Моисеенко Павел, ИВТ, 2 курс

§1. Производная функции

<u>Понятие:</u>] $y=f(x)$ определ. в некотор. окрестн. точки x_0. Предел отнош. приращ. Δy функц. в этой точке (если он сущеcтв.) к приращ. Δx аргумента, когда $\Delta x \to 0$, назыв. производной функции $f(x)$ в точке x_0.

Обознач.: $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$ или $\frac{df(x_0)}{dx}$ или $f'|_{x=x_0}$

Таким образом, $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

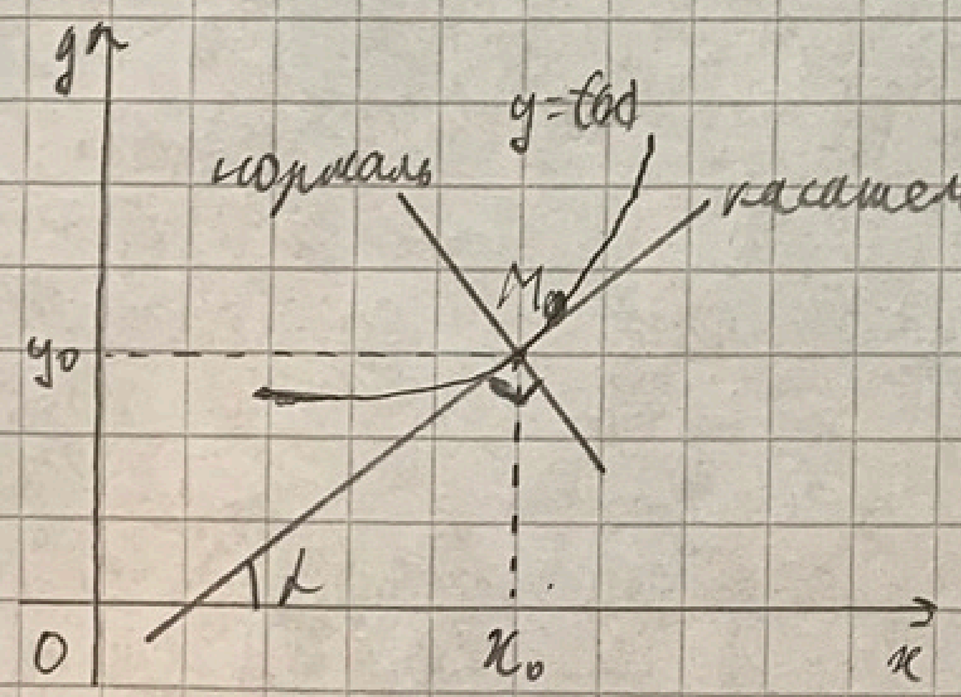
Дифференцирование функции – это вычисление производной.

<u>Правила:</u>] c – константа, а $u(x)$ и $v(x)$ имеют произв. в некот. точке x. Тогда $u(x)\pm v(x)$, $c\cdot u(x)$, $u(x)\cdot v(x)$ и $\frac{u(x)}{v(x)}$ (где $v(x)\neq 0$) также имеют произв. в этой точке, причём: 1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$; 2) $(u\cdot v)'=u'v+uv'$, в частн. $(cu)'=cu'$; 3) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$, в частн. $\left(\frac{c}{v}\right)'=-\frac{cv'}{v^2}$.

] теперь $u=\varphi(x)$ имеет произв. в точке x_0, а $y=f(u)$ – в точке $u_0=\varphi(x_0)$. Тогда сложн. функция $y=f(\varphi(x))$ также имеет произв. в точке x_0, причём $y'(x_0)=g'(u_0)\cdot u'(x_0)$.

<u>Геометр. смысл:</u>] $y=f(x)$ имеет произв. в точке x_0. Тогда сущ. касат. к графику этой функции в точке $M_0(x_0;y_0)$, ур-ие кот. $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

При этом $f'(x_0)=tg\,\alpha$, где α – угол наклона этой касат. к оси Ox



Прямая, проход. через точку касания, перпендикулярно касательной, назыв. нормалью к кривой и имеет ур-ие $y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)$

Если $f'(x_0)=0$ (т.е. касат. горизонт.), то нормаль вертикальна и имеет вид $x=x_0$.

] даны две пересек. в точке $M_0(x_0,y_0)$ кривые $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, причем обе функции имеют производные в точке x_0. Тогда углом между этими кривыми назыв. угол между касат. к ним, провед. в точке M_0. Этот угол φ можно найти из формулы $tg\,\varphi=\frac{f_2'(x_0)-f_1'(x_0)}{1+f_1'(x_0)\cdot f_2'(x_0)}$.

<u>Логарифм. произв.:</u> при нахожд. произв. от показат.-степен. функции $u(x)^{v(x)}$, а также др. громоздк. выраж., допускающ. логарифмирование

(произв. частн. и извлеч. корня), удобно прим. логарифм. произв. Логарифм. произв. от $y=f(x)$ назыв. произв. от логарифм. этой функции: $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$. Использ. логарифм. произв., нетрудно вывести формулу для произв. показ.-степен. функции $u(x)^{v(x)}$: $(u^v)' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + u^{v-1} \cdot u' \cdot v$.

Произв. неявн. функции: $\exists\, y = y(x)$, облад. произв. в точке x, задана неявно ур-ием $F(x,y)=0$. Тогда произв. $y'(x)$ этой функции можно найти, продифференц. ур-ие (при этом y счит. функц. от x) и разреш. затем получ. ур-ие относ. y'.

Произв. высших порядков: произв. $f'(x)$ от функции $f(x)$ называ. также произв. перв. порядка. В свою очередь произв. от $f'(x)$ назыв. произв. 2-го порядка от $f(x)$ (или второй произв.) и обознач. $f''(x)$. Аналогичн. опред. произв. третьего порядка (или 3-я произв.), обознач. $f'''(x)$ и т.д. Произв. n-го порядка обознач. $f^{(n)}(x)$.

Произв. фун-ии, задан. параметр.: $\exists\, y = f(x)$ опред. параметр. ф-ми $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Тогда если ф-ии $x(t)$ и $y(t)$ имеют произв. в точке t_0, причём $x'(t_0) \neq 0$, а ф-ия $y = f(x)$ имеет произв. в точке $x_0 = x(t_0)$, что эта произв. наход. по формуле $y'(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}$ или $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$. Вторая произв. $y''(x)$ наход. по ф-ле: $y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3}$.

Таблица произв.:

1. $(c)' = 0$, $c = const$; 2. $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$ (где $a \in R$), в частн. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $a>0$; в частн. $(e^x)' = e^x$; 4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a>0$, $a \neq 1$; в частн. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
5. $(\sin x)' = \cos x$; 6. $(\cos x)' = -\sin x$; 7. $(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; 8. $(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 11. $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$; 12. $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;
13. $(sh\, x)' = ch\, x$; 14. $(ch\, x)' = sh\, x$; 15. $(th\, x)' = \frac{1}{ch^2 x}$; 16. $(cth\, x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$