10*. Выясните, какие из следующих совокупностей формул имеют модели:

(а) $\{\forall x_1 \neg f_1^1 x_1 \doteq x_1,\ \ \exists x_0\, f_1^1 f_1^1 x_1 \doteq f_1^1 x_1\}$

(б) $\{\forall x_1 \forall x_2\, (\neg x_1 \doteq x_2 \to \neg f_1^1 x_1 \doteq \neg f_1^1 x_2)\,,\ \ \forall x_0 \exists x_1 f_1 x_1 \doteq x_0\}$

(в) $\{\forall x_1 \forall x_2\, (P_1^2 x_1 x_2 \to \neg P_1^2 x_2 x_1)\,,\ \ \forall x_1\, P_1^2 x_1 x_1\}$;

(г) $\{\forall x_1 \forall x_2\, (P_1^2 x_1 x_2 \to (P_1^2 x_2 x_1 \to x_1 \doteq x_2))\,,$
$\forall x_1 \forall x_2\, (P_1^2 x_1 x_2 \to \neg x_1 \doteq x_2)\}$;

Задание 14. Выражение свойств алгебраических систем и их элементов

Высший уровень владения языком состоит в умении выражать на этом языке все то, что можно на нем выразить.

Учебные задачи

1. Научиться выполнять: *строить формулы языка первого порядка данной сигнатуры с данной областью истинности в данной алгебраической системе*.

Упражнения для самостоятельного решения

Свойства "Миров"

1. В сигнатуре задачи из предыдущего задания напишите формулу, выражающую это утверждение:

(а) всякая черная фигура расположена правее любого треугольника;

(б) каждый большой белый треугольник расположен правее некоторого черного круга;

(в) хотя бы один круг расположен правее любого квадрата;

(г) некоторый малый треугольник расположен правее некоторого белого квадрата;

(д) каждый квадрат расположен левее некоторой большой фигуры;

(е) некоторая малая черная фигура расположена правее всякого квадрата .

2. Напишите формулу с одной свободной переменной x (остальные переменные должны быть связанными), которая принимает значение *И* в данном мире, если и только если значение x есть первая справа фигура этого мира.

3. Напишите замкнутую формулу, которая истинна в тех и только тех "мирах", в которых самая правая фигура есть большой белый треугольник.

4. Напишите формулу с двумя свободными переменными, x и y, которая принимает в данном мире значение *И* в том и только том случае, когда значениями x и y служат фигуры одного размера.

5. Напишите формулу с двумя свободными переменными, x и y, которая принимает в данном мире значение *И* в том и только том случае, когда значениями x и y служат фигуры разного цвета.

6. Напишите формулу с двумя свободными переменными, x и y, которая принимает в данном мире значение *И* в том и только том случае, когда значения переменных x и y не равны.

7. Напишите формулу с двумя свободными переменными, x и y, которая принимает в данном мире значение *И* в том и только том случае, когда значениями x и y служат соседние фигуры.

8. Рассматривается "мир", состоящий из восьми фигур. Как выразить в виде формулы утверждение: "половина фигур в данном "мире" — маленькие"?

9. Напишите формулу, принимающую значение *И* в данном мире, если и только если значение x есть третья слева фигура в данном мире.

10. Напишите формулу, означающую: "третья справа фигура в данном "мире" есть треугольник.

11. Напомним, что треугольник имеет три угла, квадрат — четыре, а круг — не имеет углов. Напишите формулу с двумя свободными переменными, x и y, которая принимает в данном мире значение *И* в том и только том случае, когда значение переменной x имеет меньше углов, чем значение переменной y.

Геометрические свойства

12. По [Лавров, Максимова, 1995, ч. II, §4, №17]. Пусть M — множество точек, прямых и плоскостей 3-мерного евклидова геометрического пространства. Пусть сигнатура языка содержит предикатные символы: P_1^1, P_2^1, P_3^1, P_4^2 . Пусть интерпретация сигнатуры такова, что для всяких m, m_1, m_2 из M выполняется:

$P_1^1(m) = \text{Т}(m) = И \iff m$ есть точка;
$P_2^1(m) = \text{Пр}(m) = И \iff m$ есть прямая;
$P_3^1(m) = \text{Пл}(m) = И \iff m$ есть плоскость;
$P_4^2(m_1, m_2) = \text{Л}(m_1, m_2) = И \iff m_1$ лежит на m_2.

