

Collectionneur de coupons

Combien d'images dois-je acheter pour finir ma collection des joueurs du FC Tours ? Ou encore, combien de temps mettrais-je pour mélanger parfaitement un jeu de cartes?



Plan

- **Simulations informatiques**
- **Modèle mathématique**
- **Comparaison entre le modèle et les simulations**

Simulation – Collectionneur de coupons

```
1 import random
2
3 tailleDeck = 20 #Taille du deck a obtenir
4 nombreTests = 100000 #Nombre de test a effectuer
5 resultats = [] #Variable contenant les differents resultats obtenus
6
7 for i in range(0, nombreTests):
8     deck = []
9     compteur = 0
10    while len(deck) < tailleDeck: #Tant que notre deck n'est pas complet
11        lance = random.randint(0,tailleDeck) #On obtient un coupon au hasard
12        if not(lance in(deck)): #Si le coupon n'est pas deja possede
13            deck.append(lance)
14            compteur += 1
15        resultats.append(compteur)
16        print(str(compteur))
17
18 moyenne = 0.0
19 for i in resultats:
20     moyenne += i
21 moyenne /= nombreTests
22 print(">> " + str(moyenne))
23
```

Simulation – Collectionneur de coupons

<div>Nombre d'images à obtenir</div> <div>Nombre de répétitions</div>	5	10	20	50	100	200	500
10	8,70	21,10	49,90	194,00	394,60	937,60	2889,10
50	8,54	22,94	57,60	177,56	433,46	1036,48	2846,40
100	8,81	22,19	54,42	175,60	419,08	967,56	2842,38
500	8,73	22,16	55,00	177,40	423,98	986,93	2923,09
1000	8,79	22,18	55,91	181,67	421,15	971,40	2907,56
5000	8,66	22,12	55,65	179,60	424,85	979,78	2895,74
10000	8,70	22,40	55,49	180,24	424,52	982,89	2896,80
50000	8,70	22,21	55,56	179,34	423,75	981,07	2902,00
100000	8,69	22,26	55,59	179,39	423,86	981,18	2901,93

Simulation – Battage de cartes

```
1 import random
2
3 nombreCartes = 54 #Nombre de cartes dans le paquet
4 cartes = [] #Variable contenant le jeu de cartes
5 results = [] #Variable contenant les differents resultats obtenus
6 nombreMelanges = 10000 #Nombre de repetitions de l'operation
7 while len(results) < nombreMelanges:
8     compteur = 0
9     cartes = []
10    for i in range(nombreCartes): #Initialisation du paquet
11        cartes.append(i)
12    while cartes[-1] != 0: #Tant que la carte du dessous n'est pas au dessus
13        pos = random.randint(0, nombreCartes - 1) #Choix de la position d'insertion de la carte du dessous
14        cartes.insert(pos, cartes[-1]) #Insertion de la carte a la position choisie
15        cartes.pop(-1) #Suppression de la carte replacee du dessus du paquet
16        compteur += 1
17    results.append(compteur)
18    print(compteur)
19 moyenne = 0.0
20 for i in results:
21     moyenne += i
22 moyenne /= nombreMelanges
23 print(">> " + str(moyenne))
24
```

Simulation – Battage de cartes

Taille du paquet de cartes Nombre de répétitions	5	10	20	50	100	200	500
10	10,40	27,20	59,30	205,00	489,50	1316,30	3280,70
50	10,38	28,84	74,88	219,86	489,20	1210,62	3381,50
100	10,67	26,74	69,90	227,72	499,59	1157,74	3441,72
500	10,38	28,77	68,86	222,65	518,43	1169,59	3449,83
1000	10,46	28,41	70,87	219,19	519,82	1169,67	3397,03
5000	10,42	28,07	70,98	223,56	518,67	1171,76	3383,32
10000	10,47	28,04	70,84	223,67	518,74	1173,14	3389,48
50000	10,43	28,30	70,98	223,95	516,82	1175,32	3393,94
100000	10,42	28,31	70,92	224,05	517,94	1174,70	3393,99

