§ 5.2. Практическая работа (решение задач)

11.4.1. Найти производную $\frac{dz}{dt}$ функции $z = e^{x^2+y^2}$, если $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

❍ В этом примере подстановка x и y в z приводит к $z(t) = e^{a(\cos^2 t+\sin^2 t)} = e^a$. Следовательно, $\frac{dz}{dt} = 0$. ●

11.4.2. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = x^5 + 2xy - y^3$, и $x = \cos 2t$, $y = \operatorname{arctg} t$.

❍ Непосредственная подстановка очевидно не упрощает функцию z. Действуем согласно теореме 11.9.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 + 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 3y^2, \quad \frac{dx}{dt} = -2\sin 2t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2}.$$

В результате можно как сохранить переменные x и y, так и заменить их через t (в зависимости от того, что проще). Ответ оставим в таком виде:

$$\frac{dz}{dt} = -2(5x^4 + 2y)\sin 2t + (2x - 3y^2)\frac{1}{1+t^2}.$$ ●

11.4.3. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = xy + xyv + yuv$, а $x = \sin t$, $y = \ln t$, $u = e^t$, $v = \operatorname{arctg} t$.

❍ Имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = y + yv$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x + xv + uv$, $\frac{\partial z}{\partial u} = yv$, $\frac{\partial z}{\partial v} = xy + uy$.

$$\frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}, \quad \frac{du}{dt} = e^t, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Составим соответствующую сумму произведений

$$\frac{dz}{dt} = y(1+v)\cos t + (x + xv + uv)\frac{1}{t} + yve^t + \frac{x+u}{1+t^2}y.$$ ●

Найти $\frac{dz}{dt}$, *если* $z = z(x;y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$:

11.4.4. $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = a\sin t$, $y = a\cos t$.

11.4.5. $z = \cos(2t + 4x^2 - y)$, $x = \frac{1}{t}$, $y = \frac{\sqrt{t}}{\ln t}$.

11.4.6. $z = x^2y^3u$, $x = t$, $y = t^2$, $u = \sin t$.

11.4.7. $z = e^{xy}\ln(x+y)$, $x = t^3$, $y = 1 - t^3$.

11.4.8. $z = xy\operatorname{arctg}(xy)$, $x = t^2 + 1$, $y = t^3$.

11.4.9. $z = e^{2x-3y}$, $x = \operatorname{tg} t$, $y = t^2 - t$.

11.4.10. $z = x^y$, $x = \ln t$, $y = \sin t$.

11.4.11. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z = 3^{x^2}\operatorname{arctg} y$, $x = \dfrac{u}{v}$, $y = uv$.

○ Применим формулы из теоремы 11.10:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3^{x^2}\cdot 2x\ln 3\operatorname{arctg} y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3^{x^2}}{1+y^2},$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u.$$

Составляем суммы соответствующих произведений:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 3^{x^2}\cdot\frac{2x\ln 3\operatorname{arctg} y}{v} + \frac{3^{x^2}}{1+y^2}v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -3^{x^2}\cdot\frac{2xu\ln 3\operatorname{arctg} y}{v^2} + \frac{3^{x^2}}{1+y^2}u.$$

Ответ можно оставить в такой форме, или выразить через u и v (т. е. основные переменные):

$$z'_u = 2\frac{u}{v^2}\cdot 3^{\frac{u^2}{v^2}}\ln 3\operatorname{arctg}(uv) + \frac{v}{1+u^2v^2}3^{\frac{u^2}{v^2}},$$

$$z'_v = -2\frac{u^2}{v^3}\cdot 3^{\frac{u^2}{v^2}}\ln 3\operatorname{arctg}(uv) + \frac{u}{1+u^2v^2}\cdot 3^{\frac{u^2}{v^2}}. \qquad \bullet$$

11.4.12. Найти дифференциал функции $z=\dfrac{x^2}{y}$, если $x=u-2v$, $y=2u+v$.

