§ 6.3. Домашнее задание (письменное)

Письменно решить номера **9.1.27 – 9.1.35, 9.1.66 – 9.1.70, 9.1.100 – 9.1.108**.

Вычислить следующие интегралы:

9.1.27. $\int_1^{e^2} \frac{\ln^3 x}{3x}\,dx.$

9.1.28. $\int_\pi^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}\,dx.$

9.1.29. $\int_0^1 \frac{4\operatorname{arctg} x - x}{1+x^2}\,dx.$

9.1.30. $\int_1^e \frac{\sin\ln x}{x}\,dx.$

9.1.31. $\int_{-1}^0 \frac{3^x-2^x}{6^x}\,dx.$

9.1.32. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$

9.1.33. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x\,dx.$

9.1.34. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x \cdot \ln\cos x\,dx.$

9.1.35. $\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+2}}.$

Вычислить интегралы:

9.1.66. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5\,dx}{1+\cos x}.$

9.1.67. $\int_0^{\ln 4} \sqrt{e^x-1}\,dx.$

9.1.68. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}.$

9.1.69. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}.$

9.1.70. $\int_1^2 3x(1-x)^{17}\,dx.$

Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

9.1.100. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$.

9.1.101. $\int\limits_{0}^{0,2} x\,e^{5x}\,dx$.

9.1.102. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 4x\,\mathrm{tg}^2\,x\,dx$.

9.1.103. $\int\limits_{1}^{e^2} \ln^2 x\,dx$.

9.1.104. $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x}{\sin^2 x}\,dx$.

9.1.105. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

9.1.106. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$.

9.1.107. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}\,dx$.

9.1.108. $\int\limits_{0}^{9} e^{\sqrt{x}}\,dx$.

Необязательное письменное домашнее задание

Задание для больших «любителей» 😊 математики. Выполнять при желании.
Правила сдачи:

- Сдавать только в сроки, указанные преподавателем.
- Обязательно перед выполнением делать запись, что номера из дополнительного домашнего задания.
- Выполнять задания в строгом порядке. Если какой-то пример не решаете, то написать номер примера и фразу «пример не решаю».
- Если есть номера на «устное решение» или «доказательство», то подробно описать ход рассуждений.
- Обязательно выложить фотографию в moodle.

Вычислить интегралы:

9.1.36*. $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}}\, d\varphi.$

9.1.37*. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}\, dx.$

9.1.38*. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{tg}^4\, x\, dx.$

9.1.39*. $\int\limits_2^4 |3-x|\, dx.$

9.1.40*. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\, dx$, если $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x, & \text{при } x \in [-\frac{\pi}{4}; 0], \\ \mathrm{tg}\, x, & \text{при } x \in (0; \frac{\pi}{4}]. \end{cases}$

9.1.41. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int\limits_{-1}^{1} x^{-2}\, dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -1-1 = -2.$ Ответ неверен. Почему?

9.1.42. Вычислить устно интеграл $\int\limits_{-2}^{2} \frac{3x}{(x^2+1)^3}\, dx.$

9.1.43. Выяснить, не вычисляя, какой из интегралов меньше:

а) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\, dx$ или $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, dx$;

б) $\int\limits_1^{15} x^5\, dx$ или $\int\limits_1^{15} x^6\, dx$;

в) $\int\limits_0^1 4^{-x}\, dx$ или $\int\limits_0^1 5^{-x}\, dx$;

г) $\int\limits_{-1}^{0} 4^{-x}\, dx$ или $\int\limits_{-1}^{0} 5^{-x}\, dx$.

9.1.44. Определить, не вычисляя, знак интеграла:

а) $\int\limits_1^2 (x^2 - 4x + 3)\,dx$;

б) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x\,dx$.

9.1.45. Известно, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$. Следует ли отсюда, что $f(x) \equiv 0$ на $[a; b]$?

Вычислить интегралы:

9.1.71. $\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{x}{4-x}}\,dx$.

9.1.72. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$.

9.1.73. $\int\limits_{\frac{1}{8}}^1 \frac{15\sqrt{x+3}}{(x+3)^2\sqrt{x}}\,dx$.

9.1.74. $\int\limits_0^{\arcsin\sqrt{\frac{7}{8}}} \frac{6\sin^2 x}{4+3\cos 2x}\,dx$.

9.1.75. $\int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}\,dx$.

9.1.76. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^9 x\,dx$.

9.1.77. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{6+\sin^2 x}$.

9.1.78. $\int\limits_1^{64} \frac{2+\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})\sqrt{x}}\,dx$.

9.1.79. $\int\limits_1^4 \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}-\sqrt[3]{3x-4}+1}$.

9.1.81. Вычислить $J = \int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$, сделав подстановку $x = \pi - t$.

9.1.82. а) Можно ли интеграл $\int\limits_0^3 2x\sqrt[3]{4-x^2}\,dx$ вычислить с помощью подстановки $x = 2\cos t$?

б) Можно ли интеграл $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{x^2+1}\,dx$ вычислить с помощью подстановки $x = \frac{1}{\sin t}$?

9.1.83. Вычислить $\int\limits_0^{50} f(z)\,dz : \int\limits_0^1 f(50z)\,dz$.

9.1.84. Вычисляя интеграл $J = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$ с помощью подстановки $x = \frac{1}{t}$, получим $J = -\int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = -\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = -J$. Отсюда: $J + J = 0$, т. е. $J = 0$. Ответ неверен. В чем ошибка?

9.1.85. При вычислении интеграла $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ применим подстановку $x = \sin t$. Новые пределы интегрирования находим из равенств $0 = \sin t$ и $1 = \sin t$. Получаем $t_1 = 0$ и $t_2 = \frac{\pi}{2}$. Можно ли в качестве пределов для t взять числа $t_1 = \pi$ и $t_2 = \frac{\pi}{2}$?

Вычислить интегралы:

9.1.109. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx$.

9.1.110. $\int\limits_{0}^{a} \sqrt{a^2+x^2}\,dx$, $a > 0$.

9.1.111. $\int\limits_{0}^{3} \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2}\,dx$.

9.1.112. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

9.1.113. Как проще всего вычислить интеграл $\int\limits_{-2,7}^{2,7} \frac{x^2 \sin 2{,}7x}{x^2+3}\,dx$?

9.1.114. Доказать, что $\int\limits_{-1}^{1} 2^{\cos x}\,dx = 2\int\limits_{0}^{1} 2^{\cos x}\,dx$.

9.1.115. Чему равен интеграл $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \ln \frac{2+x}{2-x}\,dx$?

9.1.116. Показать, что $\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{dx}{\arcsin x} = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x}\,dx$.