§ 6.2. Практическая работа (решение задач)

11.5.1. Найти все частные производные первого, второго и третьего порядка для функции $z = x^3 - x^2y - y^3$.

○ 1) $$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2xy; \ \frac{\partial z}{\partial y} = -x^2 - 3y^2.$$

2) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 2xy) = 6x - 2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 2xy) = -2x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-x^2 - 3y^2) = -2x \quad \left(\text{Видим, что } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 3y^2) = -6y.$$

3) $$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(6x - 2y) = 6;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(6x - 2y) = -2;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(-2x) = 0;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}(-6y) = -6.$$

Очевидно, все последующие частные производные четвертого порядка равны нулю

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^i \partial y^j} = 0 \quad (i + j = 4).$$ ●

11.5.2. Для функции $z = e^{xy^3}$ найти: $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y}, \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}$.

○ 1) Дифференцируем по x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^3 e^{xy^3}; \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^6 e^{xy^3}; \ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = y^9 e^{xy^3}; \ \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \underline{y^{12} e^{xy^3}}.$$

2) Находим другие смешанные производные:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(y^9 e^{xy^3}) = \underline{9y^8 e^{xy^3} + 3y^{11} x e^{xy^3}}.$$

3) Далее,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}(y^6 e^{xy^3}) = 6y^5 e^{xy^3} + 3y^8 x e^{xy^3} = 3y^5 e^{xy^3}(2 + y^3 x).$$

Окончательно,

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[3y^5 e^{xy^3}(2 + y^3 x)\right] =$$
$$= 3\left[5y^4 e^{xy^3}(2 + y^3 x) + 3xy^7 e^{xy^3}(2 + y^3 x) + 3y^7 x e^{xy^3}\right] =$$
$$= \underline{3y^4 e^{xy^3}\left[10 + 14xy^3 + 3x^2 y^6\right]}.$$

Нужные частные производные подчеркнуты. ●

11.5.3. Найти $d^2 z$, если $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

◒ 1) Находим первый дифференциал:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy.$$

2) Далее отдельно считаем вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

и, наконец, составляем второй дифференциал

$$d^2 z = \frac{2[xy\,dx^2 + (y^2 - x^2)dx\,dy - xy\,dy^2]}{(x^2 + y^2)^2}.$$ ●

11.5.4. Найти $d^2 z$, если $z = \dfrac{xy}{x - y}$. Доказать, что $z''_{x^2} + 2z''_{xy} + z''_{y^2} = \dfrac{2}{x - y}$.

◒ Находим $d^2 z$:

$$z'_x = -\frac{y^2}{(x - y)^2},\ z'_y = \frac{x^2}{(x - y)^2},$$
$$z''_{x^2} = \frac{2y^2}{(x - y)^3},\ z''_{xy} = -\frac{2xy}{(x - y)^3},\ z''_{y^2} = \frac{2x^2}{(x - y)^3},$$

$$d^2\left(\frac{xy}{x-y}\right)=\frac{2(y^2\,dx^2-2xy\,dx\,dy+x^2\,dy^2)}{(x-y)^3}.$$

Далее,

$$z''_{x^2}+2z''_{xy}+z''_{y^2}=\frac{2y^4-4xy+2x^2}{(x-y)^3}=\frac{2(x-y)^2}{(x-y)^3}=\frac{2}{x-y}. \quad \bullet$$

11.5.5. **Найти d^3z, если $z=\dfrac{xy}{x+y}$.**

○ Имеем последовательно (ниже мы будем использовать формулы: $\left(\frac{1}{f}\right)'=-\frac{f'}{f^2}$, $\left(\frac{1}{f^2}\right)'=-\frac{2f'}{f^3}$; кроме того, некоторые действия мы опускаем ввиду того, что подобные встречались неоднократно):

1) $z'_x=\dfrac{y^2}{(x+y)^2}$; $z'_y=\dfrac{x^2}{(x+y)^2}$;

2) $z''_{x^2}=-\dfrac{2y^2}{(x+y)^3}$; $z''_{xy}=\dfrac{2xy}{(x+y)^3}$; $z''_{y^2}=-\dfrac{2x^2}{(x+y)^3}$;

