Задание. Часть 1

1.2.1. Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$

Вычислить определители второго порядка:

1.2.2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$.

1.2.3. $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$.

1.2.4. $\begin{vmatrix} x & xy \\ 1 & y \end{vmatrix}$.

1.2.5. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

1.2.6. $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$.

1.2.7. $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\varphi & 1 \\ -1 & \operatorname{tg}\varphi \end{vmatrix}$.

Решить уравнения:

1.2.8. $\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

1.2.9. $\begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 7-x & x-1 \end{vmatrix} = 0.$

1.2.10. $\begin{vmatrix} 2x-1 & x+1 \\ x+2 & x-1 \end{vmatrix} = -6.$

1.2.11. $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ -y-3 & x-2 \end{vmatrix} = 0.$

1.2.12. $\begin{vmatrix} \sin 2x & \sin x \\ \cos x & \cos 2x \end{vmatrix} = 0.$

1.2.13. Вычислить определитель 3-го порядка: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

❍ Вычисляя определитель разложением по первой строке, получим:

$$3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (5 \cdot 2 - 3 \cdot 4) - 2 \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot 3) + 1 \cdot (2 \cdot 4 - 5 \cdot 3) =$$

$$= 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-5) + 1 \cdot (-7) = -3.$$ ●

Вычислить определители 3-го порядка:

1.2.14. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$

1.2.15. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$

1.2.16. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$

1.2.17. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$

1.2.18. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}.$

1.2.19. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \\ 25 & 49 & 64 \end{vmatrix}.$

1.2.20. Вычислить определитель с помощью «правила треугольников»

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

❍ Из шести слагаемых не равным нулю будет только одно: $+1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. ●

Вычислить определители с помощью «правила треугольников»:

1.2.21. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$

1.2.22. $\begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix}.$

1.2.23. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$

1.2.24. Вычислить определитель разложением по какой-нибудь строке или столбцу:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & -4 & 5 \end{vmatrix}.$$

❍ Удобнее всего вычислять определитель разложением по строке или столбцу, содержащим наибольшее количество нулей. Разложим определитель по 2-й строке:

$$(-1)^{2+1}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix}6 & 3\\ -4 & 5\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}5 & 3\\ 7 & 5\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix}5 & 6\\ 7 & -4\end{vmatrix}=$$
$$=2\cdot(25-21)=8. \quad ●$$

1.2.25. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}3 & 0 & 2\\ -5 & 3 & -1\\ 6 & 0 & 3\end{vmatrix}$.

◑ При разложении определителя 3-го порядка по строке или столбцу, знаки («+» или «−») перед слагаемым $a_{ij}\cdot M_{ij}$ проще всего запомнить в следующем виде:

$$\begin{vmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по 2-му столбцу:

$$-0+3\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 6 & 3\end{vmatrix}-0=3\cdot(9-12)=-9. \quad ●$$

Вычислить определители 3-го порядка разложением по какой-нибудь строке или столбцу:

1.2.26. $\begin{vmatrix}2 & 0 & 3\\ 7 & 1 & 6\\ 6 & 0 & 5\end{vmatrix}$.

1.2.27. $\begin{vmatrix}0 & a & 0\\ b & c & d\\ 0 & e & 0\end{vmatrix}$.

1.2.28. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}$.

1.2.29. $\begin{vmatrix}2 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}$.

1.2.30. $\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & 1\\ \sin\beta & \cos\beta & 1\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1\end{vmatrix}$.

Решить уравнения и неравенство:

1.2.31. $\begin{vmatrix}2 & 0 & 3\\ -1 & 7 & x-3\\ 5 & -3 & 6\end{vmatrix}=0.$

1.2.32. $\begin{vmatrix}-1 & 3 & -2\\ 2-3x & 0 & 5\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}\geqslant 0.$

1.2.33. $\begin{vmatrix}-1 & 0 & 2x+3\\ 3-x & 1 & 1\\ 2x+1 & -1 & 2\end{vmatrix}=0.$

1.2.34. $\begin{vmatrix}6 & 3 & x-1\\ 2x & 1 & 0\\ 4 & x+2 & 2\end{vmatrix}=0.$

1.2.35. Доказать равенство, используя свойства определителей:

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1+a_1x+b_1y\\ a_2 & b_2 & c_2+a_2x+b_2y\\ a_3 & b_3 & c_3+a_3x+b_3y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}.$$

❍ Так как третий столбец левого определителя можно представить в виде суммы трех столбцов, этот определитель можно представить в виде суммы трех определителей:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x \\ a_2 & b_2 & a_2x \\ a_3 & b_3 & a_3x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1y \\ a_2 & b_2 & b_2y \\ a_3 & b_3 & b_3y \end{vmatrix}.$$

