Тема 2. Определители

Содержание

Тема 2. Определители 1
Понятие определителя 2
Выражение определителя непосредственно через его элементы 6
Теорема Лапласа 7
Свойства определителей 9
Примеры вычисления определителей 12
Определитель суммы и произведения матриц 15
Понятие обратной матрицы 16
Теорема о базисном миноре матрицы 17
Методы вычисления определителей 19

Понятие определителя

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу любого порядка n:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}. \qquad (1)$$

С каждой такой матрицей свяжем определенную численную характеристику, называемую **определителем**, соответствующим этой матрице.

Если порядок n матрицы (1) равен единице, то эта матрица состоит из одного элемента a_i и **определителем первого порядка**, соответствующим такой матрице, назовем величину этого элемента.

Если порядок n матрицы (1) равен двум, т.е. если эта матрица имеет вид

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}, \qquad (2)$$

то **определителем второго порядка**, соответствующим такой матрице, назовем число, равное $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ и обозначаемое одним из символов (в отличие от матрицы для обозначения определителя употребляют не сдвоенные (или круглые), а одинарные прямые скобки)

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Итак, по **<u>определению</u>**

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (3)$$

Формула (3) представляет собой правило составления определителя второго порядка по элементам соответствующей ему матрицы. Словесная формулировка этого правила такова: **определитель второго порядка**, соответствующий матрице (2), равен разности произведения элементов, стоящих на главной диагонали этой матрицы, и произведения элементов, стоящих на побочной ее диагонали.

В дальнейшем изложении мы будем говорить об элементах, строках или столбцах определителя, подразумевая под этими терминами соответственно элементы, строки или столбцы отвечающей этому определителю матрицы.

Перейдем теперь к выяснению понятия определителя любого порядка n, где n ≥ 2. Понятие такого определителя введем индуктивно, считая, что уже введено понятие определителя порядка n – 1, соответствующего произвольной квадратной матрице порядка n – 1.

Договоримся называть **минором любого элемента a_{ij} матрицы n-го порядка** (1) определитель порядка n – 1, соответствующий той матрице, которая получается из матрицы (1) в результате вычеркивания i-й строки и j-го столбца (той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}). Минор элемента a_{ij} будем обозначать одним из двух символом $\overline{M}{}^{i}_{j}$ (M_{ij}). В этом обозначении верхний (первый) индекс обозначает номер строки, нижний (второй) — номер столбца, а черта над M означает, что указанные строка и столбец вычеркиваются.

Минором M_{ij} к элементу a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из исходного вычеркиванием i-той строки и j-того столбца.

Определителем порядка n, соответствующим матрице (1), назовем число, равное $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\overline{M}{}^{1}_{j}$ ($\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}$) и обозначаемое символом

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Итак, по определению

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \overline{M}_j^1. \quad (5)$$

Формула (5) представляет собой правило составления определителя порядка n по элементам первой строки соответствующей ему матрицы и по минорам $\overline{M}_j^i$ элементов первой строки, являющимся определителями порядка n - 1.

Заметим, что при n = 2 правило (5) в точности совпадает с правилом (3), ибо в этом случае миноры элементов первой строки имеют вид: $\overline{M}_1^1 = a_{22},\ \overline{M}_2^1 = a_{21}$ ($M_{11}=a_{22}$, $M_{12}=a_{21}$).

Естественно возникает вопрос, нельзя ли использовать для получения величины определителя (4) элементы и отвечающие им миноры не первой, а произвольной i-й строки матрицы (1). Ответ на этот вопрос дает следующая основная теорема.

Теорема 1.1. *Каков бы ни был номер строки i (i = 1, 2,..., n), для определителя n-го порядка (4) справедлива формула*

$$\Delta = \det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{M}_j^i, \quad (6)$$

называемая разложением этого определителя по i-й строке. (По смыслу теоремы n ≥ 2.)

Замечание. В этой формуле показатель степени, в которую возводится число (– 1), равен сумме номеров строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

Доказательство теоремы 1.1.

Формулу (6) нужно доказать лишь для номеров i = 2, 3,..., n ≥ 2), так как при i = 1 правая часть (6) по определению равна det A. (смотри формулу (5))

При n = 2 (т. е. для определителя второго порядка) эту формулу нужно доказать лишь для номера i = 2, т. е. при n = 2 нужно доказать лишь формулу

$$\Delta = \det A = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{2+j} a_{2j} \overline{M}_j^2 = -a_{21} \overline{M}_1^2 + a_{22} \overline{M}_2^2.$$

Справедливость этой последней формулы вытекает из выражений для миноров матрицы (2) $\overline{M}_1^2 = a_{12},\ \overline{M}_2^2 = a_{11}$, в силу которых правая часть этой формулы совпадает с правой частью (3). Итак, при n = 2 теорема доказана.

Доказательство формулы (6) для произвольного n > 2 проведем по индукции, т. е. предположим, что для определителя порядка n - 1 справедлива формула вида (6) разложения по любой строке, и, опираясь на это, убедимся в справедливости формулы (6) для определителя порядка n.

При доказательстве нам понадобится понятие миноров матрицы (1) порядка n - 2. Определитель порядка n - 2, соответствующий той матрице, которая получается из матрицы (1) в результате вычеркивания двух строк с номерами i_1 и i_2 и двух столбцов с номерами j_1 и j_2 называется *минором (n - 2)-го порядка* и обозначается символом $\overline{M}_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}$.

Определитель n-го порядка Δ вводится формулой (5), причем в этой формуле каждый минор $\overline{M}_j^1$ является определителем порядка n - 1, для которого, по предположению, справедлива формула вида (6) разложения по любой строке.

Фиксировав любой номер i (i = 2, 3,..., n), разложим в формуле (5) каждый минор $\overline{M}_j^1$ по i-й строке основного определителя (4) (в самом миноре $\overline{M}_j^1$ эта строка будет (i - 1)-й).

В результате весь определитель Δ будет представлен в виде некоторой линейной комбинации (напомним, что линейной комбинацией каких-либо величин называется сумма произведений этих величин на некоторые вещественные числа) миноров (n - 2)-го порядка $\overline{M}_{jk}^{1i}$ с несовпадающими номерами j и к, т.е. в виде

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k<j} \vartheta_{jk} \overline{M}_{jk}^{1i}. \quad (7)$$

Для вычисления множителей υ_{jk} , заметим, что минор $\overline{M}_{jk}^{1i}$ получается в результате разложения по (i - 1)-й строке *только следующих двух миноров (n - 1)-го порядка, отвечающих элементам первой строки матрицы* (1): минора $\overline{M}_{j}^{1}$ и минора $\overline{M}_{k}^{1}$ (ибо только эти два минора элементов первой строки содержат все столбцы минора $\overline{M}_{jk}^{1i}$).

В разложениях миноров $\overline{M}_{j}^{1}$ и $\overline{M}_{k}^{1}$ по указанной (i - 1)-й строке выпишем только слагаемые, содержащие минор $\overline{M}_{jk}^{1i}$ (остальные не интересующие нас слагаемые обозначим многоточием). Учитывая при этом, что элемент a_{ik} минора $\overline{M}_{j}^{1}$ стоит на пересечении (i - 1)-й строки и (k - 1)-го столбца этого минора, а элемент a_{ij} минора $\overline{M}_{k}^{1}$ стоит на пересечении (i - 1)-й строки и j-го столбца этого минора, мы получим

$$\overline{M}_{j}^{1} = (-1)^{(i-1)+(k-1)} a_{ik} \overline{M}_{jk}^{1i} + \dots ,$$

$$\overline{M}_{k}^{1} = (-1)^{(i-1)+j} a_{ij} \overline{M}_{jkk}^{1i} + \dots \quad (8) \text{ и } (9)$$

Вставляя (8) и (9) в правую часть (5) и собирая коэффициент при $\overline{M}_{jk}^{1i}$, мы получим, что множитель υ_{jk} в равенстве (7) имеет вид

$$\vartheta_{jk} = (-1)^{(1+i+j+k)} [a_{1j} a_{ik} - a_{1k} a_{ij}]. \quad (10)$$

Для завершения доказательства теоремы покажем, что и правая часть (6) равна сумме, стоящей в правой части (7), с теми же самыми значениями (10) для υ_{jk}.

