Задание

6.1.1. Найти области определения функций:

1) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2-1}$;

2) $f(x) = \sqrt{5-3x}$;

3) $f(x) = \ln(x+2)$.

○ 1) Дробь $\dfrac{3x+1}{x^2-1}$ определена, если ее знаменатель не равен нулю. Поэтому область определения данной функции находится из условия $x^2 - 1 \neq 0$, т. е. $x \neq \pm 1$. Таким образом, $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) Функция $f(x) = \sqrt{5-3x}$ определена, если подкоренное выражение неотрицательно, т. е. $5 - 3x \geqslant 0$. Отсюда $x \leqslant \frac{5}{3}$, и, значит, $D(f) = \left(-\infty; \frac{5}{3}\right]$.

3) Выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительным, поэтому функция $\ln(x+2)$ определена в том и только в том случае, когда $x + 2 > 0$, т. е. $x > -2$. Значит, $D(f) = (-2; +\infty)$. ●

6.1.2. Найти области определения функций:

1) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}} + \arcsin\dfrac{x+2}{3}$;

2) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt[3]{2x - x^2}} - 7\cos 2x$.

○ 1) Функция a^x, $a > 0$ определена при всех действительных значениях x, поэтому функция $2^{\frac{1}{x}}$ определена в точности при тех значениях x, при которых имеет смысл выражение $\frac{1}{x}$, т. е. при $x \neq 0$.

Далее, область определения второго слагаемого находим из двойного неравенства $-1 \leqslant \dfrac{x+2}{3} \leqslant 1$. Отсюда $-3 \leqslant x + 2 \leqslant 3$, т. е. $-5 \leqslant x \leqslant 1$.

Область определения функции $f(x)$ есть пересечение областей определения обоих слагаемых, откуда $D(f) = [-5; 0) \cup (0; 1]$.

2) Функция $7\cos 2x$ определена при всех действительных значениях x, а функция $\dfrac{5}{\sqrt[3]{2x - x^2}}$ — лишь при тех значениях x, при которых $2x - x^2 \neq 0$, т. е. при $x \neq 0$, $x \neq 2$.

Таким образом, $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$. ●

Найти области определения функций:

6.1.3. $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^3+1}$.

6.1.4. $f(x) = \sin\dfrac{1}{|x|-2}$.

6.1.5. $f(x) = \log_3(-x)$.

6.1.6. $f(x) = \sqrt[4]{x^2-7x+10}$.

6.1.7. $f(x) = x^2 + \operatorname{tg} x$.

6.1.8. $f(x) = \sqrt{x-7} + \sqrt{10-x}$.

6.1.9. $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{|x^2-2|}}$.

6.1.10. $f(x) = \sqrt[4]{x+2} + \dfrac{1}{\sqrt[6]{1-x}}$.

6.1.11. $f(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \log_2(2-3x)$.

6.1.12. $f(x) = \arccos(x-2) - \ln(x-2)$.

6.1.13. Найти множества значений функций:

1) $f(x) = x^2 + 4x + 1$;

2) $f(x) = 2^{x^2}$;

3) $f(x) = 3 - 5\cos x$.

◐ 1) Так как $x^2 + 4x + 1 = (x+2)^2 - 3$, а $(x+2)^2 \geqslant 0$ для всех значений x, то $f(x) \geqslant -3$ для всех x. Поскольку к тому же функция $(x+2)^2$ принимает все значения от 0 до ∞, то $E(f) = [-3; +\infty)$.

2) $E(x^2) = [0; +\infty)$, поэтому множество значений функции 2^{x^2} совпадает с множеством значений функции 2^x при $x \geqslant 0$. Отсюда $E(f) = [1; +\infty)$.

3) $E(\cos x) = [-1; 1]$, откуда $E(-5\cos x) = [-5; 5]$. Так как $f(x) = -5\cos x + 3$, то $E(f) = [-2; 8]$. ●

Найти множество значений функций:

6.1.14. $f(x) = x^2 - 8x + 20$.

6.1.15. $f(x) = 3^{-x^2}$.

6.1.16. $f(x) = 2\sin x - 7$.

