

## ЗАДАНИЕ 2. Понятие правила традиционного типа

Преобразование символьных цепочек обычно выполняется по определённым правилам. Речь идёт о правилах, разрешающих из некоторых цепочек символов получать новые цепочки. Такие правила используются, в частности, для точного описания языков.

### УЧЕБНЫЕ ЗАДАЧИ

1. ВЫУЧИТЬ ТЕРМИНЫ И ИХ ЗНАЧЕНИЯ: *правило традиционного типа*, *синтаксическая переменная*, *посылка правила*, *заключение правила*.
2. НАУЧИТЬСЯ ВЫПОЛНЯТЬ: *применять заданное формальное правило к словам (цепочкам символов)*, *формализовать правило в простейших случаях*.

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

**Пример разрешительного правила.** Примером такого правила для слов в алфавите  $A = \{x, y\}$  может служить предложение:

“Из слов  $\alpha x \beta$  и  $y \gamma$  (где  $\alpha, \beta, \gamma \in A^*$ ) можно получить  $\alpha \beta y \gamma$ .”

Оно разрешает, в частности, из пары слов  $x, y$  получить слово  $y$  (если положить  $\alpha \doteq \beta \doteq \gamma \doteq \Lambda$ ), Из пары слов  $yx, yx$  в соответствии с данным правилом можно получить слово  $yx$  (при  $\alpha \doteq \Lambda, \beta \doteq yx, \gamma \doteq \Lambda$ ). Из этой же пары слов  $yx, yx$  в соответствии с данным правилом можно получить также и слово  $xy$  (при  $\alpha \doteq xy, \beta \doteq x, \gamma \doteq \Lambda$ , или же при  $\alpha \doteq xy, \beta \doteq \gamma \doteq \Lambda$ ).

В формулировку данного правила, помимо букв алфавита  $A$  входят также и *символы из языка исследователя*. В частности, буквы  $\alpha, \beta, \gamma$  в данной формулировке использованы в качестве *синтаксических переменных* — переменных, значениями которых служат слова в алфавите исследуемого языка.

Запишем данное правило в виде условной схемы, по форме имеющей вид дроби, числитель которой есть описание слов, к которым применяется правило, а знаменатель — описание получаемого слова:

$$\frac{\alpha x \beta \quad y \gamma}{\alpha \beta y \gamma} \quad (\alpha, \beta, \gamma \in A^*).$$

### Общий вид формулировки правила традиционного типа.

Каждое *правило традиционного типа* есть символьная фигура вида

$$\frac{v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n}{w} \quad (\star)$$

Здесь — (“черта”) — посторонний для основного алфавита символ,  $v_1, v_2, \dots, v_n, w$  — это выражения из языка исследователя, они могут содержать вхождения знаков из алфавита изучаемого множества слов, *синтаксические переменные*, а также, *символы операторов подстановки в слово вместо буквы слова*.

Слова, обозначенные  $v_1, v_2, \dots, v_n$  называют *посылками*, а слово, обозначенное  $w$  — *заключением правила*. Различают правила *однопосылочные*, *двухпосылочные*, *трёхпосылочные* и т.д.

Часто исходные объекты исчисления считают также правилами, только *нульпосылочными*.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Правило иногда записывают линейно, например в виде слова

$$v_1; v_2; \dots v_n / w$$

или слова

$$v_1; v_2; \dots v_n \longrightarrow w.$$

### УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**1.** Пусть для слов в алфавите  $\{x, y\}$  задано правило: “Из слова  $\alpha x \beta$  ( $\alpha, \beta \in \{x, y\}^*$ ) можно получить слово  $\alpha \beta y$ ”. Выполните следующие задания.

(а) Выпишите все слова, которые можно получить из слова  $xyxy$  однократным применением этого правила.

(б) Перечислите все слова длины 3, к которым применимо заданное правило.

(в) Из каких слов можно получить слово  $xyx$  однократным применением рассматриваемого правила?

(г) Приведите пример слова, которое можно получить с помощью однократного применения рассматриваемого правила по крайней мере из шести различных слов в алфавите  $\{x, y\}$ .

**2.** Пусть для слов в алфавите  $\{x, y\}$  задано правило:

$$\frac{\varphi x \psi \quad \varphi y \psi}{y \varphi \psi x} \quad (\varphi, \psi \in \{x, y\}^*).$$

(а) Какие слова можно получить однократным применением этого правила к словам, взятым из множества слов  $\{x, y\}$ ?

