§ 5. Неопределённый интеграл. Интегрирование тригонометрических функций

§ 5.1. Теоретический материал

Интегралы от тригонометрических функций во многих ситуациях удается рационализировать либо существенно упростить. Рассмотрим шесть наиболее типичных случаев.

1. Если под знаком интеграла стоит выражение $R(\sin x, \cos x)$, получающееся из функций $\sin x$ и $\cos x$ и некоторых констант с помощью четырех арифметических действий ($R(\sin x, \cos x)$ называется рациональной функцией от $\sin x$ и $\cos x$), то данный интеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ сводится к интегралу от рациональной дроби при помощи *универсальной тригонометрической подстановки* $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Хотя универсальная подстановка позволяет найти любой интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, однако в большинстве случаев она приводит к чересчур громоздким вычислениям, и тогда удобнее пользоваться другими, более эффективными подстановками. Тем не менее некоторые интегралы наиболее быстро считаются именно с помощью этой подстановки. В частности, это относится к интегралам вида $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$, где a или b не равны нулю.

2. Если подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ не меняется при перемене знаков у $\sin x$ и $\cos x$ одновременно, т. е. если

$$R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x), \tag{5.1}$$

то целесообразно применить подстановку $t = \operatorname{tg} x$. В частности, это относится к интегралам вида $\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x\cdot\cos x + c\cdot\cos^2 x + d}$.

3. Если подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ меняет знак при замене $\sin x$ на $-\sin x$, т. е. если

$$R(-\sin x, \quad \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то интеграл рационализируется с помощью подстановки $t = \cos x$. В частности, это относится к интегралам вида $\int \sin^{2n+1} x \cdot \cos^{2k} x\, dx$, где $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Если же подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ меняет знак при замене $\cos x$ на $-\cos x$, т. е. если

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то интеграл рационализируется с помощью подстановки $t = \sin x$. В частности, это относится к интегралам вида $\int \sin^{2n} x \cdot \cos^{2k+1} x\, dx$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

4. Если подынтегральная функция представляет собой произведение четных степеней синуса и косинуса, то есть данный интеграл имеет вид

$$\int \sin^{2n} x \cdot \cos^{2k} x\, dx, \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