6.1.17. $f(x) = \dfrac{1}{x} + 4$.

6.1.18. $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$.

6.1.19. $f(x) = \sqrt{5-x} + 2$.

6.1.20. Для функции $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-1}$ найти:

1) $f(0)$; **2)** $f(-2)$;

3) $f(\sqrt{2})$; **4)** $f(-x)$;

5) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; **6)** $f(a+1)$;

7) $f(a)+1$; **8)** $f(2x)$.

1)–3). Подставляя значение $x = 0$ в аналитическое выражение для данной функции, получим: $f(0) = \dfrac{0+3}{0^2-1} = -3$. Аналогично находим $f(-2) = \dfrac{-2+3}{(-2)^2-1} = \dfrac{1}{3}$, $f(\sqrt{2}) = \dfrac{\sqrt{2}+3}{(\sqrt{2})^2-1} = \sqrt{2}+3$.

4)–6). Для того, чтобы найти $f(-x)$, надо формально заменить x в формуле для $f(x)$ на $-x$. Тогда $f(-x) = \dfrac{-x+3}{(-x)^2-1} = \dfrac{3-x}{x^2-1}$. Точно так же найдем $f(\frac{1}{x}) = \dfrac{\frac{1}{x}+3}{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1} = \dfrac{3x^2+x}{1-x^2}$, $f(a+1) = \dfrac{(a+1)+3}{(a+1)^2-1} = \dfrac{a+4}{a^2+2a}$.

7) $f(a)+1 = \dfrac{a+3}{a^2-1} + 1 = \dfrac{a^2+a+2}{a^2-1}$.

8) $f(2x) = \dfrac{2x+3}{(2x)^2-1} = \dfrac{2x+3}{4x^2-1}$. ●

6.1.21. Для функции $f(x) = x^3 \cdot 2^x$ найти:

1) $f(1)$; **2)** $f(-3)$;

3) $f(-\sqrt[3]{5})$; **4)** $f(-x)$;

5) $f(3x)$; **6)** $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

7) $\dfrac{1}{f(x)}$; **8)** $f(b-2)$.

6.1.22. Для функции $\varphi(t) = \dfrac{\sqrt{t+5}}{t^2}$ найти:

1) $\varphi(-1)$;

2) $\varphi(-5)$;

3) $\varphi(\frac{5}{4})$;

4) $\varphi(z+3)$;

5) $\varphi(2t-1)$.

6.1.23. Какие из следующих функций четные, какие нечетные, а какие — общего вида:

1) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$;

2) $f(x) = x^4 - 5|x|$;

3) $f(x) = e^x - 2e^{-x}$;

4) $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

❍ 1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$, и, стало быть, область определения функции симметрична относительно начала координат. Кроме того, $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = -\dfrac{x^3}{x^2+1} = -f(x)$, т. е. данная функция нечетная.

2) $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и $f(-x) = (-x)^4 - 5|-x| = x^4 - 5|x| = f(x)$. Следовательно, функция четная.

3) $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и $f(-x) = e^{-x} - 2e^x \neq \pm f(x)$, т. е. данная функция общего вида.

4) $D(f) = (-1; 1)$, т. е. область определения симметрична относительно нуля. К тому же $f(-x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -\ln\dfrac{1-x}{1+x} = -f(x)$, т. е. функция нечетная. ●

6.1.24. Какие из следующих функций четные, какие нечетные, а какие — общего вида:

1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$;

2) $f(x) = x^5 + 3x^3 - x$;

3) $f(x) = \sqrt{x}$;

4) $f(x) = \arcsin x$;

5) $f(x) = \sin x + \cos x$;

6) $f(x) = |x| - 2$;

7) $f(x) = \dfrac{3}{x^2-1}$;

8) $f(x) = x \cdot e^x$.

6.1.25. Определить, является ли данная функция периодической, и найти ее наименьший положительный период, если он существует:

1) $f(x) = \sin 4x$;

2) $f(x) = \cos^2 5x$;

3) $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$;

4) $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$;

5) $f(x) = x^2$.