○ Поскольку $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$, то найдем все эти величины.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2},$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv = du - 2dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv = 2du + dv.$$

Подставляем в dz:

$$dz = 2\frac{x}{y}(du - 2dv) - \frac{x^2}{y^2}(2du + dv).$$

Подставим выражения для x и y и перегруппируем члены, выделяя множители при du и dv:

$$dz = \left(\frac{2x}{y} - 2\frac{x^2}{y^2}\right)du + \left(-\frac{4x}{y} - \frac{x^2}{y^2}\right)dv =$$

$$= \frac{x}{y}\left[2\left(1 - \frac{x}{y}\right)du - \left(4 + \frac{x}{y}\right)dv\right] =$$

$$= \frac{u-2v}{2u+v}\left[2\left(1 - \frac{u-2v}{2u+v}\right)du - \left(4 + \frac{u-2v}{2u+v}\right)dv\right] =$$

$$= \frac{u-2v}{(2u+v)^2}\left[2(u+3v)\,du - (9u+2v)\,dv\right]. \quad \bullet$$

11.4.13. Дано $z = \ln(u^2+v^2)$, $u = x\cos y$, $v = y\sin x$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и dz.

◯ Здесь имеем другой порядок букв, а значит, формулы выглядят так:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv,$$

где $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$, $dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$. Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2+v^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \cos y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -x\sin y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2v}{u^2+v^2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = y\cos x, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \sin x.$$

Подставим

$$dz = \frac{2u}{u^2+v^2}(\cos y\,dx - x\sin y\,dy) + \frac{2v}{u^2+v^2}(y\cos x\,dx + \sin x\,dy) =$$

$$= \left(\frac{2u}{u^2+v^2}\cos y + \frac{2v}{u^2+v^2}y\cos x\right)dx + \left(-\frac{2ux\sin y}{u^2+v^2} + \frac{2v}{u^2+v^2}\sin x\right)dy.$$

Дальнейшая подстановка вместо u и v не улучшает структуру ответа. ●

Для данных $z = f(x;y)$, $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$ *найти* $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ *и* dz:

11.4.14. $z = x^3 + y^3$, где $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$.

11.4.15. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, где $x = u^v$, $y = u\ln v$.

11.4.16. $z = \cos xy$, где $x = ue^v$, $y = v\ln u$.

11.4.17. $z = \operatorname{arctg} xy$, где $x = \sqrt{u^2+v^2}$, $y = u - v$.

11.4.18. $z = \sqrt{x+y}$, где $x = u\operatorname{tg} v$, $y = u\operatorname{ctg} v$.

11.4.19. $z = \ln\sqrt[7]{x^2 + 3y^5}$, где $x = u\cos v$, $y = u\sin v$.

11.4.20. Уравнение с двумя переменными $2x^2 - 3y^2 + 5xy - y^3x + x^5 = 37$ имеет решение $(x_0; y_0) = (2; -3)$. Определяет ли это уравнение неявную функцию $y = y(x)$ в окрестности точки $x = 2$ и если да, то найти $y'(x)$ и $y'(2)$.

◯ Обозначим $F(x; y) = 2x^2 - 3y^2 + 5xy - y^3x + x^5 - 37$. Имеем $F(2; -3) = 0$, $F'_y = -6y + 5x - 3y^2x$, $F'_x = 4x + 5y - y^3 + 5x^4$, $F'_x(2; -3) = 100$, $F'_y(2; -3) = -26$. Условие $F'_y(x_0; y_0) \neq 0$ обеспечивает существование неявной функции $y = y(x)$, дифференцируемой в некоторой окрестности точки $x_0 = 2$ и

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = \frac{4x + 5y - y^3 + 5x^4}{6y - 5x + 3y^2x}.$$

В частности, $y'(2) = \dfrac{100}{26} = \dfrac{50}{13}$.

Замечание. Производную $y'(x)$ можно найти также следующим образом. Перепишем данное уравнение с учетом того, что $y = y(x)$ есть функция от x:

$$2x^2 - 3y^2(x) + 5xy(x) - xy^3(x) + x^5 - 37 = 0.$$

Тогда полная производная левой части этого равенства (тождества) также равна нулю, т. е.

$$4x - 6y(x) \cdot y'(x) + 5y(x) + 5x \cdot y'(x) - y^3(x) - 3xy^2(x)y'(x) + 5x^4 = 0.$$

Отсюда (аргумент x в записи $y(x)$ опускаем)

$$y'(x) = \frac{4x + 5y - y^3 + 5x^4}{6y - 5x + 3xy^2}.$$ ●

11.4.21. Дано уравнение $-8x^2 + xy^2 + 2x^3y - 7 = 0$. Соответствующая линия пересекает прямую $x = 1$ в нескольких точках. Найти, сколько однозначных функций $y = y(x)$ определяет данное уравнение в окрестности $x = 1$, и составить уравнения касательных к этим кривым.

