Sorbonne Université

L'algorithme Welzl résolvant le problème du cercle minimum

Conception et Pratique de l'Algorithmique

Rajith RAVINDRAN

Etablissement / Formation : Sorbonne Université, Master 1 STL
Année de Formation : 2023-2024

Calculer le cercle minimal couvrant

Résumé : Cet article présente plusieurs algorithmes différents tels que l'algorithme naif et l'algorithme Welzl pour résoudre le problème du cercle minimal, comparera les performances des deux algorithmes, et analysera les raisons de la différence de performances et les points à améliorer sous plusieurs angles différents

Mots-clés : cercle minimum ; algorithme Welzl ; algorithme naïf.

Table des matières

1 Introduction

Le concept du cercle minimum sert d'exemple au problème plus large de placement optimal d'installations. Ce problème consiste à déterminer l'emplacement idéal pour une nouvelle installation afin de minimiser la distance maximale que les clients doivent parcourir pour y accéder. Cette question trouve des applications concrètes dans divers aspects de la vie quotidienne, telles que la localisation des établissements de santé, où une accessibilité médiocre peut augmenter le taux de morbidité et de mortalité, ou la gestion des déchets en milieu urbain, où une mauvaise localisation des décharges peut augmenter les volumes de déchets et les coûts associés.

2 Définitions

2.1 Problème du cercle minimal

Le problème du cercle couvrant minimal est une question algorithmique et mathématique visant à identifier le plus petit cercle capable d'englober un ensemble de points sur un plan. Lorsqu'élargi à des espaces de dimensions supérieures, ce problème devient celui de trouver la sphère minimale englobante, soit la plus petite sphère pouvant contenir un ensemble de points dans un espace n-dimensionnel.

La détermination du cercle couvrant minimal repose sur deux principes fondamentaux :

1. Il existe un unique cercle couvrant minimal pour un ensemble donné de points.
2. Pour un ensemble de points donné, le cercle couvrant minimal passera par au maximum trois de ces points. Si le cercle couvrant minimal passe par trois points, alors il s'agit du cercle circonscrit à ces trois points. Si le cercle couvrant minimal passe seulement par deux points, alors ce cercle a pour diamètre le segment de ligne joignant ces deux points.

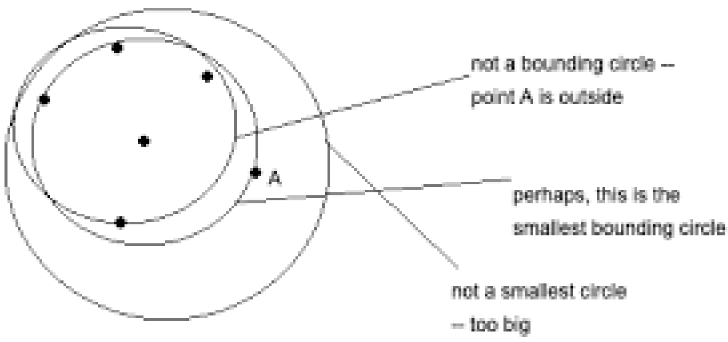

FIGURE 1 – Exemple d'un cercle couvrant minimum

2.2 Algorithme naïf

Un algorithme naïf représente une stratégie de résolution de problèmes caractérisée par sa simplicité et sa directivité, souvent au détriment de l'efficacité. Il se base généralement sur des approches de force brute ou des méthodes immédiatement évidentes, ce qui rend ces algorithmes accessibles et faciles à mettre en œuvre. Cependant, leur manque d'optimisation les rend moins adaptés aux situations impliquant de vastes volumes de données ou des problématiques d'une grande complexité, puisque leur temps d'exécution peut être prohibitif, atteignant souvent des ordres de grandeur exponentiels ou factoriels.

Considérée comme une étape initiale dans l'élaboration de solutions à un problème donné, l'approche naïve sert de référentiel pour évaluer l'efficacité d'algorithmes plus élaborés et optimisés. Malgré leur manque d'efficience pour des applications concrètes, du fait de leur simplicité, ces algorithmes jouent un rôle crucial dans l'éducation, le diagnostic de problèmes et la validation de concepts, en démontrant l'existence de solutions réalisables, même si celles-ci ne sont pas optimales.