Для этого в правой части (6) разложим каждый минор (n — 1)-го порядка $\overline{M}_{j}^{i}$ по первой строке. В результате вся правая часть (6) представится в виде линейной комбинации с некоторыми коэффициентами υ_{jk}, тех же самых миноров $\overline{M}_{jk}^{1i}$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k<j} \vartheta_{jk} \overline{M}_{jk}^{1i}, \quad (11)$$

и нам остается вычислить множители υ_{jk} и убедиться в справедливости для них формулы (10).

Для этого заметим, что минор $\overline{M}_{jk}^{1i}$ получается в результате разложения по первой строке только следующих двух миноров (n - 1)-го порядка, отвечающих элементам i-й строки матрицы (1): минора $\overline{M}_{j}^{1}$ и $\overline{M}_{k}^{1}$ (ибо только эти два минора элементов i-й строки содержат все столбцы минора $\overline{M}_{jk}^{1i}$).

В разложениях миноров $\overline{M}_{j}^{i}$ и $\overline{M}_{k}^{i}$ по первой строке выпишем только слагаемые, содержащие минор $\overline{M}_{jk}^{1i}$: (остальные не интересующие нас слагаемые обозначим многоточием). Учитывая при этом, что элемент a_{1k} минора $\overline{M}_{j}^{i}$ стоит на пересечении первой строки и (k - 1)-го столбца этого минора, а элемент a_{1j} минора $\overline{M}_{k}^{i}$ стоит на пересечении первой строки и j-го столбца этого минора, мы получим

$$\overline{M}_{j}^{i} = (-1)^{1+(k-1)} a_{1k} \cdot \overline{M}_{jk}^{1i} + \dots ,$$

$$\overline{M}_{k}^{i} = (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot \overline{M}_{jk}^{1i} + \dots \quad (12) \text{ и } (13)$$

Вставляя (12) и (13) в правую часть (6) и собирая коэффициент при $\overline{M}_{jk}^{1i}$, мы получим, что υ_{jk} в сумме (11) определяется той же самой формулой (1.17 = 10), что и в равенстве (1.14 = 7).

Теорема 1.1 доказана.

Теорема 1.1 установила возможность разложения определителя n-го порядка по любой его строке. Естественно возникает вопрос о возможности разложения определителя n-го порядка по любому его столбцу. Положительный ответ на этот вопрос дает следующая основная теорема.

Теорема 1.2. Каков бы ни был номер столбца j (j = 1, 2,..., n), для определителя n-го порядка (4) справедлива формула

$$\Delta = \det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{M}_j^i, \quad (14)$$

называемая разложением этого определителя по j-му столбцу.

Доказательство.

Достаточно доказать теорему для j = 1, т. е. установить формулу разложения по первому столбцу

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \overline{M}_1^i, \quad (15)$$

ибо если формула (15) будет установлена, то для доказательства формулы (14) для любого j = 2, 3,..., n достаточно, поменяв ролями строки и столбцы, дословно повторить схему рассуждений теоремы 1.1.

Формулу (15) установим по индукции.

При n = 2 эта формула проверяется элементарно (так как при n = 2 миноры элементов первого столбца имеют вид $\overline{M}_1^1 = a_{22}$, $\overline{M}_2^1 = a_{21}$, то при n = 2 правая часть (15) совпадает с правой частью (3)).

Предположим, что формула разложения по первому столбцу (15) верна для определителя порядка n - 1 и, опираясь на это, убедимся в справедливости этой формулы для определителя порядка n.

С этой целью выделим в правой части формулы (5) для определителя n-го порядка Δ первое слагаемое $a_{11}\overline{M}_1^1$, а в каждом из остальных слагаемых разложим минор (n - 1)-го порядка $\overline{M}_j^1$ по первому столбцу.

В результате формула (5) будет иметь вид

$$\Delta = a_{11}\overline{M}_1^1 + \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=2}^{n} \vartheta_{ij} \overline{M}_{1j}^{1i}, \quad (16)$$

где υ_{ij} — некоторые подлежащие определению коэффициенты. Для вычисления υ_{ij} заметим, что минор $\overline{M}_{1j}^{1i}$ получается при разложении по первому столбцу только одного из миноров (n - 1)-го порядка, отвечающих первой строке (при этом минор $\overline{M}_1^1$ предполагается исключенным), — минора $\overline{M}_j^1$.

Запишем в разложении минора $\overline{M}_j^1$ (при j ≥ 2) по первому столбцу только то слагаемое, которое содержит минор $\overline{M}_{1j}^{1i}$ (остальные не интересующие нас слагаемые обозначим многоточием). Учитывая, что элемент a_{1j} минора $\overline{M}_j^1$ (при j≥2) стоит на пересечении (i - 1)-й строки и первого столбца этого минора, мы получим, что при j ≥ 2

$$\overline{M}_j^1 = (-1)^{(i-1)+1} a_{i1} \overline{M}_{1j}^{1i} + \dots \quad (17)$$

Вставляя (17) в правую часть (5)_(из которой исключено первое слагаемое) и собирая коэффициент при $\overline{M}_{1j}^{1i}$, мы получим, что коэффициент υ_{ij} в формуле (16) имеет вид

$$\vartheta_{ij} = (-1)^{i+j+1} a_{1j} a_{i1}. \quad (18)$$

Остается доказать, что и правая часть (15) равна сумме, стоящей в правой части (16) с теми же самыми значениями (18) для υ_{ij}.

Для этого в правой части (15) выделим первое слагаемое $a_{11}\overline{M}_1^1$, а в каждом из остальных слагаемых разложим минор (n - 1)-го порядка $\overline{M}_1^i$ по первой строке.

В результате правая часть (15) представится в виде суммы первого слагаемого $a_{11}\overline{M}_1^1$ и линейной комбинации с некоторыми коэффициентами υ_{ij} миноров (n - 2)-го порядка $\overline{M}_{1j}^{1i}$, т.е. в виде

$$a_{11}\overline{M}_1^1 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} \vartheta_{ij}\overline{M}_{1j}^{1i}, \quad (19)$$

и нам остается вычислить множители υ_{ij} и убедиться в справедливости для них формулы (18).

Для этого заметим, что минор $\overline{M}_{1j}^{1i}$ - получается в результате разложения по первой строке только одного из миноров (n – 1) -го порядка, отвечающих первому столбцу, — минора $\overline{M}_1^i$. Запишем в разложении минора $\overline{M}_1^i$ (при $i \geq 2$) по первой строке только то слагаемое, которое содержит минор $\overline{M}_{1j}^{1i}$ (остальные не интересующие нас слагаемые обозначим многоточием). Учитывая, что элемент a_{1j} минора $\overline{M}_1^i$ стоит на пересечении первой строки и (j - 1)-го столбца этого минора, мы получим, что при $i \geq 2$

$$\overline{M}_1^i = (-1)^{1+(j-1)} a_{1j}\overline{M}_{1j}^{1i} + \dots \quad (20)$$

Вставляя (20) в правую часть (15), из которой исключено первое слагаемое, и собирая коэффициент при $\overline{M}_{1j}^{1i}$, мы получим, что υ_{ij} в сумме (19) определяется той же самой формулой (18), что и в равенстве (16). Теорема 1.2 доказана.