❍ 1) Наименьшим положительным периодом функции $\sin x$ является число 2π. Покажем, что наименьший положительный период $\sin 4x$ — число $\dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

Действительно, $\sin 4\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin(4x+2\pi) = \sin 4x$, т. е. $T = \frac{\pi}{2}$ — период данной функции. С другой стороны, если $T_1 > 0$ — какой-либо другой период этой функции, то $\sin 4(x+T_1) = \sin 4x$ для всех x, т. е. $\sin(4x+4T_1) = \sin 4x$, $x \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что $4T_1$ — период функции $\sin t$, где $t = 4x$, и, значит, $4T_1 \geqslant 2\pi$, т. е. $T_1 \geqslant \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, $T = \frac{\pi}{2}$ — наименьший положительный период функции $\sin 4x$.

Аналогично можно показать (см. также задачу 6.1.123), что наименьший положительный период функций $\sin(kx+b)$ и $\cos(kx+b)$ $(k \neq 0)$ — это число $\frac{2\pi}{k}$.

2) Поскольку $\cos^2 5x = \dfrac{1+\cos 10x}{2}$, то период данной функции совпадает с периодом функции $\cos 10x$. Рассуждая как и в пункте 1), легко показать, что наименьший положительный период функции $\cos 10x$ равен $\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$. Таким образом, наименьший положительный период функции $f(x)$ равен $\frac{\pi}{5}$.

3) Наименьший положительный период $\operatorname{tg} x$ равен π, поэтому наименьший положительный период функции $\operatorname{tg}\frac{x}{3}$ будет равен (см. рассуждения в пункте 1)) $\dfrac{\pi}{(1/3)} = 3\pi$.

4) Наименьшие положительные периоды функций $\sin 2x$ и $\cos 3x$ соответственно равны (см. пункты 1) и 2)) $\frac{2\pi}{2}$, т. е. π, и $\frac{2\pi}{3}$. Нетрудно показать (см. также задачу 6.1.124), что наименьший положительный период суммы этих функций будет равен наименьшему общему кратному их периодов, т. е. числу 2π.

5) При $x > 0$ функция определена и возрастает, поэтому не может быть периодической. Значит, и на интервале $(-\infty; +\infty)$ функция не является периодической. ●

6.1.26. Какие из следующих функций периодические, а какие — нет? Там, где это возможно, найти наименьший положительный период функции:

1) $f(x) = \cos\frac{x}{4}$;

2) $f(x) = |x|$;

3) $f(x) = \operatorname{tg}(2x-1)$;

4) $f(x) = \sin\frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x$;

5) $f(x) = \sin 3x \cdot \cos 3x$.

Наибольшее целое число, не превосходящее x (т. е. ближайшее слева на числовой оси), называется *целой частью* x и обозначается $[x]$ (или $E(x)$). Например, $[\pi] = 3$, $[-4{,}5] = -5$ и т. д.

Число $x - [x]$ называется *дробной частью* x и обозначается $\{x\}$. Так $\{1{,}8\} = 0{,}8$, $\{-2{,}7\} = 0{,}3$ и т. д.

6.1.27. Построить график функции:

1) $y = [x]$;

2) $y = \{x\}$.

◐ 1) Функция $[x]$ равна n на каждом полуинтервале $[n; n+1)$, поэтому ее график имеет следующий «ступенчатый» вид (рис. 70).