3 Algorithme naïf

3.1 Pseudo-code

Algorithme 1 Algorithme naïf

```
pour tout tout p dans Points faire
    pour tout tout q dans Points faire
        c ← cercle de centre (p + q)/2 et de diamètre |pq|
        si c couvre tous les points de Points alors
            retourner c
        end si
    end pour tout
end pour tout
resultat ← cercle de rayon infini
pour tout tout p dans Points faire
    pour tout tout q dans Points faire
        pour tout tout r dans Points faire
            c ← cercle circonscrit à p, q et r
            si c couvre Points et c est plus petit que resultat alors
                resultat ← c
            end si
        end pour tout
    end pour tout
end pour tout
retourner resultat
```

3.2 Complexité

La complexité temporelle dans le pire des cas pour l'algorithme naïf découle directement de l'exécution exhaustive des boucles imbriquées, résultant en une complexité de $O(n^4)$. Cette évaluation provient de la nécessité de vérifier, pour chaque triplet de points possible, si celui-ci forme un cercle circonscrit englobant tous les points de l'ensemble P.

Ainsi, compte tenu qu'il y a $O(n^3)$ triplets à examiner et que pour chaque triplet, l'opération de vérification est effectuée sur l'ensemble des n points, la complexité totale atteint $O(n^3 * n)$, soit $O(n^4)$.

4 Algorithme Welzl

En 1991, Emmerich Welzl, professeur et chercheur en informatique autrichien, a introduit un algorithme portant son nom, destiné à trouver le cercle minimal englobant un ensemble fini et dénombrable de points dans un espace, le tout avec une complexité temporelle linéaire. L'approche de Welzl repose sur une méthode récursive et opère en manipulant deux ensembles distincts :

- P, qui regroupe les points initiaux à considérer,
- R, qui rassemble les points qui détermineront le cercle minimal.

Initialement, l'ensemble P inclut l'intégralité des points à examiner, tandis que l'ensemble R est vide. La méthode algorithmique se déploie comme suit :

4.1 Pseudo-code

Algorithme 2 B_MINIDESK(P, R)

Entrée: Ensemble P de points de départ, Ensemble R de points sur le cercle minimum

Sortie: Cercle minimum c contenant P noté B_MINIDESK(P, R)

```
si P = ∅ ou |R| = 3 alors
    D ← trivial(∅, R)
sinon
    choisir un random p ∈ P
    D ← B_MINIDESK(P − {p}, R)
    si D est défini  et  p ∉ D alors
        D ← B_MINIDESK(P − {p}, R ∪ {p})
    end si
end si
return D
```

4.2 Complexité

Lorsque P est vide ou $|R| = 3$, l'algorithme résout le problème de manière triviale. La fonction 'trivial' a une complexité temporelle constante $O(1)$ car elle ne fait que calculer le cercle minimal à partir de 0, 1, 2, ou 3 points, ce qui peut être accompli en un temps fixe.

À chaque appel récursif , un point est retiré de P, réduisant ainsi la taille de l'ensemble P de 1. Cependant, le point critique est de savoir combien de fois l'algorithme peut être appelé, car cela dépend du nombre de fois qu'un point p se trouve à l'extérieur du cercle courant D.

La complexité attendue de l'algorithme de Welzl est $O(n)$, ce qui en fait un algorithme très efficace pour résoudre le problème du cercle couvrant minimal. Cette efficacité repose sur l'hypothèse que le choix aléatoire des points garantit que la probabilité qu'un point choisi aléatoirement se trouve à l'extérieur du cercle courant diminue rapidement à mesure que la taille de P augmente.

