Дифференциальные уравнения второго порядка

§1. Основные понятия. Уравнения с разделяющимися переменными

$F(x, y, y') = 0$ (1.1) связывает независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и её производную $y'(x)$ — ДУ 1-го порядка.

Если (1.1) можно записать в виде $y' = f(x, y)$, то оно разрешимо относительно производной, $dy = f(x, y)dx$. Общая форма: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

Решение (интеграл) ДУ 1-го порядка — любая $y = \phi(x)$, которая при подстановке не обращает его в тождество. Процесс нахождения решений — интегрирование уравнения.

Задача Коши — отыскание решения ДУ 1-го порядка, удовлетворяющее н. у. $y(x_0) = y_0$.

Геом. смысл: поиск интегральной кривой уравнения 1.1, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Общее решение уравнения 1.1: $y = \phi(x, C)$ (1.2.), где C — произвольная постоянная, что 1) при любом C она является решением, 2) для допустимого н. у. найдётся такое $C = C_0$, что $\phi(x_0, C_0) = y_0$.

В некоторых случаях общее решение ДУ приходится записывать в неявном виде $\phi(x, y, C) = 0$ — это общий интеграл уравнения.

Геом. смысл: общее решение — семейство интегральных кривых на плоскости Oxy.

Частное решение ДУ 1-го порядка: $y = \varphi(x, C_0)$, получаемое из (1.2) при $C = C_0$.

Частный интеграл уравнения 1.1 $\phi(x, y, C_0) = 0$.

Теорема 2.1.] в $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и её частная производная $f_y{}'(x, y)$ непрерывны в области D плоскости Oxy. Тогда для любой т. $M(x_0, y_0) \in D \ \exists$ и притом единственное решение $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющего н. у. $y(x_0) = y_0$.

$P_1(x) = Q_1(y)dx + P_2(x) * Q_2(y)dy = 0$ (1.3) — ДУ с разделяющимися переменными $\rightarrow \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0$ (1.4) — с разделёнными примерами $\rightarrow$ общим интегрированием $\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C$.

2.1.1. а) $y = (x + C)e^x, y' - y = e^x; y' = \left((x + C)e^x\right)' = e^x + (x + C)e^x$, подставляем $e^x + (x + C)e^x - (x + C)e^x = e^x; e^x = e^e \rightarrow y = (x + C)e^x$ — решение ДУ.

б) $y = -\frac{2}{x^2}, xy^2dx - dy = 0; dy = \left(-\frac{2}{x^2}\right)_x' dx = \frac{4}{x^3}dx = 0; dy = \left(-\frac{2}{x^2}\right)_x' dx = \frac{4}{x^3}dx$, подставляем $x = \left(-\frac{2}{x^2}\right)^2 dx - \frac{4}{x^3}dx = 0; 0 = 0$, ч. т. д.

в) $x^2 - xy + y^2 = C, (x - 2y)y' - 2x + y = 0: (x^2 - xy + y^2)' = (C)_x' \leftrightarrow 2x - y - xy' + 2yy' = 0 \rightarrow y' = \frac{y-2x}{2y-x}, x \neq 2y$, подставляем $(x - 2y)\frac{y-2x}{2y-x} - 2x + y = 0; 0 = 0$, ч. т. д.

2.1.4. Решить задачу Коши: а) $y' = \sin 5x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1; y = \int \sin 5x\, dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$, подставляем н. у. $1 = -\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2} + C \rightarrow C = 1 \rightarrow$ решение н $= -\frac{1}{5}\cos 5x + 1$.

б) $\frac{dx}{dt} = 3, x = 1$ при $t = -1; \int 3dt = 3t + C$, подставляем $1 = 3 * (-1) + C \rightarrow C = 4 \rightarrow x = 3t + 4$.

2.1.6. а) $y = Cx^3; y'(Cx^3)' = 3Cx^2, C = \frac{y}{x^3}$, подставляем $y' = \frac{3y}{x^3} * x^2 \rightarrow xy' = 3y$.

б) семейство парабол определяется $y^2 = Cx \to (\,)'_x$; $2yy' = C$. Исключив C, получим $2xy' - y = 0$

2.1.15. $(x - xy^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0$; $[(1.3)]x(1 - y^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0$: $(1 - y^2)(1 - x^2)$; $[(1.4)]\frac{x}{1-x^2}dx + \frac{y}{1-y^2}dy = 0$; $[\int\,]-\frac{1}{2}\ln|1 - x^2| - \frac{1}{2}\ln|1 - y^2| = -\frac{1}{2}\ln|C|, C \neq 0$.

