Задание

1.3.1. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

❍ Приведем матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2\cdot\mathrm{II}-\mathrm{I} \\ 2\cdot\mathrm{III}-\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & -3 & -12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{III}+3\cdot\mathrm{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная ступенчатая матрица содержит две ненулевые строки, значит ее ранг равен 2. Следовательно, ранг исходной матрицы также равен 2. ●

Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

1.3.2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

1.3.3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

1.3.4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5 \end{pmatrix}$.

1.3.5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

1.3.6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$.

1.3.7. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.3.8. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и указать один из базисных миноров:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

❍ Так как у матрицы A есть ненулевые элементы, то $r(A) \geqslant 1$. Найдем какой-либо ненулевой минор 2-го порядка (если он существует). Таким минором является, например, $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Значит, $r(A) \geqslant 2$.

Вычислим миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2:

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложение} \\ \text{по 2-й строке} \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложение} \\ \text{по 1-му столбцу} \end{bmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2-2) + 6 \cdot (6-4) = -12 + 12 = 0;$$

Все миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2, равны нулю, следовательно, $r(A) < 3$. Итак, $r(A) = 2$.

Одним из базисных миноров является $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. ●

Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и указать какой-либо базисный минор:

1.3.9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$

1.3.10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix}.$

1.3.11. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

1.3.12. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

1.3.13. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$

1.3.14. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$

Найти ранг матрицы при различных значениях параметра λ:

1.3.15. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$

1.3.16. $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$

Ответы

1.3.2. 2. **1.3.3.** 3. **1.3.4.** 3. **1.3.5.** 3. **1.3.6.** 3. **1.3.7.** 4. **1.3.9.** 3; $|A|$.

1.3.10. 2; $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$. **1.3.11.** 2; $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$. **1.3.12.** 3; $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}$. **1.3.13.** 2; $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$.

1.3.14. 3; $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 7 & 7 & 1 \end{vmatrix}$. **1.3.15.** $r = 3$ при $\lambda = \frac{2}{3}$, $r = 4$ при $\lambda \neq \frac{2}{3}$.

1.3.16. $r = 2$ при $\lambda = 3$, $r = 3$ при $\lambda \neq 3$.