Выражение определителя непосредственно через его элементы

Установим формулу, выражающую определитель n-го порядка непосредственно через его элементы (минуя миноры).

Пусть каждое из чисел $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ принимает одно из значений 1, 2,..., n, причем среди этих чисел нет совпадающих (в таком случае говорят, что числа $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ являются некоторой *перестановкой* чисел 1, 2,..., n). Образуем из чисел $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ все возможные пары $\alpha_i\alpha_j$ и будем говорить, что пара $\alpha_i\alpha_j$ образует *беспорядок*, если $\alpha_i > \alpha_j$ при $i < j$. Общее число беспорядков, образованных всеми парами, которые можно составить из чисел $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$, обозначим символом $N(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$.

С помощью метода индукции установим для определителя n-го порядка (4) следующую формулу:

$$\Delta = \det A = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n} (-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \dots a_{\alpha_n n} \quad (21)$$

(суммирование в этой формуле идет по всем возможным перестановкам $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ чисел 1, 2,..., n; число этих перестановок, очевидно, равно n!).

В случае n = 2 формула (21) элементарно проверяется (в этом случае возможны только две перестановки 1,2 и 2, 1, и, поскольку N(1, 2) = O, N(2, 1) = 1, формула (21) переходит в равенство (3)).

С целью проведения индукции предположим, что формула (21) при n > 2 справедлива для определителя порядка (n - 1).

Тогда, записав разложение определителя n-го порядка (4) по первому столбцу:

$$\Delta = \det A = \sum_{\alpha_1=1}^{n} (-1)^{\alpha_1+1} a_{\alpha_1 1}\overline{M}_1^{\alpha_1}, \quad (22)$$

мы можем, в силу предположения индукции, представить каждый минор (n - 1)-го порядка $\overline{M}_1^{\alpha_1}$ в виде

$$\overline{M}_1^{\alpha_1} = \sum_{\alpha_2,\ldots,\alpha_n} (-1)^{N(\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} a_{\alpha_2 2} \ldots a_{\alpha_n n} \tag{23}$$

(суммирование идет по всем возможным перестановкам $\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ (n - 1) чисел, в качестве которых берутся все натуральные числа от 1 до n, за исключением числа α_1).

Так как из чисел $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, кроме пар, образованных из чисел $\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ можно образовать еще только следующие пары $\alpha_1\alpha_2,\alpha_1\alpha_3,\ldots,\alpha_1\alpha_n$, и поскольку среди чисел $\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ найдется ровно $(\alpha_1 - 1)$ чисел, меньших числа α_1, то $N(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = N(\alpha_2,\ldots,\alpha_n) + \alpha_1 - 1$. Отсюда вытекает, что

$$(-1)^{N(\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}(-1)^{\alpha_1+1} = (-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)},$$

и, вставляя (1.30 = 23) в (1.29 = 22), мы в точности получим формулу (1.28 = 21). Тем самым вывод формулы (1.28 = 21) завершен.

В заключение заметим, что в большинстве курсов линейной алгебры формула (1.28 = 21) положена в основу понятия определителя n-го порядка.

Теорема Лапласа

В этом пункте мы установим замечательную формулу, обобщающую формулу разложения определителя n-го порядка по какой-либо его строке.

С этой целью введем в рассмотрение миноры матрицы n-го порядка (1.8 = 1) двух типов.

Пусть k — любой номер, меньший n, а $i_1,i_2,\ldots,i_k$ и $j_1,j_2,\ldots,j_k$ — произвольные номера, удовлетворяющие условиям $1 \le i_1 < i_2 <\ldots< i_k \le n$, $1 \le j_1 < j_2 <\ldots< j_k \le n$.

Миноры первого типа $M_{j_1 j_2 \ldots j_n}^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ являются определителями порядка k, соответствующими той матрице, которую образуют элементы матрицы (1.8 = 1), стоящие на пересечении к строк с номерами $i_1,i_2,\ldots,i_k$ и k столбцов с номерами $j_1,j_2,\ldots,j_k$.

Миноры второго типа $\overline{M}_{j_1 j_2 \ldots j_n}^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ являются определителями порядка n - k, соответствующими той матрице, которая получается из матрицы (1.8 = 1) в результате вычеркивания к строк с номерами $i_1,i_2,\ldots,i_k$ и k столбцов с номерами $j_1,j_2,\ldots,j_k$.

Миноры второго типа естественно назвать **дополнительными** по отношению к минорам первого типа.

Теорема 1.3 (теорема Лапласа). *При любом номере k, меньшем n, и при любых фиксированных номерах строк $i_1,i_2,\ldots,i_k$ таких, что*

$1 \le i_1 < i_2 <\ldots< i_k \le n$ *для определителя n-го порядка (4) справедлива формула*

$$\Delta = \det A = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_k} (-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k} M_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k} \overline{M}_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k}, \tag{24}$$

называемая разложением этого определителя по k строкам $i_1,i_2,\ldots,i_k$. Суммирование в этой формуле идет по всем возможным значениям индексов $j_1,j_2,\ldots,j_k$, удовлетворяющим условиям

$1 \le j_1 < j_2 <\ldots< j_k \le n$.

Доказательство.

Прежде всего, заметим, что формула (24) является обобщением уже доказанной нами формулы разложения определителя n-го порядка по одной его строке с номером i_1, в которую она переходит при k = 1 (при этом минор $M_{j_1}^{i_1} = a_{i_1 j_1}$ (совпадает с элементом $a_{i_1 j_1}$), а минор $\overline{M}_{j_1}^{i_1}$ — это введенный выше минор элемента $a_{i_1 j_1}$).

Таким образом, при k = 1 формула (24) доказана.

Доказательство этой формулы для любого k, удовлетворяющего неравенствам $1< k < n$, проведем по индукции, т.е. предположим, что формула (24) справедлива для (k - 1) строк, и, опираясь на это, убедимся в справедливости формулы (24) для k строк.

Итак, пусть $1 < k < n$ и фиксированы какие угодно к строк матрицы (1) с номерами $i_1,i_2,...,i_k$, удовлетворяющими условию $1 \le i_1 < i_2 <...< i_k \le n$. Тогда, по предположению, для (k - 1) строк с номерами $i_1,i_2,...,i_{k-1}$ справедлива формула

$$\Delta = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{k-1}} (-1)^{i_1+\dots+i_{k-1}+j_1+\dots+j_{k-1}} M^{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}_{j_1 j_2 \dots j_{k-1}} \overline{M}^{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}_{j_1 j_2 \dots j_{k-1}} \quad (25)$$

(суммирование идет по всем возможным значениям индексов $j_1,j_2,...,j_{k-1}$ удовлетворяющим условиям $1 \le j_1 < j_2 <...< j_{k-1} \le n$).

