

Мониторинг знаний, умений и навыков (МОНУ)

Функции и их графики (1 час)

6.1.57. $f(x) = \operatorname{ctg} x$ $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$

6.1.58. $f(x) = \frac{x+2}{(x+2)(x-5)}$, $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$, $x-5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$ $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 5) \cup (5; \infty)$

6.1.59. $f(x) = \arccos 3x$ $-1 \leq 3x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$, $D(f) = [-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$

6.1.60. $f(x) = \sqrt[3]{\lg x}$, $x > 0$, $\lg x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$, $D(f) = (0; 1) \cup (1; \infty)$

6.1.61. $f(x) = \sqrt{x+5} - \sqrt{-8-x}$, $x+5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5$, $-8-x \geq 0 \Rightarrow x \leq -8$ $D(f) = (-\infty; -8] \cup [-5; \infty)$

6.1.62. $f(x) = \log_4 x / \sqrt{x-3}$, $x > 0$; $x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$ $D(f) = (3; \infty)$

6.1.63. $f(x) = e^{\ln x}$; $x > 0$ $D(f) = (0; \infty)$

6.1.64. $f(x) = \arcsin(\log_2 x)$, $-1 \leq \log_2 x \leq 1$, $\log_2 \frac{1}{2} \leq \log_2 x \leq \log_2 2$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ $D(f) = [\frac{1}{2}; 2]$

6.1.65. $f(x) = \sqrt{1-x^2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, $1-x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$, $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, $x \neq 0$; $D(f) = (-1; 0) \cup (0; 1]$

6.1.66. $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{\frac{x-2}{x+5}}$, $\frac{x}{x+1} \geq 0$, $x \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup [0; \infty)$

$(x-2)/(x+5) \geq 0$, $x \neq -5$, $x \in (-\infty; -5) \cup [2; \infty)$ $D(f) = (-\infty; -5) \cup [2; \infty)$

6.1.67. $f(x) = \cos \frac{1}{x} + \ln(x+1) + \sqrt{\pi-x}$, $x \neq 0$, $x > -1$, $x \leq \pi$ $D(f) = (-1; 0) \cup (0; \pi]$

6.1.68. $f(x) = 4 - x^2$ $E(f) = [-\infty; 4]$

6.1.69. $f(x) = |x| - \frac{1}{3}$ $E(f) = [-\frac{1}{3}; \infty)$

6.1.70. $f(x) = 2^{\frac{1}{x}} > 0$ $E(f) = (0; \infty)$

6.1.71. $f(x) = \ln(x^2+1)$, $x \in (-\infty; \infty)$, $x^2+1 \geq 1$ $E(f) = [0; \infty)$

6.1.72. $f(x) = e^{x^2-2x-3}$, $x = \frac{2}{2} = 1$, $y = (-1)^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$ $E(x^2-2x-3) = [-4; \infty)$ $E(f) = [e^{-4}; \infty)$

6.1.73. $f(x) = \frac{x}{|x|}$ $E(f) = \pm 1$

6.1.74. $f(x) = \sin x \cos x$ $E(f) = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$

6.1.75. $f(x) = \sqrt{x^2+4}$ $D(f) = (-\infty; \infty)$ $E(f) = [2; \infty)$

6.1.76. $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $x \in [0; 5]$, $x = \frac{4}{2} = 2$, $y(2) = 4 - 8 + 3 = -1$, $y(0) = 3$, $y(5) = 25 - 20 + 3 = 8$ $E(f) = [-1; 8]$

6.1.77. $y(x) = \sqrt{2x+4}$, $y(0) = \sqrt{4}$, $y(2) = \sqrt{8}$, $y(x_1) = \sqrt{x_1+1}$, $y(t^2) = \sqrt{2t^2+4}$, $3y(5x) = \sqrt{10x+4}$

6.1.78. $y(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 2 \\ 0 & \text{при } x = 2 \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$ $y(0) = -1$, $y(2) = 0$, $y(\frac{x}{2}) = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 4 \\ 0 & \text{при } x = 4 \\ 1 & \text{при } x > 4 \end{cases}$ $y(t^2) = \begin{cases} -1 & \text{при } t^2 < 2 \\ 0 & \text{при } t^2 = 2 \\ 1 & \text{при } t^2 > 2 \end{cases}$

6.1.79. $4x^3 - 4x + 1 = 4 - 4 + 1$, $4x^3 - 4x = 0$, $x_1 = 0$ или $x^2 - 1 = 0$; $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. Ответ: $0, 1, -1$

