Задание 9. Синтаксис языка первого порядка

Языки, к изучению которых мы переходим служат главным видом языков математической логики. До сих пор мы строили языки таким образом, что каждый новый язык был расширением предыдущего. При каждом таком переходе мы знакомились с новыми выразительными средствами логических языков.

Языки термов —
языки атомарных формул —
языки бескванторных формул —
— это путь нами уже пройденный. Остается к языкам бескванторных формул добавить формулы, содержащие кванторы.

Учебные задачи

1. Выучить термины и их значения: *квантор всеобщности, квантор существования, формула языка первого порядка сигнатуры* S.

2. Научиться выполнять: *строить доказательство формулы языка первого порядка, узнавать формулы языка первого порядка среди других символьных цепочек.*

3. Научиться выполнять: *расставлять скобки в записях формул и исключать их по договорному правилу.*

Теоретические сведения

Алфавит языка первого порядка. Он получается добавлением к алфавиту языка бескванторных формул двух новых символов. Делается это так. Пусть $\mathrm{Log} := \mathrm{Pro} \cup \{\forall, \exists\}$. Символы $\forall$ и $\exists$ называются *квантором всеобщности* и *квантором существования* соответственно. Оба эти символа называют *кванторами*. Любой элемент из Log называется *логическим символом*, а само это множество — *множеством логических символов.*

> Определение. *Алфавит стандартного языка первого порядка* есть объединение множеств Con, Fun, Rel, Var, Log, Bra.

Сигнатура языка первого порядка, как и раньше, есть множество

$$S := \mathrm{Con} \cup \mathrm{Fun} \cup \mathrm{Rel}.$$

Определения, *терма* и *атомарной формулы языка первого порядка* такие же, как определения терма языка термов и определение атомарной формулы языка атомарных формул соответственно.

Формулы языка первого порядка. Пусть S — некотрая сигнатура языка первого порядка. Дадим определение S-формулы (т. е. формулы сигнатуры S), которую также будем называть просто формулой.

> Определение.
> (Ф1) Всякая атомарная формула есть *формула.*
> (Ф2–Ф5) Если $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ есть формулы, то слова
> $\neg\boldsymbol{A}$ $(\boldsymbol{A}\&\boldsymbol{B})$, $(\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B})$, $(\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B})$
> также есть *формулы.*
> (Ф6–Ф7) Если $\boldsymbol{A}$ есть формула, а $\boldsymbol{x}$ — предметная переменная, то слова $\forall\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}$, $\exists\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}$ также есть *формулы.*

Можно записать это определение в виде правил *исчисления формул* следующим образом:

$$\frac{}{\boldsymbol{P^n t_1 \ldots t_n}}\ (\Phi1) \qquad \frac{\boldsymbol{A}}{\neg\boldsymbol{A}}\ (\Phi2); \qquad \frac{\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B}}{(\boldsymbol{A}\&\boldsymbol{B})}\ (\Phi3); \qquad \frac{\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B}}{(\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B})}\ (\Phi4);$$

$$\frac{\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B}}{(\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B})}\ (\Phi5); \qquad \frac{\boldsymbol{A}}{\forall\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}}\ (\Phi6); \qquad \frac{\boldsymbol{A}}{\exists\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}}\ (\Phi7)\ .$$

Пример. Покажем, что слово $\forall x_1(P_1^1x_1 \to \exists x_2 P_2^2 f_1^1 x_2 c_1)$ является формулой сигнатуры $\{f_1^1, P_1^1, P_2^2\}$. Для этого, применяя схемы построения термов и формул, построим это слово.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{c_1}\,(\text{Т2})}{P_1^1c_1}\,(\Phi1) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_2}\,(\text{Т1})}{f_1^1x_2}\,(\text{Т3}) \quad \dfrac{}{c_1}\,(\text{Т2})}{P_2^2f_1^1x_2c_1}\,(\Phi1)}{\exists x_2P_2^2f_1^1x_2c_1}\,(\Phi7)}{(P_1^1c_1\to\exists x_2P_2^2f_1^1x_2c_1)}\,(\Phi5)}{\forall x_1(P_1^1x_1\to\exists x_2P_2^2f_1^1x_2c_1)}\,(\Phi6)$$

Определение. *Подформулой* S-формулы $\boldsymbol{A}$ называется подслово формулы $\boldsymbol{A}$, которое само является формулой.

Определение. Всякую формулу и всякий терм будем называть *правильным выражением* языка первого порядка.

Определение. *Логическим рангом* правильного выражения языка называется общее число вхождений в это выражение символов из Log. Логический ранг формулы $\boldsymbol{A}$ обозначается $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$.

Соглашения о записи формул в метаязыке. Для упрощения *записи формул в метаязыке* используют различные соглашения, которые, с одной стороны, позволяют сокращать количество скобок в записях, а с другой — делать записи более привычными, а потому более понятными. В дальнейшем мы будем использовать два следующих соглашения.