Modèle mathématique

$N \rightarrow$ Taille de l'ensemble final à obtenir

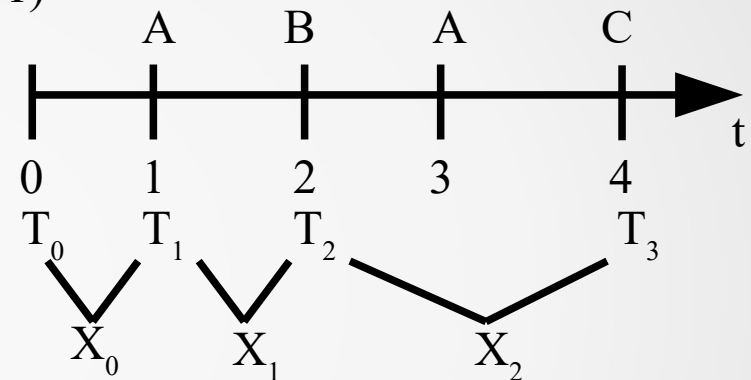
$T_i \rightarrow$ Nombre de tirages pour obtenir le i^{e} élément

$X_i \rightarrow$ Nombre de tirages entre le i^{e} nouvel élément et le $(i+1)^{\text{e}}$

$$X_i = T_{i+1} - T_i \qquad T_n = \sum_{i=0}^{N-1} X_i$$

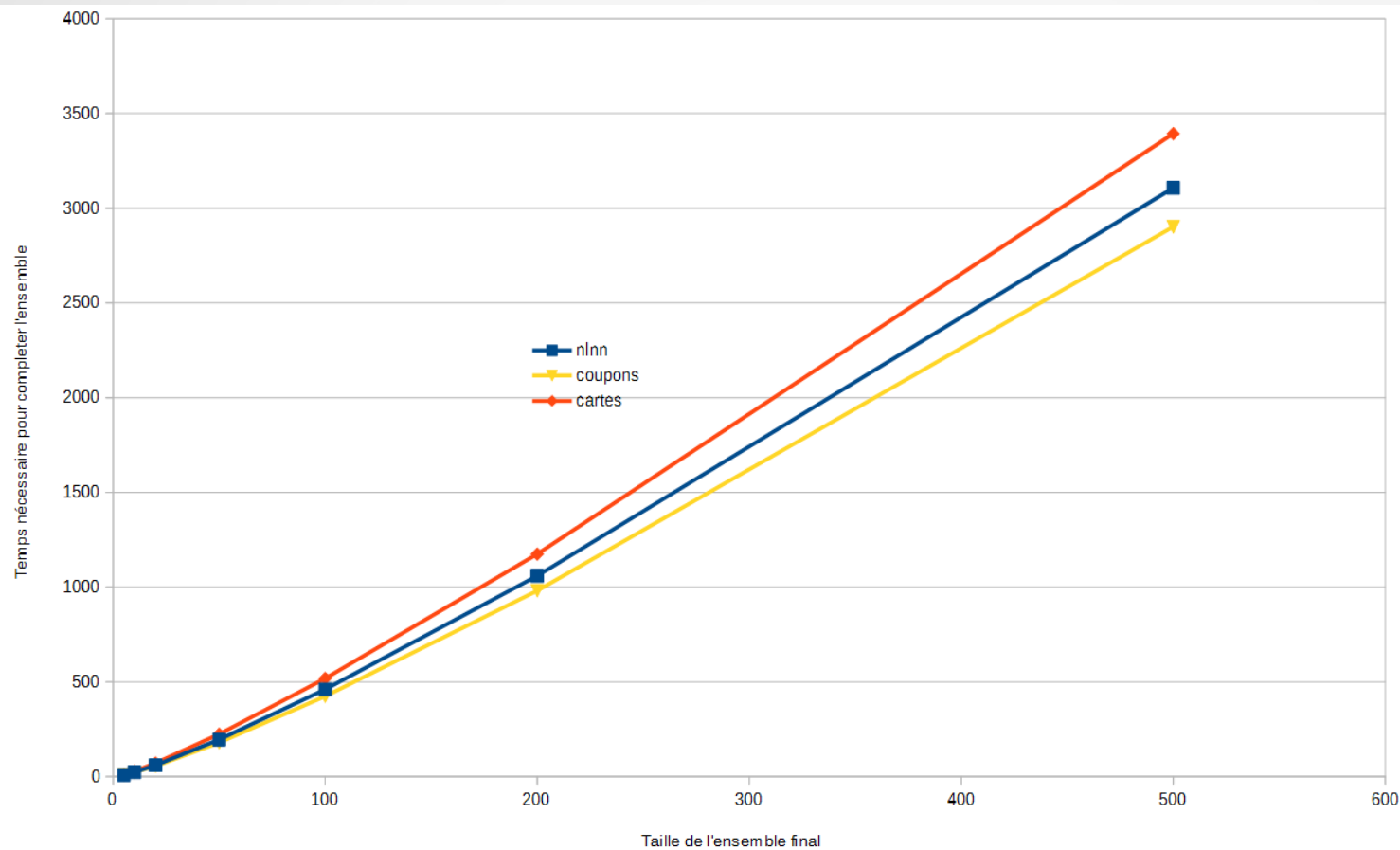
$$P(X_i) = \frac{N-i}{N}$$

Valeur « moyenne » de $X_i \rightarrow \frac{1}{\frac{N-i}{N}} = \frac{N}{N-i}$



$$T_N = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{N}{N-i} = N \times \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{N-i} = N \times \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} \approx N \times \ln(N)$$

