§ 2.2. Практическая работа (решение задач)

7.2.1. Найти дифференциал функции

$$y = e^{x^3}.$$

❍ Так как $dy = y'dx$, то в данном случае $dy = \left(e^{x^3}\right)' dx = 3x^2 \cdot e^{x^3} dx$. ●

Найти дифференциал функции:

7.2.2. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.

7.2.3. $y = (x^3 - x) \operatorname{tg} x$.

7.2.4. $y = x^2 \ln x$.

7.2.5. $y = \dfrac{x-2}{x^2+1}$.

7.2.6. Найти приращение и дифференциал функции $y = x^2 - 3x + 1$ в точке $x_0 = 2$, если $\Delta x = 0{,}1$.

❍ Сначала найдем приращение Δy в общем виде:

$$\begin{aligned}\Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = \\ &= \left[(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1\right] - (x^2 - 3x + 1) = \\ &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1 - x^2 + 3x - 1 = \\ &= 2x\Delta x - 3\Delta x + (\Delta x)^2 = (2x - 3)\Delta x + (\Delta x)^2.\end{aligned}$$

Из полученного выражения для приращения Δy видно, что его линейная часть в произвольной точке x_0 равна $(2x_0 - 3)\Delta x$. Тогда по определению дифференциал данной функции будет равен $dy = (2x - 3)\Delta x$, или, в более привычной записи, $dy = (2x - 3)dx$.

Второе слагаемое в полученной записи для Δy, т. е. $(\Delta x)^2$, есть бесконечно малая более высокого порядка, чем первое слагаемое.

Заметим, что можно найти dy и сразу (без вычисления Δy) по формуле $dy = y'dx$, откуда $dy = (x^2 - 3x + 1)'dx = (2x - 3)dx$.

Теперь найдем Δy и dy в точке $x_0 = 2$, если $\Delta x = 0{,}1$:

$$\Delta y = (2 \cdot 2 - 3) \cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 0{,}1 + 0{,}01 = 0{,}11, \quad dy = 0{,}1.$$ ●

Найти приращение и дифференциал функции $y = y(x)$ в общем виде, а также в точке x_0, если известно Δx:

7.2.7. $y = x^3 + 2x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}01$.

7.2.8. $y = x^2 + x - 5$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0{,}5$.

7.2.9. Вычислить приближенно:

1) $\ln 1{,}02$;

2) $\sqrt{24}$.

❍ 1) Воспользуемся приближенной формулой

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Тогда, подставляя $f(x) = \ln x$, получим

$$\ln(x_0 + \Delta x) \approx \ln x_0 + \frac{1}{x_0} \cdot \Delta x.$$

Полагая здесь $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}02$, найдем

$$\ln 1{,}02 \approx \ln 1 + \frac{1}{1} \cdot 0{,}02 = 0{,}02.$$

Таким образом, $\ln 1{,}02 \approx 0{,}02$.

2) Учитывая, что $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 25$, $\Delta x = -1$, получим

$$\sqrt{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x, \quad \text{т. е.}$$

$$\sqrt{24} \approx \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}} \cdot (-1) = 4{,}9.$$

Окончательно $\sqrt{24} \approx 4{,}9$. ●

Вычислить приближенно:

7.2.10. $\sqrt[3]{26}$.

7.2.11. $\operatorname{tg} 44^\circ$.

7.2.12. $(1{,}02)^5$.

7.2.13. Найти dy, d^2y и d^3y для функции $y = \sqrt[3]{x}$.

❍ Поскольку

$$dy = y'dx = (\sqrt[3]{x})'dx = \frac{1}{3}x^{-2/3}dx = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

то

$$d^2y = d(dy) = d\left(\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) = \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)'(dx)^2 =$$

$$= \frac{1}{3}(x^{-2/3})'dx = -\frac{2}{9}x^{-5/3}dx^2 = -\frac{2dx^2}{9x\sqrt[3]{x^2}}.$$

Отсюда

$$d^3y = d(d^2y) = d\left(-\frac{2}{9}\frac{dx^2}{x^{5/3}}\right) = -\frac{2}{9}(x^{-5/3})'\,dx^3 =$$

$$= \frac{10}{27}x^{-8/3}dx^3 = \frac{10dx^3}{27x^2\sqrt[3]{x^2}}.$$

То же самое можно было найти иначе, предварительно отыскав производные y', y'' и y''', а затем воспользоваться формулами: $d^2y = y''dx^2$, $d^3y = y'''dx^3$. ●

Найти dy и d^2y:

7.2.14. $y = (x^2+1)^3$. **7.2.15.** $y = \sin^2 x$.

Ответы

7.2.2. $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\cdot dx$. **7.2.3.** $dy = \left[(3x-1)\cdot \operatorname{tg} x + \frac{x^3-x}{\cos^2 x}\right]dx$.

7.2.4. $dy = x(2\ln x + 1)\,dx$. **7.2.5.** $dy = \frac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$.

7.2.7. $\Delta y = (3x^2+2)\Delta x + (3x+\Delta x)(\Delta x)^2$, $\Delta y = 0{,}050301$ в точке $x_0 = 1$ и при $\Delta x = 0{,}01$; $dy = (3x^2+2)\,dx$, $dy = 0{,}05$ в точке $x_0 = 1$ и при $\Delta x = 0{,}01$.
7.2.8. $\Delta y = (2x+1)\Delta x + (\Delta x)^2$, $\Delta y = 0{,}75$ в точке $x_0 = 0$ и при $\Delta x = 0{,}5$; $dy = (2x+1)\,dx$, $dy = 0{,}5$ в точке $x_0 = 0$ и при $\Delta x = 0{,}5$. **7.2.10.** 2,96.
7.2.11. 0,965. **7.2.12.** 1,1. **7.2.14.** $dy = 6x(x^2+1)^2dx$, $d^2y = 6(5x^2+1)(x^2+1)dx^2$. **7.2.15.** $dy = \sin 2x dx$, $d^2y = 2\cos 2x dx^2$.