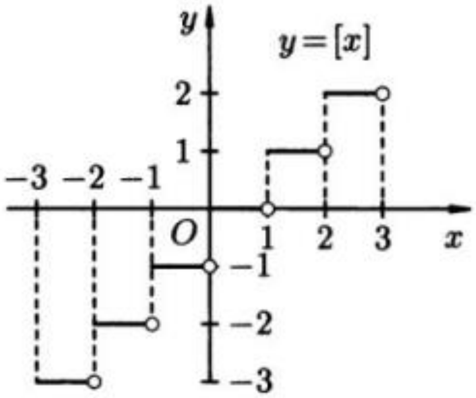

Рис. 70

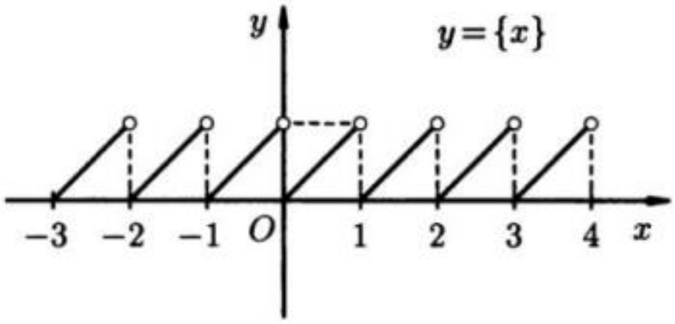

Рис. 71

2) На каждом полуинтервале $[n; n+1)$ имеем: $[x] = n$, поэтому функция $\{x\}$ принимает одни и те же значения. Таким образом, достаточно построить ее график на $[0; 1)$ (здесь $\{x\} = x$), а затем параллельно перенести эту часть на все остальные промежутки. В итоге получим график, изображенный на рисунке 71. ●

6.1.28. Построить график функции:

1) $y = x^2 + 4x + 3$;

2) $y = -2\sin 3x$;

3) $y = \left|\{x\} - \frac{1}{2}\right|$.

◐ 1) Выделяя полный квадрат в данном квадратном трехчлене, преобразуем функцию к виду $y = (x+2)^2 - 1$. Теперь ясно, что для построения графика функции, достаточно сначала сместить параболу $y = x^2$ влево на 2 единицы (получается график функции $y = (x+2)^2$), а затем на 1 единицу вниз (рис. 72).

2) Сжав стандартную синусоиду $y = \sin x$ в три раза к оси Oy, получим график функции $y = \sin 3x$ (рис. 73). Растянув полученный график в два раза вдоль оси Oy, получим график

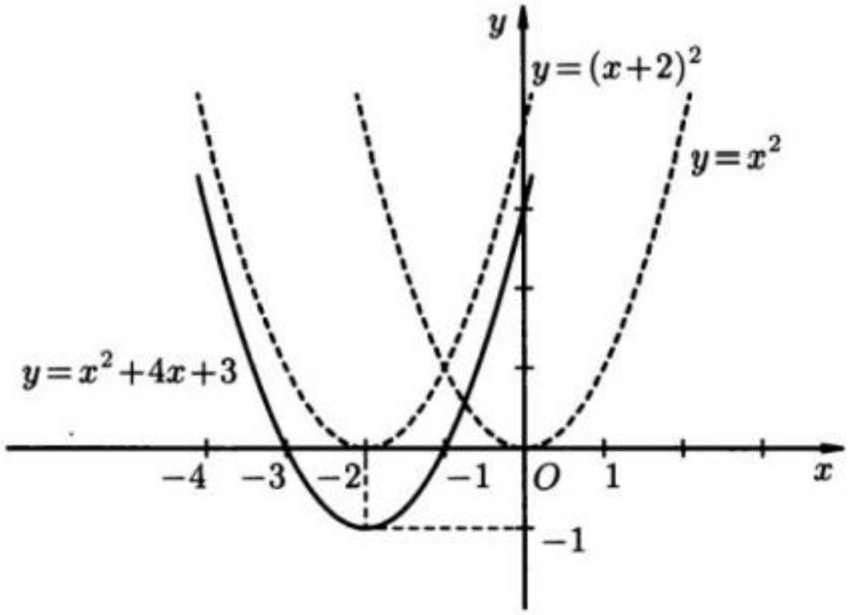

Рис. 72

функции $y = 2\sin 3x$ (рис. 74 а)). Осталось отразить последний график относительно оси Ox, результатом будет искомый график (рис. 74 б)).

