Тема 6. Функции и пределы

Содержание

6.1. Функции и их графики

6.1.1. Определение функции

Везде далее в этом параграфе под множествами будут пониматься числовые множества, т. е. множества, состоящие из действительных чисел.

Множество всех действительных чисел будет обозначаться буквой $\mathbb{R}$.

⇛ Пусть каждому числу x из некоторого множества X поставлено в соответствие одно и только одно число y. Тогда говорят, что на множестве X задана *функция*.

Способ (правило), с помощью которого устанавливается соответствие, определяющее данную функцию, обозначают той или иной буквой: f, g, h, $\varphi, \ldots$ Если, например, выбрана буква f, то пишут

$$y = f(x).$$

Переменная x при этом называется *независимой* переменной (или *аргументом*), а переменная y — *зависимой*.

Множество X называется *областью определения* данной функции и обозначается $D(f)$, а множество всех чисел y, соответствующих различным числам $x \in X$, — *областью значений* этой функции и обозначается $E(f)$.

⇛ Если числу x_0 из области определения функции $f(x)$ соответствует некоторое число y_0 из области значений, то y_0 называется *значением функции* в точке x_0 (или при $x = x_0$).

6.1.2. График функции

⇛ Пусть заданы прямоугольная система координат Oxy и функция $y = f(x)$. *Графиком функции* $f(x)$ называется множество всех точек плоскости с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

Множество точек на координатной плоскости является графиком некоторой функции в том и только в том случае, когда каждая вертикальная (т. е. параллельная оси Oy) прямая пересекает его не более чем в одной точке.

График функции $y = f(x)$ зачастую можно построить с помощью преобразований (сдвиг, растяжение) графика некоторой уже известной функции.

В частности:

1. График функции $y = f(x) + a$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Oy на $|a|$ единиц (вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$);

2. График функции $y = f(x - b)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Ox на $|b|$ единиц (вправо, если $b > 0$, и влево, если $b < 0$);

3. График функции $y = kf(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением (сжатием) вдоль оси Oy в k раз ($1/k$ раз), если $k > 1$ ($k \in (0,1)$);

4. График функции $y = f(mx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием (растяжением) по оси Ox в m раз ($1/m$ раз), если $m > 1$ ($m \in (0,1)$);

5. График функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением относительно оси Ox;

6. График функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением относительно оси Oy.

6.1.3. Четность, нечетность и периодичность функции

⇛ Функция называется *четной*, если:
1) множество $D(f)$ симметрично относительно нуля (т. е. $\forall x \in D(f) \Longrightarrow -x \in D(f)$);
2) для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство $f(-x) = f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy.

⇛ Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если:
1) множество $D(f)$ симметрично относительно нуля;
2) для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция, не являющаяся ни четной, ни нечетной, называется *функцией общего вида*.

⇛ Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует число $T \neq 0$, что для любого $x \in D(f)$ справедливы условия:
1) $x + T \in D(f)$, $x - T \in D(f)$;
2) $f(x + T) = f(x)$.

Число T называется *периодом* функции $f(x)$. Если T — период функции $f(x)$, то числа $\pm T$, $\pm 2T$, $\pm 3T, \ldots$ также являются периодами этой функции. Как правило, под периодом функции понимают наименьший из ее положительных периодов (*основной период*), если таковой существует.

Если функция $f(x)$ периодическая с периодом T, то ее график переходит сам в себя при сдвиге вдоль оси Ox на T единиц влево или вправо.

6.1.4. Сложная функция. Элементарные функции

⇛ Пусть область значений функции $y = f(x)$ содержится в области определения функции $g(y)$. Тогда функция

$$z = g(f(x)),\ x \in D(f)$$

называется *сложной функцией* или *композицией* функций f и g и обозначается $g \circ f$.

Основными (или *простейшими*) *элементарными функциями* называются: *постоянная функция* $y = c$; *степенная функция* $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$; *показательная функция* $y = a^x$, $a > 0$; *логарифмическая функция* $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$; *тригонометрические функции* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$ $\left(\text{где } \sec x = \dfrac{1}{\cos x}\right)$, $y = \operatorname{cosec} x$ $\left(\text{где } \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}\right)$; *обратные тригонометрические функции* $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

На рисунках 68,*а* и 68,*б* приведены соответственно графики функций $y = \arcsin x$ и $y = \operatorname{arctg} x$.