Разложим в формуле (25) каждый минор $\overline{M}^{i_1 \dots i_{k-1}}_{j_1 \dots j_{k-1}}$ по строке, имеющей в матрице (1) номер i_k. В результате весь определитель Δ будет представлен в виде некоторой линейной комбинации миноров $\overline{M}^{i_1 \dots i_{k-1}}_{j_1 \dots j_{k-1}}$ с коэффициентами, которые мы обозначим через $\upsilon_{j1\dots jk}$, т.е. для Δ будет справедливо равенство $\Delta = \sum_{j_1, \dots, j_k} \vartheta_{j_1 \dots j_k} \overline{M}^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k}$, и нам остается вычислить коэффициенты $\upsilon_{j1\dots jk}$ и убедиться в том, что они равны

$$\vartheta_{j_1 \dots j_k} = (-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k} M^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k}. \quad (26)$$

С этой целью заметим, что минор (n - k)-го порядка $\overline{M}^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k}$ получается в результате разложения по строке с номером i_k только следующих «к» миноров (n - k + 1)-го порядка:

$$\overline{M}^{i_1 \dots i_{k-1}}_{j_1 \dots j_k (\text{без } j_s)} \quad (s = 1, 2, \dots, k), \quad (27)$$

ибо каждый из остальных содержащих строку j_s миноров (n - k + 1)-го порядка не содержит всех строк и всех столбцов минора $\overline{M}^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k}$. В разложении каждого минора (27) по строке матрицы (1) с номером i_k, выпишем только то слагаемое, которое содержит минор $\overline{M}^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k}$ (остальные не интересующие нас слагаемые обозначим многоточием). Учитывая при этом, что в каждом миноре (27) элемент a_{ikjs} стоит на пересечении $[i_k - (k - 1)]$-й строки и $[j_s - (s - l)]$-го столбца этого минора, мы получим

$$\overline{M}^{i_1 \dots i_{k-1}}_{j_1 \dots j_k (\text{без } j_s)} = (-1)^{[i_k-(k-1)]+[j_s-(s-1)]} a_{i_k j_s} \overline{M}^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k} + \dots$$

Теперь нам остается учесть, что в формуле (25) каждый минор (27) умножается на множитель

$$(-1)^{(i_1+\dots+i_{k-1})+(j_1+\dots+j_k)-j_s} M^{i_1 \dots i_{k-1}}_{j_1 \dots j_k (\text{без } j_s)}$$

и после этого суммируется по всем s от 1 до k. Имея также в виду, что $(-1)^{2-2k-2s}$ мы получим, что

$$\vartheta_{j_1 \dots j_k} = (-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k} \left[\sum_{s=1}^{k} (-1)^{k+s} M^{i_1 \dots i_{k-1}}_{j_1 \dots j_k (\text{без } j_s)} \right].$$

Замечая, что сумма в квадратных скобках представляет собой разложение минора $\overline{M}^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k}$ по его последней k-й строке, мы окончательно получим для $\upsilon_{j1\dots jk}$ формулу (26). Теорема Лапласа доказана.

Замечание. В полной аналогии с формулой (25) записывается и выводится формула разложения определителя по каким-либо к его столбцам.

Свойства определителей

Ниже устанавливается ряд свойств, которыми обладает произвольный определитель n-го порядка.

1°. Свойство равноправности строк и столбцов.

Примечание: Транспонированием любой матрицы или определителя называется операция, в результате которой меняются местами строки и столбцы с сохранением порядка их следования. В результате транспонирования матрицы А получается матрица, называемая *транспонированной по отношению к матрице* А и обозначаемая символом A^T.

В дальнейшем мы договоримся символами |A|, |B|, $|A^T|$ ... обозначать определители квадратных матриц А, В, A^T ... соответственно.

Первое свойство определителя формулируется так: при транспонировании величина определителя сохраняется, т.е. $|A^T| = |A|$.

Это свойство непосредственно вытекает из теоремы 1.2 (достаточно лишь заметить, что разложение определителя |A| по первому столбцу тождественно совпадает с разложением определителя $|A^T|$по первой строке).

Доказанное свойство означает полную равноправность строк и столбцов и позволяет нам все последующие свойства устанавливать лишь для строк и быть уверенными в справедливости их и для столбцов.

Пример

Известно, что определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix}$ равен 3. Тогда определитель матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$, которая равна A^T, также равен 3.

2°. Свойство антисимметрии при перестановке двух строк (или двух столбцов).

При перестановке местами двух строк (или двух столбцов) определитель сохраняет свою абсолютную величину, но меняет знак на противоположный.

Для определителя второго порядка это свойство проверяется элементарно (из правила (3) сразу вытекает, что определители $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$ отличаются лишь знаком).

Считая, что n > 2, рассмотрим теперь определитель n-го порядка (4) и предположим, что в этом определителе меняются местами две строки с номерами i1 и i2. Записывая формулу Лапласа разложения по этим двум строкам, будем иметь

$$\Delta = \sum_{j_1, j_2} (-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2} M^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} \overline{M}^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}. \qquad (28)$$

При перестановке местами строк с номерами i_1 и i_2 каждый определитель второго порядка $M^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}$ в силу доказанного выше меняет знак на противоположный, а все остальные величины, стоящие под знаком суммы в (28), совсем не зависят от элементов строк с номерами i_1 и i_2 и сохраняют свое значение. Тем самым свойство 2° доказано.

Пример

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

3°. Линейное свойство определителя.

Будем говорить, что некоторая строка $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ является линейной комбинацией строк $(b_1, b_2,\dots, b_n)$, $(c_1, c_2,\dots, c_n)$,..., $(d_1, d_2,\dots, d_n)$ с коэффициентами $\lambda,\mu,\dots,\nu$, если $a_j = \lambda b_j + \mu c_j + \dots + \nu d_j$ для всех $j = 1, 2,\dots, n$.

Линейное свойство определителя можно сформулировать так: *если в определителе n-го порядка Δ некоторая i-я строка$(a_{i1}, a_{i2},\dots, a_{in})$ является линейной комбинацией двух строк $(b_1, b_2,\dots, b_n)$ и $(c_1, c_2,\dots, c_n)$ с коэффициентами λ и μ, то $\Delta = \lambda\Delta_1 + \mu\Delta_2$, где Δ_1 — определитель, у которого i-я строка равна $(b_1, b_2,\dots, b_n)$, а все остальные строки те же, что и у Δ, а Δ_2 — определитель, у которого i-я строка равна $(c_1, c_2,\dots, c_n)$, а все остальные строки те же, что и у Δ.*

Для доказательства разложим каждый из трех определителей Δ, Δ_1 и Δ_2 i-й строке и заметим, что у всех трех определителей все миноры $\overline{M}_j^i$ элементов i-й строки одинаковы. Но отсюда следует, что формула $\Delta = \lambda\Delta_1 + \mu\Delta_2$ сразу вытекает из равенств $a_j = \lambda b_j + \mu c_j$ $(j = 1,2,\dots,n)$.

Конечно, линейное свойство справедливо и для случая, когда i-я строка является линейной комбинацией не двух, а нескольких строк.

Кроме того, линейное свойство справедливо и для столбцов определителя.

Доказанные три свойства являются основными свойствами определителя, вскрывающими его природу.

Следующие пять свойств являются логическими следствиями трех основных свойств.

Следствие 1. *Определитель с двумя одинаковыми строками (или столбцами) равен нулю.*

В самом деле, при перестановке двух одинаковых строк, с одной стороны, определитель Δ не изменится, а с другой стороны, в силу свойства 2° изменит знак на противоположный. Таким образом, $\Delta = -\Delta$, т. е. $2\Delta = 0$ или $\Delta = 0$.

Пример

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Следствие 2. *Умножение всех элементов некоторой строки (или некоторого столбца) определителя на число λ равносильно умножению определителя на это число λ.*

Иными словами, общий множитель всех элементов некоторой строки (или некоторого столбца) определителя можно вынести за знак этого определителя. (Это следствие вытекает из свойства 3° при $\mu = 0$.)

Пример

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 8 \end{vmatrix}$$

Следствие 3. *Если все элементы некоторой строки (или некоторого столбца) определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.* (Это следствие вытекает из предыдущего следствия при $\lambda = 0$.)

