Независимые случайные величины

Понятие независимости случайных величин

Пусть даны две случайные величины $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$. Причем ξ принимает значения из множества $\{x_1, \dots, x_n\}$, а η — из множества $\{y_1, \dots, y_m\}$:

$$\xi : \Omega \to \{x_1, \dots, x_n\}, \qquad \eta : \Omega \to \{y_1, \dots, y_m\}.$$

Говорят, что случайные величины ξ и η независимы, если:

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \forall j = 1, \dots, m \quad \mathsf{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) = \mathsf{P}(\xi = x_i) \cdot \mathsf{P}(\eta = y_j).$$

Как и в случае рассмотрения независимости событий, для набора случайных величин $\xi, \dots, \xi_n$ можно говорить о попарной независимости и независимости в совокупности.

Набор случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ называется попарно независимым в том случае, если любая пара случайных величин независима.

Набор случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ называется независимым в совокупности тогда и только тогда, когда выполняется

$$\forall k \, \forall i_1, \dots, i_k \, \forall x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \quad \mathsf{P}(\xi_{i_1} = x_{i_1}, \dots, \xi_{i_k} = x_{i_k}) = \mathsf{P}(\xi_{i_1} = x_{i_1}) \cdot \dots \cdot \mathsf{P}(\xi_{i_k} = x_{i_k})$$

Пример. Пусть $A_1, \dots, A_n$ — события, независимые попарно, но зависимые в совокупности. Пример таких событий предлагалось привести в соответствующем упражнении ранее. Тогда случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$, индикаторы событий $A_1, \dots, A_n$, попарно независимы, но зависимы в совокупности:

$$\xi_i := I_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Свойства математического ожидания независимых случайных величин

Можно получить некоторые свойства математического ожидания и дисперсии в случае, если случайные величины независимы. Свойство линейности математического ожидания, безусловно, справедливо как в случае зависимых, так и в случае независимых случайных величин:

$$M(c_1\xi_1 + \ldots + c_n\xi_n) = c_1 M\xi_1 + \ldots + c_n M\xi_n.$$

Теорема. Пусть ξ, η — независимы, тогда:

$$M(\xi \cdot \eta) = (M\xi) \cdot (M\eta)$$

Док-во. Пусть ξ и η принимают на пространстве элементарных исходов множества значений $\{x_1, \dots, x_n\}$ и $\{y_1, \dots, y_m\}$ соответственно:

$$\xi : \Omega \to \{x_1, \dots, x_n\}, \qquad \eta : \Omega \to \{y_1, \dots, y_m\}.$$

Математическое ожидание произведения двух случайных величин по определению:

$$M(\xi\eta) = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) \cdot \eta(\omega) \cdot \mathsf{P}(\omega).$$

Пространство Ω можно представить в виде объединения непересекающихся множеств $\Omega_{i,j}$:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} \Omega_{i,j}, \qquad \Omega_{i,j} \subset \Omega : \forall \omega \in \Omega_{i,j} \quad \xi(\omega) = x_i, \; \eta(\omega) = y_j.$$

Тогда исходное выражение для $M(\xi\eta)$ можно преобразовать следующим образом:

$$M(\xi\eta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{\omega \in \Omega_{i,j}} \xi(\omega) \cdot \eta(\omega) \cdot \mathsf{P}(\omega).$$

Так как при $\omega \in \Omega_{i,j}$ выполняется по построению $\xi(\omega) = x_i$ и $\eta(\omega) = y_j$:

$$\begin{aligned} M(\xi\eta) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{\omega \in \Omega_{i,j}} x_i \cdot y_j \cdot \mathsf{P}(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i \cdot y_j \cdot \sum_{\omega \in \Omega_{i,j}} \mathsf{P}(\omega) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i \cdot y_j \cdot \mathsf{P}(\Omega_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i \cdot y_j \cdot \mathsf{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i \cdot y_j \cdot \mathsf{P}(\xi = x_i) \cdot \mathsf{P}(\eta = y_i) = \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n} x_i \cdot \mathsf{P}(\xi = x_i) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} y_j \cdot \mathsf{P}(\eta = y_j) \right) = (M\xi) \cdot (M\eta). \end{aligned}$$

Здесь было использовано определение независимости двух случайных величин. Теорема доказана.

