

Значение предметной переменной. Значением предметной переменной считается элемент из множества M , который назначен в качестве такового.

Значение терма.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть в множестве M задана интерпретация сигнатуры языка термов и значения всех предметных переменных, входящих в терм t . Значение терма t в данной интерпретации при данных значениях переменных определяется следующим образом:

(1) если t есть предметная переменная, то значение терма t есть значение этой переменной;

(2) если t есть предметная константа c , то значение терма t есть тот элемент из M , именем которого является c ;

(3) если t есть $f^n t_1 \dots t_n$, а значения термов t_1, \dots, t_n есть m_1, \dots, m_n соответственно, то значение терма t есть значение n -местной функции с именем f^n от элементов m_1, \dots, m_n , т. е.

$$f^n(m_1, \dots, m_n).$$

ПРИМЕР. Пусть задана интерпретация сигнатуры $\{c_1, f_1^2, f_2^2\}$ в множестве \mathbb{R} всех вещественных чисел, при которой c_1 есть имя числа 1, функциональный символ f_1^2 есть имя функции вычисления суммы двух чисел (имя операции сложения), а символ f_2^2 — имя операции умножения двух чисел. Пусть значение переменной x_0 есть 5.

Вычислим значение термов $f_2^2 x_0 c_1$ и $f_1^2 x_0 f_2^2 x_0 c_1$:

$$1) f_2^2 x_0 c_1(5) = f_2^2(5, 1) = 5 \cdot 1 = 5;$$

$$2) f_1^2 x_0 f_2^2 x_0 c_1(5) = f_1^2(5, f_2^2(5, 1)) = 5 + 5 = 10.$$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Предложите примеры интерпретаций сигнатуры $\{c_0, f_1^1, f_2^2, f_3^3\}$ в множествах:

$$(a) \mathbb{Z}; \quad (б) \{a, b, c\}; \quad (в) (0; 1) \quad (г) \{a, b\}^*.$$

2. Пусть сигнатура $\{c_1, c_2, f_1^1, f_2^1, f_3^2, f_4^2\}$ интерпретируется в множестве $W = \{A, И, К, М, Р, С\}^*$ следующим образом: константа c_1 интерпретируется буквой А, константа c_2 интерпретируется буквой И, а также для всяких элементов m, m_1, m_2 из множества W выполнено:

$$f_1^1(m) := mm;$$

$$f_3^2(m_1, m_2) := m_1 m_2;$$

$$f_2^1(m) := AmA;$$

$$f_4^2(m_1, m_2) := m_2 m_1.$$

2.1. Вычислите значения термов:

(а) $f_4^2 x_1 c_1$ при значении переменной x_1 равном С;

(б) $f_4^2 f_2^1 x_1 c_2$ при значении переменной x_1 равном М, а значении x_2 равном Р;

(в) $f_4^2 x_2 f_3^2 x_1 c_2$ при значении переменной x_1 равном М, а значении x_2 равном Р;

(г) $f_4^2 f_4^2 x_2 f_3^2 x_1 c_1 x_3$ при значениях переменных x_1, x_2, x_3 , равных Р, К, М соответственно;

(д) $f_3^2 f_4^2 f_3^2 x_2 c_2 f_3^2 x_1 c_2 f_4^2 c_1 x_3$ при значениях переменных x_1, x_2, x_3 , равных С, К, Р соответственно.

2.2. Пусть значения переменных x_1 и x_2 есть М и С соответственно. Какие из термов, принимают одинаковые значения:

$$t_1 \doteq f_1^1 f_3^2 x_1 c_1; \quad t_2 \doteq f_2^1 f_3^2 x_2 x_1; \quad t_3 \doteq f_4^2 f_2^1 x_1 x_1;$$

$$t_4 \doteq f_3^2 x_1 f_2^1 f_1^1 x_2; \quad t_5 \doteq f_4^2 f_4^2 f_1^1 x_2 c_2 x_1; \quad t_6 \doteq f_3^2 f_3^2 x_1 c_2 f_1^1 x_1;$$

$$t_7 \doteq f_3^2 f_3^2 c_1 x_2 f_4^2 c_1 x_1; \quad t_8 \doteq f_3^2 x_1 f_4^2 f_3^2 x_2 c_1 f_3^2 c_1 x_2.$$

2.3. При каких значениях переменных:

(а) $f_3^2 x_1 f_2^1 x_2$ имеет значение ‘РАСА’;

(б) $f_4^2 f_2^1 x_2 x_1$ имеет значение ‘КАРА’;

(в) $f_3^2 c_2 f_3^2 x_1 x_2$ имеет значение ‘ИСК’;

(г) $f_4^2 f_2^1 f_4^2 x_1 x_2 x_3$ имеет значение ‘МАРКА’;

(д) $f_3^2 f_4^2 c_1 x_2 f_4^2 x_1 c_2$ имеет значение ‘КАИР’.

