Тема 3. Ранг матрицы

Содержание

Линейно зависимые и линейно независимые строки

Понятие линейно зависимых и линейно независимых строк необходимо для определения ранга матрицы.

Линейная комбинация строк

<u>Определение</u>. **Линейной комбинацией (ЛК) строк** $s_1, s_2, \ldots, s_m$ матрицы A называется выражение $\lambda_1 \cdot s_1 + \lambda_2 \cdot s_2 + \ldots + \lambda_m \cdot s_m$

<u>Определение</u>. ЛК называется **тривиальной**, если все коэффициенты λ_i равны нулю одновременно.

Пример: $0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_m$

Замечание: Тривиальная ЛК равна нулевой строке.

<u>Определение</u>. ЛК называется **нетривиальной**, если хотя бы один из коэффициентов λ_i отличен от нуля.

Пример: $0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 1 \cdot s_m$

Замечание: Нетривиальная ЛК тоже может быть равной нулевой строке.

Пример: $1 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$

Линейно зависимые и независимые строки

<u>Определение</u>. Система строк называется **линейно зависимой (ЛЗ)**, если существует их нетривиальная ЛК, равная нулевой строке.

Пример

Система строк $\left\{ s_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$, линейно зависима, так как ЛК этих строк $1 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2$ равна нулевой строке.

<u>Определение</u>. Система строк называется **линейно независимой (ЛНЗ)**, если только тривиальная ЛК равна нулевой строке.

Пример

Задание. Показать, что система строк $\left\{ s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ является ЛНЗ.

Решение. Составим ЛК заданных строк:

$$\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{array} \right.$$

То есть ЛК данных строк равна нулевой строке, только если коэффициенты равны нулю одновременно.

Ранг матрицы

Ранг системы строк и столбцов матрицы

<u>Определение</u>. **Рангом системы строк** называется максимальное количество линейно независимых строк этой системы.

В каждой матрице можно связать два ранга: строчный ранг (ранг системы строк) и столбцовый ранг (ранг системы столбцов).

Теорема. Строчный ранг матрицы равен её столбцовому рангу.

Ранг матрицы

<u>Определение</u>. **Рангом матрицы** A называется ранг её системы строк или столбцов.
Обозначается: r(A), rang(A)

Метод элементарных преобразований

На практике для нахождения ранга матрицы используют следующее утверждение: ранг матрицы равен количеству ненулевых строк после приведения матрицы к ступенчатому виду.

Важно:
1. Элементарные преобразования над строками (столбцами) матрицы не меняют её ранга.
2. Ранг ступенчатой матрицы равен количеству её ненулевых строк.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

Задание. Найти ранг матрицы
Решение. С помощью элементарных преобразований над ее строками приведем матрицу A к ступенчатому виду. Для этого вначале от третьей строки отнимем две вторых строки:

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

От второй строки отнимаем четвертую строку, умноженную на 4; от третьей строки – две четвертых строки:

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

Ко второй строке прибавим пять первых строк, к третьей строке – три первых строки:

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

Меняем местами первую и вторую строчки:

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

Далее меняем местами четвертую и первую строки:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow rangA = 2$$

Ответ. $rangA = 2$

Метод окаймления миноров

Примечание (повторение):

⇛ ***Минором k-го порядка*** произвольной матрицы A называется определитель, составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении каких-либо k строк и k столбцов.

В матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & -7 \end{pmatrix}$ можно указать, например, такие миноры:

— 2-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \quad \left(\text{минор} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right), \qquad \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 7 & -7 \end{vmatrix} \quad \left(\text{минор} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}\right),$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \left(\text{минор} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right);$$

— 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & -7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & -7 \end{vmatrix};$$

— 1-го порядка

$$|2| \; (\text{минор } |a_{12}|), \; |3| \; (\text{минор } |a_{13}|), \; |-7| \; (\text{минор } |a_{34}|).$$

⇛ ***Рангом матрицы*** A называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю.

Обозначения: $r(A)$, $\mathrm{rang}(A)$.

⇛ ***Базисным минором*** называется любой из отличных от нуля миноров матрицы A, порядок которого равен $r(A)$.

Для следующей матрицы A ее ранг равен 1:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 1.$$

Любой из миноров 2-го порядка матрицы A равен нулю, и существует хотя бы один минор 1-го порядка, не равный нулю, например, $|3| = 3$. Базисным минором матрицы A является каждый из ненулевых миноров 1-го порядка: $|3| (= 3)$, $|-2| (= -2)$, $|2| (= 2)$.

Для следующей матрицы A ее ранг равен 2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 2,$$

так как существует минор 2-го порядка $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$, не равный нулю, а миноров 3-го порядка у матрицы A нет. Единственный базисный минор матрицы A — минор $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$.

Теорема. Ранг матрицы равен наибольшему порядку отличного от нуля минору.

На этой теореме базируется еще один метод нахождения ранга матрицы – **метод окаймления миноров**. Суть этого метода заключается в нахождении миноров, начиная с низших порядков и двигаясь к более высоким. Если минор n-го порядка не равен нулю, а все миноры $(n+1)$-го равны нулю, то ранг матрицы будет равен n .

Этапы работы:

1) Найти какой-нибудь минор M_1 первого порядка (т. е. элемент матрицы), отличный от нуля. Если такого минора нет, то матрица A нулевая и $r(A) = 0$.

2) Вычислять миноры 2-го порядка, содержащие M_1 (*окаймляющие* M_1) до тех пор, пока не найдется минор M_2, отличный от нуля. Если такого минора нет, то $r(A) = 1$, если есть, то $r(A) \geqslant 2$. И т. д.

...

k) Вычислять (если они существуют) миноры k-го порядка, окаймляющие минор $M_{k-1} \neq 0$. Если таких миноров нет, или они все равны нулю, то $r(A) = k - 1$; если есть хотя бы один такой минор $M_k \neq 0$, то $r(A) \geqslant k$, и процесс продолжается.

При нахождении ранга матрицы таким способом достаточно на каждом шаге найти *всего один* ненулевой минор k-го порядка, причем искать его только среди миноров, содержащих минор $M_{k-1} \neq 0$.

Пример

Задание. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$, используя метод окаймления миноров.

Решение.

Минорами минимального порядка являются миноры первого порядка, которые равны элементам матрицы A . Рассмотрим, например, минор $M_1 = 1 \neq 0$. расположенный в первой строке и первом столбце.

Окаймляем его с помощью второй строки и второго столбца, получаем минор $M_2^1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Тогда рассмотрим еще один минор второго порядка, для этого минор M_1 окаймляем при помощи второй строки и третьего столбца, тогда имеем минор $M_2^2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, то есть ранг матрицы не меньше двух.

Далее рассматриваем миноры третьего порядка, которые окаймляют минор M_2^2. Таких миноров два: комбинация третьей строки со вторым столбцом или с четвертым столбцом.
Вычисляем эти миноры:
первый минор

$$M_3^1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

так как содержит два пропорциональных столбца (первый и второй);
второй минор

$$M_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

преобразуем следующим образом: к первой строке прибавим третью строку, а ко второй строке прибавим две третьих строки:

$$M_3^2 = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 0 & 15 & 12 \\ -1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

И так как первая и вторая строки пропорциональны, то минор равен нулю.
Таким образом, все окаймляющие миноры третьего порядка равны нулю. А, значит, ранг матрицы A равен двум: $rang A = 2$

Ответ. $rang A = 2$