

## § 3. Неопределённый интеграл. Интегрирование рациональных дробей

### § 3.1. Теоретический материал

#### Правильные и неправильные дроби

⇒ Рациональной дробью называется выражение вида  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , где  $P(x)$  и  $Q(x)$  — многочлены.

⇒ Рациональная дробь  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  называется *правильной*, если степень многочлена  $P(x)$  в ее числителе меньше степени многочлена  $Q(x)$  в знаменателе. В противном случае дробь называется *неправильной*.

Всякая неправильная рациональная дробь  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  с помощью деления числителя на знаменатель приводится к виду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_0(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \text{ где}$$

$P_0(x)$  — многочлен (целая часть при делении), а  $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$  — правильная рациональная дробь (остаток).

$$\text{Поэтому } \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int P_0(x) dx + \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} dx.$$

Так как интеграл  $\int P_0(x) dx$  вычисляется элементарно (сводится к сумме табличных), то интегрирование неправильной дроби сводится к интегрированию правильной дроби. Интегрирование правильной рациональной дроби сводится, в свою очередь, к интегрированию простейших дробей.

#### Разложение правильной дроби на простейшие

⇒ Правильные дроби следующих четырех типов называются *простейшими* (или *элементарными*) *дробями*:

I.  $\frac{A}{x-a};$

II.  $\frac{A}{(x-a)^k} \quad (k = 2, 3, 4, \dots);$

III.  $\frac{Ax+B}{x^2+px+q};$

IV.  $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$

При этом предполагается, что  $A, B, p, q$  — действительные числа, а квадратный трехчлен  $x^2 + px + q$  в дробях III и IV типов не имеет действительных корней (т. е.  $p^2 - 4q < 0$ ).

Каждая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей указанных четырех типов. А именно:

если знаменатель данной правильной дроби  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  разложен на неповторяющиеся линейные и квадратные множители

$$Q(x) = (x - a_1)^{k_1} \cdot (x - a_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - a_n)^{k_n} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{r_1} \cdot \dots \times \\ \times (x^2 + p_mx + q_m)^{r_m},$$

где  $k_1, k_2, \dots, k_n, r_1, r_2, \dots, r_m$  — натуральные числа, то эту дробь можно представить в виде следующей суммы простейших:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - a_1)^{k_1}} + \frac{A_2}{(x - a_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - a_1)} + \dots + \frac{B_1x + C_1}{(x^2 + p_1x + q_1)^{r_1}} + \\ + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^{r_1-1}} + \dots + \frac{B_{r_1}x + C_{r_1}}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots \quad (3.1)$$

Коэффициенты  $A_1, A_2, \dots, B_1, C_1, \dots, B_{r_1}, C_{r_1}, \dots$  в разложении (3.1) находятся с помощью *метода неопределенных коэффициентов* или *метода частных значений* (см. решение задачи 8.3.12.). Отметим, что общее число этих коэффициентов равно степени многочлена  $Q(x)$ .

Таким образом, интегрируя правильную дробь, мы сначала раскладываем ее на сумму простейших, а затем интегрируем каждое слагаемое в этом разложении.

Вычисляя интегралы от простейших дробей, надо иметь в виду, что:

1) Простейшие дроби первых двух типов — почти табличные:

$$\int \frac{A}{x - a} dx = A \cdot \ln |x - a| + C, \\ \int \frac{A}{(x - a)^k} dx = \frac{A}{1 - k} \cdot \frac{1}{(x - a)^{k-1}} + C, \quad k \neq 1;$$

2) При интегрировании простейшей дроби третьего типа  $\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$ , где  $p^2 - 4q < 0$ , сначала выделяют в числителе производную знаменателя, т. е.  $2x + p$ :

$$Ax + B = \frac{A}{2} \cdot (2x + p) + B - \frac{Ap}{2}.$$

Отсюда

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{\frac{A}{2} \cdot (2x + p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2 + px + q} dx = \\ = \frac{A}{2} \int \frac{(2x + p)dx}{x^2 + px + q} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2 + px + q}.$$

