Формулы, используемы при решении задач по производным

Понятие производной

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Таблица производных

1. $(c)' = 0$, $c = \text{const}$;
2. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$ (где $\alpha \in \mathbb{R}$); в частности, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $a > 0$; в частности, $(e^x)' = e^x$;
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$; в частности, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
5. $(\sin x)' = \cos x$;
6. $(\cos x)' = -\sin x$;
7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;
10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;
11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$;
12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$;
13. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;
14. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;
15. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;
16. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Основные правила дифференцирования

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, в частности, $(cu)' = c \cdot u'$;
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности, $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$.

Производная показательно-степенной функции

$$(u^v)' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + u^{v-1} \cdot u' \cdot v$$

Производная функций, заданных параметрически

$$y'(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)} \quad \text{или} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \qquad y''_{xx} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3}$$

Свойства дифференциала

1. $dC = 0$, где C — константа.
2. $d(\alpha u) = \alpha \cdot du$, где α — константа.
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$.
4. $d(u \cdot v) = udv + vdu$.
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$, где $v(x) \neq 0$.
6. ***Инвариантность формы дифференциала.*** Если $y = f(u(x))$ — сложная функция, то

$$df(u) = f'(u)\,du, \quad \text{или} \quad dy = y'_u \cdot du,$$

Дифференциалы высших порядков

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

Формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\big((x - x_0)^n\big) \text{ при } x \to x_0$$

Формула Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n), \quad x \to 0$$

Разложения некоторых элементарных функций по формуле Маклорена

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n} + o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n)$$

Несколько независимых переменных

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Дифференциал сложной функции

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

Неявная функция одной переменной

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x;y)}{F'_y(x;y)}$$

Неявная функция двух переменных

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}$$

Об авторе

Моисеенко Павел, студент 2 круса группы ИВТ, кафедры ИИТиТО