3) $$d^2z=-\frac{2y^2}{(x+y)^3}dx^2+4\frac{xy}{(x+y)^3}dx\,dy-\frac{2x^2}{(x+y)^3}dy^2=$$
$$=-\frac{2(y^2\,dx^2-2xy\,dx\,dy+x^2\,dy^2)}{(x+y)^3}=-2\frac{(y\,dx-x\,dy)^2}{(x+y)^3}.$$

4) $d^3z=z'''_{x^3}dx^3+3z'''_{x^2y}dx^2dy+3z'''_{xy^2}dxdy^2+z'''_{y^3}dy^3$.

$$d^3z=\frac{6}{(x+y)^4}\big[y^2dx^3-(2xy-y^2)dx^2dy-$$
$$-(2xy-x^2)dxdy^2+x^2dy^3\big]. \quad \bullet$$

11.5.6. Найти d^2z, если $z=\ln(x^2+y^2)$.

○ При решении этого примера применим другой прием, а именно исходим из определения: $d^2z=d(dz)$. Имеем $dz=$ $=2\dfrac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}$. При последующих дифференцированиях принимаем dx и dy постоянными.

$$d^2z=2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}\right)dx+2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}\right)dy=$$
$$=2\frac{(x^2+y^2)dx-2x(x\,dx+y\,dy)}{(x^2+y^2)^2}dx+$$
$$+2\frac{(x^2+y^2)\,dy-2y(x\,dx+y\,dy)}{(x^2+y^2)^2}dy=$$

$$= 2\frac{(y^2 - x^2)dx^2 - 4xy\,dx\,dy + (x^2 - y^2)dy^2}{(x^2 + y^2)^2}. \quad \bullet$$

Для данных функций найти требуемую частную производную или дифференциал:

11.5.7. $z = \sin x \sin y,\ d^2 z.$

11.5.8. $z = 4x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3,\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

11.5.9. $z = xy + \sin(x + y),\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

11.5.10. $z = \ln \operatorname{tg}(x + y),\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$

11.5.11. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x + y}{1 - xy},\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$

11.5.12. $z = x^2 \ln(x + y),\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$

11.5.13. $z = x \sin xy + y \cos xy,\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

11.5.14. $z = \sin(x + \cos y),\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}.$

11.5.15. $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2},\ d^2 z.$

11.5.16. $z = \cos(x + y),\ d^2 z.$

Найти dz и $d^2 z$ от следующих функций:

11.5.17. $z = x^2y - xy^2 + 7.$

11.5.18. $z = xy - \dfrac{y}{x}.$

11.5.19. $z = (x^2 + y^2)^3.$

11.5.20. $z = (\sin x)^{\cos y}.$

11.5.21. $z = x - 3 \sin y.$

11.5.22. $z = \ln \sqrt{x^2 + y}.$

11.5.23. Для функции $y(x)$, определенной неявно уравнением $x^3y^2 - xy^5 + 5x - y = 0$, найти $y'''(0)$.

❍ Продифференцируем три раза по x данное уравнение с учетом того, что $y = y(x)$. Получаем

$$3x^2y^2 + 2x^3y\,y' - y^5 - 5xy^4\,y' + 5 - y' = 0, \tag{5.1}$$

$$6xy^2 + 6x^2y\,y' + 6x^2y\,y' + 2x^3(y')^2 + 2x^3y\,y'' - 5y^4\,y' - \\ - 5y^4\,y' - 20xy^3(y')^2 - 5xy^4\,y'' - y'' = 0,$$

т. е.

$$6xy^2 + 12x^2yy' + 2x^3(y')^2 + 2x^3y\,y'' - 10y^4\,y' - \\ - 20xy^3(y')^2 - 5xy^4y'' - y'' = 0, \tag{5.2}$$

$$
\begin{aligned}
6y^2 + 12xyy' + 24xyy' + 12x^2(y')^2 + 12x^2y\,y'' +\\
+ 6x^2(y')^2 + 4x^3y'y'' + 6x^2yy'' + 2x^3y'y'' + 2x^3yy''' -\\
- 40y^3(y')^2 - 10y^4y'' - 20y^3(y')^2 - 60xy^2(y')^3 - 40xy^3y'y'' -\\
- 5y^4y'' - 20xy^3y'y'' - 5xy^4y''' - y''' = 0. \quad (5.3)
\end{aligned}
$$