(б) Какие слова можно получить однократным применением этого правила к словам, взятым из множества слов  $\{xux; yux\}$ ?

(в) Из каких пар слов можно получить однократным применением этого правила слово  $yuyx$ ?

**3.** Рассматриваются слова в алфавите  $\{x, y\}$ . Каждое из следующих правил задайте схемой вида  $(\star)$ , где  $v_1, v_2, \dots, v_n w$  — слова, имеющие вхождения основных символов, метапеременных и, если необходимо, обозначений операций подстановки):

(а) “к слову разрешается приписать слева букву  $x$ ”;

(б) “к слову, содержащему вхождение буквы  $x$  (и только к такому слову) разрешается приписать справа букву  $y$ ”;

(в) “из слова разрешается вычеркнуть любое вхождение под слова  $xux$ ”;

(г) “из слова разрешается вычеркнуть любые два вхождения буквы  $x$  и приписать слева к полученному слову букву  $y$ ”;

(д) “ разрешается вычеркнуть первое вхождение первой буквы в слово и одновременно приписать справа слово  $yy$ ”.

**4\*.** Пусть для слов в алфавите  $\{x, y, z\}$  задано правило:  $\frac{(\alpha)_y^x}{(\alpha)_z^x}$ , где  $\alpha$  — метапеременная, обозначающая произвольное слово из  $\{x, y, z\}^+$ .

(а) Какое слово можно получить однократным применением данного правила из слова  $zy$ ?

(б) Примените данное правило к слову  $xz$ .

(в) Покажите, что из слова  $yy$  однократным применением данного правила можно получить каждое из слов  $yz, zy, zz$ .

(г) Сколько различных слов можно получить из слова  $zyzyzy$  однократным применением данного правила?

(д) Перечислите все слова, из которых можно получить слово  $zyzz$  однократным применением данного правила.

(е) Из каких слов можно получить слово  $zyz$  однократным применением данного правила?

**5\*.** Пусть для слов в алфавите  $\{a, b, c\}$  задано правило:  $\frac{(\varphi)_b^a}{a\varphi}$ , где  $\varphi$  — метапеременная, обозначающая произвольное слово из  $\{a, b, c\}^*$ .

(а) Примените это правило к слову  $c$ .

(б) Покажите, что из слова  $bc$  однократным применением этого правила можно получить как слово  $aac$ , так и слово  $abc$ .

(в) Из какого слова можно получить слово  $abab$  однократным применением этого правила?

(г) Сколько слов можно получить из слова  $bcb$  однократным применением этого правила?

(д) Можно ли применить это правило к слову  $ac$ ? Ответ докажите.

(е) Существует ли слово, которое бы можно было получить однократным применением этого правила хотя бы из двух различных слов?

**6\*.** Рассматриваются слова в алфавите  $\{x, y\}$ . Каждое из следующих правил задайте схемой вида  $(\star)$ , где  $v_1, v_2, \dots, v_n w$  — слова, имеющие вхождения основных символов, метапеременных и, если необходимо, обозначений операций подстановки):

(а) “разрешается не изменять данное слово или заменить в нём одно или несколько произвольных вхождений под слова  $xu$  на вхождения слова  $yx$ ”;

(б) “разрешается не изменять данное слово или вычеркнуть из него одно или несколько произвольных вхождений слова  $xx$ ”.

## ЗАДАНИЕ 3. Синтаксис стандартного языка термов

Мы приступаем к изучению первого для нас формального языка. Точнее, это будет целый вид довольно простых языков. На этом примере мы познакомимся с основными приемами построения и аспектами изучения формальных языков. В дальнейшем эти языки мы расширим.

Прототипом общего понятия терма является, в частности, понятие многочлена.

### УЧЕБНЫЕ ЗАДАЧИ

1. ВЫУЧИТЬ ТЕРМИНЫ И ИХ ЗНАЧЕНИЯ: *синтаксис языка, семантика языка, язык-объект, язык исследователя, предметная константа,  $n$ -местный функциональный символ, предметная переменная, сигнатура языка термов, терм сигнатуры  $S$ .*

2. НАУЧИТЬСЯ ВЫПОЛНЯТЬ: *строить доказательство терма (древовидное и линейное), узнавать термы среди других символьных цепочек.*