Тема 6. Функции и пределы

Содержание

6.4. Предел функции

6.4.1. Определение предела

$\Rrightarrow$ *Окрестностью* точки x_0 называется любой интервал с центром в точке x_0.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 кроме, быть может, самой точки x_0. Дадим первое определение предела функции (по Гейне):

$\Rrightarrow$ Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0 ($x_n \neq x_0$ $\forall n$), последовательность $\{f(x_n)\}$ соответствующих значений функции сходится к A.

Обозначается это так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ (при $x \to x_0$).

Первое определение предела функции эквивалентно второму определению (по Коши):

$\Rrightarrow$ Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ в точке x_0, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$ (вообще говоря, зависящее от ε), что для всех x таких, что $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Первое определение называется также определением предела функции «на языке последовательностей», а второе — определением предела «на языке ε–δ» (эпсилон–дельта).

6.4.2. Операции над пределами функций

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 и, кроме того, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$. Тогда:

1. Предел суммы (разности) этих функций равен сумме (соответственно, разности) их пределов, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B.$$

2. Предел произведения функций равен произведению их пределов, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B.$$

3. Предел частного функций равен частному их пределов (при условии $B \neq 0$), т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что постоянный множитель можно выносить за знак предела функции, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \implies \forall \alpha \in R: \lim_{x \to x_0} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha A.$$

Для функций справедливы аналоги соответствующих теорем для последовательностей о пределах корня и степени.

6.4.3. Пределы функций и неравенства

Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, быть может, самой этой точки) и $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ для всех значений x из этой окрестности. Пусть, кроме того,

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = A_1, \quad \lim_{x \to x_0} f_2(x) = A_2.$$

Тогда $A_1 \leqslant A_2$.

Теорема 6.2 (о промежуточной переменной). Пусть функции $f_1(x)$, $f(x)$, $f_2(x)$ определены в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 (кроме, быть может, самой этой точки) и для всех $x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$ верно неравенство $f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x)$. Пусть, кроме того, $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_2(x) = A$. Тогда $\lim_{x \to x_0} f(x)$ также существует и равен A.

Теорема 6.3 (о сохранении знака). Если предел функции в данной точке x_0 положителен, то и все значения функции в некоторой окрестности этой точки (кроме, быть может, самой точки x_0) положительны.

Теорема 6.4 (об ограниченности функции, имеющей предел). Пусть функция имеет предел в данной точке. Тогда она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

6.4.4. Предел функции на бесконечности

Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном промежутке $(a; +\infty)$.

$\Rrightarrow$ Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***при*** $x \to +\infty$, если для любой положительной бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ (т. е. $x_n \to +\infty$, $n \to \infty$) последовательность $\{f(x_n)\}$ соответствующих значений функции сходится к A.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

Равносильное определение предела функции при $x \to +\infty$ на языке ε–δ будет выглядеть так:

$\Rrightarrow$ Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***при*** $x \to +\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $M > 0$, что для всех значений $x > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Аналогично определяется предел функции $f(x)$ при $x \to -\infty$.
Обозначение: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

6.4.5. Односторонние пределы

$\Rrightarrow$ Пусть функция $f(x)$ определена в правой полуокрестности точки x_0, т. е. на некотором интервале $(x_0, x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$. Тогда говорят, что число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***справа*** в точке x_0 (или ***правосторонним пределом***), если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0 и такой, что все ее члены больше, чем x_0, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A.

Обозначения: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$ или $f(x_0 + 0) = A$.

Аналогично определяется ***предел функции слева*** (или ***левосторонний предел***) в точке x_0, обозначаемый $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $f(x_0 - 0)$.

Очевидно, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует в том и только в том случае, когда существуют и односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, причем все три числа равны, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x).$$

6.4.6. Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Часто используются следующие следствия из обоих замечательных пределов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}=\alpha,\quad \alpha\in\mathbb{R};$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

6.4.7. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

$\Rrightarrow$ Функция $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to x_0$ (или в окрестности точки x_0), если $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$.

Таким образом,

$$A=\lim_{x\to x_0}f(x)\iff f(x)=A+\alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x\to x_0$.

$\Rrightarrow$ Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x\to x_0$ Тогда:

1) Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка в окрестности точки* x_0.

В частности, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными бесконечно* малыми (в окрестности точки x_0), что обозначается так: $\alpha(x)\sim\beta(x)$, $x\to x_0$.

2) Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$. Этот факт записывается так: $\alpha(x)=o(\beta(x))$, $x\to x_0$ и говорят, что $\alpha(x)$ — *o малое* от $\beta(x)$ при $x\to x_0$. В частности, если $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x\to x_0$, то $\alpha(x)=o(1)$, $x\to x_0$.

При решении многих задач используются следующие эквивалентности, верные при $x \to 0$:

$$\sin x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \ln a \text{ (в частности, } e^x - 1 \sim x\text{)},$$

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}.$$

Кроме того, имеет место следующий факт: если $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, $x \to x_0$ и существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) \cdot \beta(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) \cdot \beta(x) = \lim_{x \to x_0} \alpha(x) \cdot \beta_1(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}.$$

Таким образом, предел произведения или частного двух бесконечно малых не меняется при замене любой из них на эквивалентную бесконечно малую.