

## § 7. Определённый интеграл. Несобственные интегралы

### § 7.1. Теоретический материал

#### Интегралы с бесконечными пределами (I рода)

Пусть функция  $y = f(x)$  интегрируема на любом отрезке  $[a, b]$ . Тогда несобственные интегралы с бесконечными пределами (или I рода) определяются следующим образом:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (2.1)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx,$$

где  $c$  — произвольное число (обычно  $c = 0$ ).

⇒ Несобственные интегралы I рода называются *сходящимися*, если существуют конечные пределы, стоящие в правых частях равенств (2.1). Если же указанные пределы не существуют или бесконечны, то несобственные интегралы называются *расходящимися*.

Вот некоторые *признаки сходимости и расходимости* несобственных интегралов I рода:

1. Если на промежутке  $[a; +\infty)$  непрерывные функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  удовлетворяют условию  $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ , то из сходимости интеграла  $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$  следует сходимость интеграла  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ , а из расходимости интеграла  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  следует расходимость интеграла  $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$  («признак сравнения»).

2. Если при  $x \in [a; +\infty)$ ,  $f(x) > 0$ ,  $\varphi(x) > 0$  и существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k \neq 0$ , то интегралы  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  и  $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$  сходятся или расходятся одновременно, («предельный признак сравнения»).

3. Если сходится интеграл  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ , то сходится и интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ , который в этом случае называется *абсолютно сходящимся*.

## Интегралы от неограниченных функций (II рода)

Если функция  $y = f(x)$  непрерывна в промежутке  $[a; b)$  и имеет *разрыв II-го рода* (см. Главу 6, § 5) при  $x = b$ , то несобственный интеграл от неограниченной функции (II рода) определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (2.2)$$

$\Rightarrow$  Если предел, стоящий в правой части равенства (2.2), существует, то несобственный интеграл II рода называется *сходящимся*; в противном случае — *расходящимся*.

Аналогично, если функция  $y = \gamma(x)$  терпит *бесконечный разрыв* в точке  $x = a$ , то полагают

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx. \quad (2.3)$$

Если функция  $y = f(x)$  терпит *разрыв II-го рода во внутренней точке*  $c \in [a; b]$ , то несобственный интеграл второго рода определяется формулой

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (2.4)$$

В этом случае интеграл называется *сходящимся*, если оба несобственных интеграла, стоящих справа, сходятся.

Приведем некоторые *признаки сходимости и расходимости* для несобственных интегралов второго рода.

1. Если на промежутке  $[a; b)$  функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  непрерывны, при  $x = b$  терпят разрыв II-го рода и удовлетворяют условию  $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ ,

то из сходимости интеграла  $\int_a^b \varphi(x) dx$  следует сходимость интеграла  $\int_a^b f(x) dx$ , а из расходимости интеграла  $\int_a^b \varphi(x) dx$  следует расходимость интеграла  $\int_a^b f(x) dx$  («признак сравнения»).

2) Пусть функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  непрерывны на промежутке  $[a; b)$  и в точке  $x = b$  терпят разрыв II-го рода. Если существует предел

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k, 0 < k < \infty$ , то интегралы  $\int_a^b f(x) dx$  и  $\int_a^b \varphi(x) dx$  сходятся

или расходятся одновременно («предельный признак сравнения»).

3) Если функция  $f(x)$ , знакопеременная на отрезке  $[a; b]$ , имеет разрыв в точке  $x = b$ , и несобственный интеграл  $\int_a^b |f(x)| dx$  сходится, то сходится и интеграл  $\int_a^b f(x) dx$ .

*Замечание.* В качестве эталона для сравнения функций часто берут функцию  $\varphi(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$ . Можно показать, что несобственный интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0) \quad \begin{array}{l} \text{сходится при } \alpha < 1 \text{ и} \\ \text{расходится при } \alpha \geq 1. \end{array} \quad (2.5)$$

Это же относится и к интегралам  $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ .

## Примеры

**9.2.1.** Вычислить несобственный интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  или установить его расходимость.

○ По определению несобственного интеграла I рода (2.1) имеем

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{b} \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1} \right) = 1, \end{aligned}$$

интеграл сходится и его величина равна 1.

*Замечание.* Можно показать, что интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ , сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ . ●

9.2.6. Исследовать сходимость несобственного интеграла  $\int_{-\infty}^0 x \cos x \, dx$ .