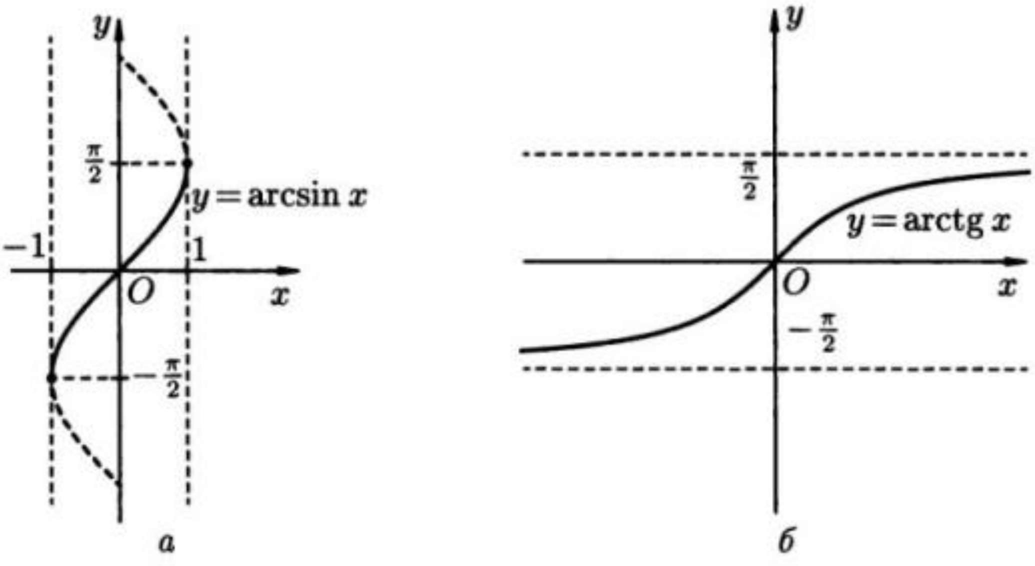

Рис. 68

⇛ *Элементарными функциями* называются функции, которые получаются из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций (+, −, ·, :) и композиций (т. е. образования сложных функций).

6.1.5. Монотонная, обратная и ограниченная функция

⇛ Функция $f(x)$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*) на множестве $X \subseteq D(f)$, если для любых значений $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) \geqslant f(x_2)$).

⇛ Функция $f(x)$ называется *монотонной*, если она невозрастающая или неубывающая.

⇛ Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве $X \subseteq D(f)$, если для любых значений $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) > f(x_2)$).

⇛ Функция $f(x)$ называется *строго монотонной*, если она возрастающая или убывающая.

⇛ Пусть для любых различных значений $x_1, x_2 \in D(f)$ справедливо, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда для любого $y \in E(f)$ найдется только одно значение $x = g(y) \in D(f)$, такое, что $y = f(x)$. Функция $x = g(y)$, определенная на $E(f)$, называется *обратной* для функции $f(x)$.

Отметим, что $E(g) = D(f)$.

Если функция $f(x)$ имеет обратную функцию, то каждая горизонтальная прямая $y = c$ пересекает ее график не более чем в одной точке.

Пусть функция $x = g(y)$ (иногда ее обозначают $x = f^{-1}(y)$) — обратная для функции $y = f(x)$. Если обозначить аргумент этой функции через x, то ее можно записать в виде $y = g(x)$. Тогда

$$g(f(x)) = x \text{ для всех } x \in D(f),$$

$$f(g(x)) = x \text{ для всех } x \in E(f).$$

Иными словами, если функция $g(x)$ — обратная для функции $f(x)$, то функция $f(x)$ — обратная для функции $g(x)$; поэтому обе эти функции называют еще *взаимообратными*.

Пусть функция $y = f(x)$ вырастает (убывает) на отрезке $[a; b]$. Тогда на отрезке $[f(a); f(b)]$ (соответственно, $[f(b); f(a)]$) определена возрастающая (убывающая) функция $g(x)$, обратная для функции $f(x)$.

График функции $g(x)$, обратной для функции $f(x)$, симметричен графику $f(x)$ относительно прямой $y = x$.

