

## § 2.2. Практическая работа (решение задач)

### 7.2.1. Найти дифференциал функции

$$y = e^{x^3}.$$

○ Так как  $dy = y'dx$ , то в данном случае  $dy = (e^{x^3})' dx = 3x^2 \cdot e^{x^3} dx$ . ●

*Найти дифференциал функции:*

7.2.2.  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$

7.2.3.  $y = (x^3 - x) \operatorname{tg} x.$

7.2.4.  $y = x^2 \ln x.$

7.2.5.  $y = \frac{x-2}{x^2+1}.$

7.2.6. Найти приращение и дифференциал функции  $y = x^2 - 3x + 1$  в точке  $x_0 = 2$ , если  $\Delta x = 0,1$ .

○ Сначала найдем приращение  $\Delta y$  в общем виде:

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = \\ &= [(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1] - (x^2 - 3x + 1) = \\ &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1 - x^2 + 3x - 1 = \\ &= 2x\Delta x - 3\Delta x + (\Delta x)^2 = (2x - 3)\Delta x + (\Delta x)^2. \end{aligned}$$

Из полученного выражения для приращения  $\Delta y$  видно, что его линейная часть в произвольной точке  $x_0$  равна  $(2x_0 - 3)\Delta x$ . Тогда по определению дифференциал данной функции будет равен  $dy = (2x - 3)\Delta x$ , или, в более привычной записи,  $dy = (2x - 3)dx$ .

Второе слагаемое в полученной записи для  $\Delta y$ , т.е.  $(\Delta x)^2$ , есть бесконечно малая более высокого порядка, чем первое слагаемое.

Заметим, что можно найти  $dy$  и сразу (без вычисления  $\Delta y$ ) по формуле  $dy = y'dx$ , откуда  $dy = (x^2 - 3x + 1)'dx = (2x - 3)dx$ .

Теперь найдем  $\Delta y$  и  $dy$  в точке  $x_0 = 2$ , если  $\Delta x = 0,1$ :

$$\Delta y = (2 \cdot 2 - 3) \cdot 0,1 + (0,1)^2 = 0,1 + 0,01 = 0,11, \quad dy = 0,1. \quad \bullet$$

*Найти приращение и дифференциал функции  $y = y(x)$  в общем виде, а также в точке  $x_0$ , если известно  $\Delta x$ :*

7.2.7.  $y = x^3 + 2x, x_0 = 1, \Delta x = 0,01.$

7.2.8.  $y = x^2 + x - 5, x_0 = 0, \Delta x = 0,5.$

7.2.9. Вычислить приближенно:

1)  $\ln 1,02;$

2)  $\sqrt{24}.$

○ 1) Воспользуемся приближенной формулой

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Тогда, подставляя  $f(x) = \ln x$ , получим

$$\ln(x_0 + \Delta x) \approx \ln x_0 + \frac{1}{x_0} \cdot \Delta x.$$

Полагая здесь  $x_0 = 1, \Delta x = 0,02$ , найдем

$$\ln 1,02 \approx \ln 1 + \frac{1}{1} \cdot 0,02 = 0,02.$$

Таким образом,  $\ln 1,02 \approx 0,02.$

2) Учитывая, что  $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 25, \Delta x = -1$ , получим

$$\sqrt{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x, \quad \text{т. е.}$$

$$\sqrt{24} \approx \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}} \cdot (-1) = 4,9.$$

Окончательно  $\sqrt{24} \approx 4,9.$

Вычислить приближенно:

7.2.10.  $\sqrt[3]{26}.$

7.2.11.  $\operatorname{tg} 44^\circ.$

7.2.12.  $(1,02)^5.$

7.2.13. Найти  $dy, d^2y$  и  $d^3y$  для функции  $y = \sqrt[3]{x}.$

○ Поскольку

$$dy = y' dx = (\sqrt[3]{x})' dx = \frac{1}{3} x^{-2/3} dx = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

то

$$\begin{aligned}d^2y &= d(dy) = d\left(\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) = \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)' (dx)^2 = \\&= \frac{1}{3}(x^{-2/3})' dx = -\frac{2}{9}x^{-5/3}dx^2 = -\frac{2dx^2}{9x\sqrt[3]{x^2}}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}d^3y &= d(d^2y) = d\left(-\frac{2}{9}\frac{dx^2}{x^{5/3}}\right) = -\frac{2}{9}(x^{-5/3})' dx^3 = \\&= \frac{10}{27}x^{-8/3}dx^3 = \frac{10dx^3}{27x^2\sqrt[3]{x^2}}.\end{aligned}$$

То же самое можно было найти иначе, предварительно отыскав производные  $y'$ ,  $y''$  и  $y'''$ , а затем воспользоваться формулами:  $d^2y = y''dx^2$ ,  $d^3y = y'''dx^3$ . ●

Найти  $dy$  и  $d^2y$ :

**7.2.14.**  $y = (x^2 + 1)^3$ .

**7.2.15.**  $y = \sin^2 x$ .

Ответы

**7.2.2.**  $dy = \frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}} \cdot dx$ . **7.2.3.**  $dy = \left[(3x-1) \cdot \operatorname{tg} x + \frac{x^3-x}{\cos^2 x}\right] dx$ .

**7.2.4.**  $dy = x(2\ln x + 1) dx$ . **7.2.5.**  $dy = \frac{-x^2 + 4x + 1}{(x^2 + 1)^2} dx$ .

**7.2.7.**  $\Delta y = (3x^2 + 2)\Delta x + (3x + \Delta x)(\Delta x)^2$ ,  $\Delta y = 0,050301$  в точке  $x_0 = 1$  и при  $\Delta x = 0,01$ ;  $dy = (3x^2 + 2) dx$ ,  $dy = 0,05$  в точке  $x_0 = 1$  и при  $\Delta x = 0,01$ .

**7.2.8.**  $\Delta y = (2x + 1)\Delta x + (\Delta x)^2$ ,  $\Delta y = 0,75$  в точке  $x_0 = 0$  и при  $\Delta x = 0,5$ ;  $dy = (2x + 1) dx$ ,  $dy = 0,5$  в точке  $x_0 = 0$  и при  $\Delta x = 0,5$ . **7.2.10.** 2,96.

**7.2.11.** 0,965. **7.2.12.** 1,1. **7.2.14.**  $dy = 6x(x^2 + 1)^2 dx$ ,

$d^2y = 6(5x^2 + 1)(x^2 + 1)dx^2$ . **7.2.15.**  $dy = \sin 2x dx$ ,  $d^2y = 2 \cos 2x dx^2$ .