Свойства дисперсии независимых случайных величин

Полученное свойство математического ожидания позволяет доказать следующее свойство дисперсии для независимых случайных величин. Дисперсия, в отличие от математического ожидания, не является линейной величиной. В частности:

$$D(c\xi) = c^2 \cdot D\xi.$$

Теорема. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — попарно независимые случайные величины. Тогда

$$D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = D\xi_1 + \cdots + D\xi_n.$$

Док-во. Можно ввести следующие обозначения:

$$\eta_1 = \xi_1 - M\xi_1, \quad \ldots, \quad \eta_n = \xi_n - M\xi_n.$$

Попарная независимость $\eta_1, \ldots, \eta_n$ есть следствие попарной независимости величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Тогда по определению для дисперсии получается:

$$\begin{aligned} D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) &= M(\xi_1 + \ldots + \xi_n - M(\xi_1 + \ldots + \xi_n))^2 = \\ &= M((\xi_1 - M\xi_1) + (\xi_2 - M\xi_2) + \ldots + (\xi_n - M\xi_n))^2 = \\ &= M\left(\eta_1^2 + \ldots + \eta_n^2 + \sum_{i \neq j} \eta_i \eta_j \right) = M\eta_1^2 + \ldots + M\eta_n^2 + \sum_{i \neq j} M(\eta_i \eta_j) = \\ &= M\eta_1^2 + \ldots + M\eta_n^2 + \sum_{i \neq j} (M\eta_i)(M\eta_j) = \\ &= M\eta_1^2 + \ldots + M\eta_n^2 = M(\xi_1 - M\xi_1)^2 + \ldots + M(\xi_n - M\xi_n)^2 = D\xi_1 + \ldots + D\xi_n. \end{aligned}$$

Здесь было использовано соотношение $M\eta_i = M(\xi_i - M\xi_i) = 0$. Теорема доказана.

Замечание. Можно привести примеры таких зависимых случайных величин ξ, η, что, тем не менее,

$$M(\xi\eta) = (M\xi) \cdot (M\eta).$$

Случайные величины ξ и η называются некоррелированными, если $M(\xi\eta) = (M\xi) \cdot (M\eta)$.

Замечание. При доказательстве предыдущей теоремы было использовано только соотношение $M(\xi\eta) = (M\xi) \cdot (M\eta)$. Таким образом теорема остается справедливой даже при более слабых условиях: пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — попарно некоррелированные случайные величины, тогда

$$D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = D\xi_1 + \cdots + D\xi_n.$$

Закон больших чисел

Закон больших чисел в форме Чебышёва

Одним из центральных результатов теории вероятностей является закон больших чисел (ЗБЧ). Вообще говоря, существует множество формулировок ЗБЧ. В следующей формулировке он называется законом больших чисел в форме Чебышёва.

Теорема. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — некоторая бесконечная последовательность попарно некоррелированных величин. Пусть также их дисперсии не превосходят некоторой константы c:

$$\exists c: \ \forall i \ D\xi_i \leq c.$$

Тогда $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - \frac{M\xi_1 + \ldots + M\xi_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Замечание. Строго говоря, задать бесконечную последовательность попарно некоррелированных величин нельзя на конечном вероятностном пространстве. Однако позже в данном курсе будут введены примеры бесконечных вероятностных пространств и эта теорема станет верной уже без такой формальной неаккуратности. С другой стороны, бесконечное количество случайных величин на практике никогда не бывает известно. Тогда, грубо говоря, следует воспринимать закон больших чисел следующим образом: если рассмотреть некоторое ε и достаточно большое конечное n, рассматриваемая вероятность будет достаточно малой.

Замечание. В частности, если $\forall i \quad M\xi_i = a$, утверждение теоремы будет следующим:

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right) \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Док-во. В выражении

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - \frac{M\xi_1 + \ldots + M\xi_n}{n}\right| > \varepsilon\right)$$

можно ввести обозначение $\eta = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}$. Тогда можно воспользоваться неравенством Чебышёва:

$$\mathsf{P}(|\eta - M\eta| > \varepsilon) \leq \frac{D\eta}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 \cdot n^2} \cdot (D\xi_1 + \ldots + D\xi_n) \leq \frac{c \cdot n}{\varepsilon^2 n^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Теорема доказана.

