2. Научиться выполнять: *приводить пример алгебраической системы, на которой истинна данная формула; приводить пример алгебраической системы, на которой данная формула не является истинной; приводить пример алгебраической системы, на которой выполнима данная формула; приводить пример алгебраической системы, на которой невыполнима данная формула* .

Теоретические сведения

Определение. Алгебраическую систему $\langle M, S\rangle$, на которой истинна формула $\boldsymbol{A}$ называют *моделью* этой *формулы*. Алгебраическая система называется моделью *множества формул* $\mathcal{F}$, если она является моделью каждой формулы из $\mathcal{F}$.

Упражнения для самостоятельного решения

1. Даны несколько "миров":

(1) | ● □ ○ ◯ ■ ⬤ | (2) | ▲ △ ○ △ ▲ ◯ |

(3) | □ ▲ ● △ ■ ◯ |

Для каждой из следующих формул выясните какой из данных "миров" является моделью этой формулы:

(а) $\forall x\,(\text{Больш}^1 x \vee \text{Черн}^1 x)$;   (б) $\forall x\,(\text{Треуг}^1 x \vee \neg\,\text{Черн}^1 x)$;

(в) $\forall x\,(\neg\,\text{Черн}^1 x \vee \neg\,\text{Круг}^1 x)$;   (г) $\forall x\,(\text{Малый}^1 x \to \text{Черн}^1 x)$;

(д) $\forall x\,(\text{Треуг}^1 x \to \text{Черн}^1 x)$;   (е) $\forall x\,(\neg\,\text{Треуг}^1 x \to \text{Бел}^1 x)$;

(ж) $\forall x\,(\text{Треуг}^1 x \to \neg\,\text{Больш}^1 x)$;   (з) $\forall x\,(\neg\text{Квадр}^1 x \to \neg\,\text{Треуг}^1 x)$.

2. Рассмотрим алгебраические системы сигнатуры $S = \{\doteq,\ P_1^2\}$, носителями которых служат множества натуральных чисел

$$M_1 = \{2, 4, 8\}, \quad M_2 = \{1, 2, 3\}, \quad M_3 = \{2, 3, 6\}, \quad M_4 = \{2, 3, 4\}.$$

Известно, что $P_1^2(m_1, m_2) = И \Leftrightarrow m_2$ делится на m_1. Найдите те из алгебраических систем $\langle M_1, S\rangle$, $\langle M_2, S\rangle$, $\langle M_3, S\rangle$, $\langle M_4, S\rangle$ которые являются моделью формулы:

(а) $\exists x_0 \forall x_1 P_1^2 x_0 x_1$;   (б) $\exists x_0 \forall x_1 P_1^2 x_1 x_0$;

(в) $\forall x_0 \exists x_1 P_1^2 x_1 x_0$;   (г) $\forall x_0 \forall x_1 (P_1^2 x_0 x_1 \vee P_1^2 x_1 x_0)$;

(д) $\exists x_0 \exists x_1 \exists x_2 (P_1^2 x_0 x_1 \& \neg x_0 \doteq x_1 \& P_1^2 x_1 x_2 \& \neg x_1 \doteq x_2)$.

3. Придумайте "мир", состоящий из шести фигур (треугольников, квадратов или кругов) двух цветов и двух размеров, чтобы следующая формула была на нем:

(1) истинной;   (2) не истинной.

(а) $\neg\exists x(\text{Круг}^1 x \,\&\, \text{Черн}^1 x)$;

(б) $\exists x(\text{Прав}^2 xy \,\&\, \text{Мал}^1 y)$;

(в) $(\forall x(\text{Квадр}^1 x \vee \text{Бел}^1 x) \,\&\, \exists x \text{Треуг}^1 x)$;

(г) $(\exists x \text{Круг}^1 x \,\&\, \forall y(\text{Черн}^1 y \vee \text{Мал}^1 y))$.

4. Для каждой из следующих формул задайте алгебраическую систему с носителем $\{a; b; c\}$, на которой данная формула, если возможно, была бы

(1) истинной;   (2) не истинной.

(а) $\exists x_1 \neg P_1^1 x_1 \& \exists x_1 P_1^1 x_1$;   (б) $\exists x_1 \doteq x_0 x_1$;   (в) $\exists x_1 \forall x_0 \doteq x_0 x_1$.

5. Для каждой из следующих пар формул задайте алгебраическую систему, на которой первая из формул пары истинна, а вторая — истинной не является.

(а) $P_1^2 x_0 x_0,\ P_1^2 x_0 x_1$;   (б) $P_1^2 x_0 f_1^1 x_1,\ P_1^2 x_0 x_1$;

(в) $\exists x_0\, P_1^2 x_0 x_1,\ \forall x_0\, P_1^2 x_0 x_1$;   (г) $\forall x_0 \exists x_1\, P_1^2 x_0 x_1,\ \exists x_0 \forall x_1\, P_1^2 x_0 x_1$.

6*. Для каждой из пар формул, перечисленных в предыдущем задании, докажите, что не существует алгебраической системы, на которой вторая формула пары истинна, а первая — истинной на этой системе не является.

7. Приведите пример моделей каждой из следующих совокупностей формул:

(а) $\mathcal{F}_1 = \{\forall x_0 \neg P_1^2 x_0 c_0,\quad \forall x_0 P_1^2 c_0 x_0\}$;

(б) $\mathcal{F}_2 = \{\forall x_0 \neg P_1^2 x_0 x_0,\quad \forall x_0 \exists x_1\, P_1^2 x_0 x_1\}$;

(в) $\mathcal{F}_3 = \{P_1^2 c_0 x_0,\quad \forall x_1 \forall x_2 (P_1^2 x_1 x_2 \vee P_1^2 x_2 x_1)\}$;

(г) $\mathcal{F}_4 = \{\forall x_1 \forall x_2\, (P_1^2 x_1 x_2 \to \neg P_1^2 x_2 x_1),\quad \forall x_1 \exists x_2\, P_1^2 x_1 x_2\}$;

(д*) $\mathcal{F}_5 = \{\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3\, P_2^3 x_1 x_2 x_3,\quad \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3\, P_2^3 x_1 x_3 x_2,\quad \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3\, P_2^3 x_3 x_1 x_2)\}$;

(е*) $\mathcal{F}_6 = \{\forall x_0 \exists x_1\, P_1^2 x_0 x_1,\quad \forall x_1 \forall x_2 \neg(P_1^2 x_1 x_2 \& P_1^2 x_2 x_1),\quad \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3\, (P_1^2 x_1 x_2 \& P_1^2 x_2 x_3 \to P_1^2 x_1 x_3)\}$.

8*. Докажите, что множества формул $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_3$ и $\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$ из предыдущей задачи не имеют моделей.

9*. Докажите, что всякая модель множества формул $\mathcal{F}_6$ из задачи **7** бесконечна.