6.1.80. 1) $y(x) = \frac{|x|}{x}$, $y(-x) = \frac{|-x|}{-x} = -\frac{|x|}{x} = -y(x) \Rightarrow$ ф-ия нечет.
 2) $y(x) = |x+1| - |x-1|$, $y(-x) = |-x+1| - |-x-1| = |x+1| - |x-1| = y(x) \Rightarrow$ ф-ия чет.
 3) $\varphi(t) = |t-2|$, $\varphi(-t) = |-t-2| = -|t+2| \neq \pm \varphi(t) \Rightarrow$ ф-ия общ. вида.
 4) $z(y) = \ln y^3$, $y > 0$, $D(z) = (0; \infty)$, $z(-y) = \ln(-y)^3 \neq \pm z(y) \Rightarrow$ ф-ия общ. вида.
 5) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{при } x \geq 0 \\ x & \text{при } x < 0 \end{cases}$, $f(-x) = \begin{cases} x^3 & \text{при } -x \geq 0 \\ x & \text{при } -x < 0 \end{cases} \neq \pm f(x) \Rightarrow$ ф-ия общ. вида.
 6) $f(t) = \begin{cases} t^3 & \text{при } t \geq 0 \\ -t^3 & \text{при } t < 0 \end{cases}$, $f(-t) = \begin{cases} t^3 & \text{при } -t \geq 0 \\ -(-t)^3 & \text{при } -t < 0 \end{cases} = \begin{cases} t^3 & \text{при } t \geq 0 \\ -t^3 & \text{при } t < 0 \end{cases} = -f(t) \Rightarrow$ ф-ия нечет.
 7) $h(x) = \frac{\arctg x}{x-1}$, $\arctg(-x) = -\arctg x$, $h(-x) = \frac{-\arctg x}{-x-1} = \frac{\arctg x}{x+1} \neq \pm h(x) \Rightarrow$ ф-ия общ. вида.

6.1.96. 1) $f(x) = x^2$, $g(x) = x+2$, $(f \circ f)(x) = (x^2)^2 = x^4$, $(f \circ g)(x) = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$, $(g \circ f)(x) = x^2 + 2$.

2) $f(x) = \text{sign}(x)$, $g(x) = -2$, $(f \circ f)(x) = \text{sign} x$, $(f \circ g)(x) = -1$, $(g \circ f)(x) = -2$.
 3) $f(x) = 1/(x-3)$, $g(x) = \frac{x-1}{x}$, $(f \circ f)(x) = \frac{1}{\frac{1}{x-3}-3} = \frac{x-3}{10-3x}$, $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\frac{x-1}{x}-3} = \frac{x}{-1-2x}$, $(g \circ f)(x) = \frac{\frac{1}{x-3}-1}{\frac{1}{x-3}} = 4-x$.

4) $f(x) = [x]$, $g(x) = 1/(x^2+1)$, $(f \circ f)(x) = [x]$, $(f \circ g)(x) = \left[\frac{1}{x^2+1} \right]$, $(g \circ f)(x) = \frac{1}{[x]^2+1}$.

6.1.94. $y = x/(1-x)$, $E(y) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$, $y(1-x) = x$ - обратн. функции нет.

6.1.98. $y = 2^{x-3}$, $E(y) = (0; \infty)$, $x-3 = \log_2 y$, $x = \log_2 y + 3$, $y = \log_2 x + 3$.

6.1.99. $y = \begin{cases} 2x & \text{при } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{при } x < 0 \end{cases}$, $E(y) = (-\infty; \infty)$, $x = \begin{cases} y/2 & \text{при } y \geq 0 \\ \sqrt{-y} & \text{при } y < 0 \end{cases}$, $y = \begin{cases} x/2 & \text{при } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{при } x < 0 \end{cases}$.

6.1.100. $y = \text{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \\ -1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$, $x = \begin{cases} x & \text{при } y = 1 \\ 0 & \text{при } y = 0 \\ x & \text{при } y = -1 \end{cases}$, $y = \begin{cases} y & \text{при } x = \pm 1 \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$ - обратн. функции нет.

6.1.101. $y = 2^{-x^2}$, $E(y) = (0; 1]$ - функция огранич.

6.1.102. $y = \sqrt{x-2}$, $E(y) = [0; \infty)$ - ф-ия строго монотонна.

6.1.103. $y = \frac{|x|}{x}$, $E(y) = \pm 1$ - ф-ия монотон.

6.1.104. $y = x^3 - x$, $E(y) = (-\infty; \infty)$ - ф-ия не монотон, не огранич.

6.1.105. $y = (3x+5)/(x+1)$, $E(y) = (-\infty; \infty)$

6.1.106. $y = \begin{cases} -3 & \text{при } x < 0 \\ x & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$, $E(y) = [-3; \infty)$ - ф-ия монотон.