Следствие 4. *Если элементы двух строк (или двух столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.*

(В самом деле, в силу следствия 2, множитель пропорциональности можно вынести за знак определителя, после чего останется определитель с двумя одинаковыми строками, который равен нулю согласно следствию 1).

Следствие 5. *Если к элементам некоторой строки (или некоторого столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (другого столбца), умноженные на произвольный множитель λ, то величина определителя не изменится.*

В самом деле, полученный в результате указанного прибавления определитель можно, в силу свойства 3°, разбить на сумму двух определителей, первый из которых совпадает с исходным, а второй равен нулю, в силу пропорциональности двух строк (или столбцов) и следствия 4.

Замечание. Следствие 5, как и линейное свойство, допускает более общую формулировку, которую мы приведем для строк: *если к элементам некоторой строки определителя прибавить соответствующие элементы строки, являющейся линейной комбинацией нескольких других строк этого определителя (с какими угодно коэффициентами), то величина определителя не изменится.*

Следствие 5 широко применяется при конкретном вычислении определителей (соответствующие примеры будут приведены в следующем пункте).

Определитель не изменится, если к какой-то его строке прибавить другую строку, умноженную на некоторое число.

Пример

Пусть задан определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Прибавим ко второй строке определителя третью его строку, при этом значение определителя не измениться:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1+2 & 0+3 & -1+1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Прежде чем сформулировать еще одно свойство определителя, введем понятие алгебраического дополнения данного элемента определителя.

Алгебраическим дополнением *данного элемента* a_{ij} *определителя n-го порядка (4) назовем число, равное* $(-1)^{i+j}\bar{\bar{M}}^i_j$ *и обозначаемое символом* A_{ij}.

Таким образом, алгебраическое дополнение данного элемента может отличаться от минора этого элемента только знаком.

С помощью понятия алгебраического дополнения теоремы 1.1 и 1.2 можно переформулировать так: *сумма произведений элементов любой строки (любого столбца) определителя на соответствующие алгебраические дополнения этой строки (этого столбца) равна этому определителю.*

Соответствующие формулы разложения определителя по i-й строке и по j-му столбцу можно переписать так:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad (\text{для любого } i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad (\text{для любого } j = 1, 2, \ldots, n).$$

(6* и (14*)

Теперь мы можем сформулировать последнее свойство определителя.

4°. Свойство алгебраических дополнений соседних строк (или столбцов).

Сумма произведений элементов какой-либо строки (или какого-либо столбца) определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов любой другой строки (любого другого столбца) равна нулю.

Доказательство проведем для строк (для столбцов оно проводится аналогично). Записывая подробно формулу (6*)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = A_{i1}a_{i1} + A_{i2}\,a_{i2} + \ldots + A_{in}a_{in},$$

(29)

заметим, что поскольку алгебраические дополнения A_{i1}, A_{i2},..., A_{in} не зависят от элементов i-й строки a_{i1}, a_{i2},..., a_{in}, то равенство (29) является тождеством относительно a_{i1}, a_{i2},..., a_{in} и сохраняется при замене чисел a_{i1}, a_{i2},..., a_{in} любыми другими n числами.

Заменив a_{i1}, a_{i2},..., a_{in} соответствующими элементами любой (отличной от i-й) k-й строки a_{k1}, a_{k2},..., a_{kn}, мы получим слева в (29) определитель с двумя одинаковыми строками, равный нулю согласно следствию 1. Таким образом,

$A_{i1}a_{k1} + A_{i2}a_{k2} + \ldots + A_{in}a_{kn} = 0$

(для любых несовпадающих i и k).

Примеры вычисления определителей

При конкретном вычислении определителей широко используются формулы разложения по строке или столбцу и следствие 5, позволяющее, не изменяя величины определителя, прибавлять к любой его строке (или столбцу) произвольную линейную комбинацию других его строк (или столбцов). Особенно удобно использовать формулу разложения по тем строкам (или столбцам), многие элементы которых равны нулю. В частности, если в данной строке отличен от нуля только один элемент, то разложение по этой строке содержит только одно слагаемое и сразу сводит вопрос о вычислении определителя порядка n к вопросу о вычислении определителя порядка (n - 1) (минора, стоящего в указанном слагаемом).

Если в данной строке отличны от нуля несколько элементов, отвечающих пересечению этой строки с несколькими столбцами, то, применяя к указанным столбцам следствие 5, мы можем, не изменив определителя, обратить в нуль все элементы данной строки, за исключением одного.

Перейдем к конкретным примерам.

Пример 1. Пусть требуется вычислить следующий определитель четвертого порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 60 & 17 & 134 & 20 \\ 15 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix}.$$

Вычитая из первого столбца утроенный последний столбец, будем иметь

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 0 & 17 & 134 & 20 \\ 0 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix}.$$

Далее естественно разложить определитель по первому столбцу. В результате получим

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 16 & 0 \\ 17 & 134 & 20 \\ 43 & 106 & 5 \end{vmatrix}.$$

Теперь в определителе третьего порядка вычтем из второго столбца удвоенный первый столбец. При этом будем иметь

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 17 & 100 & 20 \\ 43 & 20 & 5 \end{vmatrix}.$$

Разлагая, наконец, последний определитель третьего порядка по первой строке, окончательно получим

$$\Delta = 8 \cdot \begin{vmatrix} 100 & 20 \\ 20 & 5 \end{vmatrix} = 8(500 - 400) = 800.$$

Пример 2. Вычислим так называемый *треугольный определитель*, у которого все элементы, лежащие выше главной диагонали, равны нулю

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Раскладывая определитель Δ_n по последнему столбцу, мы получим, что он равен произведению элемента a_{nn} на треугольный определитель (n - 1)-го порядка Δ_{n-1} равный

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Последний определитель мы снова разложим по его последнему столбцу, в результате чего убедимся в том, что он равен произведению элемента $a_{(n-1)(n-1)}$ на треугольный определитель (n - 2)-го порядка Δ_{n-2}.Продолжая аналогичные рассуждения, мы придем к следующему выражению для исходного определителя: $\Delta_n = a_{11}a_{22}...a_{nn}$.

Итак, треугольный определитель равен произведению элементов, стоящих на его главной диагонали.

Замечание 1. Если у определителя А равны нулю все элементы, лежащие ниже главной диагонали, то этот определитель также равен произведению элементов, лежащих на его главной диагонали (убедиться в этом можно по схеме, изложенной выше, но примененной не к последним столбцам, а к последним строкам; можно и просто произвести транспонирование Δ и свести этот случай к рассмотренному выше).

Аналогичным способом устанавливается, что определитель, у которого равны нулю все элементы, лежащие выше (или ниже) побочной диагонали, равен произведению числа $(-1)^{n(n-1)/2}$ и всех элементов, лежащих на этой диагонали.

Пример 3. Обобщением треугольного определителя второго порядка может служить определитель 2n-го порядка следующей блочной матрицы $\left\| \begin{smallmatrix} A & \breve{O} \\ B & C \end{smallmatrix} \right\|$ в С в которой А, В и С — произвольные квадратные матрицы n-го порядка, а О — нулевая квадратная матрица n-го порядка. Убедимся в том, что для указанного определителя справедлива формула

$$\begin{vmatrix} A & O \\ B & C \end{vmatrix} = |A|\,|C|. \qquad (30)$$

Привлекая теорему Лапласа, разложим определитель, стоящий в левой части (30), по первым n строкам. Так как определитель, у которого хотя бы один столбец состоит из нулей, равен нулю, то в формуле разложения (24) будет отлично от нуля только одно слагаемое, причем это слагаемое (в силу того, что $(-1)^{(1+..+n)+(1+..+n)} = 1$) будет как раз равно |A||C|.