В первом из полученных интегралов делаем замену  $t = x^2 + px + q$ , откуда  $dt = (2x + p)dx$  и

$$\int \frac{(2x + p)dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(x^2 + px + q) + C.$$

Во втором интеграле сначала выделяем полный квадрат в знаменателе подынтегральной дроби, а потом делаем подходящую линейную подстановку:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + px + q} &= \left[ y = x + \frac{p}{2} \Rightarrow dy = dx \right] = \\ &= \int \frac{dy}{y^2 + a^2} = \left[ a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \right] = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \cdot \ln(x^2 + px + q) + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C.$$

3) Если требуется проинтегрировать простейшую дробь четвертого типа  $\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n}$ , где  $n = 2, 3, 4, \dots$  и  $p^2 - 4q < 0$ , то сначала, как и в пункте 2, в числителе дроби производная от квадратного трехчлена в знаменателе, откуда

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x + p) + (B - \frac{Ap}{2})}{(x^2 + px + q)^n} dx = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} dx + \left( B - \frac{Ap}{2} \right) \cdot \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n} = \\ &= [t = x^2 + px + q] = \frac{A}{2} \int \frac{dt}{t^n} + \left( B - \frac{Ap}{2} \right) \cdot \int \frac{dx}{[(x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})]^n} = \\ &= \left[ y = x + \frac{p}{2} \right] = \frac{A}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \left( B - \frac{Ap}{2} \right) \cdot \int \frac{dy}{(y^2 + a^2)^n}, \end{aligned}$$

где  $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ . Последний интеграл считается с помощью рекуррентной формулы, позволяющей свести его к более простому интегралу  $\int \frac{dy}{(y^2 + a^2)^{n-1}}$ :

$$\int \frac{dy}{(y^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2} \cdot \frac{y}{(y^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \int \frac{dy}{(y^2 + a^2)^{n-1}}.$$

Далее к интегралу  $\int \frac{dy}{(y^2 + a^2)^{n-1}}$  снова применяется рекуррентная формула, понижающая степень знаменателя подынтегральной дроби, и так далее, пока не получится табличный интеграл  $\int \frac{dy}{y^2 + a^2}$ .

**8.3.1.** Найти интеграл  $\int \frac{6x - 7}{x^2 + 4x + 13} dx$ .

○ Дискриминант квадратного трехчлена в знаменателе подынтегральной дроби отрицателен, поэтому данная дробь — простейшая третьего типа.

Сначала найдем производную знаменателя дроби:

$$(x^2 + 4x + 13)' = 2x + 4.$$

Затем выделим производную знаменателя в числителе дроби:

$$6x - 7 = 3(2x + 4) - 19.$$

Отсюда, учитывая, что  $x^2 + 4x + 13 = (x + 2)^2 + 9$ , имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{6x - 7}{x^2 + 4x + 13} dx &= \int \frac{3(2x + 4) - 19}{x^2 + 4x + 13} dx = \\ &= 3 \int \frac{(2x + 4) dx}{x^2 + 4x + 13} - 19 \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 9} = \\ &= \left[ \begin{array}{ll} t = x^2 + 4x + 13, & y = x + 2, \\ dt = (2x + 4) dx & dy = dx \end{array} \right] = \\ &= 3 \int \frac{dt}{t} - 19 \int \frac{dy}{y^2 + 3^2} = 3 \ln |t| - \frac{19}{3} \operatorname{arctg} \frac{y}{3} + C = \\ &= 3 \ln(x^2 + 4x + 13) - \frac{19}{3} \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{3} + C. \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем, что  $x^2 + 4x + 13 > 0$  ( $\forall x$ ) и, стало быть,  $|x^2 + 4x + 13| = x^2 + 4x + 13$ . ●