Третий столбец во втором определителе пропорционален первому столбцу, а в третьем определителе — второму столбцу, следовательно, оба этих определителя равны нулю. Что и завершает доказательство. ●

Доказать равенства:

1.2.36. $$\begin{vmatrix} a_1 - xb_1 & a_1 + xb_1 & c_1 \\ a_2 - xb_2 & a_2 + xb_2 & c_2 \\ a_3 - xb_3 & a_3 + xb_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

1.2.37. $$\begin{vmatrix} a_1 + xb_1 & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + xb_2 & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + xb_3 & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Вычислить, используя свойства определителей:

1.2.38. $$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 1 \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & 1 \end{vmatrix}.$$

1.2.39. $$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}.$$

1.2.40. $$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}.$$

1.2.41. Вычислить определитель 4-го порядка разложением по строке или столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

❍ Удобнее пользоваться разложением по строке или столбцу, содержащим наибольшее количество нулей. Разложим определитель по первой строке:

$$\Delta = (-2)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} - (-3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} -$$

$$- 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2\cdot 9 + 3\cdot 31 + 0 - 2\cdot 6 = 63.$$

При вычислении определителей 4-го порядка разложением по строке или столбцу, знаки («+» или «−») перед слагаемым $a_{ij} \cdot M_{ij}$ проще всего запомнить в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}.$$

Аналогично, для вычисления определителя n-го порядка знаки расположены следующим образом (в «шахматном» порядке, слева вверху знак «+»):

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}.$$ ●

1.2.42. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & b & 2 \\ 1 & c & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}.$$

❍ Разложим определитель по 4-ой строке:

$$\Delta = (+d) \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & 0 & b \\ 1 & c & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложим определитель} \\ \text{по 2-ой строке} \end{bmatrix} =$$

$$= d \cdot (-b) \cdot \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{vmatrix} = -d \cdot b \cdot a \cdot c.$$ ●

Вычислить определители, используя разложение по строке или столбцу:

1.2.43. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$

1.2.44. $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix}.$

1.2.45. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}.$

1.2.46. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$

1.2.47. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$

1.2.48. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$

1.2.49. Вычислить определитель приведением к треугольному виду:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}.$$

❍ Прибавляя к каждой строке определителя первую строку, получим:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложим по} \\ \text{первому столбцу} \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 0 & 0 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}}_{n-1} = \begin{bmatrix} \text{повторяем разложение по} \\ \text{первому столбцу } n-2 \text{ раза} \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n! \quad ●$$

1.2.50. Вычислить определитель n-го порядка:

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

❍ Разложим определитель по первой строке:

$$D_n = (-1)^{n+1} \cdot (-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{n-1} = (-1)^{n+2} \cdot D_{n-1}.$$

Аналогично $D_{n-1} = (-1)^{n+1} \cdot D_{n-2}$ и т. д. Таким образом,

$$D_n = (-1)^{n+2} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \ldots \cdot (-1)^{2+2} \cdot D_1.$$

Учитывая, что

$$(-1)^{n+2} = (-1)^n, \quad (-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}, \quad \ldots, \quad (-1)^{2+2} = (-1)^2;$$

$$D_1 = -1,$$

получим выражение для D_n:

$$D_n = (-1)^n \cdot (-1)^{n-1} \cdot \ldots \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^1 =$$

$$= (-1)^{1+2+\ldots+(n-1)+n} = (-1)^{n \cdot \frac{n+1}{2}}. \quad \bullet$$

Вычислить определители n-го порядка:

1.2.51. $$\begin{vmatrix} n & n & n & \ldots & n & n & n \\ n & n-1 & n & \ldots & n & n & n \\ n & n & n-2 & \ldots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \ldots & 3 & n & n \\ n & n & n & \ldots & n & 2 & n \\ n & n & n & \ldots & n & n & 1 \end{vmatrix}.$$

1.2.52. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

1.2.53. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \ldots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & n & \ldots & n & n & n \\ n & n & n & \ldots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

1.2.54. $$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \ldots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 3 \end{vmatrix}.$$

1.2.55. $$\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & n & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & n & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & n \end{vmatrix}.$$

1.2.56. Вычислить определитель n-го порядка методом рекуррентных соотношений:

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

❍ Разложим определитель по первому столбцу

$$D_n = 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{n-1} - 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{n-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{разложим второй} \\ \text{определитель по} \\ \text{первой строке} \end{bmatrix} =$$

$$= 2 \cdot D_{n-1} - 1 \cdot 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{n-2} = 2 \cdot D_{n-1} - D_{n-2}.$$

