X_{aff})$$

$$\text{Erreur} = \max \left| f(x_i) - P(x_i) \right|, \quad 0 \le i \le 500.$$

Remarque : • la fonction sinus est "trop régulière"

$\sin'(x) = \cos(x)$, sur $[0, 2\pi]$ $-1 \leqslant \sin'(x) \leqslant 1$

les variations de f sont faibles.

• Avec un nombre de points $(n+1)$ de départ, de taille raisonnable : C_f et C_P sont quasiment confondues.

Mais P est de degré n, $P'(x)$ peut s'affoler : Penser à $P = x^n$, $P' = (x^n)' = n x^{n-1}$

ordre d'idée : $n = 30$, $P'(1) = 30$

alors que $f'(1) = \cos(1) \in [-1;1]$

Refaire $f = \dfrac{1}{1+10x^2}$ $a = -5$; $b = 5$

$n = 7$, $n = 15$ .....

Explorer la catastrophe : venir "phénomène de Runge"

But : Mettre en évidence les anomalies de notre approche.

Pour aller + loin : on évite de prendre les x_i équidistants, on les répartit davantage sur les bords de $[a, b]$

Points de Tchebytchef.

Exo type partiel

x_i	-1	0	1	2
y_i	-2	1	3	1

1) Base ? ② Vandermonde associée ③ P ?

Correction

① 4 pts donnés donc on cherche P de degré 3.

$B_0 = (1, x, x^2, x^3)$.

② $V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & (-1)^2 & (-1)^3 \\ 1 & 0 & 0^2 & 0^3 \\ 1 & 1 & 1^2 & 1^3 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

③ Trouver P : $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$

- $P(0) = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$
- $P(-1) = -2 \Rightarrow a - b + c - d = -2$

$\boxed{-b + c - d = -3}$ (1)

- $P(1) = 3 \Rightarrow a + b + c + d = 3$

$\boxed{b + c + d = 2}$ (2)

- $P(2) = 1 \Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{a} + 2b + 4c + 8d = 1$

$2b + 4c + 8d = 0$

$\boxed{b + 2c + 4d = 0}$ (3)

(1)+(2) : $2c = -3 + 2 = -1$ $\boxed{c = -1/2}$

On réécrit la ②: $b - 1/2 + d = 2$ $\boxed{b + d = 5/2}$ L_1

" " " ③ $b - 1 + 4d = 0$ $\boxed{b + 4d = 1}$ L_2

$L_2 - L_1$: $3d = -3/2 \Rightarrow d = -1/2$

L_1 : $b - 1/2 = 5/2 \Rightarrow b = 3$

D'où $P(x) = 1 + 3x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3$