**8.3.8.** Найти интеграл  $\int \frac{8x + 5}{(x^2 - 2x + 17)^2} dx$ .

○ Поскольку дискриминант квадратного трехчлена в знаменателе подынтегральной дроби отрицателен, то эта дробь — простейшая четвертого типа. Выделим производную этого трехчлена в числителе дроби:

$$8x + 5 = 4(2x - 2) + 13.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int \frac{8x + 5}{(x^2 - 2x + 17)^2} dx &= \\ &= 4 \int \frac{(2x - 2) dx}{(x^2 - 2x + 17)^2} + 13 \int \frac{dx}{[(x - 1)^2 + 16]^2} = \end{aligned}$$

$$= \left[ \begin{array}{l} t = x^2 - 2x + 17, \\ dt = (2x - 2) dx \end{array} \quad \begin{array}{l} y = x - 1, \\ dy = dx \end{array} \right] =$$

$$= 4 \int \frac{dt}{t^2} + 13 \int \frac{dy}{[y^2 + 16]^2} = -\frac{4}{x^2 - 2x + 17} + 13 \int \frac{dy}{(y^2 + 16)^2}.$$

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся рекуррентной формулой при  $n = 2$ ,  $a^2 = 16$ . Тогда

$$\int \frac{dy}{(y^2 + 16)^2} = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 16} \cdot \frac{y}{(y^2 + 16)} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dy}{y^2 + 4^2} =$$

$$= \frac{y}{32(y^2 + 16)} + \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{y}{4} + C =$$

$$= \frac{1}{32} \left( \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 17} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x - 1}{4} \right) + C.$$

Отсюда окончательно

$$\int \frac{8x + 5}{(x^2 - 2x + 17)^2} dx =$$

$$= \frac{13}{32} \left( \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 17} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x - 1}{4} \right) - \frac{4}{x^2 - 2x + 17} + C. \quad \bullet$$

**8.3.12.** Вычислить интегралы:

а)  $\int \frac{7x + 4}{(x - 3)(x + 2)} dx;$

б)  $\int \frac{x^2 + 5x - 2}{(x^2 - 1)(x + 1)} dx;$

в)  $\int \frac{x^5 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx.$

○ а) Подынтегральная дробь — правильная. Разложим ее на сумму простейших дробей первого типа:

$$\frac{7x + 4}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 2}.$$

Для того, чтобы найти неизвестные коэффициенты  $A$  и  $B$ , приведем дроби в правой части равенства к общему знаменателю, откуда

$$\frac{7x + 4}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{A(x + 2) + B(x - 3)}{(x - 3)(x + 2)},$$

т. е.

$$7x + 4 = A(x + 2) + B(x - 3). \quad (3.2)$$

Из полученного равенства можно найти коэффициенты  $A$  и  $B$  двумя способами: с помощью метода неопределенных коэффициентов или метода частных значений. Рассмотрим оба способа.

1. *Метод неопределенных коэффициентов.* Раскроем скобки в правой части равенства (3.2) и сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

$$7x + 4 = (A + B)x + (2A - 3B).$$

Так как многочлены в обеих частях полученного равенства тождественно равны, то у них должны быть равны и коэффициенты при соответствующих степенях переменной  $x$ . Сравнивая эти коэффициенты, получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} A + B = 7 \\ 2A - 3B = 4. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем  $A = 5$ ,  $B = 2$ .

2. *Метод частных значений.* Придадим неизвестной  $x$  в равенстве (3.2) частное значение  $x = 3$ . Тогда получим

$$7 \cdot 3 + 4 = A \cdot (3 + 2), \text{ т. е. } 25 = 5A,$$

откуда  $A = 5$ . Подставляя теперь в уравнение (3.2) значение  $x = -2$  (удобнее всего подставлять значения, обращающие одну или несколько скобок в правой части равенства в ноль; эти значения совпадают с действительными корнями знаменателя подынтегральной дроби), получим

$$7 \cdot (-2) + 4 = B \cdot (-2 - 3),$$

откуда  $B = 2$ .