⇛ Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху (снизу) на множестве* $X \subseteq D(f)$, если существует такое число M, что

$$f(x) \leqslant M \quad (f(x) \geqslant M) \text{ для всех } x \in X.$$

⇛ Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной на множестве* $X \subseteq D(f)$, если существует такое число $M > 0$, что

$$|f(x)| \leqslant M \text{ для всех } x \in X.$$

6.1.6. Гиперболические функции

Гиперболическими функциями называются следующие четыре функции:

1) *гиперболический синус* $y = \operatorname{sh} x$, где $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (график этой нечетной возрастающей функции изображен на рис. 69,*а*);

2) *гиперболический косинус* $y = \operatorname{ch} x$, где $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (график этой четной функции см. на рис. 69,*б*);

3) *гиперболический тангенс* $y = \operatorname{th} x$, где $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (график этой нечетной возрастающей функции см. на рис. 69,*в*);

4) *гиперболический котангенс* $y = \operatorname{cth} x$, где $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ (график этой нечетной убывающей функции см. на рис. 69,*г*).

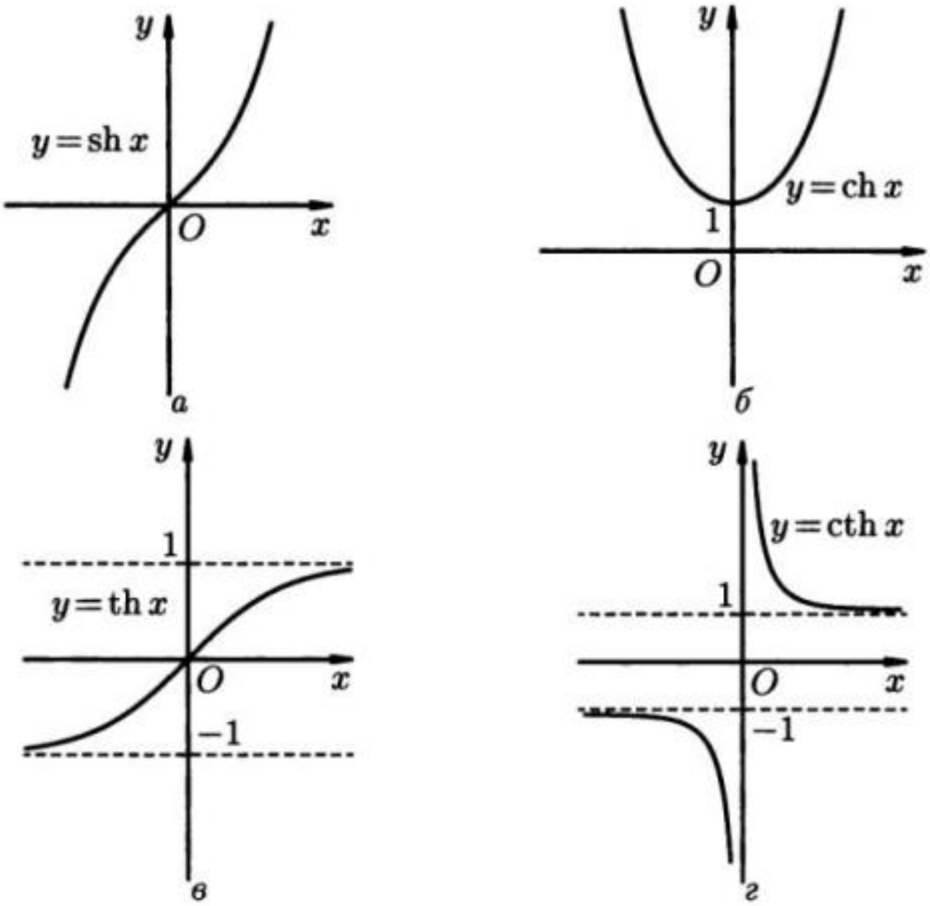

Рис. 69

Справедливы формулы:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x,$$
$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \quad \text{и т. д.}$$

6.1.7. Неявные и параметрически заданные функции

Формула $y = f(x)$ определяет явный способ задания функции. Однако во многих случаях приходится использовать неявный способ задания функции.

⇒ Пусть данная функция определена на множестве D. Тогда, если каждое значение $x \in D$ и соответствующее ему значение функции y удовлетворяют некоторому (одному и тому же) уравнению $F(x; y) = 0$, то говорят, что эта ***функция задана неявно уравнением*** $F(x; y) = 0$. Сама функция в этом случае называется ***неявной функцией***.

⇒ ***Графиком уравнения*** $F(x; y) = 0$ называется множество всех точек координатной плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Пусть на некотором множестве $X \subset R$ заданы две функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Тогда множество всех точек на плоскости Oxy с координатами $(x(t), y(t))$, где $t \in X$, называется ***кривой*** (или линией), ***заданной параметрически***.

Если кривая, заданная параметрически, является графиком некоторой функции $y = f(x)$, то эта функция также называется ***функцией, заданной параметрически*** (или параметрически заданной).