§ 6. Определённый интеграл. Приёмы вычисления

§ 6.1. Теоретический материал

Основные понятия и свойства

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ и на этом отрезке произвольно выбраны точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$, так что $a = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_n = b$ — выбрано разбиение этого отрезка на n частей. В каждом интервале $(x_{i-1}; x_i]$ произвольным образом выбрана точка c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

⇛ Сумма вида

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i, \tag{1.1}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

⇛ *Определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел интегральных сумм S_n при условии, что длина наибольшего частичного отрезка Δx_i стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i. \tag{1.2}$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то предел (1.2) существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a; b]$ и от выбора точек c_i (*теорема существования* определенного интеграла). Функция $f(x)$ в этом случае называется *интегрируемой* на отрезке $[a; b]$. Более того, если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a; b]$ и непрерывна в нем, кроме конечного числа точек разрыва первого рода, то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла:

1. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$

2. $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$

3. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt$, т.е. переменную интегрирования можно обозначить любой буквой.

4. $\int\limits_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$

5. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$

6. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad a < c < b.$

7. Если $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$; если $f(x) \leqslant 0$ для всех точек $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$.

8. Если $f(x) \leqslant g(x)$ на отрезке $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$

9. Если M — наибольшее, m — наименьшее значение $f(x)$ на $[a;b]$, то $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.

10. $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a), \ \ c \in [a;b]$ (теорема о среднем).

11. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$

12. $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x).$

Формула Ньютона - Лейбница

Если для непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$ может быть найдена ее первообразная $F(x)$ (см. Гл. 8, § 1), то простым и удобным методом вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ является *формула Ньютона–Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{1.3}$$

При интегрировании *четных и нечетных функций* в симметричных пределах интегрирования полезно использовать формулу

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная функция,} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ — нечетная функция.} \end{cases}$$

Интегрирование подстановкой

При вычислении определенных интегралов часто используется метод подстановки или метод замены переменной интегрирования. Пусть для вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \varphi(t)$. Если функция $\varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$, причем

$$a = \varphi(\alpha) \quad \text{и} \quad b = \varphi(\beta), \tag{1.4}$$

то справедлива формула:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{1.5}$$

формула (1.5) называется ***формулой замены переменной интегрирования*** в определенном интеграле.

Отметим, что:

1) функцию $x = \varphi(t)$ следует подобрать так, чтобы, подставив ее вместо x в подынтегральное выражение, получить более простой интеграл;

2) новые пределы интегрирования находить из соотношений (1.4);

3) при вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется (в отличие от неопределенного интеграла);

4) вместо подстановки $x = \varphi(t)$ применяют и подстановку $t = \psi(x)$.

Интегрирование по частям

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$, то имеет место формула

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du\,. \tag{1.6}$$

Формула (1.6) называется ***формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.***

Примеры

9.1.1. Используя формулу Ньютона–Лейбница, вычислить интеграл: $\int\limits_1^4 x^2\,dx$.

❍ Подынтегральная функция $f(x) = x^2$ на отрезке $[1;4]$ имеет первообразную $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Тогда по формуле (1.3) имеем

$$\int\limits_1^4 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 21.$$ ●

9.1.2. Вычислить интеграл $\int\limits_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

❍ Подынтегральная функция имеет «почти табличный» вид. Для нахождения первообразной проведем преобразования также, как это делалось ранее (см. задачу 9.1.10).

$$\int\limits_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int\limits_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \int\limits_{-4}^{-2} \frac{d(x+2)}{\sqrt{3^2-(x+2)^2}} =$$

$$= \arcsin\frac{x+2}{3}\Big|_{-4}^{-2} = \arcsin 0 - \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) = \arcsin\frac{2}{3}.$$ ●

9.1.12. Найти значение интеграла $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right)dx$.

❍ Это также «почти табличный» интеграл. Для нахождения первообразной (и использования формулы Ньютона–Лейбница) применим формулу понижения степени (как это сделано в задаче 8.1.22):

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 0 - \frac{1}{4}\left(\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) - \sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\pi + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right). \quad \bullet$$

9.1.20. Вычислить $\int\limits_1^2 \frac{x^4+1}{x^3(x^2+1)}\,dx$.

❍ Под знаком интеграла стоит рациональная дробь. Для нахождения первообразной используются правила, приведенные в § 3 главы 8. Применим их. Для этого разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей:

$$\frac{x^4+1}{x^3(x^2+1)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Тогда $x^4+1 = A(x^2+1) + Bx(x^2+1) + Cx^2(x^2+1) + (Dx+E)x^3$, т. е. $x^4+1 = (C+D)x^4 + (B+E)x^3 + (A+C)x^2 + Bx + A$. Отсюда

$$\begin{cases} C + D = 1, \\ B + E = 0, \\ A + C = 0, \\ B = 0, \\ A = 1. \end{cases}$$

Находим, что $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$, $D = 2$, $E = 0$. Итак,

$$\frac{x^4+1}{x^3(x^2+1)} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1}.$$

Первое и второе слагаемые имеют табличные интегралы, третье — «почти табличные», легко вычисляются после внесения $2x$ под знак дифференциала (см. задачу 9.2.1).