Замечание 2. Аналогичными рассуждениями легко убедиться в справедливости формулы

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & O \end{vmatrix} = (-1)^n \, |B|\,|C| \qquad (31)$$

(A, B, C и O имеют тот же смысл, что и выше).

Для этого следует разложить определитель, стоящий в левой части (31), по последним n строкам и учесть, что

$$(-1)^{[(n+1)+\ldots+2n]+[1+\ldots+n]} = (-1)^{2n(2n+1)/2} = (-1)^n.$$

Пример 4. Вычислим теперь так называемый определитель Вандермонда (французский математик Александр Теофил Вандермонд)

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}. \qquad (32)$$

Вычитая первый столбец из всех последующих, будем иметь

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ x_1 & (x_2 - x_1) & \ldots & (x_n - x_1) \\ x_1^2 & (x_2^2 - x_1^2) & \ldots & (x_n^2 - x_1^2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & (x_2^{n-1} - x_1^{n-1}) & \ldots & (x_n^{n-1} - x_1^{n-1}) \end{vmatrix}.$$

Далее можно произвести разложение по первой строке, в результате чего мы получим

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (x_3 - x_1) & \ldots & (x_n - x_1) \\ (x_2^2 - x_1^2) & (x_3^2 - x_1^2) & \ldots & (x_n^2 - x_1^2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_2^{n-1} - x_1^{n-1}) & (x_3^{n-1} - x_1^{n-1}) & \ldots & (x_n^{n-1} - x_1^{n-1}) \end{vmatrix}.$$

Вычитая теперь из каждой строки предыдущую строку, умноженную на x_1, получим

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (x_3 - x_1) & \ldots & (x_n - x_1) \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \ldots & x_n(x_n - x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}.$$

Далее мы можем вынести за знак определителя общий множитель первого столбца, равный ($x_2 - x_1$), общий множитель второго столбца, равный ($x_3 - x_1$),..., общий множитель (n - 1)-го столбца, равный ($x_n - x_1$). В результате получим

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1) \cdot \Delta(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Со стоящим в правой части определителем $\Delta(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ поступим точно так же, как и с $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В результате получим, что

$$\Delta(x_2, x_3, \ldots, x_n) = (x_3 - x_2)\ldots(x_n - x_2) \cdot \Delta(x_3, \ldots, x_n).$$

Продолжая аналогичные рассуждения далее, окончательно получим, что исходный определитель (32) равен

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots$$

$$\ldots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)\ldots(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1}).$$

Определитель суммы и произведения матриц

Непосредственно из линейного свойства определителя вытекает, что определитель суммы двух квадратных матриц одного и того же порядка n $A=\|a_{ij}\|$ и $B=\|b_{ij}\|$ равен сумме всех различных определителей порядка n, которые могут получиться, если часть строк (или столбцов) брать совпадающими с соответствующими строками (или столбцами) матрицы A, а остальную часть — совпадающими с соответствующими строками (или столбцами) B.

Докажем теперь, что определитель матрицы C, равной произведению квадратной матрицы A на квадратную матрицу Б, равен произведению определителей матриц A и B.

Пусть порядок всех трех матриц A, B и C равен n, и пусть O — нулевая квадратная матрица порядка n, а (-1)E следующая матрица:

$$(-1)E = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{Vmatrix}.$$

В силу примера 2 из предыдущего пункта определитель матрицы (-1)E равен числу $(-1)^n$.

Рассмотрим следующие две блочные квадратные матрицы порядка 2n:

$$\begin{Vmatrix} A & O \\ (-1)E & B \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{Vmatrix} A & C \\ (-1)E & O \end{Vmatrix}.$$

В силу формул (30) и (31) из предыдущего пункта, определители этих матриц равны

$$\begin{vmatrix} A & O \\ (-1)E & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|, \quad \begin{vmatrix} A & C \\ (-1)E & O \end{vmatrix} = (-1)^n |(-1)E|\,|C| = |C|.$$

Таким образом, достаточно доказать равенство определителей

$$\begin{vmatrix} A & O \\ (-1)E & B \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} A & C \\ (-1)E & O \end{vmatrix}.$$

Подробнее эти два определителя можно записать так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}. \qquad (33)$$

Для того чтобы убедиться в равенстве этих двух определителей (33), достаточно заметить, что первые п столбцов у этих определителей (33) совпадают, а каждый столбец второго определителя (33) с номером n n + k (где k = 1, 2,...,n), в силу формулы $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, получается в результате прибавления к (n + k)-му столбцу первого определителя (33) линейной комбинации первых n его столбцов с коэффициентами, соответственно равными $b_{k1}, b_{k2},..., b_{kn}$. Таким образом, определители (33) равны в силу следствия 5 из п. 3.

В заключение заметим, что непосредственно из формулы (30) вытекает, что определитель прямой суммы $|A \oplus B| = \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}$ двух матриц A и B равен произведению определителей этих матриц.

Понятие обратной матрицы

Пусть A – квадратная матрица n-го порядка, а E – единичная квадратная матрица того же порядка.

Матрица B называется **правой обратной** по отношению к матрице A, если AB = E.

Матрица C называется **левой обратной** по отношению к матрице A, если CA = E.

Так как обе матрицы A и E являются квадратными матрицами порядка n, то матрицы B и C (при условии, что они существуют) также являются квадратными матрицами порядка n. Убедимся в том, что если обе матрицы B и C существуют, то они совпадают между собой. В самом деле, на основании равенств AE = EA = E, AO = OA = O, соотношений AB = E, CA = E и сочетательного свойства произведения матриц получим

C = CE = C(A B) = (CA)B = EB = B.

Естественно, возникает вопрос об условиях на матрицу A, при выполнении которых для этой матрицы существуют как левая, так и правая обратные матрицы (и, стало быть, эти матрицы совпадают).

Теорема 1.4. *Для того чтобы для матрицы A существовали левая и правая обратные матрицы, необходимо и достаточно, чтобы определитель det A матрицы A был отличен от нуля.*

Доказательство.

1) Необходимость. Если для матрицы A существует хотя бы одна из обратных матриц, например, B, то из соотношения A • B = E мы получим, что det A • det B = det E = 1, откуда вытекает, что det A ≠ 0.

2) Достаточность. Пусть определитель A = det A отличен от нуля. Обозначим, как и выше, символом A_{ij} алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A и составим матрицу B, в i-й строке которой стоят алгебраические дополнения i-го столбца матрицы A, поделенные на величину определителя A:

$$B = \left\| \begin{matrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{matrix} \right\| . \qquad (34)$$

Убедимся в том, что эта матрица B является как правой, так и левой обратной по отношению к матрице A.

Достаточно доказать, что оба произведения AB и BA являются единичной матрицей. Для этого достаточно заметить, что у обоих произведений любой элемент, не лежащий на главной диагонали, равен нулю, ибо после выноса множителя 1/Δ этот элемент равен сумме произведений элементов одной строки (или одного столбца) на соответствующие алгебраические дополнения другой строки (или другого столбца). Что же касается элементов, лежащих на главной диагонали, то у обоих произведений AB и BA все такие элементы равны единице в силу того, что сумма произведений элементов и соответствующих алгебраических дополнений одной строки (одного столбца) равна определителю. Теорема доказана.

Замечание 1. Квадратную матрицу A, определитель det A которой отличен от нуля, принято называть *невырожденной*.

Замечание 2. Впредь мы можем опускать термины «левая» и «правая» и говорить просто *о матрице B, обратной по отношению к невырожденной матрице A* и определяемой соотношениями AB = BA = E. Очевидно также, что свойство быть обратной матрицей взаимно в том смысле, что если B является обратной для A, то A является обратной для B. Матрицу, обратную к матрице A, впредь мы будем обозначать символом A^{-1}.