1) Можно опустить все, или часть из тех скобкок, которые будут восстановлены при выполнении следующей процедуры: запись просматриваем слева направо и вокруг каждого очередного вхождения знака & расставляем пару скобок так, чтобы подслово, в котором эти скобки служат началом и концом соответственно, являлось формулой, причем *возможно более длинной*; затем ту же операцию повторяем для связок $\vee$, $\to$ (именно в этом порядке!). Можно сказать, что последовательность бинарных логических символов в порядке убывания их "силы" в образовании подформул такова: &, $\vee$, $\to$; из двух вхождений одной связки "более сильно" то, которое расположено левее.

2) Атомарную формулу вида $\doteq \boldsymbol{t_1 t_2}$ мы будем иногда записывать как $\boldsymbol{t_1} \doteq \boldsymbol{t_2}$, т.е. в более привычной для глаза математика форме.

Упражнения для самостоятельного решения

Правильные выражения языка

1. Являются ли формулами стандартного языка первого порядка слова:

(а) $\forall x_1 \neg \doteq f_1^2 x_1 c_1 x_2$; (б) $\forall x_0 (P_1^2 f_1^1 \doteq x_1 x_2 \to P_1^1 x_0)$;

(в) $(\exists x_1 P_1^2 f_1^1 x_1 \to P_2^3 x_1 x_2 c_2)$; (г) $\exists x_0 \forall x_0 (P_2^2 f_2^2 x_0 c_1 \to \forall x_1 P_1^1 x_0)$.

2. В следующих словах устраните опечатки (замените, вставьте или удалите минимальное число знаков) так, чтобы полученные слова стали формулами стандартного языка первого порядка:

(а) $(\exists x_0 (\forall P_1^2 f_0^1 x_0 x_1 \to P_1^2 x_0 x_0)$; (б) $(\forall x_1 \exists f_0^1 P_1^1 f_0^1 x_1 \& P_2^2 f_0^1 x_1))$;

(в) $\forall x_0 P_1^2 x_0 \to P_1^2 x_0 c_0)$; (г) $\forall x_1 f_1^2 x_0 c_0 \to \exists x_0 P_2^1 x_0 \& P_1 x_0 x_1))$;

(д) $(\exists x_1 P_1 c_0 c_0 \vee \forall c_0 \exists x_1 P_1^2 c_0 x_1 \to P_2^1 x_0)$.

Записи формул в метаязыке

3. Восстановите скобки в записях формул:

(а) $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 P_1^1 x_1 \vee \exists x_2 \neg \forall x_3 P_1^2 x_3 x_2$;

(б) $\forall x_2 \neg P_1^1 x_2 \to P_2^3 x_1 x_2 x_3 \vee \forall x_1 P_2^1 x_1$;

(в) $\neg \forall x_1 P_1^1 x_1 \to \exists x_2 P_2^1 x_2 \to \exists x_1 P_1^2 x_1 c_2 \& P_1^1 c_2$;

(г) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 P_1^1 x_1 \to P_2^1 c_3 \& \neg P_1^1 x_4 \vee \exists x_1 P_1^1 x_1 \to \forall x_0 P_2^1 x_0$;

(д) $\exists x_1 P_1^1 x_1 \to \forall x_2 P_2^1 x_2 \& \forall x_2 P_1^1 x_2 \vee \exists x_2 \neg \forall x_3 P_1^2 x_3 x_2 \& P_3^1 c_1 \to \exists x_3 P_4^1 x_3 \vee \forall x_3 P_2^2 x_1 x_3$.

4. Опустите скобки в следующих формулах:

(а) $((\exists x_1 P_1^1 x_1 \vee \exists x_2 \forall x_3 P_2^2 x_3 x_2) \vee \neg\neg \forall x_3 P_1^1 x_3)$;

(б) $(\forall x_3 ((P_2^1 x_3 \to \forall x_1 \neg P_1^1 x_1) \to P_2^1 x_3) \to \exists x_1 \neg P_3^1 x_1)$;

(в) $\forall x_1 (\forall x_3 (\forall x_3 (P_2^1 x_3 \& \neg P_1^1 x_1) \to (P_2^1 x_3 \& \neg P_1^1 x_1)))$;

(г) $(((\exists x_1 P_2^1 x_3 \& \forall x_3 \neg P_1^1 x_1) \vee (P_2^1 x_3 \& \neg \forall x_3 P_1^1 x_3)) \vee P_2^1 x_4)$.

5. Придумайте формулу, в которую имеют вхождения все логические символы, и никакие скобки в записи которой (кроме самых внешних) нельзя удалить.

Упражнения 10. Свободные и связанные переменные

Все переменные, входящие в термы и бескванторные формулы являются свободными. Понятие связанной переменной, присущее формулам с кванторами, аналогично понятию *локальной переменной* в программировании.

Учебные задачи

1. Выучить термины и их значения: *область действия вхождения квантора в формулу*, *свободное вхождение переменной в формулу, связанное вхождение переменной в формулу*, *свободная переменная в данной формулы* , *связанная переменная данной формулы*.

2. Научиться выполнять: *определять область действия вхождения данного квантора в данную формулу*, *определять свободные вхожения переменных в данную формулу, связанные вхождения переменных в данную формулу*, *свободные переменные данной формулы*, и *связанные переменные данной формулы* .