◯ 1) Обозначим $F(x; y) = -8x^2 + xy^2 + 2x^3y - 7$. Тогда $F(1; y) = y^2 + 2y - 15$ и $y^2 + 2y - 15 = 0$ при $y = 3$ и $y = -5$. Надо полагать, что уравнение $F(x; y) = 0$ определяет в окрестности $x = 1$ две однозначные функции (ветви). Проверим это. Имеем $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2xy + 2x^3$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1; 3) = 8$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1; -5) = -8$. Следовательно, $F(x; y)$ определяет две однозначные функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$: $y_1(1) = 3$, $y_2(1) = -5$.

2) Имеем $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -16x + y^2 + 6x^2y$ и $\dfrac{\partial F}{\partial x}(1; 3) = 11$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(1; -5) = -21$. Следовательно, $y'_1(1) = -\dfrac{11}{8}$, $y'_2(1) = -\dfrac{21}{8}$.

3) Касательные t_1 к $y_1(x)$ в $(1;3)$ и t_2 к $y_2(x)$ в $(1;-5)$ имеют вид: $y - y_0 = k(x - x_0)$, где $k = y_1'(1)$ или $y_2'(1)$. Получаем

$$(t_1): \quad y - 3 = -\frac{11}{8}(x-1) \quad \text{или} \quad 11x + 8y - 35 = 0,$$

$$(t_2): \quad y + 5 = -\frac{21}{8}(x-1) \quad \text{или} \quad 21x + 8y + 19 = 0.$$

●

Найти производные $y'(x)$ неявных функций, заданных уравнениями:

11.4.22. $xe^{2y} - y\ln x = 8$.

11.4.23. $e^y + 9x^2e^{-y} - 26x = 0$.

11.4.24. $\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

11.4.25. $x^2\ln y - y^2\ln x = 0$.

11.4.26. $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.

11.4.33. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и dz для неявной функций $z = z(x;y)$, определенной уравнением $z^3 + 3x^2y + xz + y^2z^2 + y - 2x = 0$.

◐ Обозначим $F(x;y;z) = z^3 + 3x^2y + xz + y^2z^2 + y - 2x$.

Способ 1, основанный на формулах теоремы 11.12. Найдем частные производные функции F:

$$F_x' = 6xy + z - 2, \quad F_y' = 3x^2 + 2yz^2 + 1, \quad F_z' = 3z^2 + x + 2y^2z.$$

Значит,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'} = -\frac{6xy + z - 2}{3z^2 + x + 2y^2z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_z'} = -\frac{3x^2 + 2yz^2 + 1}{3z^2 + x + 2y^2z},$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{2 - z - 6xy}{3z^2 + x + 2y^2z}dx - \frac{3x^2 + 2yz^2 + 1}{3z^2 + x + 2y^2z}dy.$$

Способ 2 заключается в том, что если уравнение определяет неявную функцию $z = z(x;y)$, то имеем следующее тождество

$$z^3(x;y) + 3x^2y + xz(x;y) + y^2z^2(x;y) + y - 2x \equiv 0.$$

Дифференцируем это тождество сначала по x, затем по y (для краткости в $z(x;y)$ аргументы опускаем):

$$3z^2z_x' + 6xy + z + xz_x' + 2zy^2z_x' - 2 \equiv 0,$$

$$3z^2z_y' + 3x^2 + xz_y' + 2yz^2 + 2y^2zz_y' + 1 \equiv 0.$$

Из первого тождества

$$z_x' = -\frac{6xy + z - 2}{3z^2 + x + 2y^2z},$$

из второго

$$z_y' = -\frac{3x^2 + 2yz^2 + 1}{3z^2 + x + 2y^2z}.$$

Дифференциал составим по определению.

