

Понятие синтаксиса и семантики. Мы считаем языком совокупность его выражений, а выражением некоторую цепочку символов. При изучении выражения языка обычно пытаются ответить на два вопроса:

- 1) Из каких символов данное выражение построено и в какой последовательности они следуют друг за другом?
- 2) Что означает данное выражение?

На первый вопрос отвечает *синтаксис* языка, на второй — его *семантика*.

Синтаксис — это система правил образования (конструирования) выражений языка. В синтаксисе отражаются отношения символов языка друг с другом.

Семантика — это система правил нахождения значений выражений языка. В семантике отражаются отношения символов языка с той действительностью, которую язык описывает.

Понятие языка исследователя. При изучении того или иного языка приходится записывать его свойства; элементы языка также иногда удобно записывать в общем виде. Заметим, что все эти записи делаются на некотором языке. Приходится различать тот язык, который изучается и тот язык, с помощью которого это делается. Язык, который изучается, называют *языком-объектом*, а язык с помощью которого это делается — *языком исследователя* или *метаязыком*. При изучении языков математической логики в качестве языка исследователя мы будем использовать обычный язык математики.

Исходное представление о языке термов. Одно из значений английского слова “*term*” совпадает со значением русского слова “*термин*”. Термин — это слово или выражение, обозначающее тот или иной предмет мысли или вычислений. Любой язык, в том числе и язык программирования, включает в себя термы.

Язык термов — это искусственный формализованный язык, в котором воспроизводится структура терминов. Язык термов призван служить моделью для изучения и понимания всех языков, содержащих термы.

Алфавит языка термов. Символы алфавита будут содержать *индексы*. Пример символа: f_5^3 . Здесь 5 — *нижний индекс*, 3 — *верхний индекс*.

Нижние индексы будут использоваться просто для нумерации символов. Символы нумеруются, для того, чтобы мы могли их отличать друг от друга.

Верхние индексы служат указанием на то, с каким количеством соответствующих выражений будет соединяться данный символ при получении более сложных выражений языка. Верхний индекс можно назвать *валентностью* соответствующего символа.

Напоминаем, что $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ — это множество всех натуральных чисел. Пусть J и K обозначают произвольные множества индексов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Алфавитом стандартного языка термов будем называть объединение трёх множеств: Con , Fun , Var :	
$\text{Con} := \{c_k \mid k \in K\}$	— множество предметных констант;
$\text{Fun} := \{f_j^{n_j} \mid j \in J, n_j \in \mathbb{N}\}$	— множество функциональных символов (функциональных констант);
$\text{Var} := \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$	— множество предметных переменных.

Символ $f_j^{n_j}$ называется n_j -местным функциональным символом или n_j -местной функциональной константой. Двухместные функциональные символы называют также *бинарными*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $S = \text{Con} \cup \text{Fun}$ называется *сигнатурой языка термов*.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для того, чтобы задать сигнатуру языка термов, необходимо и достаточно выбрать множества J , K и отображение множества J в \mathbb{N} : $j \mapsto n_j$. Меняя эти множества и отображение, мы можем изменить сигнатуру, а, следовательно, и алфавит языка. Таким образом, существует бесконечно много различных стандартных языков термов.

Определение терма. Пусть S — некоторая сигнатура языка термов. Дадим определение S -терма (т. е. терма сигнатуры S), который также будем называть просто термом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.	
(T1)	Предметные переменные есть <i>термы</i> .
(T2)	Предметные константы есть <i>термы</i> .
(T3)	Если f^n — n -местный функциональный символ, а t_1, \dots, t_n — есть термы, то $f^n t_1 \dots t_n$ также является <i>термом</i> .

Определение такого вида, как приведенное, называют *индуктивным*. В индуктивном определении выделяются две части. В первой *перечисля-*

ются некоторые из определяемых объектов. В определении термина первая часть состоит из пунктов (Т1) и (Т2). Во второй части *излагаются правила*, в которых указывается, как из одних объектов (перечисленных или уже построенных) можно построить другие. В определении термина эта часть состоит из одного правила (Т3).

Используя введённые символьные переменные, мы можем записать определение термина в виде *правил построения термов* следующим образом:

$$\frac{}{x} \quad (\text{Т1}); \quad \frac{}{c} \quad (\text{Т2}); \quad \frac{t_1 \dots t_n}{f^n t_1 \dots t_n} \quad (\text{Т3}).$$

ПРИМЕРЫ. 1. Термами сигнатуры $\{c_1, c_2, f_1^1, f_2^2\}$, в частности, являются: $x_0, f_1^1 x_0, c_1, c_2, f_2^2 c_1 c_2$.