Примечание: В двух способах получили одинаковые ответы

Таким образом,

$$\frac{7x + 4}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{5}{x - 3} + \frac{2}{x + 2}$$

и, стало быть,

$$\begin{aligned} \int \frac{7x + 4}{(x - 3)(x + 2)} dx &= 5 \int \frac{dx}{x - 3} + 2 \int \frac{dx}{x + 2} = \\ &= 5 \ln |x - 3| + 2 \ln |x + 2| + C. \end{aligned}$$

б) Подынтегральная дробь — правильная, однако ее знаменатель не до конца разложен на множители. Поэтому сначала преобразуем знаменатель:

$$(x^2 - 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)^2.$$

Отсюда

$$\frac{x^2 + 5x - 2}{(x^2 - 1)(x + 1)} = \frac{x^2 + 5x - 2}{(x - 1)(x + 1)^2}.$$

Разложим эту дробь на простейшие:

$$\frac{x^2 + 5x - 2}{(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{x + 1}.$$

Приводя к общему знаменателю и избавляясь от знаменателей, приходим к равенству

$$x^2 + 5x - 2 = A(x + 1)^2 + B(x - 1) + C(x - 1)(x + 1).$$

Для вычисления неизвестных коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $C$  воспользуемся методом частных значений.

Положим  $x = 1$ , тогда

$$1^2 + 5 \cdot 1 - 2 = A \cdot (1 + 1)^2,$$

т. е.  $4A = 4$ , откуда  $A = 1$ . Аналогично, положим  $x = -1$ . Тогда

$$(-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 2 = B \cdot (-1 - 1),$$

откуда  $B = 3$ .

Осталось найти коэффициент  $C$ . Поскольку «удобных» частных значений уже не осталось, придадим  $x$  какое-нибудь значение, приводящее к не очень громоздким подстановкам. Проще всего положить  $x = 0$ . Тогда  $-2 = A - B - C$ , откуда, с учетом найденных значений  $A$  и  $B$ , получим  $-2 = 1 - 3 - C$ , т. е.  $C = 0$ .

Итак,

$$\frac{x^2 + 5x - 2}{(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{1}{x - 1} + \frac{3}{(x + 1)^2},$$

т. е. окончательно

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 5x - 2}{(x^2 - 1)(x + 1)} dx &= \int \frac{dx}{x - 1} + 3 \cdot \int \frac{dx}{(x + 1)^2} = \\ &= \ln |x - 1| - \frac{3}{x + 1} + C. \end{aligned}$$

в) Данная подынтегральная дробь — неправильная, поэтому сначала выделим целую часть, поделив числитель на знаменатель «столбиком»:

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 - 1 & x^3 + x^2 + x \\ \hline -x^5 + & x^4 + & x^3 \\ \hline & - & x^4 - & x^3 + 0 \cdot x^2 - 1 \\ & - & x^4 - & x^3 - & x^2 \\ \hline & & & & x^2 - 1 \end{array}$$

т. е.

$$\frac{x^5 - 1}{x^3 + x^2 + x} = x^2 - x + \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx &= \int (x^2 - x) dx + \int \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \int \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx. \end{aligned}$$

Разложив на множители знаменатель полученной правильной дроби, представим ее в виде суммы простейших:

$$\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

Избавляясь от знаменателей, получим

$$x^2 - 1 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)x.$$

Сначала воспользуемся методом частных значений. Положив  $x = 0$ , найдем  $A = -1$ . Далее воспользуемся методом неопределенных коэффициентов (на практике часто приходится комбинировать оба метода). Раскроем скобки в правой части последнего равенства и приведем подобные:

$$x^2 - 1 = (A + B)x^2 + (A + C)x + A.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты при  $x^2$  и  $x$ , в левой и правой частях последнего равенства получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ A + C = 0, \end{cases}$$

откуда, учитывая, что  $A = -1$ , найдем оставшиеся коэффициенты:  $B = 2$ ,  $C = 1$ . Таким образом,

$$\frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x} = -\frac{1}{x} + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1},$$

откуда



$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx &= - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx = \\
&= [t = x^2 + x + 1 \Rightarrow dt = (2x + 1) dx] = \\
&= - \ln |x| + \int \frac{dt}{t} = - \ln |x| + \ln |t| + C = \\
&= - \ln |x| + \ln(x^2 + x + 1) + C = \ln \left| \frac{x^2 + x + 1}{x} \right| + C.
\end{aligned}$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получим окончательный ответ:

$$\int \frac{x^5 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \ln \left| \frac{x^2 + x + 1}{x} \right| + C. \quad \bullet$$