§ 6. Частные производные и дифференциалы высших порядков

§ 6.1. Теоретический материал

Определение частных производных второго порядка

Если задана функция $z = f(x;y)$ и вычислены ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)$, то они, вообще говоря, могут быть также дифференцируемыми функциями двух независимых переменных x и y. Приняты обозначения:

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ — вторая частная производная по x;

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ — смешанные частные производные второго порядка;

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ — вторая частная производная по y.

Теорема 11.13 (Шварца). Если смешанные частные производные второго порядка непрерывны, то они равны между собой. Другими словами, результат смешанного дифференцирования не зависит от порядка.

Дифференциал второго порядка

Выражение

$$d^2 z = d(dz) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

называется *вторым дифференциалом* или дифференциалом второго порядка для функции z.

Производные и дифференциалы высших порядков

По аналогии можно определить частные и смешанные производные высших порядков, часть которых, согласно теореме Шварца, равны между собой.

Таким образом, имеем три различных производных второго порядка, четыре различных производных третьего порядка

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

и так далее.

Число разных частных производных порядка n от функции двух переменных равно $n+1$:

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n},\ \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y},\ \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2},\dots,\ \frac{\partial^n z}{\partial x^2\partial y^{n-2}},\ \frac{\partial^n z}{\partial x\partial y^{n-1}},\ \frac{\partial^n z}{\partial y^n}.$$

Дифференциалы высших порядков определяются по аналогии:

$$d^3 z = d(d^2 z) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2\,dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Выражение для $d^n z$ формально можно записать в виде

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n(z),$$

напоминающем формулу бинома Ньютона.