Подставим в данное уравнение $x = 0$ и получаем $y = 0$. Подставляем в (5.1) $x = 0$, $y = 0$ и находим $y'(0) = 5$. Подставляем в (5.2) $x = 0$, $y = 0$, $y'(0) = 5$ и находим $y''(0) = 0$. Подставляем в (5.3) $x = 0$, $y = 0$, $y'(0) = 5$, $y''(0) = 0$ и находим $y'''(0) = 0$. ●

11.5.24. Для функции $y(x)$, определенной неявно уравнением $ye^x+e^y=0$ найти y''.

◐ После последовательных двух дифференцирований данного уравнения с учетом $y = y(x)$ получаем

$$y'e^x + e^xy + e^yy' = 0, \tag{5.4}$$

$$y''e^x + e^xy' + e^xy + e^xy' + e^y(y')^2 + e^yy'' = 0. \tag{5.5}$$

Из (5.5) находим

$$y'' = -\frac{2e^xy' + e^xy + e^y(y')^2}{e^x + e^y}. \tag{5.6}$$

Из (5.4) находим $y' = -\frac{ye^x}{e^x + e^y}$ и это подставляем в (5.6):

$$
\begin{aligned}
y'' = -\frac{-2e^x\frac{ye^x}{e^x+e^y} + e^xy + e^y\left(\frac{ye^x}{e^x+e^y}\right)^2}{e^x + e^y} =\\
= -\frac{-2e^{2x}y(e^x + e^y) + e^xy(e^x + e^y)^2 + y^2e^ye^{2x}}{(e^x + e^y)^3}. \quad ●
\end{aligned}
$$

11.5.25. Найти y', y'' и y''' для неявной функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $x^2 - xy + 2y^2 + x - y = 1$ при $x = 0$, если $y(0) = 1$.

11.5.26. Найти d^2z в точке $(1;0)$ для неявной функции $z(x;y)$, определенной уравнением $xz^5 + y^3z - x^3 = 0$, если $z(1;0) = 1$.

11.5.27. Найти d^2z в точке $(1;2)$ для неявной функции $z(x;y)$, определенной уравнением $x - yz + e^z = 2$, если $z(1;2) = 0$.

11.5.28. Найти $y'(2)$, $y''(2)$, если $y(2) = 1$ и $x^2+y^2+\ln(x^2+y^2) = 5+\ln 5$.

11.5.29. Найти y', y'', y''', если $x^2 + yx + y^2 = 3$.

11.5.30. Найти y' и y'', если $y^x = x^y$.

11.5.31. Найти y' и y'', если $y^2 - 3x^2 + 2x + 3y - 9 = 0$.

◐ Краткое решение. Заметим, что уравнение имеет решение $(x_0; y_0) = (1; 2)$. После первого дифференцирования сравнительно просто получим $y' = 2\dfrac{3x-1}{2y+3}$. Теперь продифференцируем эту функцию, как частное, опять с учетом $y = y(x)$.

$$y'' = 2\frac{3(2y+3) - 2y'(3x-1)}{(2y+3)^2},$$

а здесь заменим $y' = 2\dfrac{3x-1}{2y+3}$. Получаем

$$y'' = 2\frac{3(2y+3)^2 - 4(3x-1)^2}{(2y+3)^3}.$$

Для получения последующих производных можно продифференцировать последнее равенство, а затем подставлять значение y'.

Можно идти другим путем: уравнение

$$2yy' - 6x + 2 + 3y' = 0 \tag{5.7}$$

можно далее продифференцировать многократно:

$$2(y')^2 + 2yy'' - 6 + 3y'' = 0, \tag{5.8}$$

$$4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' + 3y''' = 0 \quad \text{и т. д.} \tag{5.9}$$

Из (5.7) надо найти y', полученное выражение подставить в (5.8), и отсюда найти y'', которое можно подставить в (5.9) и так далее.

Очевидно, что процедура существенно упростится, если идет речь о производных в данной точке. ●

11.5.32. Дано $(xy - a)^2 + (xy - b)^2 = R^2$. Найти y', y'' для неявной функции $y(x)$.