5 Étude expérimentale

Voici les résultats qu'on obtient avec l'exécution des algorithmes :

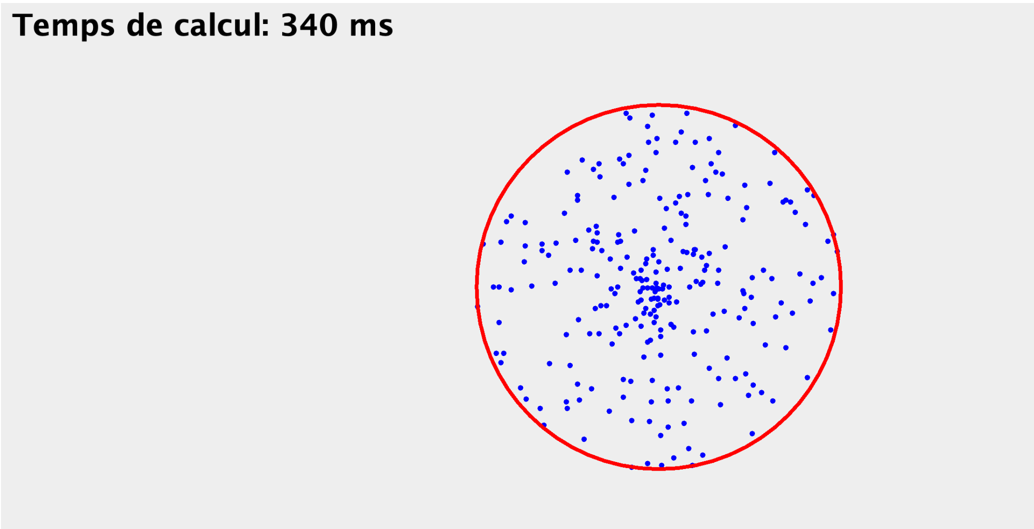

Figure 2 – Résultat de l'algo naïf lors de la première exécution

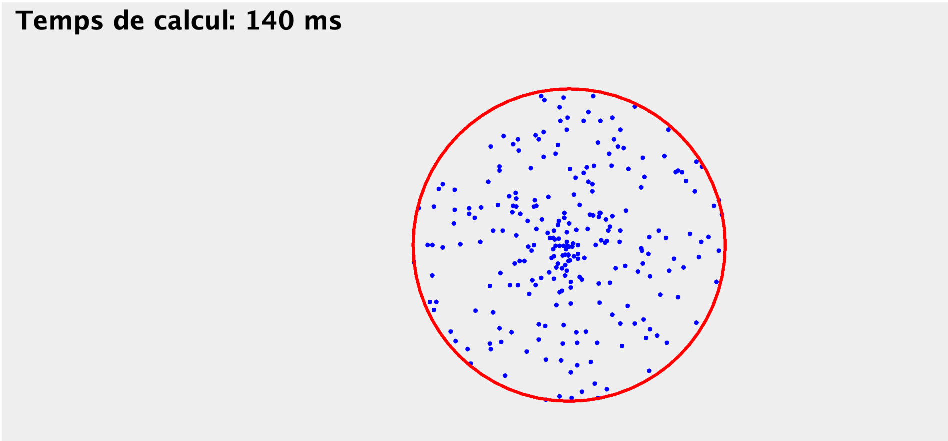

Figure 3 – Résultat de l'algo naïf lors de la deuxième exécution

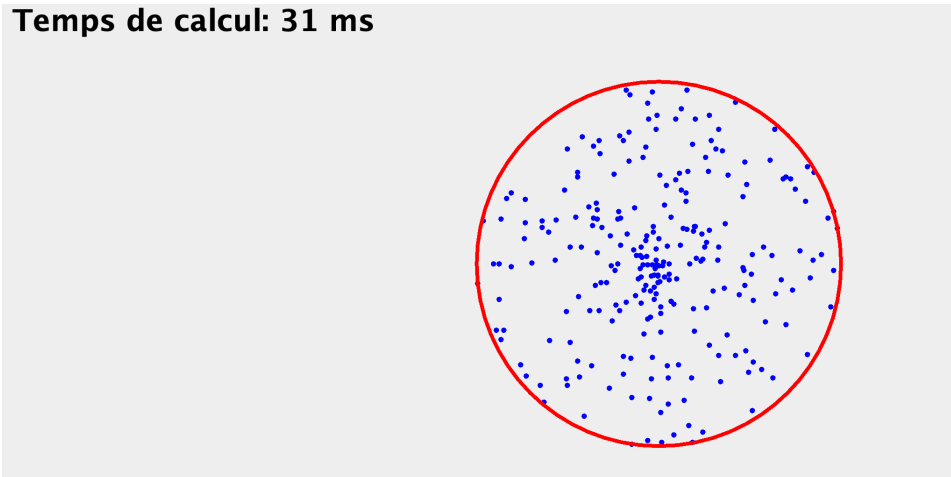

Figure 4 – Résultat de l'algo Welzl lors de la première exécution

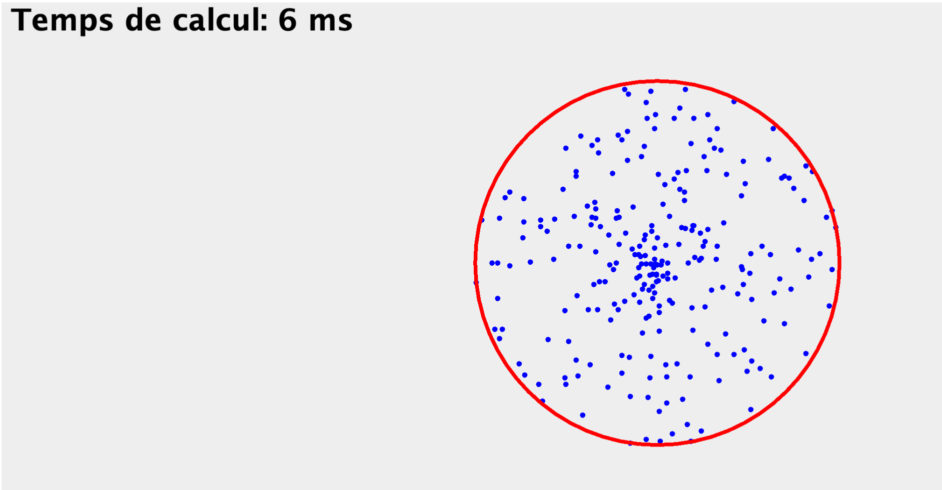

Figure 5 – Résultat de l'algo Welzl lors de la deuxième exécution

Dans la phase cruciale de validation de notre approche algorithmique, il était impératif de procéder à des tests exhaustifs pour garantir à la fois l'efficacité et la robustesse de notre solution.

La base de test devrait contenir un nombre minimum de 1664 instances de test. De plus, chaque instance de cette base devait comprendre au moins 256 points, ce qui nous permettrait d'évaluer de manière significative la performance de notre algorithme sur des données variées et complexes.

Pour répondre à ces exigences, nous avons opté pour la base de test de Varoumas. Cette base, en répondant parfaitement à nos critères, nous a permis de conduire une série de tests fiables et représentatifs des défis réels que notre algorithme pourrait rencontrer. La disponibilité de cette base en ligne à l'adresse spécifiée a facilité son intégration dans notre processus de test, marquant ainsi une étape importante dans notre démarche de validation.Les abscisses désigne combien d'instances de 256 points ont été traitées (n fois).