3. Пусть задана интерпретация сигнатуры $\{c_1, f_1^1, f_2^2, f_3^2\}$, в множестве \mathbb{Z} всех целых чисел. Пусть в этой интерпретации c_1 есть имя числа 1, и для всяких $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ выполнено:

$$f_1^1(m_1) = -m_1, \quad f_2^2(m_1, m_2) = m_1 + m_2, \quad f_3^2(m_1, m_2) = m_1 \cdot m_2.$$

3.1. Найдите в данной интерпретации значения термов:

(а) $f_1^1 f_1^1 f_1^1 c_1$;

(б) $f_2^2 f_3^2 x_0 x_1 f_1^1 x_2$ при значениях переменных x_0, x_1, x_2 , равных 1, 0, 2 соответственно;

(в) $f_1^1 f_3^2 x_0 f_2^2 x_1 x_2$ при значениях переменных x_0, x_1, x_2 , равных 2, -3, 5 соответственно;

(г) $f_2^2 f_3^2 x_1 f_3^2 x_0 f_1^1 x_1 f_2^2 f_1^1 f_1^1 f_2^2 x_0 f_1^1 x_1$ при значениях переменных x_0, x_1 равных 1, 2 соответственно.

3.2. Найдите все значения предметных переменных в данной интерпретации, при которых терм

- (а) $f_1^1 f_1^1 x_0$ имеет значение -3;
- (б) $f_3^2 x_0 x_0$ имеет значение 2;
- (в) $f_2^2 f_3^2 x_0 x_1 f_1^1 x_0$ имеет значение 0;
- (г) $f_3^2 f_1^1 x_0 x_1$ имеет значение -1.

3.3. Напишите терм данной сигнатуры, который при заданной в задаче интерпретации, при всех значениях переменной x_0 принимает то же самое значение, что и выражение:

- (а) $x_0 - 1$; (б) $x_0 + 2$; (в) $2x_0 + 1$; (г) $x_0(x_0 - 1)$.

3.4*. Напишите стандартный терм данной сигнатуры, содержащий вхождения переменной x_0 и который при заданной в задаче интерпретации, при любом значении переменной x_0 принимает значение:

- (а) большее, чем значение x_0 ; (б) меньшее, чем значение x_0 ;
- (в) равно 0; (г) больше нуля.

3.5*. Сколько существует стандартных термов данной сигнатуры, которые при заданной в задаче интерпретации этой сигнатуры при любом значении переменной x_0 принимает то же самое значение, что и выражение $x_0^2 - 3x_0 + 2$?

4. Укажите интерпретацию сигнатуры $S = \{f_1^1, f_2^2\}$ в множестве натуральных чисел \mathbb{N} , такую, что терм $f_2^2 x_0 f_1^1 x_1$ при значениях переменных x_0, x_1 равных 1, 3 соответственно принимает значение 11.

ЗАДАНИЕ 5. Синтаксис языка атомарных формул

Язык атомарных формул представляет собой расширение языка термов. Одиночное уравнение или неравенство, простое предложение естественного языка представляют собой примеры атомарных формул (соответствующих языков). Язык атомарных формул представляет собой промежуточный язык и призван играть подготовительную роль к изучению более сложных языков.

УЧЕБНЫЕ ЗАДАЧИ

1. ВЫУЧИТЬ ТЕРМИНЫ И ИХ ЗНАЧЕНИЯ: n -местный предикатный символ (символ n -местного отношения, сигнатура языка атомарных формул, атомарная формула сигнатуры S).

2. НАУЧИТЬСЯ ВЫПОЛНЯТЬ: строить доказательство атомарной формулы, узнавать атомарные формулы среди других символьных цепочек и отличать их от термов.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Алфавит языка атомарных формул. Рассмотрим еще одно произвольное множество индексов I и новое множество символов Rel :

$$\text{Rel} := \{P_i^{n_i} \mid i \in I, n_i \in \mathbb{N}\} \cup \{=\}.$$

Символу $P_i^{n_i}$ называется *символом n -местного отношения*, а также n_i -местной предикатной константой (предикатным символом); символ “ $=$ ” называется символом равенства и считается особым символом двухместного отношения. Множество символов Rel называется *множеством символов отношений* или *множеством предикатных символов*¹.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Алфавитом стандартного языка атомарных формул будем называть объединение множеств Con , Fun , Rel , Var .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $S := \text{Con} \cup \text{Fun} \cup \text{Rel}$ называется *сигнатурой стандартного языка атомарных формул*.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для того, чтобы задать сигнатуру языка атомарных формул, необходимо и достаточно выбрать множества I, J, K и отображения множеств I, J в \mathbb{N} : $i \mapsto n_i$ и $j \mapsto n_j$ соответственно. Меняя эти множества и отображение, мы можем изменить сигнатуру, а, следовательно, и алфавит языка. Таким образом, существует бесконечно много различных стандартных языков атомарных формул.

СОГЛАШЕНИЕ О ЗАПИСИ СИГНАТУРЫ. Поскольку знак “ $=$ ” мы считаем входящим в любую сигнатуру, то при перечислении элементов той или иной сигнатуры мы, для краткости, этот знак часто указывать не будем, подразумевая при этом, что он в сигнатуру входит автоматически. Например, запись “сигнатура $\{c_0, f_1^2, P_1^2\}$ ” означает, что в рассматриваемую сигнатуру входят два двухместных предикатных знака: P_1^2 и $=$.

Определение *терма языка атомарных формул* такое же, как определение термина языка термов.

¹Обозначение Rel происходит от английского слова *relation* — отношение.