Определение.

(1) 0 и предметная переменная есть *термы*.

(2) Если r и s — термы, то r', $(r+s)$ и $(r\cdot s)$ — *термы*.

(3) Других термов нет.

Например, в языке $\boldsymbol{Ar}$ являются термами слова: $0,\ x_1,\ 0',\ (0'+x_2)$.

Определение. Если r и s — термы, то $r=s$ — *атомарная формула* в языке $\boldsymbol{Ar}$.

Понятие "*формула* в языке $\boldsymbol{Ar}$" определяется индуктивно, аналогично понятию "формула" в формальном языке первого порядка.

Примерами формул в языке $\boldsymbol{Ar}$ могут служить следующие слова: $(x_1=x_2\to(x_1=x_3\to x_2=x_3))$; $(x_1+x_2')=(x_1+x_2)'$; $(x_1=x_2\to x_1'=x_2')$; $(x_1\cdot 0)=0$; $\neg(0=x_1')$; $(x_1\cdot x_2')=((x_1\cdot x_2)+x_1)$.

Стандартной моделью языка $\boldsymbol{Ar}$) является система неотрицательных целых чисел. При этом $'$ интерпретируется как операция нахождения следующего числа, $+$ — как сложение, $\cdot$ — как умножение, $=$ — как равенство.

Понятие многосортного языка. Некоторые математические структуры таковы, что их задают не на одном, а на нескольких множествах. Например, математическая структура геометрии Евклида включает в себя множество точек, множество прямых и множество плоскостей пространства. Два множества (поле и множество векторов) необходимы для задания линейного пространства.

Для изучения таких (многоосновных) математических структур иногда используют *многосортные языки* — языки, у которых множества индивидных символов алфавита (переменных и констант) разбиты на непересекающиеся классы подмножеств, называемые *сортами*. Предикатные и функциональные символы многосортного языка таковы, что каждый из них предназначен для применения к наборам переменных определенных заранее сортов. Любой "обычный" язык первого порядка (из тех, которые изучались до сих пор) можно считать частным видом многосортного языка первого порядка — языком, у которого один сорт предметных переменных.

Язык ***Vect***

Язык LangVect. Рассмотрим двухсортный язык ***Vect*** (по [Колмогоров, Драгалин, 1982, с. 81]), который используется для описания свойств векторных пространств.

Определение. В *алфавит* языка ***Vect*** входят:

(1) *индивидные константы*: 0_s и 0_v (нуль-скаляр и нуль-вектор соответственно);

(2) *функциональные константы*: одноместные: $-_s$ и $-_v$; двухместные: $+_s$, $\cdot_s$, $+_v$, $\cdot$;

(3) *предикатная константа*: $=$;

(4) *предметные переменные для скаляров*: $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots$;

(5) *предметные переменные для векторов*: $u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots$;

(6) *логические символы* и *вспомогательные символы* такие же, как в стандартном языке первого порядка.

Определение (*скалярного терма* или *s-терма*).

(1) 0_s есть s-терм;

(2) предметная переменная для скаляров есть s-терм;

(3) если t_1 и t_2 есть s-термы, то $-_s t_1$, $(t_1 +_s t_2)$, $t_1 \cdot_s t_2$ есть s-термы.

Определение (*векторного терма* или *v-терма*).

(1) 0_v есть v-терм;

(2) предметная переменная для векторов есть v-терм;

(3) если w_1 и w_2 есть v-термы, то $-_v w_1$, $(w_1 +_v w_2)$ есть v-терм;

(4) если t есть s-терм, а w есть v-терм, то $t\cdot w$ есть v-терм;

Определение (*атомарной формулы*).

Если t_1 и t_2 есть s-термы, а w_1 и w_2 есть v-термы, то $t_1=t_2$ и $w_1=w_2$ есть *атомарные формулы*.

Понятие *формула в языке* ***Vect*** определяется индуктивно, аналогично понятию "формула" в стандартном языке первого порядка.

Стандартной моделью языка ***Vect*** называется тройка $\langle P,V,\mathcal{I}\rangle$, где P — поле, V — векторное (линейное) пространство над полем P, $\mathcal{I}$ — интерпретация сигнатуры языка такая, что $\mathcal{I}(0_s)$ есть нуль поля, $\mathcal{I}(0_v)$ есть нуль пространства, $\mathcal{I}(-_s)$, $\mathcal{I}(-_v)$ есть операция взятия противоположного элемента в поле и в пространстве соответственно, $\mathcal{I}(+_s)$, $\mathcal{I}(\cdot_s)$ — операция сложении и умножения в поле, $\mathcal{I}(+_v)$, $\mathcal{I}(\cdot)$ — операции сложения в пространстве и умножения элемента поля на элемент пространства соответственно.

Упражения для самостоятельного решения

1. Для каждого из следующих условий напишите на языке ***Ord*** формулу, истинную на алгебраической системе $\langle M, \{=, \leqslant\}\rangle$ сигнатуры языка LangOrd, если и только если:

(а) $\langle M, \{=, \leqslant\}\rangle$ — упорядоченное множество;

(б) $\langle M, \{=, \leqslant\}\rangle$ — линейно упорядоченное множество.

