Тема 6. Функции и пределы

Содержание

6.2. Последовательности и их свойства

6.2.1. Определение последовательности

⇛ Пусть каждому натуральному числу n (т. е. $n = 1, 2, 3, \ldots$) по некоторому закону поставлено в соответствие единственное действительное число x_n. В этом случае говорят, что задана *последовательность*: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ будем обозначать $\{x_n\}$.

⇛ Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ в последовательности $\{x_n\}$ называются *членами* последовательности; x_1 — 1-м членом последовательности, x_2 — 2-м членом последовательности, …, x_n — n-м (энным) или *общим членом* последовательности.

⇛ Формулы, позволяющие выразить n-й член последовательности через предыдущие члены, называются *рекуррентными*.

6.2.2. Свойства последовательностей

⇛ Последовательность, все члены которой равны одному и тому же числу, называется *постоянной*.

Таким образом, для постоянной последовательности $\{x_n\}$ имеем: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \ldots$.

⇛ Последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей (невозрастающей), если $\forall n$: $x_n \leqslant x_{n+1}$, т. е. $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots$ (соответственно, $\forall n$: $x_n \geqslant x_{n+1}$, т. е. $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \ldots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \ldots$).

Невозрастающие и неубывающие последовательности объединяют общим термином — *монотонные* последовательности.

⇛ Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если $\forall n$: $x_n < x_{n+1}$, т. е. $x_1 < x_2 \cdots < x_n < x_{n+1} \ldots$ (соответственно, $\forall n$: $x_n > x_{n+1}$, т. е. $x_1 > x_2 > \cdots > x_n > x_{n+1} > \ldots$)

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим названием — *строго монотонные* последовательности.

⇒ Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху* (*ограниченной снизу*), если существует такое число M, что все члены последовательности меньше (соответственно, больше), чем M.

Последовательность, ограниченная сверху и снизу одновременно, называется *ограниченной*.

Это определение равносильно следующему: последовательность $\{x_n\}$ ограничена, если существует такое число $M > 0$, что для всех n справедливо неравенство $|x_n| < M$.

⇒ Последовательность $\{x_n\}$ называется *неограниченной*, если для любого $M > 0$ найдется такой ее член x_n, что $|x_n| > M$.

6.2.3. Действия над последовательностями

⇒ Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две произвольные последовательности. *Суммой* (*разностью*) последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называется последовательность, каждый член которой есть сумма (соответственно, разность) соответствующих членов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Таким образом, $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$.

Аналогично определяется произведение и частное двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, причем в случае частного, разумеется, предполагается, что $y_n \neq 0, \forall n$.

Другими словами, для того, чтобы сложить, вычесть, умножить или разделить две данные последовательности, надо сложить, вычесть, умножить или разделить их соответствующие члены.

Частным случаем операции умножения последовательностей (если одна из последовательностей постоянна) является операция умножения последовательности на число: для того, чтобы умножить последовательность $\{x_n\}$ на число x, необходимо каждый член этой последовательности умножить на α, т. е. $\alpha \cdot \{x_n\} = \{\alpha \cdot x_n\}$.