§ 1. Неопределённый интеграл. Важнейшие свойства интегрирования

§ 1.1. Теоретический материал

Первообразная функция

⇛ Пусть функция $f(x)$ определена на некотором (конечном или бесконечном) интервале (a,b). Тогда функция $F(x)$ называется *первообра́зной* для функции $f(x)$ на интервале (a,b), если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a,b)$[3].

Если $F(x)$ — первообразная функция для функции $f(x)$, то функция $F(x)+C$, где C — некоторая постоянная, также первообразная для функции $f(x)$. Кроме того, если $F(x)$ и $G(x)$ — две первообразные для функции $f(x)$, то они отличаются на некоторую постоянную, т. е. существует такое число $C \in R$, что $F(x) - G(x) = C$.

Таким образом, зная только одну первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$, мы без труда находим и множество всех первообразных для этой функции, которое совпадает с множеством функций вида $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная.

Если функция $f(x)$ непрерывна на данном интервале, то у нее существует первообразная на этом интервале.

[3] В дальнейшем указание интервала (a,b) будем опускать.

Неопределённый интеграл

⇛ Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$.

Обозначения: $\int f(x)\,dx$ (читается так: «интеграл эф от икс дэ икс»).

Таким образом, если $F(x)$ — какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

(в правой части последнего равенства более правильно было бы написать $\{F(x)+C\}$, поскольку речь идет о множестве всех первообразных, но фигурные скобки, обозначающие множество, обычно не пишут).

Знак $\int$ называется *интегралом*, функция $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, а $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*.

⇛ Операция нахождения неопределенного интеграла от данной функции называется *интегрированием* этой функции.

Интегрирование — операция, обратная операции дифференцирования (т. е. операции, заключающейся в нахождении производной от данной функции). У всякой непрерывной на данном интервале функции существует неопределенный интеграл.

Основные свойства неопределённого интеграла

Везде далее предлагается, что все рассматриваемые неопределенные интегралы существуют.

1. $\int dF(x) = F(x) + C$.

2. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$.

3. $\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$, где $\alpha \neq 0$,

т. е. *постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла.*

4. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$,

т. е. *неопределенный интеграл от суммы функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций.*

5. Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \text{ где } a \neq 0.$$

Таблица простейших интегралов

Следующие интегралы обычно называются *табличными интегралами*:

1. $\int 0 \cdot dx = C$.

2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ (\alpha \neq -1)$.

В частности, $\int 1 \cdot dx = x + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$, $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$.

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

В частности, $\int e^x\,dx = e^x + C$.

5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.

6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

9. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$, $(a \neq 0)$.

В частности, $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$, $(a > 0)$.

В частности, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

11. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$, $(a > 0)$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right| + C$.

Иногда к этому списку добавляют еще несколько интегралов:

13. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$.

14. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$.

15. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C$.

16. $\operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C$.

17. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$.

18. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

Интегралы, получающиеся из табличных линейным сдвигом аргумента (т. е. интегралы вида $\int \cos 3x\, dx$, $\int \frac{dx}{4x-5}$, $\int e^{7x+1}dx, \ldots$) будем называть *почти табличными интегралами.*

Примеры

8.1.1. Используя таблицу, найти следующие интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x^3}$;

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$;

3) $\int 2^x\, dx$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}}$.

1) Воспользуемся табличным интегралом 2 ($\alpha = -3$):

$$\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}\, dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

2) Аналогично находим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \int x^{-\frac{3}{2}}\, dx =$$

$$= \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

3) Используя табличный интеграл 4 ($a = 2$), находим:

$$\int 2^x\, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

4) Подставляя $a = \sqrt{5}$ в табличный интеграл 10, получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

5) Воспользуемся табличным интегралом 12 ($\alpha = -7$):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 7}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - 7}| + C.$$

●

8.1.8. Используя таблицу и основные свойства неопределенного интеграла, найти интеграл:

1) $\int \left(3 \cdot 5^x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 7\right) dx$; **2)** $\int \frac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt{x}}\, dx$.

❍ 1) Воспользуемся свойствами 3 и 4 неопределенного интеграла:

$$\int \left(3 \cdot 5^x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 7\right) dx = \int 3 \cdot 5^x\, dx - \int \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\, dx + \int 7\, dx =$$

$$= 3\int 5^x\, dx - 2\int x^{-\frac{1}{3}}\, dx + 7\int dx = \frac{3 \cdot 5^x}{\ln a} - 2 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + 7x + C =$$

$$= \frac{3 \cdot 5^x}{\ln a} - 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} + 7x + C.$$

2) Почленно поделим числитель подынтегральной дроби на знаменатель: $\frac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}}$. Отсюда

$$\int \frac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt{x}}\, dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}}\right) dx =$$

$$= \int x^{\frac{3}{2}}\, dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}\, dx + 5\int x^{-\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 3 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 5 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + 10x^{\frac{1}{2}} + C. \quad \bullet$$

8.1.15. Найти «почти табличный» интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}}.$$

❍ Поскольку $\sqrt{16 - 9x^2} = \sqrt{16 - (3x)^2}$, то данный интеграл отличается от табличного $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$ заменой x на $3x$. Поэтому в соответствии со свойством 5 интеграла имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{4} + C.$$

●

8.1.22. Найти интегралы:

1) $\int \sin^2 x \, dx$; **2)** $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$.

❍ 1) Воспользуемся формулой понижения степени: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. Отсюда

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos 2x \, dx\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

2) Преобразуем подынтегральную дробь:

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{(x^2+1) - 1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}.$$

Отсюда имеем

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx =$$

$$= \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \operatorname{arctg} x + C. \quad \bullet$$