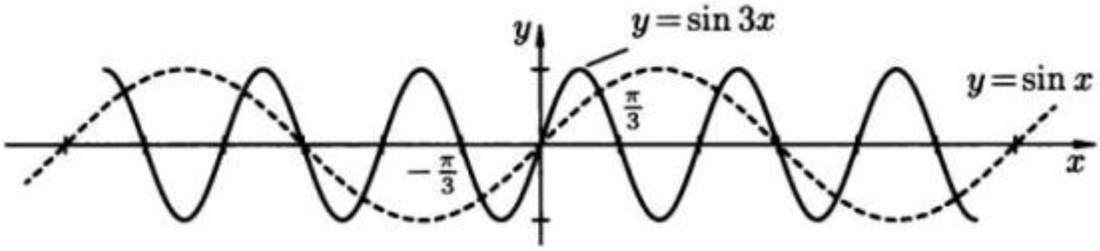

Рис. 73

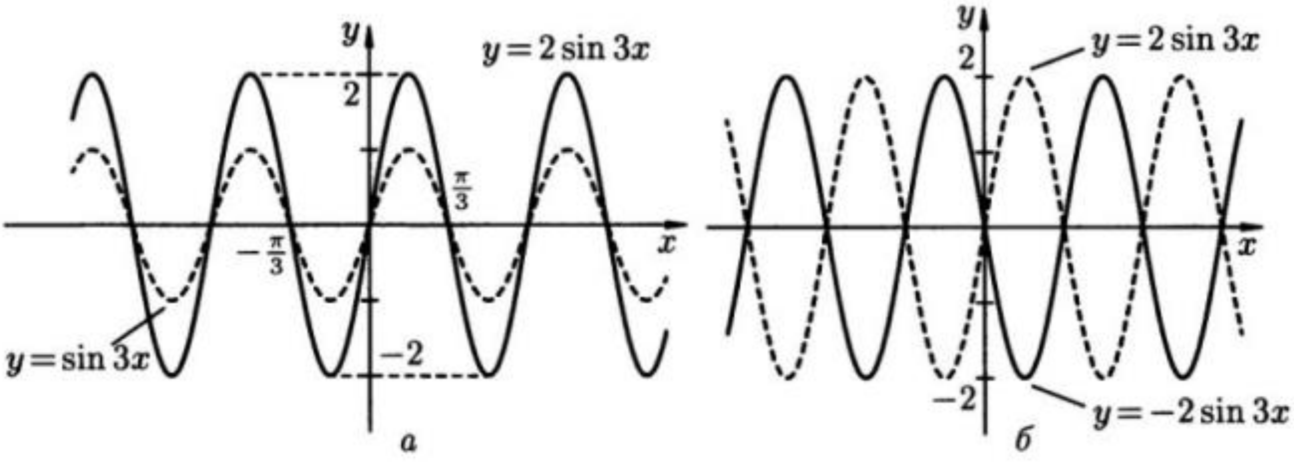

Рис. 74

3) Опустив на $\frac{1}{2}$ вниз график дробной части x (рис. 71), получим график функции $y = \{x\} - \frac{1}{2}$ (рис. 75 а)). Теперь те

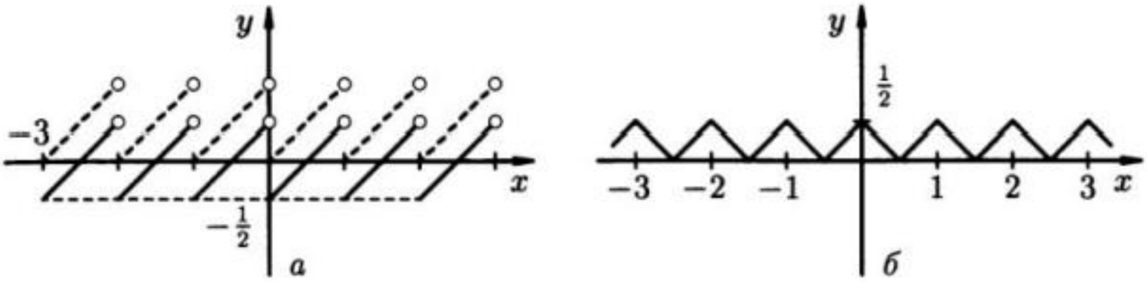

Рис. 75

части этого графика, которые расположены ниже оси Ox, отражаем относительно этой оси — в итоге имеем искомый график (рис. 75 б)). ●

Построить графики функций:

6.1.29. $y = |x - 3|$.

