§ 1. Производная функции

§ 1.1. Теоретический материал

Понятие производной

⇒ Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Предел отношения приращения Δy функции в этой точке (если он существует) к приращению Δx аргумента, когда $\Delta x \to 0$, называется производной функции $f(x)$ в точке x_0.

Обозначения: $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$ или $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ или $f'|_{x=x_0}$.

Таким образом,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

⇒ Вычисление производной называется *дифференцированием* функции.

Таблица производных

1. $(c)' = 0$, $c = \text{const}$;
2. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$ (где $\alpha \in \mathbb{R}$); в частности, $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $a > 0$; в частности, $(e^x)' = e^x$;
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$; в частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
5. $(\sin x)' = \cos x$;
6. $(\cos x)' = -\sin x$;
7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;
10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;
11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$;
12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$;
13. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;
14. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;
15. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;
16. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Основные правила дифференцирования

Пусть c — константа, а $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в некоторой точке x. Тогда функции $u(x) \pm v(x)$, $c \cdot u(x)$, $u(x) \cdot v(x)$ и $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ (где $v(x) \neq 0$) также имеют производные в этой точке, причем

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, в частности, $(cu)' = c \cdot u'$;

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности, $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}$.

Пусть теперь функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $y = f(u)$ — в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ также имеет производную в точке x_0, причем

$$y'(x_0) = y'(u_0) \cdot u'(x_0).$$

Геометрический смысл производной

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0. Тогда существует касательная к графику этой функции в точке $M_0(x_0; y_0)$, уравнение которой имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

При этом $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона этой касательной к оси Ox (рис. 80).

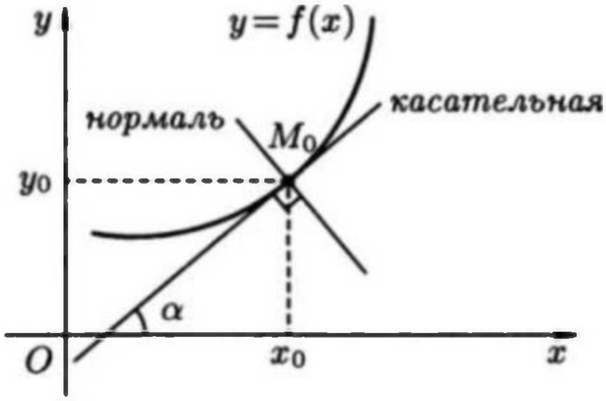

Рис. 80

⇛ Прямая, проходящая через точку касания, перпендикулярно касательной, называется *нормалью* к кривой и имеет уравнение

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

Если $f'(x_0) = 0$ (т. е. касательная горизонтальна), то нормаль вертикальна и имеет уравнение $x = x_0$.

⇒ Пусть даны две пересекающиеся в точке $M_0(x_0, y_0)$ кривые $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем обе функции имеют производные в точке x_0. Тогда *углом между* этими *кривыми* называется угол между касательными к ним, проведенными в точке M_0.

Этот угол φ можно найти из формулы

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)\cdot f_2'(x_0)}.$$

Логарифмическая производная

При нахождении производных от показательно-степенной функции $u(x)^{v(x)}$, а также других громоздких выражений, допускающих логарифмирование (произведение, частное и извлечение корня), удобно применять логарифмическую производную.

⇒ *Логарифмической производной* от функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

Используя логарифмическую производную, нетрудно вывести формулу для производной показательно-степенной функции $u(x)^{v(x)}$:

$$(u^v)' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + u^{v-1}\cdot u' \cdot v.$$

Производная неявной функции

Пусть функция $y = y(x)$, обладающая производной в точке x, задана неявно уравнением

$$F(x, y) = 0. \tag{1.1}$$

Тогда производную $y'(x)$ этой функции можно найти, продифференцировав уравнение (1.1) (при этом y считается функцией от x) и разрешая затем полученное уравнение относительно y'.

Производные высших порядков

⇒ Производная $f'(x)$ от функции $f(x)$ называется также *производной первого порядка*. В свою очередь производная от функции $f'(x)$ называется *производной второго порядка* от функции $f(x)$ (или второй производной) и обозначается $f''(x)$.

Аналогично определяются *производная третьего порядка* (или *третья производная*), обозначаемая $f'''(x)$ и т. д.

Производная n-го порядка обозначается $f^{(n)}(x)$.

Производная функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ определена параметрически функциями $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Тогда если функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют производные в точке t_0, причем $x'(t_0) \neq 0$, а функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x_0 = x(t_0)$, то эта производная находится по формуле

$$y'(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)} \quad \text{или} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Вторая производная $y''(x)$ находится по формуле

$$y''_{xx} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3}.$$