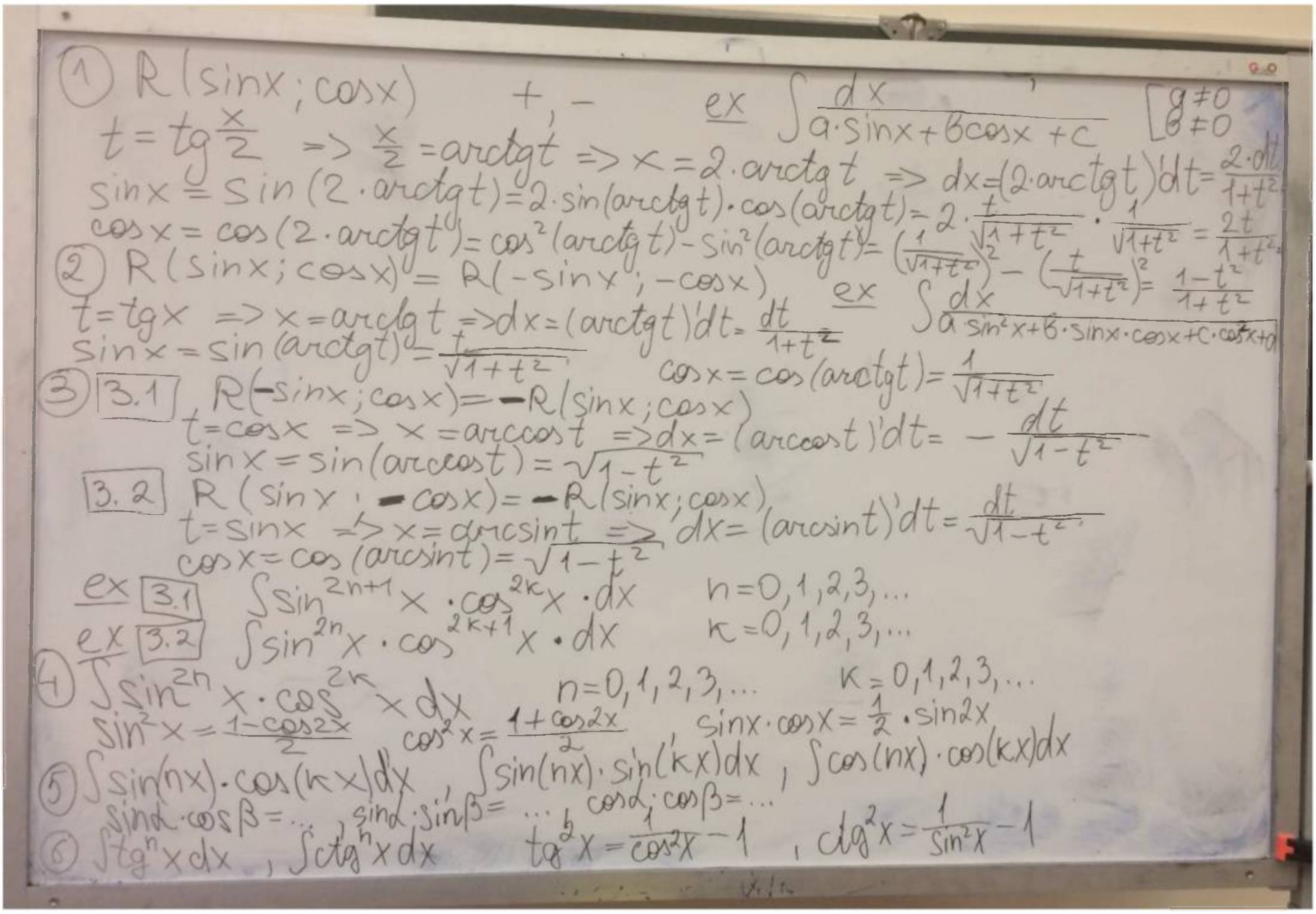
то следует упростить ее с помощью формул $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$, $\sin x \cos x = \dfrac{1}{2} \sin 2x$.

5. При вычислении интегралов $\int \sin nx \cdot \cos kx\, dx$, $\int \sin nx \cdot \sin kx\, dx$, $\int \cos nx \cdot \cos kx\, dx$, пользуются тригонометрическими формулами преобразования произведения в сумму:

$$\begin{aligned} \sin\alpha \cdot \cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)], \\ \sin\alpha \cdot \sin\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)], \\ \cos\alpha \cdot \cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]. \end{aligned} \tag{5.2}$$

6. Интегралы вида $\int \mathrm{tg}^n x\, dx$ и $\int \mathrm{ctg}^n x\, dx$ вычисляются с помощью формул $\mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$ и $\mathrm{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1$, позволяющих понизить степень тангенса или котангенса.

Краткая схема про все случаи



Примеры

8.5.1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{4\sin x - 3\cos x - 5}$.

○ Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой (случай 1):

$$\int \frac{dx}{4\sin x - 3\cos x - 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2} - 3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} - 5} =$$

$$= \int \frac{2dt}{8t - 3(1-t^2) - 5(1+t^2)} = -\int \frac{dt}{t^2 - 4t + 4} =$$

$$= -\int \frac{dt}{(t-2)^2} = \frac{1}{t-2} + C = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2} + C. \quad \bullet$$

8.5.4. Найти интеграл $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

❍ Поскольку подынтегральная функция удовлетворяет условию (5.1), то применим подстановку $t = \operatorname{tg} x$ (случай 2, тогда $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ и $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$). Для удобства поделим числитель и знаменатель подынтегральной дроби на $\cos^2 x$ и воспользуемся тождеством $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Тогда

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{(1+\operatorname{tg}^2 x) + \operatorname{tg}^2 x} = [t = \operatorname{tg} x] =$$

$$= \int \frac{dt}{2t^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \operatorname{arctg} \frac{t}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2}t + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C. \quad ●$$

8.5.7. Найти интеграл:

1) $\int \sin^3 x \sqrt{\cos x}\, dx$;

2) $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \sin 2x}$.