6.1.30. $y = x^2 - 6x + 11$.

6.1.31. $y = 3\cos 2x$.

6.1.32. $y = -\dfrac{2}{x} + 1$.

6.1.33. $y = 2^{x-1} + 3$.

6.1.34. $y = \log_3(-x)$.

6.1.35. $y = \operatorname{tg}|x|$.

6.1.36. $y = \dfrac{x+4}{x+2}$.

6.1.37. Найти сложные функции $f \circ g$ и $g \circ f$, где
1) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$;
2) $f(x) = x^3$, $g(x) = 2x - 1$.

❍ 1) По определению композиции функций имеем $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$, $x \geqslant 0$.

2) Аналогично, $(f \circ g)(x) = (2x-1)^3$, $(g \circ f)(x) = 2x^3 - 1$. ●

6.1.38. Найти сложные функции $f \circ g$ и $g \circ f$, где
1) $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$;
2) $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 2x - 5$;
3) $f(x) = |x|$, $g(x) = \cos x$.

6.1.39. Найти обратную функцию для данной:
1) $y = x - 1$;
2) $y = \dfrac{2}{x+3}$;
3) $y = \sqrt{x}$.

❍ 1) Функция $y = x - 1$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$, а значит, для любых $x_1 \neq x_2$ имеем: $f(x_1) \neq f(x_2)$. Отсюда следует, что на $(-\infty; +\infty)$ эта функция имеет обратную. Для того, чтобы найти эту обратную функцию, разрешим уравнение $y = x - 1$ относительно x, откуда $x = y + 1$. Записывая полученную формулу в традиционном виде (т.е. меняя x и y местами), найдем окончательно: $y = x + 1$ — обратная функция к исходной.

2) Функция $y = \dfrac{2}{x+3}$ убывает на множестве $(-\infty; -3) \cup \cup(-3; +\infty)$, являющейся областью определения. Поэтому у нее есть обратная, которую найдем, разрешая уравнение $y = \dfrac{2}{x+3}$ относительно x.

Отсюда получим, что функция $y = \dfrac{2}{x} - 3$ — обратная к исходной.

3) Функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ и, стало быть, имеет обратную. Рассуждая, как в пунктах 1) и 2), найдем обратную функцию $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$. Область определения этой функции совпадает с областью значений исходной функции $y = \sqrt{x}$, т. е. с промежутком $[0; +\infty)$. ●

6.1.40. Доказать, что функция $y = x^2$ не имеет обратной на интервале $(-\infty; +\infty)$.

◐ Для любого $y_0 > 0$ уравнение $y_0 = x^2$ имеет два решения $x_1 = \sqrt{y_0}$ и $x_2 = -\sqrt{y_0}$ (т. е. каждая горизонтальная прямая $y = y_0$ пересекает график функции $y = x^2$ в двух точках). Но функция имеет обратную только в том случае, если такое решение единственно. Значит, данная функция действительно не имеет обратной на интервале $(-\infty; +\infty)$. ●

Какие из следующих функций имеют обратные? Для таких функций найти обратные функции.

6.1.41. $y = 3x + 5$.

6.1.42. $y = x^3 - 2$.

6.1.43. $y = |x|$.

6.1.44. $y = \dfrac{x-2}{x}$.

Выяснить, какие из следующих функций являются монотонными, какие — строго монотонными, а какие — ограниченными:

6.1.45. $f(x) = c$.

6.1.46. $f(x) = \sin^2 x$.

6.1.47. $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

6.1.48. $f(x) = -x^2 + 2x$.

6.1.49. $f(x) = \dfrac{x+2}{x+5}$.

6.1.51. Вычислить значения гиперболических функций:

$\operatorname{sh} 0$, $\operatorname{ch} 0$, $\operatorname{th} 0$, $\operatorname{sh} 1$, $\operatorname{ch}(\ln 2)$.

6.1.53. Функция y задана неявно. Выразить ее в явном виде.

1) $xy = 7$;

2) $x^2 + y^2 = 1$, $y \leqslant 0$.

1) При $x \neq 0$ из данного уравнения получим $y = \dfrac{7}{x}$.