11.5.33. Дано $x + y - e^{x+y} = 0$. Найти $y'(x)$, $y''(x)$.

11.5.34. Дано $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$. Найти $y'(x)$, $y''(x)$.

11.5.35. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если функция $z(x; y)$ задана неявно уравнением

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0. \tag{5.10}$$

◐ Высшие производные для функций, заданных неявно как функции двух и более переменных, находят практически по тем же правилам, что и первые производные. Данное уравнение дифференцируем по x (y — постоянная).

$$2x + 6zz'_x + y - z'_x = 0. \tag{5.11}$$

Отсюда

$$z'_x = \frac{2x+y}{1-6z}. \tag{5.12}$$

Дифференцируем (5.11) по x: $2+6(z'_x)^2+6zz''_{x^2}-z''_{x^2}=0$, следовательно,

$$z''_{x^2}=2\frac{1+3(z'_x)^2}{1-6z}. \tag{5.13}$$

Дифференцируем (5.11) по y: $6z'_y z'_x+6zz''_{xy}+1-z''_{xy}=0$, значит,

$$z''_{xy}=\frac{1+6z'_x z'_y}{1-6z}. \tag{5.14}$$

Дифференцируем (5.10) по y:

$$4y+6zz'_y+x-z'_y=0, \tag{5.15}$$

$$z'_y=\frac{x+4y}{1-6z}. \tag{5.16}$$

Дифференцируем (5.15) по y: $4+6(z'_y)^2+6zz''_{y^2}-z''_{y^2}=0$, следовательно,

$$z''_{y^2}=\frac{4+6(z'_y)^2}{1-6z}. \tag{5.17}$$

Для получения искомых производных необходимо в правых частях (5.13), (5.14) и (5.17) заменить z'_x и z'_y на соответствующие выражения из (5.12) и (5.16).

Подставляем (5.12) в (5.13):

$$z''_{x^2}=2\frac{1+3\left(\frac{2x+y}{1-6z}\right)^2}{1-6z}=2\frac{(1-6z)^2+3(2x+y)^2}{(1-6z)^3}.$$

Подставляем (5.12) и (5.16) в (5.14):

$$z''_{xy}=\frac{1+6\frac{(2x+y)(x+4y)}{(1-6z)^2}}{1-6z}=\frac{(1-6z)^2+6(2x+y)(x+4y)}{(1-6z)^3}.$$

Подставляем (5.16) в (5.17):

$$z''_{y^2}=\frac{4+6\left(\frac{x+4y}{1-6z}\right)^2}{1-6z}=\frac{4(1-6z)^2+6(x+4y)^2}{(1-6z)^3}. \qquad \bullet$$

11.5.36. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ при $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$, если

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$$

(см. предыдущую задачу).

○ Поскольку соответствующие частные производные найдены в предыдущем примере, то наше замечание состоит только в том, что искомые величины можно найти как из равенств (5.12)–(5.14) и (5.16)–(5.17), так и из последних трех равенств предыдущей задачи. В любом случае, при $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$ имеем $z''_{x^2} = -\frac{2}{5}$, $z''_{xy} = -\frac{1}{5}$, $z''_{y^2} = -\frac{394}{125}$. ●

Найти dz и d^2z, если $z = z(x; y)$ — неявная функция, определяемая уравнениями:

11.5.37. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

11.5.38. $xyz = x + y + z$.

11.5.39. $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1$.

11.5.40. $x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z - x} = z$.