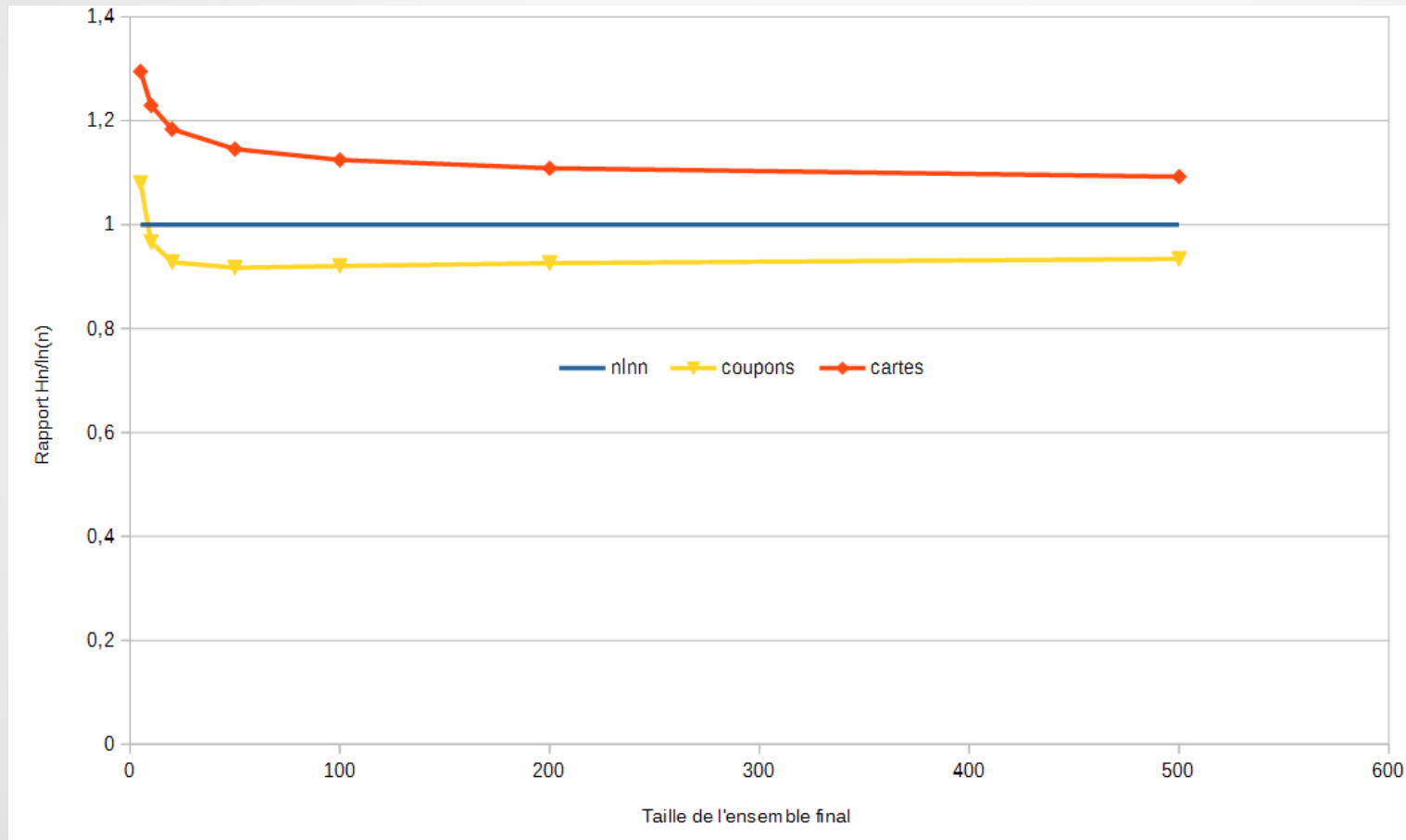
Comparaisons



Approximation de H_n par $\ln(n)$ semble erroné pour de grandes tailles d'ensembles.