Поэтому

$$\int\limits_1^2 \frac{x^4+1}{x^3(x^2+1)}\,dx = \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \left(-\frac{1}{2x^2} - \ln x + \ln(x^2+1)\right)\Big|_1^2 =$$

$$= -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \ln 2 + \ln 1 + \ln 5 - \ln 2 = \ln\frac{5}{4} + \frac{3}{8}. \quad \bullet$$

9.1.26. Найти значение интеграла $\int\limits_0^2 f(x)\,dx$, если

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leqslant x < 1; \\ 2, & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

❍ Подынтегральная функция имеет на отрезке $[0;2]$ одну точку разрыва ($x = 1$) первого рода, ограничена на нем.

Тогда:

$$\int\limits_0^2 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 e^x\,dx + \int\limits_1^2 2\,dx =$$

$$= e^x\Big|_0^1 + 2x\Big|_1^2 = e - 1 + 4 - 2 = e + 1. \quad ●$$

9.1.46. Вычислить интеграл $\int\limits_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}}$ с помощью замены переменных.

❍ Применим подстановку $\sqrt{x} = t$. Тогда $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$. Находим новые пределы интегрирования: $\begin{array}{c|c|c} x & 1 & 9 \\ \hline t=\sqrt{x} & 1 & 3 \end{array}$.

Применяя формулу (1.5), получим:

$$\int\limits_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}} = \int\limits_1^3 \frac{2t\,dt}{5+2t} = \int\limits_1^3 \frac{2t+5-5}{2t+5}\,dt =$$

$$= \int\limits_1^3 \left(1 - \frac{5}{2t+5}\right) dt = t\Big|_1^3 - 5 \cdot \frac{1}{2}\ln|2t+5|\Big|_1^3 =$$

$$= 3 - 1 - \frac{5}{2}(\ln 11 - \ln 7) = 2 - \frac{5}{2}\ln\frac{11}{7}. \quad ●$$

9.1.51. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$ с помощью подстановки.

❍ Положим $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Тогда получаем $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Пределы интегрирования $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0 & 1 \end{array}$.

Следовательно,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x} = \int\limits_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2}\,dt}{3+2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int\limits_0^1 \frac{2}{t^2+5}\,dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}}\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}. \quad \bullet$$

9.1.52. При помощи замены переменной вычислить интеграл

$$\int\limits_2^3 x(3-x)^7\,dx.$$

○ Полагая $t = 3-x$, получим: $x = 3-t$, $dx = -dt$. Пределы интегрирования $\begin{array}{c|c|c} x & 2 & 3 \\ \hline t & 1 & 0 \end{array}$.

$$\int\limits_2^3 x(3-x)^7\,dx = \int\limits_1^0 (3-t)t^7(-dt) = \int\limits_1^0 (t^8-3t^7)\,dt =$$

$$= \left(\frac{t^9}{9} - \frac{3}{8}t^8\right)\Big|_1^0 = -\frac{1}{9} + \frac{3}{8} = \frac{19}{72}. \quad \bullet$$

9.1.59. Вычислить при помощи подстановки интеграл

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$$

○ Пусть $x = \frac{1}{t}$. Тогда $dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$. $\begin{array}{c|c|c} x & 1 & 2 \\ \hline t & 1 & \frac{1}{2} \end{array}$. Получаем

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \int\limits_1^{\frac{1}{2}} \frac{-\frac{1}{t^2}\,dt}{\frac{1}{t}\cdot\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}} = -\int\limits_1^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right|\Big|_{\frac{1}{2}}^1 =$$

$$= \ln\frac{3+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{7}}. \quad \bullet$$

9.1.61. Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)^2}$ при помощи замены переменной.

○ Применим подстановку $x = 2\operatorname{tg} t$. Тогда $dx = \frac{2}{\cos^2 t}\,dt$,

x	0	2
t	0	$\frac{\pi}{4}$

:

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)^2} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\,dt}{\cos^2 t(4+4\operatorname{tg}^2 t)^2} =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\,dt}{16\cos^2 t\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^2} = \frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{16}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{16}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi+2}{64}. \quad ●$$

9.1.86. Вычислить интеграл $\int\limits_1^e (x+1)\ln x\,dx$.

○ Применим формулу интегрирования по частям. Положим $u = \ln x$, $dv = (x+1)dx$. Тогда $du = \frac{1}{x}\,dx$, $v = \frac{x^2}{2}+x$. По формуле (1.6) имеем

$$\int\limits_1^e (x+1)\ln x\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{e^2}{2}+e-0-\left(\frac{x^2}{4}+x\right)\Big|_1^e = \frac{e^2}{2}+e-\frac{e^2}{4}-e+\frac{1}{4}+1 = \frac{e^2+5}{4}. \quad ●$$

9.1.91. Вычислить $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$.

○ Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$. Тогда $du = \frac{1}{1+x^2}\,dx$, $v = x$. Имеем

$$\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi-\ln 4}{4}. \quad ●$$

9.1.95. Найти значение $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin 2x\, dx$.

○ Интегрируем по частям: $u = x^2$, $dv = \sin 2x\, dx$, $du = 2x\, dx$, $v = -\frac{1}{2}\cos 2x$.

$$J = -\frac{1}{2}x^2 \cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \cos 2x \cdot 2x\, dx = 0 + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x\, dx.$$

Снова интегрируем по частям: $u = x$, $dv = \cos 2x\, dx$, $du = dx$, $v = \frac{1}{2}\sin 2x$.

$$J = \frac{1}{2}x \sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin 2x\, dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$ ●