Теорема о базисном миноре матрицы

1. Понятие линейной зависимости строк.

Выше мы уже договорились называть строку $A=(a_1,a_2,...,a_n)$ линейной комбинацией строк $B = (b_1, b_2,..., b_n),..., C = (c_1, c_2,..., c_n)$, если для некоторых вещественных чисел $\lambda,...,\mu$ справедливы равенства

$$a_j = \lambda b_j + \ldots + \mu c_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (35)$$

Указанные n равенств (35) удобно записать в виде одного равенства

$$A = \lambda B + \ldots + \mu C. \qquad (36)$$

Всякий раз, когда будет встречаться равенство (36), мы будем понимать его в смысле n равенств (35).

Введем теперь понятие линейной зависимости строк.

Определение. Строки $A=(a_1,a_2,...,a_n)$, $B = (b_1, b_2,..., b_n),..., C = (c_1, c_2,..., c_n)$ назовем *линейно зависимыми*, если найдутся такие числа $\alpha, \beta,..., \gamma$ не все равные нулю, что справедливы равенства

$$\alpha a_j + \beta b_j + \ldots + \gamma c_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (37)$$

Указанные n равенств (37) удобно записать в виде одного равенства

$$\alpha A + \beta B + \ldots + \gamma C = O, \qquad (38)$$

в котором $O = (0,0,...,0)$ обозначает нулевую строку.

Строки, не являющиеся линейно зависимыми, называются *линейно независимыми.*

Можно дать и «самостоятельное» определение линейной независимости строк: строки A, B,..., C *называются линейно независимыми, если равенство (38) возможно лишь в случае, когда все числа $\alpha, \beta,..., \gamma$ равны нулю.*

Докажем следующее простое, но важное утверждение.

Теорема 1.5. *Для того чтобы строки A, B,..., C были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы одна из этих строк являлась линейной комбинацией остальных строк.*

Доказательство.

1) Необходимость. Пусть строки A, B, ...,C линейно зависимы, т.е. справедливо равенство (38), в котором хотя бы одно из чисел $\alpha, \beta,..., \gamma$ отлично от нуля.

Ради определенности допустим, что $a \neq 0$. Тогда, поделив (38) на α и введя обозначения $\lambda = - \beta/\alpha ,..., \mu = -\gamma/\alpha$, мы можем переписать (38) в виде

$$A = \lambda B + \ldots + \mu C, \qquad (39)$$

а это и означает, что строка A является линейной комбинацией строк B,..., C.

2) Достаточность. Пусть одна из строк (например, A) является линейной комбинацией остальных строк. Тогда найдутся числа $-1, \lambda,...,\mu$ такие, что справедливо равенство (39). Но это последнее равенство можно переписать в виде (здесь $O = 0,0,...,0$) – нулевая строка).

$(-1)A + \lambda B + ... + \mu C = O.$

Так как из чисел $-1, \lambda,...,\mu$ одно отлично от нуля, то последнее равенство устанавливает линейную зависимость строк A, B,..., C.

Теорема доказана.

Конечно, во всех проведенных выше рассуждениях термин «строки» можно заменить термином «столбцы».

2. Теорема о базисном миноре.

Рассмотрим произвольную (не обязательно квадратную) матрицу

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}. \qquad (40)$$

Минором k-го порядка матрицы A будем называть определитель k-го порядка с элементами, лежащими на пересечении любых k строк и любых k столбцов матрицы A. (Конечно, k не превосходит наименьшее из чисел т и п.)

Предположим, что хотя бы один из элементов a_{ij} матрицы A отличен от нуля. Тогда найдется такое целое положительное число r, что будут выполнены следующие два условия:

1) у матрицы A имеется минор r-го порядка, отличный от нуля,

2) всякий минор (r + 1)-го и более высокого порядка (если таковые существуют) равен нулю.

Число r, удовлетворяющее требованиям 1) и 2), назовем **рангом** матрицы A (ранг матрицы A, все элементы которой — нули, по определению равен нулю).

Тот минор r-го порядка, который отличен от нуля, назовем **базисным минором** (конечно, у матрицы A может быть несколько миноров r-го порядка, отличных от нуля).

Строки и столбцы, на пересечении которых стоит базисный минор, назовем соответственно базисными строками и базисными столбцами.

Докажем следующую основную теорему.

Теорема 1.6 (теорема о базисном миноре). Базисные строки (базисные столбцы) линейно независимы. Любая строка (любой столбец) матрицы A является линейной комбинацией базисных строк (базисных столбцов).

Доказательство.

Все рассуждения проведем для строк.

Если бы базисные строки были линейно зависимы, то по теореме 1.5 одна из этих строк являлась бы линейной комбинацией других базисных строк, и мы могли бы, не изменяя величины базисного минора, вычесть из этой строки указанную линейную комбинацию и получить строку, целиком состоящую из нулей, а это противоречило бы тому, что базисный минор отличен от нуля. Итак, базисные строки линейно независимы.

Докажем теперь, что любая строка матрицы A является линейной комбинацией базисных строк. Так как при произвольных переменах строк (или столбцов) определитель сохраняет свойство равенства нулю, то мы, не ограничивая общности, можем считать, что базисный минор находится в левом верхнем углу матрицы (40), т.е. расположен на первых r строках и первых r столбцах. Пусть j — любое число от 1 до n, а k — любое число от 1 до m.

Убедимся в том, что определитель (r + 1)-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kr} & a_{kj} \end{vmatrix} \qquad (41)$$

равен нулю. Если $j \le r$ или $k \le r$, то указанный определитель будет равен нулю в силу того, что у него будет два одинаковых столбца или две одинаковые строки.

Если же оба числа j и k превосходят г, то (41) является минором матрицы A порядка (r + 1), а всякий такой минор равен нулю (по определению базисного минора). Итак, определитель (41) равен нулю при всех j от 1 до n и всех k от 1 до m.

Но тогда, разложив этот определитель по последнему столбцу и обозначив не зависящие от номера j алгебраические дополнения элементов этого столбца символами $A_{1j} = c_1$, $A_{2j} = c_2$, ..., $A_{rj} = c_r$, $A_{kj} = c_{r+1}$, мы получим, что

$c_1a_{1j} + c_2a_{2j} + \dots + c_ra_{rj} + c_{r+1}a_{kj} = 0$

(для всех j = 1, 2,..., n). Учитывая, что в последних равенствах алгебраическое дополнение $c_{r+1} = A_{kj}$ совпадает с заведомо отличным от нуля базисным минором, мы можем поделить каждое из этих равенств на c_{r+1}. Но тогда, вводя обозначения

$$\lambda_1 = -\frac{c_1}{c_{r+1}}, \quad \lambda_2 = -\frac{c_2}{c_{r+1}}, \quad \dots, \quad \lambda_r = \frac{c_r}{c_{r+1}},$$

мы получим, что $a_{kj} = \lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} + \dots + \lambda_r a_{rj}$ (для всех j = 1, 2,..., n), а это и означает, что k-я строка является линейной комбинацией первых r (базисных) строк.

Теорема доказана.

3. Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя.

Теорема 1.7. *Для того чтобы определитель n-го порядка A был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы его строки (столбцы) были линейно зависимы.*

Доказательство.

1) Необходимость. Если определитель n-го порядка A равен нулю, то базисный минор его матрицы имеет порядок r, заведомо меньший n. Но тогда хотя бы одна из строк является не базисной. По теореме 1.6 эта строка является линейной комбинацией базисных строк. В эту линейную комбинацию мы можем включить и все оставшиеся строки, поставив перед ними нули.

