

УЧЕБНЫЕ ЗАДАЧИ

1. ВЫУЧИТЬ ТЕРМИНЫ И ИХ ЗНАЧЕНИЯ: *n*-местное отношение, интерпретация сигнатуры языка атомарных формул, алгебраическая система, значение атомарной формулы в данной интерпретации при данных значениях переменных.

2. НАУЧИТЬСЯ ВЫПОЛНЯТЬ: *находить значение атомарной формулы; находить значения переменных, при которых данная атомарная формула имеет данное значение.*

Понятие *n*-местного отношения. Пусть M — произвольное непустое множество, n — натуральное число. Напомним, что *n*-местным отношением в множестве M называют произвольное подмножество множества M^n , т. е. подмножество n -й декартовой степени множества M в множество M .

Примером 2-местного (двухместного) отношения в множестве вещественных чисел \mathbb{R} может служить отношение “ $<$ ”. Примером 3-местного (трехместного) отношения — множество всех троек (x, y, z) таких, что $2x + 3y - 8z = 0$.

Интерпретация сигнатуры языка атомарных формул. Рассмотрим произвольную сигнатуру $\text{Con} \cup \text{Fun} \cup \text{Rel}$ стандартного языка атомарных формул. Возьмем произвольное непустое множество M . *Интерпретацией сигнатуры в этом множестве* можно назвать следующую процедуру, а также ее результат.

1) Каждой предметной константе из Con сопоставляется элемент из множества M . После этого константа становится именем выбранного элемента.

2) Каждому функциональному n -местному символу из Fun сопоставляется n -местная функция в множестве M . После этого функциональный символ становится именем соответствующей функции.

3) Каждому n -местному символу отношения из Rel сопоставляется n -местное отношение в множестве M . При этом символ “ \simeq ” сопоставляется отношению равенства. После этого каждый символ отношения становится именем n -местного отношения.

После выполнения всей этой процедуры говорят, что на множестве *задана интерпретация* сигнатуры $\text{Con} \cup \text{Fun} \cup \text{Rel}$.

Значение предметной переменной. Значением предметной переменной считается элемент из множества M , который назначен в качестве такового.

Значение атомарной формулы. Атомарная формула может принимать одно из двух значений: *И* (“Истина”) или *Л* (“Ложь”)¹.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть в множестве M задана интерпретация сигнатуры языка атомарных формул и значения всех предметных переменных, имеющих вхождения в атомарную формулу $P^n t_1 \dots t_n$.

Пусть значения термов t_1, \dots, t_n есть m_1, \dots, m_n соответственно.

Значение атомарной формулы $P^n t_1 \dots t_n$ в данной интерпретации сигнатуры при данных значениях переменных есть *И*, если и только если последовательность (m_1, \dots, m_n) принадлежит отношению, именем которого служит P^n .

В дальнейшем тот факт, что (m_1, \dots, m_n) принадлежит отношению с именем P^n , будем записывать: $P^n(m_1, \dots, m_n)$.

ПРИМЕР. Рассмотрим сигнатуру $S = \{c_1, f_1^2, P_1^2\}$. Пусть интерпретация этой сигнатуры в множестве $M = \{0, 1, 2\}$ такова, что c_1 есть имя числа 1, $f_1^2(m_1, m_2)$ есть остаток от деления $m_1 + m_2$ на 3, $P_1^2(m_1, m_2) = \text{И}$, если и только если $m_1 < m_2$ ($m_1, m_2 \in M$). Найдем значение формулы $P_1^2 f_1^2 x_1 c_1 x_1$ в алгебраической системе $\langle M, S \rangle$ при значении переменной x_1 , равном 2.

РЕШЕНИЕ. Значение данной формулы равно

$$P_1^2(f_1^2(2, 1), 2) = P_1^2(0, 2) = \text{И}.$$

Понятие алгебраической системы. Непустое множество M , в котором заданы некоторые выделенные элементы, некоторые функции и отношения называют *алгебраической системой*.

Считается при этом, что в алгебраической системе каждое из трех множеств: множество выделенных элементов, функций или отношений может оказаться пустым. Однако их объединение должно быть непусто.

Само множество M , называют при этом *носителем* данной алгебраической системы. Множество *имён* выделенных элементов, функций и отношений называется *сигнатурой* данной *алгебраической системы*.

Обозначение алгебраической системы с носителем M и сигнатурой S : $\langle M, S \rangle$.

¹Пишущие на английском языке используют знаки T (“True”) и F (“False”). В языках программирования для значений формул используют знаки “1” и “0” соответственно, поскольку с ними удобно проводить вычисления.

В том случае, когда в алгебраической системе не задано никаких отношений, кроме, может быть, отношения равенства, алгебраическую систему принято называть *алгеброй*. Очевидно, что если в некотором множестве M задана интерпретация некоторой сигнатуры языка термов, то тогда имеется и алгебра с носителем M .

