Теоретические сведения

Свободные и связанные вхождения переменных.

Определение. Вхождение в формулу подформулы, начинающееся с квантора $\forall$ или $\exists$, называется *областью действия в этой формуле данного вхождения квантора*

Определение.

(1) Вхождение предметной переменной $\boldsymbol{x}$ в формулу называется *связанным*, если оно находится в области действия квантора $\forall$ или $\exists$, входящего в эту формулу, за которым сразу же расположена буква $\boldsymbol{x}$.

(2) Вхождение предметной переменной $\boldsymbol{x}$ в формулу называется *свободным*, если оно не является связанным.

Определение.

(1) *Свободной переменной формулы* $\boldsymbol{A}$ называется предметная переменная, имеющая хотя бы одно свободное вхождение в формулу $\boldsymbol{A}$.

(2) *Связанной переменной формулы* $\boldsymbol{A}$ называется предметная переменная, имеющая хотя бы одно связанное вхождение в формулу $\boldsymbol{A}$.

Таким образом, некоторая предметная переменная в одной и той же формуле может быть одновременно и свободной, и связанной.

Обозначение. Множество всех свободных переменных формулы $\boldsymbol{A}$ будем обозначать через[1] $\mathrm{Fv}(\boldsymbol{A})$. Множество всех переменных терма $\boldsymbol{t}$ также будем обозначать $\mathrm{Fv}(\boldsymbol{t})$.

Определение. Формула, не имеющая свободных переменных называется *замкнутой формулой* или *предложением*.

Упражнения для самостоятельного решения

Свободные и связанные вхождения переменных

1. Перечислите свободные и перечислите связанные вхождения каждой из переменных в каждой из следующих формул:

(а) $\forall x_0 P^2_3 x_0 x_1$; (б) $\exists x_0(P^1_1 x_0 \to P^1_1 x_0)$;

(в) $\forall x_1(P^1_1 x_0 \to P^1_1 x_1)$; (г) $(\exists x_0 P^1_1 x_0 \to P^1_2 x_0)$;

(д) $\exists x_0(P^2_3 x_0 x_1 \to \forall x_1 P^1_1 x_1)$;

(д) $(\exists x_0 \forall x_2 (P^1_1 x_0 \,\&\, P^1_2 x_1) \to \forall x_1 P^2_3 x_0 x_1)$;

(е) $\exists x_0 \exists x_1 (P^2_1 x_0 x_1 \,\&\, P^1_2 x_3)$; (ж) $(\exists x_1 \forall x_2 P^2_1 x_1 x_2 \to \exists x_5 P^2_2 x_5 x_2)$;

(з) $\forall x_0(\exists x_2 P^2_1 x_0 x_1 \to P^3_2 x_0 x_1 x_3)$.

[1] От английского термина “free variables” — свободные переменные.

2. [Мендельсон, 1984, с. 55]. Укажите свободные и связанные вхождения переменных в следующие формулы:

(а) $\forall x_3(\forall x_1 P^2_4 x_1 x_2 \to P^2_1 x_3 x_1)$; (б) $(\forall x_2 P^2_1 x_3 x_2 \to \forall x_3 P^2_1 x_3 x_2)$;

(в) $(\forall x_2 \exists x_1 P^3_1 x_1 x_2 f^2_1 x_1 x_2 \vee \neg \forall x_1 P^2_1 x_2 f^1_1 x_1)$.

Свободные и связанные переменные

3. Для каждой из следующих формул найдите множество её связанных переменных:

(а) $\forall x_2 \exists x_1 (P^3_1 x_0 x_1 x_2 \to P^2_2 x_2 x_1)$; (б) $(\forall x_2 P^2_2 x_3 x_2 \& \exists x_3 P^2_4 x_3 x_2)$;

(в) $(\forall x_2 \exists x_1 P^3_1 x_1 x_2 f^2_1 x_1 x_2 \to \neg \forall x_1 P^2_2 x_2 f^1_1 x_1)$.

4. Для каждой из следующих формул найдите множество её свободных переменных:

(а) $\exists x_2 \forall x_1 (P^2_1 x_1 x_2 \to P^2_1 x_2 x_1)$; (б) $(\forall x_2 P^2_1 x_3 x_2 \to \exists x_3 P^2_1 x_3 x_2)$;

(в) $(\forall x_2 \exists x_1 P^3_2 x_1 x_2 f^2_1 x_1 x_2 \vee \neg \forall x_1 P^2_1 x_2 f^1_1 x_1)$.

5. Для каждой из следующих формул найдите множество её свободных переменных, являющихся одновременно и связанными:

(а) $\exists x_0(P^2_2 x_0 x_1 \to \forall x_1 P^1_1 x_1)$; (б) $\neg(\exists x_2 P^2_2 x_2 x_1 \& P^1_1 f^2_1 x_1 x_2)$;

(в) $((\forall x_0 P^2_2 x_0 x_1 \to \forall x_1 P^2_3 x_0 x_1) \vee \neg \forall x_1 P^2_3 x_2 f^1_1 x_1)$.

6. Для каждой из следующих формул найдите множество её связанных переменных, не являющихся свободными:

(а) $(\exists x_2 P^2_1 x_3 x_2 \,\&\, \exists x_3 \forall x_2 P^2_2 x_3 x_2)$;

(б) $(\exists x_2 \forall x_1 P^3_3 x_0 x_1 x_2 \to P^2_2 x_2 x_1)$;

(в) $(\forall x_2 \neg \exists x_1 P^3_3 x_1 x_2 f^2_1 x_1 x_2 \to \forall x_1 P^2_2 x_2 f^1_1 x_1)$.

7. Приведите пример формулы $\boldsymbol{A}$, содержащей вхождения двухместных предикатных символов, и такой, что:

(а) никакая свободная переменная формулы $\boldsymbol{A}$ не является связанной;

(б) всякая свободная переменная формулы $\boldsymbol{A}$ является связанной;

(в) всякая свободная переменная формулы $\boldsymbol{A}$ является связанной, но не всякая связанная переменная является свободной;

(г) всякая связанная переменная формулы $\boldsymbol{A}$ является свободной, но не всякая свободная переменная является связанной.