Итак, одна строка является линейной комбинацией остальных.

Но тогда по теореме 1.5 строки определителя линейно зависимы.

2) Достаточность. Если строки A линейно зависимы, то по теореме 1.5 одна строка A_i является линейной комбинацией остальных строк. Вычитая из строки A_i указанную линейную комбинацию, мы, не изменив величины A, получим одну строку, целиком состоящую из нулей. Но тогда определитель A равен нулю (в силу следствия 3 из п. 4 §2). Теорема доказана.

Методы вычисления определителей

В общем случае правило вычисления определителей n-го порядка является довольно громоздким. Для определителей второго и третьего порядка существуют рациональные способы их вычислений.

Вычисления определителей второго порядка

Чтобы вычислить определитель матрицы A второго порядка, надо от произведения элементов главной диагонали отнять произведение элементов побочной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Пример

Задание. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$

Решение. $\begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 11 \cdot 5 - (-2) \cdot 7 = 55 + 14 = 69$

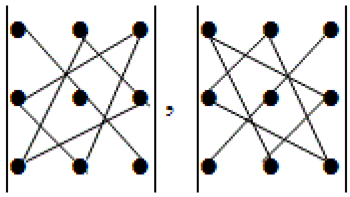
Ответ. $\begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 69$

Методы вычисления определителей третьего порядка

Для вычисления определителей третьего порядка существует такие правила.

<u>Правило треугольника</u>

Схематически это правило можно изобразить следующим образом:



«+» «–»

Произведение элементов в первом определителе, которые соединены прямыми, берется со знаком "плюс"; аналогично, для второго определителя - соответствующие произведения берутся со знаком "минус", т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Пример

Задание. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ методом треугольников.

Решение. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-2) + 4 \cdot (-2) \cdot (-1) +$

$$+3 \cdot 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot 3 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 54$$

Ответ. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 54$

<u>Правило Саррюса</u>

Справа от определителя дописывают первые два столбца, а затем произведения элементов на главной диагонали и на диагоналях, ей параллельных, берут со знаком "плюс"; а произведения элементов побочной диагонали и диагоналей, ей параллельных, со знаком "минус":

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right. = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Пример

Задание. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ с помощью правила Саррюса.

Решение. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 \cdot 1 +$

$$+(-1) \cdot 4 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 \cdot (-2) = 54$$

Ответ. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 54$

Разложение определителя по строке или столбцу

Определитель равен сумме произведений элементов строки определителя на их алгебраические дополнения. Обычно выбирают ту строку/столбец, в которой/ом есть нули. Строку или столбец, по которой/ому ведется разложение, будет обозначать стрелкой.

Пример

Задание. Разложив по первой строке, вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Решение. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}\begin{matrix} \leftarrow \\ \\ \\ \end{matrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$

$$1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0$$

Ответ. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

Этот метод позволяет вычисление определителя свести к вычислению определителя более низкого порядка.

Пример

Задание. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Решение. Выполним следующие преобразования над строками определителя: из второй строки отнимем четыре первых, а из третьей первую строку, умноженную на семь, в результате, согласно свойствам определителя, получим определитель, равный данному.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 - 4 \cdot 1 & 5 - 4 \cdot 2 & 6 - 4 \cdot 3 \\ 7 - 7 \cdot 1 & 8 - 7 \cdot 2 & 9 - 7 \cdot 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 2 \cdot (-3) & 2 \cdot (-6) \end{vmatrix} = 0$$

Определитель равен нулю, так как вторая и третья строки являются пропорциональными.

Ответ. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

Для вычисления определителей четвертого порядка и выше применяется либо разложение по строке/столбцу, либо приведение к треугольному виду, либо с помощью теоремы Лапласа.

<u>Разложение определителя по элементам строки или столбца</u>

Пример

Задание. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам какой-то строки или какого-то столбца.

Решение. Предварительно выполним элементарные преобразования над строками определителя, сделав как можно больше нулей либо в строке, либо в столбце. Для этого вначале от первой строки отнимем девять третьих, от второй - пять третьих и от четвертой - три третьих строки, получаем:

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9-1 & 8-0 & 7-9 & 6-18 \\ 5-5 & 4-0 & 3-5 & 2-10 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3-3 & 4-0 & 5-3 & 6-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & -2 & -12 \\ 0 & 4 & -2 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Полученный определитель разложим по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 0 & 8 & -2 & -12 \\ 0 & 4 & -2 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 8 & -2 & -12 \\ 4 & -2 & -8 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 0$$

Полученный определитель третьего порядка также разложим по элементам строки и столбца, предварительно получив нули, например, в первом столбце. Для этого от первой строки отнимаем две вторые строки, а от третьей - вторую:

$$\begin{vmatrix} 8 & -2 & -12 \\ 4 & -2 & -8 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & -8 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot (2 \cdot 8 - 4 \cdot 4) = 0$$

Ответ. $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$

Замечание

Последний и предпоследний определители можно было бы и не вычислять, а сразу сделать вывод о том, что они равны нулю, так как содержат пропорциональные строки.

Приведение определителя к треугольному виду

С помощью элементарных преобразований над строками или столбцами определитель приводится к треугольному виду и тогда его значение, согласно свойствам определителя, равно произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Пример

Задание. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ приведением его к треугольному виду.

Решение. Сначала делаем нули в первом столбце под главной диагональю. Все преобразования будет выполнять проще, если элемент a_{11} будет равен 1. Для этого мы поменяем местами первый и второй столбцы определителя, что, согласно свойствам определителя, приведет к тому, что он сменит знак на противоположный:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

Далее получим нули в первом столбце, кроме элемента a_{11}, для этого из третьей строки вычтем две первых, а к четвертой строке прибавим первую, будем иметь:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Далее получаем нули во втором столбце на месте элементов, стоящих под главной диагональю. И снова, если диагональный элемент будет равен ± 1, то вычисления будут более простыми. Для этого меняем местами вторую и третью строки (и при этом меняется на противоположный знак определителя):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Далее делаем нули во втором столбце под главной диагональю, для этого поступаем следующим образом: к третьей строке прибавляем три вторых, а к четвертой - две вторых строки, получаем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{vmatrix}$$

Далее из третьей строки выносим (-10) за определитель и делаем нули в третьем столбце под главной диагональю, а для этого к последней строке прибавляем третью:

$$\Delta = -10 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= -10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = (-10) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-8) = -80$$

Ответ. $\Delta = -80$

<u>Вычисление с применением теоремы Лапласа</u>

Теорема: Пусть Δ - определитель n-го порядка. Выберем в нем произвольные k строк (или столбцов), причем $k \le n-1$. Тогда сумма произведений всех миноров k-го порядка, которые содержатся в выбранных k строках (столбцах), на их алгебраические дополнения равна определителю.

Пример

Задание. Используя теорему Лапласа, вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

Решение. Выберем в данном определителе пятого порядка две строки - вторую и четвертую, тогда получаем (слагаемые, которые равны нулю, опускаем):

<u>Первое слагаемое</u> получаем, вычеркивая 2 и 4 строки, 2 и 4 столбцы.

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, тогда получим произведение: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+4+2+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

<u>Второе слагаемое</u> получаем, вычеркивая 2 и 4 строки, 2 и 5 столбцы.

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, тогда получим произведение: $+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+4+2+5} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

<u>Третье слагаемое</u> получаем, вычеркивая 2 и 4 строки, 4 и 5 столбцы.

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, тогда получим произведение: $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+4+4+5} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

Тогда получаем:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+4+2+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+4+2+5} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+4+4+5} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -23 + 128 + 90 = 195$$

Ответ. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 195$