2. Пусть $\langle M, \{=, \leqslant\}\rangle$ — алгебраическая система, в сигнатуру которой входят двухместные предикатные символы $=, \leqslant$. Пусть $\langle M, \{=, \leqslant\}\rangle$ — упорядоченное множество относительно предиката с именем $\leqslant$. Напишите замкнутую формулу языка ***Ord***, которая была бы истинна на алгебраической системе $\langle M, \{=, \leqslant\}\rangle$, если и только если:

(а) в $\langle M, \{=, \leqslant\}\rangle$ имеется наименьший элемент;

(б) в $\langle M, \{=, \leqslant\}\rangle$ нет наибольшего элемента;

(в) для каждых двух элементов в $\langle M, \{=, \leqslant\}\rangle$ имеется их точная нижняя граница.

3. Рассмотрим упорядоченные множества натуральных чисел с обычной упорядоченностью $\leqslant$. Приведите пример замкнутой формулы языка ***Ord***, которая истинна на упорядоченном множестве $\{0, 1\}$ и ложна на упорядоченном множестве $\{0, 1, 2\}$.

4. Рассмотрим упорядоченные по делимости множества натуральных чисел $O_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ и $O_2 = \{1, 2, 3, 6\}$ (считается, что $x \leqslant y$, если и только если $y \vdots x$). Приведите пример замкнутой формулы языка ***Ord***, которая истинна на одном из упорядоченных множеств O_1, O_2 и не является истинной на другом.

> Определение.
> Алгебраические системы $\langle M_1, \sigma\rangle$, $\langle M_2, \sigma\rangle$, фиксированной сигнатуры σ называются *элементарно эквивалентными*, если каждая замкнутая формула сигнатуры σ, истинна на одной из данных систем тогда и только тогда, когда она истинна на другой.

5. Рассмотрим упорядоченные по делимости множества натуральных чисел O_1 и O_2. Докажите, что O_1 и O_2 не являются элементарно эквивалентными, если:

(а) $O_1 = \{1, 2, 4, 6, 12\}$, $O_2 = \{1, 2, 3, 4, 12\}$;

(б) $O_1 = \{1, 2, 3, 4, 12\}$, $O_2 = \{1, 2, 3, 5, 30\}$;

(в) $O_1 = \{1, 2, 4, 6, 12\}$, $O_2 = \{1, 2, 3, 5, 30\}$.

6. Рассмотрим упорядоченное множество натуральных чисел O_1 и упорядоченное множество O_2, носителем которого служит множество $\mathbb{N}$. Первое упорядочено обычным отношением “меньше или равно” $(\leqslant)$, второе — по делимости натуральных чисел. Докажите, что O_1 и O_2 не элементарно эквивалентны.

7. Покажите, что упорядоченные множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ с их обычными упорядоченностями $\leqslant$, не элементарно эквивалентны.

8*. Покажите, что упорядоченные множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ с их обычными упорядоченностями $\leqslant$ не элементарно эквивалентны.

9. Напишите формулу ***A*** языка ***Ar*** с одной свободной переменной x_0, в которую не входят константы и функциональные символы, кроме $'$, и принимающую значение *И* в стандартной модели в том и только том случае, если значение переменной x_0

(а) есть 0; (б) есть 1; (в) есть 2;

(г) принадлежит множеству $\{0, 1\}$; (д) не превосходит числа 2.

10. Верно ли, что формула $\forall\lambda_0\,\forall x_0(\lambda_0 \cdot x_0 = 0_v \to (\lambda_0 = 0_s \vee x_0 = 0_v))$ истинна на всякой стандартной модели языка языка ***Vect***?

11. На всякой ли стандартной модели языка ***Vect*** выполнима формула $\forall\lambda_1\,\forall\lambda_2\,\forall\lambda_3\,(((\lambda_1 \cdot u_1 +_v \lambda_2 \cdot u_2) +_v \lambda_3 \cdot u_3) = 0_v \to ((\lambda_1 = 0_s \,\&\, \lambda_2 = 0_s) \& \lambda_3 = 0_s))$?

12. Напишите формулу языка ***Vect*** со свободными индивидными векторными переменными u_1, u_2, u_3 которая принимала бы значение *И* в стандартной интепретации этого языка, если и только если вектор, являющийся значением переменной u_1 линейно выражается через значения переменных u_2 и u_3.

13. Напишите формулу языка ***Vect*** со свободными индивидными векторными переменными u_1, u_2, u_3 которая принимала бы значение *И* в стандартной интепретации этого языка, если и только если значения переменных u_1, u_2, u_3 линейно зависимы.

14. Рассмотрим алфавит двухсортного языка ***Plan*** первого порядка, сигнатура которого состоит из двухместных предикатных констант $\in$ и $=$. Язык ***Plan*** имеет два сорта предметных переменных, а именно: A, B, C, A_0 $\ldots$ и a, b, c, a_0 $\ldots$. Первое вхождение переменной в атомную формулу с предикатной константой $\in$ должно быть вхождением переменной первого сорта, а второе — переменной второго сорта. Каждая атомарная формула с предикатной константой $=$ (“равно”) содержит переменные только одного сорта. Сформулируйте определение формулы этого языка.