2. Из термов $t \doteq f_1^1 x_0$ и $t' \doteq f_2^2 c_1 c_2$ можно получить, например, термы $f_2^2 t t' \doteq f_2^2 f_1^1 x_0 f_2^2 c_1 c_2$ и $f_2^2 t' t \doteq f_2^2 f_2^2 c_1 c_2 f_1^1 x_0$, а также терм $f_1^1 t' \doteq f_1^1 f_2^2 c_1 c_2$.

3. Построим *линейное доказательство* термина $f_1^1 f_2^2 x_1 f_1^1 c_1$. Читаем данное слово справа-налево, выписывая встретившиеся новые термы. Вывод оформляем в виде последовательности термов, указав для каждого выписанного термина правило построения, позволяющее считать это слово термом:

- (1) c_1 (Т2)
- (2) $f_1^1 c_1$ (Т3), применённое к 1. с использованием f_1^1
- (3) x_1 (Т1)
- (4) $f_2^2 x_1 f_1^1 c_1$ (Т3), применённое к 3. и 2. с использованием f_2^2
- (5) $f_1^1 f_2^2 x_1 f_1^1 c_1$ (Т3), применённое к 4. с использованием f_1^1 .

4. А вот *древовидное доказательство* этого же термина:

$$\frac{\frac{}{x_1} \quad (\text{Т1}) \quad \frac{\frac{}{c_1} \quad (\text{Т2})}{f_1^1 c_1} \quad (\text{Т3})}{f_2^2 x_1 f_1^1 c_1} \quad (\text{Т3})$$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. О каждом из следующих слов доказите, что оно является термом сигнатуры $\{c_0, c_1, c_2, c_3, f_1^3, f_2^2, f_3^1\}$:

- (а) $f_3^1 f_2^2 f_3^1 c_2 x_0$;
- (б) $f_3^1 f_2^2 x_0 f_3^1 c_0$;
- (в) $f_2^2 x_0 f_2^2 f_3^1 c_2 c_3$;
- (г) $f_3^1 f_3^1 f_2^2 x_0 c_0 x_1 x_2$;
- (д) $f_1^3 x_3 f_2^2 x_0 c_0 f_1^3 c_1 c_2 c_3$;
- (е) $f_2^2 f_1^3 f_3^1 c_0 x_0 f_2^2 c_1 f_3^1 x_2 c_3$.

2. Пусть f^1 — одноместный, g^2 — двухместный, h^3 — трехместный функциональные символы некоторого стандартного языка первого порядка. Являются ли терминами этого языка слова:

- (а) $f^1 g^2 x_0 x_1$;
- (б) $f^1 g^2 x_0 f^1 x_1$;
- (в) $f^1 g^2 x_0 h^3 x_0 x_1 x_2$;
- (г) $h^3 g^2 f^1 x_7 x_0 x_1$;
- (д) $g^2 f^1 x_2 h^3 x_0 x_1 x_2$;
- (е) $f^1 g^2 x_0 h^3 x_0 x_1 x_2$;
- (ж) $g^2 f^1 h^3 x_0 g^2 x_1 x_2 x_1 x_2$;
- (з) $g^2 x_0 h^3 x_0 x_1 f^1 x_5$;
- (и) $g^2 f^1 x_2 h^3 x_4 g^2 x_1 x_2 x_1 x_2$?

3. Припишите, если возможно, к данному слову слева или справа один символ так, чтобы полученное слово стало термом сигнатуры $\{c_0, c_1, c_2, c_3, f_1^3, f_2^2, f_3^1\}$:

- (а) $x_0 f_2^2 c_0$;
- (б) $f_3^1 x_1 f_2^2 x_1 x_2$;
- (в) $f_1^3 f_1^3 x_0 f_2^2 x_1 c_0 x_2 x_1$.

4. В данном слове переставьте местами два вхождения символов алфавита стандартного языка термов так, чтобы получился терм. Найдите все решения этой задачи:

- (а) $x_0 f_1^1 c_0 f_2^2$;
- (б) $f_1^1 f_1^1 x_0 f_2^2 c_0$;
- (в) $f_2^2 f_1^1 c_0 x_0 f_1^1 f_2^2 x_1$.

5. Вычеркните один из символов так, чтобы оставшееся слово оказалось термом:

- (а) $f_2^2 f_2^2 x_0 f_3^2 x_1 f_1^1 x_2$;
- (б) $f_5^2 x_2 f_3^2 x_0 x_1 f_3^2 f_2^2 x_0 c_0$;

6. Заполните пустые клетки так, чтобы получился терм стандартного языка термов:

- (а)

f_2^1		x_1	f_1^1	c_0
---------	--	-------	---------	-------

 (б)

f_3^2		x_1	x_0	f_1^1	x_1
---------	--	-------	-------	---------	-------
- (в)

f_2^2		f_2^2	x_0		
---------	--	---------	-------	--	--
- (г)

f_2^2	x_0		f_2^2		x_2	c_0
---------	-------	--	---------	--	-------	-------
- (д)

f_2^2	f_1^1		x_0		c_0	
---------	---------	--	-------	--	-------	--
- (е)

	f_1^1			c_0		x_0
--	---------	--	--	-------	--	-------

7. Из [Лавров, Максимова, 1995, II, §4, №5]. Опишите множество всех термов, в которые имеют вхождения только следующие буквы: предметная переменная x_0 и функциональный символ f_1^1 .

