# Интегрирование. Часть 7

## Определённый интеграл. Несобственные интегралы

9.2.47. $\int_0^1 \ln x\, dx = [\text{при } x \to 0: \ln x \to -\infty] = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 \ln x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0}(x\ln x - x)|_\varepsilon^1 = -1 - \lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon\ln\varepsilon - \varepsilon) = -1 - \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\varepsilon + \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon = -1 - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} + 0 = -1 - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = -1 - \lim_{\varepsilon\to 0}(-\varepsilon) = -1 - 0 = -1$

9.2.51. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{1}{x^2}\text{ возр. на } [-1; 1]\right] = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x^2} + \lim_{\delta\to 0}\int_{0+\delta}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)|_\delta^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon} - 1 + \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta} - 1 = \infty$ — интеграл расходится

9.2.55. $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}dx$ [при $x = 1$: $\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$ – терпит разрыв]

$$\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} * \frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}};\ \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}dx \text{ сходится } (\alpha = \frac{2}{3} < 0)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\phi(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} * \frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}} * \frac{(1-x)^{\frac{2}{3}}}{1} = \lim_{x\to 1}\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{4}}$$

то, согласно предельному признаку сравнения, исходный интеграл также сходится.

9.2.58. $\int_0^1 \frac{dx}{3x^2+\sqrt[3]{x}} = [\frac{1}{3x^2+\sqrt[3]{x}}$ – имеет разрыв в т. $x = 0$] $f(x) = \frac{1}{3x^2+\sqrt[3]{x}}$; $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Т. к. $\frac{1}{3x^2+\sqrt[3]{x}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ сходится $\to \int_0^1 \frac{dx}{3x^2+\sqrt[3]{x}}$ по признаку сравнения также сходится