Вычислим D_2, D_3 и D_4:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 4;$$

$$D_4 = 2D_3 - D_2 = 2 \cdot 4 - 3 = 5.$$

Итак, $D_2 = 3$, $D_3 = 4$, $D_4 = 5$. Докажем (по индукции), что $D_n = n + 1$. По предположению индукции, $D_{n-2} = n - 1$, $D_{n-1} = n$. Учитывая, что $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$, получим $D_n = 2n - (n-1) = n + 1$, что и требовалось. ●

Вычислить определители методом рекуррентных соотношений:

1.2.57. $\left.\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}\right\} n.$ **1.2.58.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$

Задание. Часть 2

1.2.107. Всегда ли определитель суммы матриц равен сумме их определителей?

1.2.108. Привести пример двух таких матриц, что определитель их суммы равен сумме их определителей.

1.2.109. Привести пример двух таких матриц, что определитель их суммы равен сумме их определителей, причем ни один из трех определителей не равен нулю.

1.2.110. Могут ли все алгебраические дополнения некоторой матрицы $A = (a_{ij})$ быть равны соответствующим минорам $(A_{ij} = M_{ij})$?

1.2.111. Могут ли все алгебраические дополнения некоторой матрицы $A = (a_{ij})$ быть равны соответствующим элементам $(A_{ij} = a_{ij})$?

1.2.112. Может ли определитель 2-го порядка принимать значение большее, чем определитель 5-го порядка?

1.2.113. Может ли определитель изменить знак на противоположный при транспонировании матрицы?

1.2.114. Дана квадратная матрица n-го порядка $A = (a_{ij})$. Чему равна сумма $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$?

1.2.115. Можно ли вычислять миноры, дополнительные к элементам неквадратной матрицы?

1.2.116. Как изменится определитель 3-го порядка, если его строки переставить следующим образом: первую — на место второй, вторую — на место третьей, третью — на место первой?

1.2.117. Как изменится определитель n-го порядка, если его строки переставить следующим образом: первую — на место второй, вторую — на место третьей, ..., $(n-1)$-ю — на место n-й, n-ю — на место первой?

Ответы

1.2.2. 2. **1.2.3.** 0. **1.2.4.** 0. **1.2.5.** $ad - bc$. **1.2.6.** 1. **1.2.7.** $\dfrac{1}{\cos^2\varphi}$. **1.2.8.** 13.

1.2.9. 1; 2. **1.2.10.** 1; 5. **1.2.11.** (2; −3). **1.2.12.** $\dfrac{\pi n}{2}$, $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **1.2.14.** 0.

1.2.15. 40. **1.2.16.** −12. **1.2.17.** 1. **1.2.18.** 20. **1.2.19.** 6. **1.2.21.** −6.

1.2.22. $-xyz$. **1.2.23.** 0. **1.2.26.** −8. **1.2.27.** 0. **1.2.28.** 3. **1.2.29.** 4.
1.2.30. $\sin(\beta-\gamma) + \sin(\gamma-\alpha) + \sin(\alpha-\beta)$. **1.2.31.** 5. **1.2.32.** $x \geqslant -\dfrac{41}{21}$.

1.2.33. −3; $\dfrac{-5}{2}$. **1.2.34.** −4; 1; 2. **1.2.38.** 0. **1.2.39.** 0. **1.2.40.** 0. **1.2.43.** $abcd$.

1.2.44. $(be - cd)^2$. **1.2.45.** 100. **1.2.46.** $8a + 15b + 12c - 19d$. **1.2.47.** 17.

1.2.48. 52. **1.2.51.** $(-1)^{n-1} \cdot n!$ **1.2.52.** $n!$ **1.2.53.** $n \cdot (-1)^{\frac{1+n}{2} \cdot n}$. **1.2.54.** $2n+1$.
1.2.55. $(2n-1) \cdot (n-1)^{n-1}$. **1.2.57.** $2^{n+1} - 1$.
1.2.58. $-(a_2a_3a_4\ldots a_{n-1}a_n + a_1a_3a_4\ldots a_{n-1}a_n + a_1a_2a_4\ldots a_{n-1}a_n +$
$+ a_1a_2a_3\ldots a_{n-2}a_n + a_1a_2a_3\ldots a_{n-2}a_{n-1})$.
1.2.107. Нет. **1.2.108.** Единичная и нулевая матрицы.

1.2.109. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. **1.2.110.** Да. **1.2.111.** Да. **1.2.112.** Да.

1.2.113. Нет. **1.2.114.** $n \cdot \det A$. **1.2.115.** Нет. **1.2.116.** Не изменится.
1.2.117. Умножится на $(-1)^{n-1}$.