❍ 1) Подынтегральная функция меняет знак при замене $\sin x$ на $(-\sin x)$, поэтому применяем (случай 3) подстановку $t = \cos x$. Тогда

$$\int \sin^3 x \cdot \sqrt{\cos x}\, dx = \int \sin^2 x \cdot \sqrt{\cos x} \cdot \sin x\, dx =$$

$$= \int (1 - \cos^2 x) \cdot \sqrt{\cos x} \cdot \sin x\, dx =$$

$$= [t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x\, dx] = \int (1-t^2)\sqrt{t}(-dt) =$$

$$= \int (t^{5/2} - t^{1/2}) dt = \frac{2}{7}t^{7/2} - \frac{2}{3}t^{3/2} + C =$$

$$= \frac{2}{7}\sqrt{\cos^7 x} - \frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x} + C.$$

2) Преобразуем подынтегральную функцию

$$\frac{1}{\sin x\cdot\sin 2x}=\frac{1}{\sin x\cdot 2\sin x\cdot\cos x}=\frac{1}{2\sin^2 x\cdot\cos x}.$$

Теперь *видно*, что эта функция меняет знак при замене $\cos x$ на $-\cos x$. Поэтому воспользуемся (случай 3) подстановкой $t=\sin x$, предварительно домножив числитель и знаменатель преобразованной подынтегральной дроби на $\cos x$:

$$\int\frac{1}{2\sin^2 x\cdot\cos x}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x\cdot(1-\sin^2 x)}=[t=\sin x\Rightarrow dt=\cos x\,dx]=$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2(1-t^2)}=\frac{1}{2}\int\frac{(1-t^2+t^2)}{t^2(1-t^2)}dt=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{t^2}+\int\frac{dt}{1-t^2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+C=-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{\sin x}+\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|\right)+C.\quad\bullet$$

8.5.10. Найти интеграл $\int\sin^4 x\cdot\cos^2 x\,dx$.

❍ В данном примере имеет место случай 4, поэтому сначала упростим подынтегральное выражение.

$$\int\sin^4 x\cdot\cos^2 x\,dx=\int\sin^2 x\cdot(\sin x\cos x)^2dx=$$
$$=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2dx=\frac{1}{8}\int(1-\cos 2x)\sin^2 2x\,dx=$$
$$=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\,dx-\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cdot\cos 2x\,dx=$$
$$=[t=\sin 2x\Rightarrow dt=2\cos 2x\,dx]=$$
$$=\frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx-\frac{1}{8}\int t^2\cdot\frac{dt}{2}=\frac{1}{16}\left(\int dx-\int\cos 4x\,dx\right)-$$
$$-\frac{1}{16}\cdot\frac{t^3}{3}=\frac{1}{16}\left(x-\frac{\sin 4x}{4}-\frac{\sin^3 2x}{3}\right)+C.\quad\bullet$$

8.5.13. Найти интеграл $\int\cos 5x\cdot\cos 3x\,dx$.

❍ Здесь удобно воспользоваться формулами (5.2). Учитывая, что $\cos 5x\cdot\cos 3x=\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 8x)$, получим

$$\int\cos 5x\cdot\cos 3x=\frac{1}{2}\int(\cos 2x+\cos 8x)dx=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\int\cos 2x\,dx+\int\cos 8x\,dx\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 8x}{8}\right)+C=$$
$$=\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 8x+C.\quad\bullet$$

8.5.16. Найти интеграл $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$.

Имеет место случай 6. Поэтому используем формулу для $\operatorname{tg}^2 x$:

$$\int \operatorname{tg}^5 x\,dx = \int \operatorname{tg}^3 x \cdot \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \operatorname{tg}^3 x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^3 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \left[t = \operatorname{tg} x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}\right] =$$

$$= \int t^3 dt - \int \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}^2 x\,dx = \frac{t^4}{4} - \int \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg} x\,dx = [t = \operatorname{tg} x] =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int t\,dt - \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = [y = \cos x \Rightarrow dy = -\sin x\,dx] =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{t^4}{2} + \int \frac{dy}{y} = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|y| + C =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$$