ПРИМЕРЫ. В множестве вещественных чисел \mathbb{R} рассмотрим выделенные элементы 0 и 1, операции сложения (двухместную функцию “+”), умножения (двухместную функцию “.”), взятия противоположного элемента (одноместную функцию “−”). Получим алгебру $\langle \mathbb{R}, \{0, 1, -, +, \cdot\} \rangle$. Если теперь мы дополнительно рассмотрим в множестве \mathbb{R} отношение “меньше” (“<”), то получим новую алгебраическую систему $\langle \mathbb{R}, \{0, 1, -, +, \cdot, <\} \rangle$, алгеброй не являющуюся.

Очевидно, если на множестве M задана интерпретация сигнатуры

$$S = \text{Con} \cup \text{Fun} \cup \text{Rel},$$

то имеется алгебраическая система с носителем M и сигнатурой S .

Также очевидно, что верно и обратное: если имеется алгебраическая система $\langle M, S \rangle$, сигнатура которой является сигнатурой некоторого языка атомарных формул, то задана интерпретация этой сигнатуры. Поэтому можно говорить о вычислении значений термов и атомарных формул в этой алгебраической системе.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Предложите примеры интерпретаций символов отношений P_1^1, P_2^2, P_3^3 в множествах:

- (а) \mathbb{Z} ; (б) \mathbb{C} ; (в) $\{a, b, c\}$; (г) $(0; 1)$ (д) $\{a, b\}^*$.

2. Пусть $\langle \mathbb{R}_+, S \rangle$ — алгебраическая система сигнатуры

$$S = \{c_0, c_1, f_1^2, f_2^2, f_3^2, P_1^1, P_2^2, P_3^2\},$$

в которой \mathbb{R}_+ — множество неотрицательных вещественных чисел, а константы c_0 и c_1 интерпретируются числами 0 и 1 соответственно, а также для всяких $m_1, m_2 \in \mathbb{R}_+$ выполнено:

$$f_1^2(m_1, m_2) = \frac{m_1 + m_2}{2}; \quad f_2^2(m_1, m_2) = \sqrt{m_1 \cdot m_2};$$

$$f_3^2(m_1, m_2) = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}.$$

$$P_1^1(m_1) = I \Leftrightarrow m_1 \text{ — целое число};$$

$$P_2^2(m_1, m_2) = I \Leftrightarrow m_1 < m_2.$$

2.1. Вычислите значение атомарной формулы:

- (а) $P_1^1 f_2^2 x_1 c_1$ при $x_1 = 16$;
(б) $P_2^2 f_3^2 x_1 x_2 f_1^2 x_2 x_1$ при $x_1 = 3, x_2 = 4$;
(в) $= f_2^2 c_1 c_0 f_3^2 c_0 c_1$;
(г) $P_1^1 f_2^2 f_1^2 x_2 f_3^2 x_1 x_2 c_1$ при $x_1 = 12, x_2 = 5$.

2.2. Найдите все значения предметных переменных, при которых:

- (а) $P_1^1 f_2^2 c_1 f_1^2 x_1 c_1$ есть I ;
(б) $P_2^2 f_1^2 x_1 c_1 f_3^2 c_0 x_1$ есть I ;
(в) $P_2^2 f_2^2 x_2 x_1 f_1^2 x_1 x_2$ есть I .

3. Пусть $\langle \mathbb{R}^2, S \rangle$ — алгебраическая система сигнатуры

$$S = \{c_0, f_1^1, f_2^1, f_3^2, f_4^2, P_1^2\},$$

в которой \mathbb{R}^2 — множество пар вещественных чисел, а константа c_0 интерпретируется парой $(0, 0)$, и для любых (p_1, q_1) и (p_2, q_2) из \mathbb{R}^2 выполнено:

$$f_1^1(p_1, q_1) = (p_1, q_1);$$

$$f_2^2((p_1, q_1), (p_2, q_2)) = (p_1 + p_2, q_1 + q_2);$$

$$f_3^2((p_1, q_1), (p_2, q_2)) = (p_1 \cdot p_2, q_1 \cdot q_2);$$

$$P_1^2((p_1, q_1), (p_2, q_2)) = I \Leftrightarrow p_1 = q_1, p_2 = q_2;$$

3.1. Вычислите значение атомарной формулы:

- (а) $P_1^2 x_1 f_1^1 x_0$ при $x_0 = (4, -5), x_1 = (5, -4)$;
(б) $= f_2^2 x_0 x_1 f_3^2 x_1 x_0$ при $x_0 = (2, 1), x_1 = (2, 1)$;
(в) $P_1^2 f_3^2 x_0 x_1 f_2^2 x_1 x_2$ при $x_0 = (2, 3), x_1 = (-2, 2)$ и $x_2 = (6, 4)$.

3.2. Найдите все значения предметных переменных, при которых следующая атомарная формула принимает значение I :

$$(а) = x_1 f_1^1 x_0; \quad (б) P_1^2 x_1 f_1^1 x_1; \quad (в) = f_2^2 x_0 x_1 f_3^2 x_0 x_1.$$

3.3*. Предложите пример интерпретации в \mathbb{R}^2 данной в условии задачи сигнатуры, при которой атомарная формула $P_1^2 f_2^2 f_1^1 x_0 x_1 f_2^2 x_0 x_1$ при значениях переменных x_0 и x_1 , равных $(1, 2)$ и $(1, 1)$ соответственно принимает значение I .