Замечание. Пусть в схеме испытаний Бернулли μ_n — число успехов в n испытаниях, ξ_i — результат i-го испытания:

$$\mu_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \qquad \xi_i = \begin{cases} 1, & \text{при успехе} \\ 0, & \text{при неудаче} \end{cases}.$$

Вычислим математическое ожидание и дисперсию случайных величин ξ_i:

$$M\xi_i = p, \qquad D\xi_i = M\xi_i^2 - (M\xi_i)^2 = p \cdot (1-p) = p \cdot q.$$

Тогда для μ_n можно получить ввиду независимости ξ_i:

$$M\mu_n = n \cdot p, \qquad D\mu_n = D\xi_1 + \ldots + D\xi_n = npq.$$

Предельная теорема Пуассона

Вероятность того, что число успехов в схеме Бернулли находится в определенных пределах

$$\mathsf{P}(k \le \mu_n \le l) = \sum_{i=k}^{l} C_n^i \cdot p^i \cdot q^{n-i}.$$

Такую сумму сложно вычислять при большом количестве испытаний в серии. На практике вычисляются математические аппроксимации требуемых величин.

Теорема. Пусть вероятность успеха в i-м испытании зависит от числа испытаний n. Более того, пусть $p(n) = \frac{\lambda}{n}$, $\lambda > 0$. Тогда вероятность $\mathsf{P}(\mu_n = k)$ можно аппроксимировать следующим образом:

$$\mathsf{P}(\mu_n = k) \to \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \qquad n \to \infty.$$

Док-во. Для искомой вероятности

$$\mathsf{P}(\mu_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Для биномиальных коэффициентов, поскольку k зафиксировано, верно следующее асимптотическое равенство:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \sim \frac{n^k}{k!}, \quad n \to \infty.$$

С учетом этого и того, что

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \to 1, \quad n \to \infty,$$

можно получить:

$$\mathsf{P}(\mu_n = k) = C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \sim \frac{n^k}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \sim \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Здесь был использован первый замечательный предел $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \sim e^{-\lambda}$. Теорема доказана.

Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа

Теорема.

$$\mathsf{P}\left(a \le \frac{\mu_n - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \le b\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \qquad n \to \infty.$$

Причем сходимость равномерная по всем $a, b \in \mathbb{R}$.

Замечание. Для случайной величины $\eta = \frac{\mu_n - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}$ выполняется $M\eta = 0$, $D\eta = \frac{D\mu_n}{n\cdot p\cdot q} = 1$. В таком случае принято говорить, что величина μ_n была центрирована и отнормирована.

coursera

Док-во этой теоремы выходит за рамки данного курса.

Пример. Театр имеет два входа, около каждого из которых есть гардероб. Гардеробы имеют одинаковую вместимость. Будем считать, что люди выбирают вход взаимно независимо с вероятностью $\frac{1}{2}$. Пусть в театре всего 1000 мест, и каждый день театр посещают 1000 человек. Найти минимальный размер гардероба такой, чтобы вероятность переполнения хотя бы одного из них была меньше чем $\frac{1}{300}$.

Пусть x — искомый размер гардероба. Очевидно, что требуемый минимальный размер будет лежать в интервале $(500, 1000)$. Оказывается, он не сильно больше 500.

В схеме испытаний Бернулли с $n = 1000$ испытаний и $p = \frac{1}{2}$ условно успехом можно положить то, что человек пошел в какой-то конкретный гардероб:

$$npq = 250, \qquad \sqrt{npq} = 5\sqrt{10}.$$

Гардероб не переполняется тогда и только тогда, когда $\mu_n \le x$ и $1000 - \mu_n \le x$. Вероятность этого события можно преобразовать к виду, в котором сформулирована теорема Муавра-Лапласа:

$$\mathsf{P}(1000 - x \le \mu_n \le x) = \mathsf{P}\left(\frac{500 - x}{5\sqrt{10}} \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{x - 500}{5\sqrt{10}}\right) = 1 - \frac{1}{300}.$$

Таким образом,

$$\frac{x - 500}{5\sqrt{10}} = 3 \quad \Longrightarrow \quad x = 500 + 15\sqrt{10} \approx 546.$$

Пометить как выполненное