○ По определению несобственного интеграла I рода

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 x \cos x \, dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x \cos x \, dx = \\ &= \left[ \begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos x \, dx \end{array} \middle| \begin{array}{l} du = dx \\ v = \sin x \end{array} \right] = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( x \sin x \Big|_a^0 + \cos x \Big|_a^0 \right) = \\ &= 0 - \lim_{a \rightarrow -\infty} a \sin a + 1 - \lim_{a \rightarrow -\infty} \cos a, \end{aligned}$$

интеграл расходится, т. к.  $\lim_{a \rightarrow -\infty} a \sin a$ ,  $\lim_{a \rightarrow -\infty} \cos a$  не существуют (задача 6.4.125). ●

9.2.8. Вычислить несобственный интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ .

○ Подынтегральная функция  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  определена и непрерывна на всей числовой оси. Кроме того, она является четной. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) \, dx.$$

Исходя из определения несобственного интеграла (2.1), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^a = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

интеграл сходится. Следовательно, исходный интеграл также сходится и равен  $\pi$ . ●

9.2.10. Исследовать на сходимость интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ .

○ Здесь  $f(x) = \frac{x+2}{x^{\frac{2}{3}}} > 0$  при  $x \in [1; +\infty)$ , при этом  $\frac{x+2}{x^{\frac{2}{3}}} > \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \varphi(x)$ . Но интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$  расходится так как

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{b \rightarrow \infty} 3x^{\frac{1}{3}} \Big|_1^b = 3 \lim_{b \rightarrow \infty} b^{\frac{1}{3}} - 3 = \infty.$$

Поэтому, согласно признаку сравнения, интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$  расходится. ●

9.2.12. Исследовать на сходимость интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2+x+3x^5}$ .

○ Здесь  $f(x) = \frac{1}{2+x+3x^5} > 0$ . Рассмотрим функцию  $\varphi(x) = \frac{1}{x^5}$ , интеграл от которой  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$  сходится (см. пример 9.2.1). А так как существует предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{2+x+3x^5} = \frac{1}{3} \neq 0$ , то исходный интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2+x+3x^5}$  также сходится («предельный признак сравнения»). ●

9.2.46. Вычислить несобственный интеграл  $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$  или установить его расходимость.

○ Подынтегральная функция терпит разрыв при  $x = 3$  ( $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = +\infty$ ). Согласно формуле (2.2) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin \frac{x}{3} \Big|_0^{3-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin \frac{3-\varepsilon}{3} - 0 = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

интеграл сходится и его величина составляет  $\frac{\pi}{2}$ . ●

9.2.47. Вычислить значение интеграла  $\int_0^1 \ln x \, dx$ .

○ При  $x \rightarrow 0$  функция  $\ln x \rightarrow -\infty$ . По формуле (2.3) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x \, dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \ln x \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x \ln x - x) \Big|_{\varepsilon}^1 = \\ &= -1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon) = -1 - 0 = -1, \end{aligned}$$

т. к.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\varepsilon) = 0.$$

Интеграл сходится и равен  $-1$ . ●

9.2.51. Исследовать сходимость интеграла  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ .

○ Внутри отрезка интегрирования  $[-1; 1]$  функция  $\frac{1}{x^2}$ , при  $x \rightarrow 0$ , неограниченно возрастает. Согласно формуле (2.4) имеем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{0+\delta}^1 \frac{dx}{x^2} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_{\delta}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} - 1 + \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} - 1 = \infty, \end{aligned}$$

интеграл расходится. ●

9.2.55. Исследовать на сходимость интеграл  $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} \, dx$ .

○ Функция  $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$  терпит бесконечный разрыв в точке  $x = 1$ . Перепишем ее в виде  $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1+x)^2}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}$  и сравним ее с функцией  $\varphi(x) = \frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}$ . Как известно

(см. (2.5)), интеграл  $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}} \, dx$  сходится ( $\alpha = \frac{2}{3} < 1$ ). Так как

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\varphi(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1+x)^2}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{(1-x)^{\frac{2}{3}}}{1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1+x)^2}} = \frac{\cos^2 1}{\sqrt[3]{4}} \quad (\neq 0, \neq \infty),\end{aligned}$$

то, согласно предельному признаку сравнения, исходный интеграл также сходится. ●

**9.2.58.** Исследовать на сходимость интеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{3x^2 + \sqrt[3]{x}}.$

○ Подынтегральная функция  $f(x) = \frac{1}{3x^2 + \sqrt[3]{x}}$  разрывна в точке  $x = 0$ . Сравним ее с функцией  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ . Так как

$\frac{1}{3x^2 + \sqrt[3]{x}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ . Но несобственный интеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$  сходится

(см. (2.5)). Следовательно, интеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{3x^2 + \sqrt[3]{x}}$  по признаку сравнения также сходится. ●