●

11.4.34. Найти z'_x и z'_y, если $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$.

◐ Действуем способом 2 (задача 11.4.33), дифференцируя это равенство сначала по x, затем по y, считая, что $z = z(x; y)$.

$$1 + z'_x = e^{-(x+y+z)}(-1 - z'_x), \quad 1 + z'_y = e^{-(x+y+z)}(-1 - z'_y).$$

Исходя из данного уравнения, в полученных равенствах заменим $e^{-(x+y+z)}$ на $x + y + z$. Получаем

$$1 + z'_x = (x + y + z)(-1 - z'_x), \quad 1 + z'_y = (x + y + z)(-1 - z'_y).$$

Отсюда $z'_x = \dfrac{-(x + y + z) - 1}{x + y + z + 1} = -1$, $z'_y = -1$, $dz = -dx - dy$. ●

Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ *и* dz *для неявных функций* $z = z(x; y)$, *определяемых следующими уравнениями:*

11.4.35. $z^3 - 3xyz = R^2$.

11.4.36. $x + y + z = e^z$.

11.4.37. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Ответы

11.4.4. $\frac{dz}{dt} = a(2x+y)\cos t - a(2y+x)\sin t.$

11.4.5. $-\sin\left(2t+\frac{4}{t^2}-\frac{\sqrt{t}}{\ln t}\right)\left(2-\frac{8}{t^3}-\frac{\ln t - 2}{2\sqrt{t}\ln^2 t}\right).$

11.4.6. $\frac{dz}{dt} = 2xy^3u + 6x^2y^2ut + x^2y^3\cos t$ или $\frac{dz}{dt} = t^7(8\sin t + t\cos t).$

11.4.7. $\frac{dz}{dt} = 0.$

11.4.8. $\left(y\operatorname{arctg} xy + \frac{xy^2}{1+x^2y^2}\right)\cdot 2t + \left(y\operatorname{arctg} xy + \frac{x^2y}{1+x^2y^2}\right)\cdot 3t^2.$

11.4.9. $2e^{2x-3y}\frac{1}{\cos^2 t} - 3e^{2x-3y}(2t-1).$ **11.4.10.** $yx^{y-1}\frac{1}{t} + x^y\ln x\cos t.$

11.4.14. $dz = 3u^2\left(v^3+\frac{1}{v^3}\right)du + u^3\left(3v^2-\frac{3}{v^4}\right)dv.$

11.4.15. $dz = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}vu^{v-1} - \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\ln v\right)du + \left(\frac{xu^v}{\sqrt{x^2-y^2}}\ln u - \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\frac{u}{v}\right)dv.$

11.4.16. $dz = -\left(ye^v + x\frac{v}{u}\right)\sin xy\,du - (ye^v + x\ln u)\sin xy\,dv.$

11.4.17. $dz = \frac{1}{1+x^2y^2}\left[\left(\frac{yu}{\sqrt{u^2+v^2}}+x\right)du + \left(\frac{yv}{\sqrt{u^2+v^2}}-x\right)dv\right].$

11.4.18. $dz = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}\left[\frac{2du}{\sin 2v} + \left(\frac{1}{\cos^2 v} - \frac{1}{\sin^2 v}\right)u\,dv\right].$

11.4.19. $dz = \frac{1}{7(x^2+3y^5)}\left[(2x\cos v + 15y^4\sin v)\,du + (-2xu\sin v + 15y^4u\cos v)\,dv\right].$

11.4.22. $y' = \frac{e^{2y}-\frac{y}{x}}{\ln x - 2xe^{2y}}.$ **11.4.23.** $y' = \frac{26-18xe^{-y}}{e^y - 9x^2e^{-y}}.$ **11.4.24.** $y' = \frac{x+y}{x-y}.$

11.4.25. $y' = \frac{y}{x}\cdot\frac{y^2-2x^2\ln y}{x^2-2y^2\ln x}.$ **11.4.26.** $y' = -\frac{y}{x}.$

11.4.35. $dz = \frac{yz\,dx + xz\,dy}{z^2-xy}.$ **11.4.36.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x+y+z-1}.$

11.4.37. $z'_x = -\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z},\ z'_y = -\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}.$