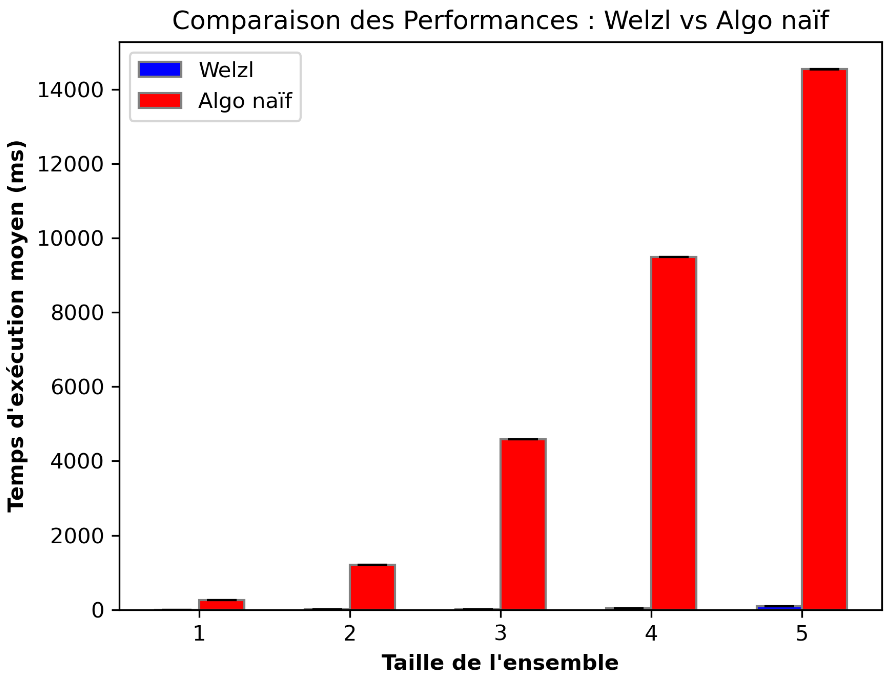

FIGURE 6 – Comparaison des performances des algorithmes

On peut voir une différence flagrante entre les deux algorithmes, pour voir plus en détails, voici une image zoomé. La petite barre représente l'écart-type. Ce graphe a été codé en python et les données se trovent dans le fichier graph.py.

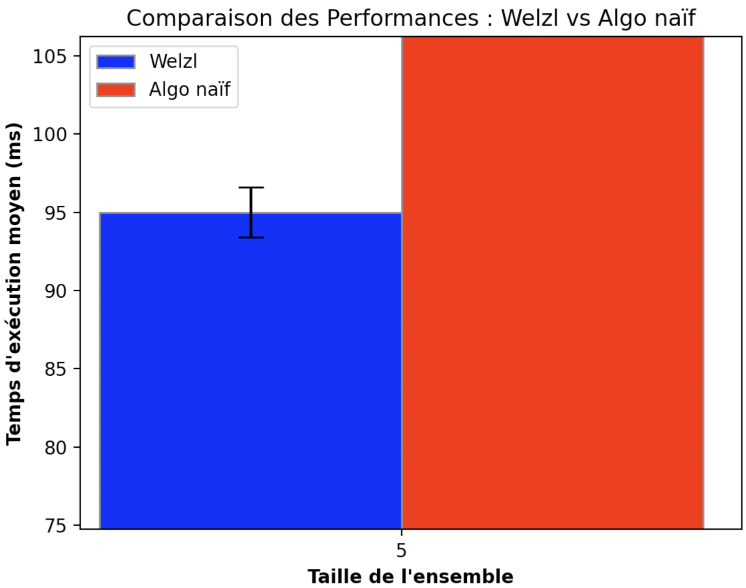

FIGURE 7 – Comparaison des performances des algorithmes zoomé

6 Discussion

L'analyse théorique anticipait une moindre complexité pour l'algorithme de Welzl comparé à la méthode naïve.

Concernant la comparaison des cercles minimaux obtenus par les deux algorithmes sur une même série de données, il est apparu des cas où les cercles identifiés ne concordaient pas parfaitement. Puisque le cercle minimal produit par la méthode naïve est réputé unique et précis, cela suggère que l'algorithme de Welzl ne fournit pas une exactitude infaillible dans tous les cas. Toutefois, nos évaluations empiriques ont révélé que dans la plupart des situations, les cercles déterminés par les deux procédés se superposaient avec exactitude.

Du point de vue théorique, l'approche naïve présente une complexité de $O(n^4)$ dans le pire des cas, alors que celle de l'algorithme de Welzl est de $O(n)$. Les résultats expérimentaux attestent de la supériorité marquée des performances de l'algorithme de Welzl sur celles de la méthode naïve. Cependant, l'implémentation intensive de fonctions récursives par l'algorithme de Welzl entraîne un haut niveau de consommation des appels de fonction, pouvant mener à des problèmes de dépassement de pile (*stack overflow*), surtout avec des ensembles de données importants. Il est donc conseillé d'employer l'algorithme de Welzl avec prudence pour les fichiers de grande envergure. Malgré ces limites, l'algorithme de Welzl figure parmi les solutions les plus efficaces pour adresser le problème du cercle minimal.

7 Références

Donald W. Hearn D. Jack Elzinga. The minimum covering sphere problem. 1972.

Emo Welzl. Smallest enclosing disks (balls and ellipsoids). 1991.

Varoumas.

Problème du cercle minimum (Wikipédia)