Напишите формулы стандартного языка, выражающие утверждения:

(а) "на любой прямой лежит хотя бы одна точка";

(б) "через каждые две точки можно провести прямую";

(в) "на любой прямой лежит по крайней мере две различные точки";

(г*) "через каждые две точки можно провести прямую; если эти точки различны, то прямая единственна";

(д*) "через каждые три точки, не лежащие на одной прямой можно провести единственную плоскость";

(е*) "существуют по крайней мере 3 различные точки, не лежащие на одной прямой".

Замечание. Ответом является формула в сигнатуре $\{P_1^1, P_2^1, P_3^1, P_4^2\}$.

13. По [Лавров, Максимова, 1995, ч. II, §4, №18]. В модели из предыдущей задачи запишите:

(а*) определение параллельности прямых;

(б*) определение параллельности плоскостей;

(в*) аксиому Евклида о параллельности прямых;

(г*) аксиому Лобачевского о параллельности прямых.

14. Пусть сигнатура стандартного языка есть $\{=, P_1^3\}$. Пусть интерпретация сигнатуры в множестве M всех точек плоскости такова, что для всяких m_1, m_2, m_2 из M выполняется:
$P_1^3(m_1, m_2, m_3) = И \iff$ точки m_1, m_2 и m_3 лежат на одной прямой.
Напишите формулу, выражающую утверждение:

(а) "существуют по крайней мере три различные точки, не лежащие на одной прямой";

(б) "существуют по крайней мере три различные точки, лежащие на одной прямой";

(в) "на прямой, проходящей через две произвольные точки существует третья точка, отличная от первых двух".

15. Пусть сигнатура стандартного языка есть $\{=, P_2^3\}$. Пусть интерпретация сигнатуры в множестве M всех точек плоскости такова, что для всяких $m_1, m_2, m_3 \in M$ выполняется:
$P_2^3(m_1, m_2, m_3) = И \iff$ точка m_2 лежит между точками m_1 и m_3.
Напишите формулу, выражающую утверждение:

(а) "для любых двух различных точек существует третья точка, отличная от них и лежащая между ними";

(б) "из любых трёх точек одна и только одна лежит между двумя другими".

Алгебраические свойства

16. По [Лавров, Максимова, 1995, с.78, №8]. Пусть сигнатура языка включает в себя один трехместный предикатный символ P_1^3, интерпретация которого в множестве $\mathbb{N}_0$ неотрицательных целых чисел такова, что

$$P_1^3(m_1, m_2, m_3) = И \Leftrightarrow m_1 + m_2 = m_3.$$

Напишите формулу с двумя свободными переменными x_0, x_1, которая принимает значение $И$, если и только если для значений переменных выполняется $x_0 \leqslant x_1$.

17. По [Верещагин, Шень, 2002, с. 99]. Пусть сигнатура стандартного языка есть $\{=, P_1^2\}$. Пусть интерпретация сигнатуры в множестве всех целых чисел $\mathbb{Z}$ такова, что

$$P_1^2(m_1, m_2) = И \iff m_1 < m_2.$$

Напишите формулу с двумя свободными перемеными x_0, x_1, принимающую значение $И$ на таких и только таких значениях этих переменных, что $x_0 + 1 = x_1$.

18*. По [Верещагин, Шень, 2002, с. 99]. Пусть сигнатура стандартного языка есть $\{=, P_1^2\}$. Пусть интерпретация сигнатуры в множестве $\mathbb{N}$ такова, что для всяких $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ выполняется:

$$P_1^2(m_1, m_2) = И \iff \text{“}m_1 \text{ делит } m_2\text{”}.$$

Напишите формулу с одной свободной переменой x_0, принимающую значение $И$ на таких и только таких значениях m, этой переменной, что m — простое число.

19. По [Лавров, Максимова, 1995, с.78, №8]. Пусть сигнатура языка включает в себя два трехместных предикатных символа P_1^3, P_2^3, интерпретация которых в множестве $\mathbb{N}_0$ неотрицательных целых чисел такова, что

$$P_1^3(m_1, m_2, m_3) = И \Leftrightarrow m_1 + m_2 = m_3,$$