Интегрирование. Часть 7

Определённый интеграл. Несобственные интегралы

9.2.1. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-2}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^b\right)=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_1^b\right)=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}-\left(-\frac{1}{1}\right)\right)=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right)=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}\right)+\lim\limits_{b\to+\infty}1=0+1=1$ → интеграл сходится

Примечание: $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ — $\begin{matrix}\text{сходится при } \alpha>1\\ \text{расходится при } \alpha\le 1\end{matrix}$

9.2.6. $\int_{-\infty}^0 x*\cos x\,dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\left(\int_a^0 x*\cos x\,dx\right)=\left[\int uv'dx=uv-\int u'vdx\right]=\left[u=x\to u'=1;\ v'=\frac{\cos x}{to}\,v=\int v'dx=\sin x\right]=\lim\limits_{a\to-\infty}\left(x*\sin x\Big|_a^0-\int_a^0 1*\sin x\,dx\right)=\lim\limits_{a\to-\infty}\left(x*\sin x\Big|_a^0-\cos x\,⍰\Big|_a^0\right)=\lim\limits_{a\to-\infty}\left(x*\sin x\Big|_a^0+\cos x\Big|_a^0\right)=\lim\limits_{a\to-\infty}\big((0*\sin 0-a*\sin a)+(\cos 0-\cos a)\big)=\lim\limits_{a\to-\infty}(-a*\sin a+1-\cos a)=-\lim\limits_{a\to-\infty}a*\sin a+1-\lim\limits_{a\to-\infty}\cos a$

Т. к. $\lim\limits_{a\to-\infty}(a*\sin a)$, $\lim\limits_{a\to-\infty}(\cos a)$ — не существует → интеграл расходится

9.2.8. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{1+x^2}+\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}x\Big|_a^0\right)+\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}x\Big|_0^b\right)=\lim\limits_{a\to-\infty}(\operatorname{arctg}0-\operatorname{arctg}a)+\lim\limits_{b\to+\infty}(\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}0)=\lim\limits_{a\to-\infty}(0-\operatorname{arctg}a)+\lim\limits_{b\to+\infty}(\operatorname{arctg}b-0)=-\lim\limits_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}a+\lim\limits_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}b=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$ → интеграл сходится

9.2.10. $\int_1^{+\infty}\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; $x=0$ — разрыв, но интеграл от 1, т. е. разрыв не попал в пределы интегрирования, т. е. $[1;+\infty)$ — разрыва нет.

1) $[a;+\infty)$ $f(x), \phi(x)$ — непр. $0\le f(x)\le\phi(x)$

$$\int_a^{+\infty}\phi(x)dx - \begin{matrix}\text{сход.}\to\\ \text{расх.}\to\end{matrix}\int_a^{+\infty}f(x)dx - \begin{matrix}\text{сход.}\\ \text{расх.}\end{matrix}$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int_1^{+\infty}\frac{x+2}{x^{\frac{2}{3}}}dx=\left[\frac{x+2}{x^{\frac{2}{3}}-f(x)}>\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}-\phi(x)},\text{т. к. } x+2>x^{\frac{2}{3}}\right]$$

? $\frac{x+2}{x^{\frac{2}{3}}}$ — сход., если $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$ — сход.

? $\frac{x+2}{x^{\frac{2}{3}}}$ — расх., если $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$ — расх.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(3x^{\frac{1}{3}}\Big|_1^b\right)=3\lim_{b\to+\infty}\left(b^{\frac{1}{3}}-1^{\frac{1}{3}}\right)=3\lim_{b\to+\infty}\left(b^{\frac{1}{3}}-1\right)=\infty$$

$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}=\infty$ → расходится → $\int_1^{+\infty}\frac{x+2}{x^{\frac{2}{3}}}dx$ — расходится