2) Выражая y из данного уравнения, имеем $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

6.1.54. Функция y задана неявно. Там, где это возможно, выразить ее в явном виде:

1) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$;

2) $x + |y| = 1$;

3) $e^y - \sin y = x^2$.

6.1.55. Какие из следующих точек принадлежат графику уравнения $y + \cos y - x = 0$:

$$A(1;0), \quad B(0;0), \quad C\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \quad D(\pi - 1; \pi)?$$

6.1.56. Кривая задана параметрически

$$\begin{cases} x = t - 1; \\ y = t^2 + 1. \end{cases}$$

1) Найти точки на графике при $t = 0$, $t = 1$, $t = -\sqrt{2}$.

2) Какие из следующих точек лежат на этой кривой:

$$A(1;5), \quad B\left(\frac{1}{2}; \frac{13}{4}\right), \quad C(2;8), \quad D(0;1)?$$

Ответы

6.1.3. $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$. **6.1.4.** $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup [2; +\infty)$. **6.1.5.** $(-\infty; 0)$. **6.1.6.** $(-\infty; 2] \cup [5; +\infty)$. **6.1.7.** $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **6.1.8.** $[7; 10]$.

6.1.9. $(0; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$. **6.1.10.** $[-2; 1)$. **6.1.11.** $\left[0; \frac{2}{3}\right)$. **6.1.12.** $(2; 3]$.

6.1.14. $[4; +\infty)$. **6.1.15.** $(0; 1]$. **6.1.16.** $[-9; -5]$. **6.1.17.** $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$.

6.1.18. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. **6.1.19.** $[2; +\infty)$. **6.1.21. 1)** 2; **2)** $-\frac{27}{8}$; **3)** $-\frac{5}{2^{\sqrt[3]{5}}}$; **4)** $-\frac{x^3}{2^x}$;

5) $27 \cdot 8^x$; **6)** $\frac{2^{\frac{1}{x}}}{x^3}$; **7)** $\frac{1}{x^3 \cdot 2^x}$; **8)** $(b-2)^3 \cdot 2^{b-2}$. **6.1.22. 1)** 2; **2)** 0; **3)** $1{,}6$;

4) $\frac{\sqrt{z+8}}{(z+3)^3}$; **5)** $\frac{\sqrt{2t-4}}{(2t-1)^2}$. **6.1.24. 1)** четная; **2)** нечетная; **3)** общего вида;

4) нечетная; **5)** общего вида; **6)** четная; **7)** четная; **8)** общего вида.

6.1.26. 1) периодическая, $T = 8\pi$; **2)** непериодическая; **3)** периодическая, $T = \frac{\pi}{2}$; **4)** периодическая, $T = 4\pi$; **5)** периодическая, $T = \frac{\pi}{3}$.

6.1.38. 1) $f \circ g(x) = x$, $x > 0$; $g \circ f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$; **2)** $f \circ g(x) = 6x - 14$, $g \circ f(x) = 6x - 3$; **3)** $f \circ g(x) = |\cos x|$, $g \circ f(x) = \cos x$. **6.1.41.** Обратная функция $y = \frac{x-5}{3}$. **6.1.42.** Обратная функция $y = \sqrt[3]{x+2}$. **6.1.43.** У этой

функции нет обратной. **6.1.44.** Обратная функция $y = \frac{2}{1-x}$.

6.1.45. Функция монотонная и ограниченная. **6.1.46.** Ограниченная функция.

6.1.47. Строго монотонная и ограниченная функция. **6.1.48.** Функция не является ни монотонной, ни строго монотонной, ни ограниченной.

6.1.49. Строго монотонная функция. **6.1.50.** Монотонная функция. **6.1.51.** 0; 1; 0; $\frac{e^2-1}{2e}$; $\frac{5}{4}$. **6.1.54. 1)** $y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$; **2)** $y = \pm(1-x)$, $x \leqslant 1$.

6.1.55. Точки A, C, D. **6.1.56. 1)** $(-1; 1)$, $(0; 2)$, $(-\sqrt{2} - 1; 3)$; **2)** Точки A и B.