Ответы

11.5.7. $-\sin x\sin y\,dx^2+2\cos x\cos y\,dx\,dy-\sin x\sin y\,dy^2$. **11.5.8.** $24x+6y$.
11.5.9. $-\sin(x+y)$. **11.5.10.** $-\dfrac{4\cos 2(x+y)}{\sin^2 2(x+y)}$. **11.5.11.** 0. **11.5.12.** $\dfrac{x(x+2y)}{(x+y)^2}$.
11.5.13. $y(2-y^2)\cos xy-xy^2\sin xy$. **11.5.14.** $\sin y\cos(x+\cos y)$.
11.5.15. $\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}(dx^2-dy^2)-4xy\dfrac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^2}$. **11.5.16.** $-\cos(x+y)(dx+dy)^2$.
11.5.17. $dz=(2xy-y^2)dx+(x^2-2xy)dy$, $d^2z=2y\,dx^2+4(x-y)dx\,dy-2x\,dy^2$.
11.5.18. $dz=\left(y+\dfrac{y}{x^2}\right)dx+\left(x-\dfrac{1}{x}\right)dy$, $d^2z=-\dfrac{2y}{x^3}dx^2+2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)dx\,dy$.
11.5.19. $dz=6(x^2+y^2)^2(x\,dx+y\,dy)$,
$d^2z=6(x^2+y^2)[(5x^2+y^2)dx^2+4xy\,dx\,dy+(x^2+5y^2)dy^2]$.
11.5.20. $dz=(\sin x)^{\cos y}(\cos y\mathrm{ctg}x\,dx-\sin y\ln\sin x\,dy)$,
$d^2z=\cos x(\sin x)^{\cos y}[(\cos y-1)\,\mathrm{ctg}^2\,x-1]\,dx^2-$
$-2\sin y\,\mathrm{ctg}\,x(\sin x)^{\cos y}(1+\cos y\ln\sin x)dx\,dy+$
$+(\sin x)^{\cos y}\ln\sin x\,(\sin y\cdot\ln\sin x-\cos y)dy^2$. **11.5.21.** $dz=dx-3\cos y$,
$d^2z=3\sin y\,dy^2$. **11.5.22.** $dz=\dfrac{2x\,dx+dy}{2(x^2+y)}$,
$d^2z=\dfrac{(2y-2x^2)\,dx^2-4x\,dx\,dy-dy^2}{2(x^2+y)^2}$. **11.5.25.** $y'=0$, $y''=y'''=-\dfrac{2}{3}$.
11.5.26. $d^2z=-\dfrac{6}{25}\,dx^2$. **11.5.27.** $d^2z=-dx^2+2\,dx\,dy$. **11.5.28.** $y'(2)=-2$,
$y''(2)=-5$. *Указание.* Из $2x+2yy'+\dfrac{2x+2yy'}{x^2+y^2}=0$ с учетом $x^2+y^2\neq 0$ легко получить $y'=-\dfrac{x}{y}$, или $x+yy'=0$. **11.5.29.** $y'=-\dfrac{2x+y}{x+2y}$, $y''=-\dfrac{18}{(x+2y)^3}$,
$y'''=-\dfrac{162x}{(x+2y)^5}$. **11.5.30.** $y'=\dfrac{y^2}{x^2}\dfrac{1-\ln x}{1-\ln y}$,
$y''=\dfrac{y^2[y(1-\ln x)^2-2(x-y)(1-\ln x)(1-\ln y)-x(1-\ln y)^2]}{x^4(1-\ln y)^2}$.
11.5.32. $y'=-\dfrac{y}{x}$, $y''=\dfrac{2y}{x^2}$. **11.5.33.** $y'=-1$, $y''=0$. **11.5.34.** $y'=-\dfrac{y}{x}$,
$y''=\dfrac{2y}{x^2}$. **11.5.37.** $dz=-\dfrac{c^2}{z}\left(\dfrac{x\,dx}{a^2}+\dfrac{y\,dy}{b^2}\right)$,
$d^2z=-\dfrac{c^4}{z^3}\left[\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)\dfrac{dx^2}{a^2}+\dfrac{2xy}{a^2b^2}dx\,dy+\left(\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)\dfrac{dy^2}{b^2}\right]$.
11.5.38. $dz=-\dfrac{(1-yz)\,dx+(1-xz)\,dy}{1-xy}$,
$d^2z=-2\dfrac{y(1-zy)\,dx^2+[x+y-z(1+xy)]\,dx\,dy+x(1-xz)\,dy^2}{(1-xy)^2}$.
11.5.39. $dz=\dfrac{z(y\,dx+z\,dy)}{y(x+z)}$, $d^2z=-\dfrac{z^2(y\,dx-x\,dy)^2}{y^2(x+z)^3}$.

11.5.40. $dz = dx - \dfrac{(x-z)\,dy}{(x-z)^2 + y(y+1)}$, $d^2z = \dfrac{2(x-z)(y+1)[(x-z)^2 + y^2]}{[(x-z)^2 + y(y+1)]^3}\,dy^2$.