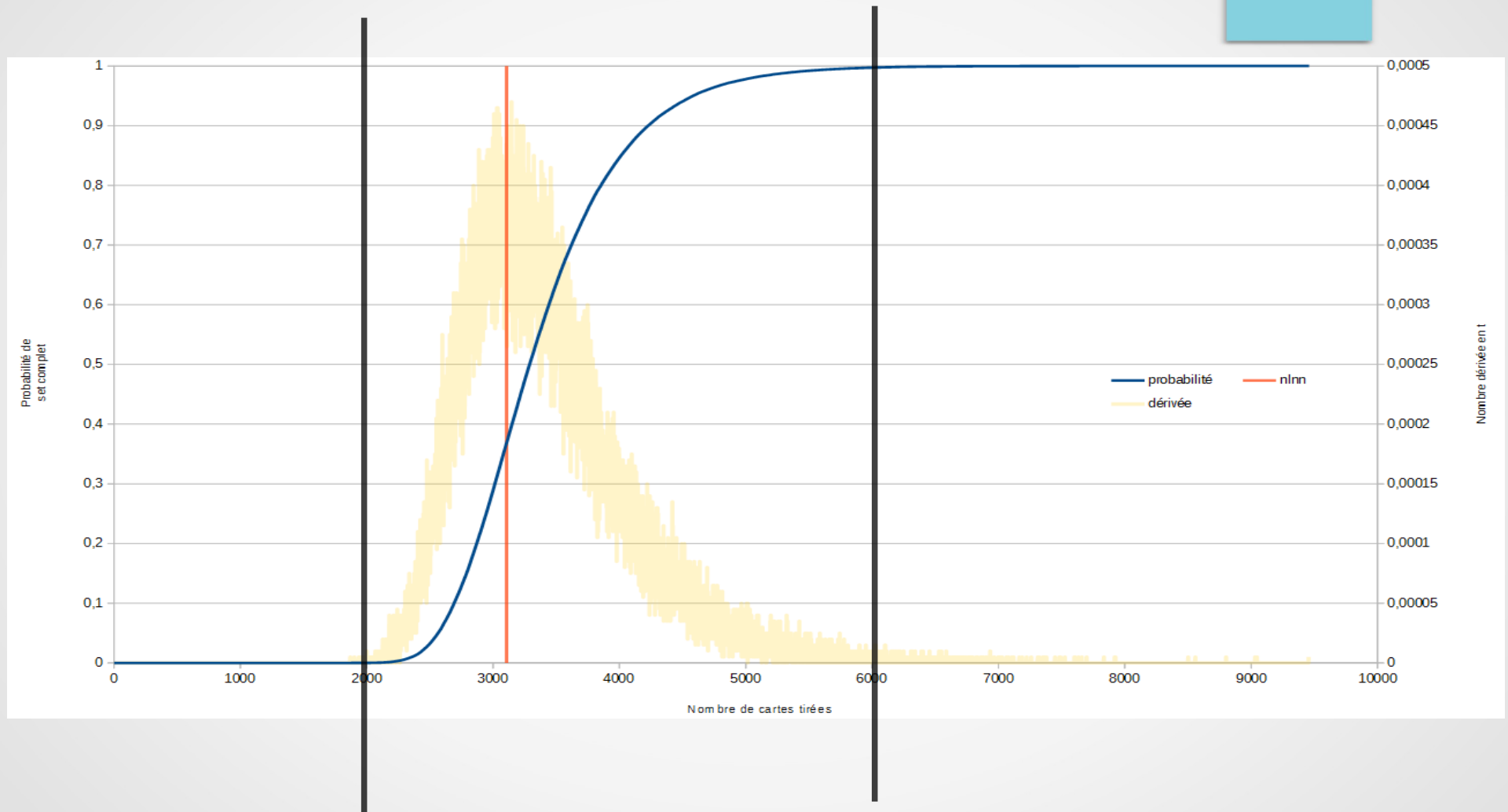
$$H_n = \ln(n) + c$$

Comparaisons



$$H_n \sim \ln(n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_N}{N \times \ln(N)} = 1$$

Comparaisons



Conclusion

Estimation du temps nécessaire pour le collectionneur de coupons : $n \times \ln(n)$

Exemple des joueurs du FC de tours (23 cartes) :

$$23 \times \ln(23) \approx 72,11$$

A raison d'une carte par jour, il nous faudra deux mois et onze jours pour compléter notre collection