8. Постройте терм сигнатуры $\{c_0, c_1, f_1^1, f_2^2\}$, содержащий единственное вхождение функционального символа f_1^1 и имеющего длину 8.

9*. Докажите, что длина терма сигнатуры $\{c_0, f_2^2\}$ не может быть числом чётным.

10*. Докажите, что существуют термы сигнатуры $\{c_0, f_2^2\}$ любой нечетной длины.

* * *

11. Пусть в сигнатуру стандартного языка термов входят n -местные функциональные символы f и f' . Докажите, что если некоторое вхождение в терм символа f заменить на вхождение символа f' , то полученное слово также будет термом.

РЕКОМЕНДАЦИЯ: Доказательство проведите индукцией по длине терма.

12. Пусть в сигнатуру стандартного языка термов входит n -местный функциональный символ f^n и $n + 1$ -местный функциональный символ f^{n+1} . Пусть t, s — термы. Докажите, что если некоторое вхождение в терм t символа f^n заменить на вхождение слова $f^{n+1}s$, то полученное слово также будет термом.

РЕКОМЕНДАЦИЯ: Доказательство проведите индукцией по длине терма t .

13. Пусть f^n есть n -местный функциональный символ сигнатуры стандартного языка термов, а t_1, \dots, t_k — термы этого языка, причем $k < n$. Докажите, что слово $f^n t_1 \dots t_k$ термом не является.

ЗАДАНИЕ 4. Семантика языка термов

Правила семантики языка термов таковы, что значение каждого терма вычисляется исходя из того, что обозначают (т. е. какие значения имеют) те символы, из которых этот терм составлен. Изначально, символы, входящие в терм, например, символы f_3^2 , c_{12} , или x_0 ничего, кроме самих себя, не обозначают (т. е. значений не имеют). Поэтому, прежде, чем находить значение того или иного терма *придают значения* каждому из

входящих в него символов. Делают это для разных частей алфавита по-разному.

УЧЕБНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Выучить термины и их значения: *n -местная функция (алгебраическая операция), интерпретация сигнатуры языка термов, значение терма в данной интерпретации при данных значениях переменных.*

2. НАУЧИТЬСЯ ВЫПОЛНЯТЬ: *находить значение терма.*

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Понятие n -местной функции в множестве. Пусть M — произвольное непустое множество, n — натуральное число. Напомним, что n -местной функцией в множестве M называют отображение

$$M^n \longrightarrow M,$$

т. е. отображение n -й декартовой степени множества M в множество M . Каждой последовательности из n элементов множества M оно ставит в соответствие некоторый (и, притом, единственный) элемент того же множества. Например, отображение, сопоставляющее каждой паре вещественных чисел их сумму, является 2-местной функцией в множестве вещественных чисел. Заметим, что n -местную функцию называют также *n -местной алгебраической операцией в M* . Значение n -местной функции g от элементов m_1, \dots, m_n мы будем обозначать $g(m_1, \dots, m_n)$.

Понятие интерпретации сигнатуры. Рассмотрим произвольную сигнатуру $\text{Con} \cup \text{Fun}$ стандартного языка термов. Возьмем произвольное непустое множество M . *Интерпретацией сигнатуры в этом множестве* можно назвать следующую процедуру, а также ее результат.

1) Каждой предметной константе из Con сопоставим элемент из множества M . После этого константу будем считать именем выбранного элемента.

2) Каждому функциональному n -местному символу из Fun сопоставим n -местную функцию в множестве M . После этого функциональный символ будем считать именем соответствующей функции.

После выполнения этой процедуры говорят, что на множестве *задана интерпретация*¹ сигнатуры $\text{Con} \cup \text{Fun}$.

ПРИМЕР. Пусть дана сигнатура $\{c_0, f_1^2\}$ языка термов. Интерпретируем эту сигнатуру в множестве \mathbb{N} всех натуральных чисел. Положим, что c_0 — это имя числа 0, функциональный символ f_1^2 — имя функции сложения двух натуральных чисел. Для этой функции, например, имеем: $f_1^2(3, 2) = 5$.

¹ Слово интерпретация происходит от латинского *interpretatio* — разъяснение.