2.1.22. $ydx + \operatorname{ctg} x\, dy = 0, y|_{x=\frac{\pi}{3}} = -1$; $\frac{y}{y \operatorname{ctg} x}dx + \frac{\operatorname{ctg} x}{y \operatorname{ctg} x}dy = 0$; $\operatorname{tg} x\, dx + \frac{1}{y}dy = 0$; $\int \operatorname{tg} x\, dx + \int \frac{dy}{y} = \ln|C_1|, C_1 \neq 0$; $\ln|y| - \ln|\cos x| = \ln|C_1|, |y| = |C_1 \cos x|, y = \pm C_1 \cos x$, подставляем н.у. $y = C \cos x\ (C = \pm C_1)$; $-1 = C \cos\frac{\pi}{3}$; $-1 = C * \frac{1}{2}$; $C = -2 \to$ ч.р. $y = -2\cos x$.

§2. Однородные дифференциальные уравнения

$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n f(x, y)$ — однородная функция степени n, где n — целое, α — любое.

В частности, $f(x, y)$ — однородная нулевой степени, если $f(\alpha x, \alpha y) = f(x, y)$.

ДУ $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ (2.1) однородное, если $P(x, y), Q(x, y)$ — однородные функции одинаковой степени.

2.1 может быть приведено к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (2.2), которое преобразуется при помощи замены переменной $\frac{y}{x} = u, y = ux$, где $u = u(x)$ — новая неизвестная функция (можно $\frac{x}{y} = u$).

2.2.1. а) $(y^2 + xy)dx - x^2dy = 0$ имеет вид 2.1; $P(x, y) = y^2 + xy, Q(x, y) = -x^2$ — однородные функции одной степени; $P(\alpha x, \alpha y) = (\alpha y)^2 + \alpha x \alpha y = \alpha^2(y^2 + xy) = \alpha^2 P(x, y), Q(\alpha x, \alpha y) = -(\alpha x^2) = \alpha^2(-x^2) = \alpha^2 Q(x, y), n = 2 \to$ однородное; $y = ux$, тогда $dy = xdu + udx \to (u^2x^2 + x^2u)dx - x^2(xdu + udx) = 0$; $u^2dx - xdu = 0, \frac{dx}{x} - \frac{du}{u^2} = 0$; $[\int\,]\ln|x| + \frac{1}{u} = C \to \ln|x| + \frac{x}{y} = C$ — общий интеграл; $y = ux$; $y' = u'x + u$ (см. б)).

б) $y' = \frac{xy^2 - yx^2}{x^3}, y(-1) = 1$; $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}$; положим $y = ux, y' = u'x + u$, подставим $u'x + u = u^2 - u$; $\frac{du}{dx} * x = u^2 - 2u \leftrightarrow \frac{du}{u^2-2u} * \frac{x}{dx} = 1 \leftrightarrow \frac{du}{u^2-2u} = \frac{dx}{x}$; $\int \frac{du}{u^2-2u} = \int \frac{dx}{x}$; $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-2}{u}\right| = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|C| \to \left|\frac{u-2}{u}\right| = C_1|x_2| = \left[u = \frac{y}{x}\right] = \left|\frac{y-2x}{y}\right| = |C_1|x^2$; $\frac{y-2x}{y} = \pm C_1x^2, \frac{y-2x}{y} = Cx^2$, где $C = \pm C_1$; $\frac{1+2}{1} = C * 1 \to C = 3 \to \frac{y-2x}{y} = 3x^2 \to (3x^2 - 1) = -2x$; $y = \frac{2x}{1-3x^2}$ — частное решение.

в) $xy' - y + xe^{\frac{y}{x}} = 0$; преобразуем к 2.2 $xy' + y + xe^{\frac{y}{x}} = 0$: x; $y' + \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} = 0$; $\left[\frac{y}{x} = u\right]$; $u'x + u - u + e^u = 0 \leftrightarrow u'x + e^u = 0 \leftrightarrow \frac{du}{e^u} + \frac{dx}{x} = 0$; $\int e^{-u}du = -\int\frac{dx}{x} \leftrightarrow -e^u = -\ln|x| - \ln|C|, C \neq 0 \to \ln|C_x| = e^{-u}, -u = \ln\ln|C_x|, C \neq 0, y = -x\ln\ln|C_x|, C \neq 0$

2.2.5. $(y + 2)dx - (2x + y + 6)dy = 0$; $[x = u + \alpha, y = v + \beta]$; $(v + \beta + 2)du - (2u + 2\alpha + v + \beta + 6)dv = 0$; $\{\beta + 2 = 0; 2\alpha + \beta + 6 = 0\}$; $\{\alpha = -2; \beta = -2\}$; $vdv - (2u + v)dv = 0$ — однородное

§3. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли

ДУ вида $y' + p(x)y = g(x)$ (3.1), где $p(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции (в частности — постоянные), называются линейным уравнением 1-го порядка. $x' + p(y)x = g(y)$ — уравнение, линейное относительно x и x'.

Если $g(x) = 0$, то 3.1 — линейное однородное уравнение.

Решение 3.1 ищется в виде $y = uv$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — неизвестные функции от x. Одну из этих функций можно выбрать произвольно, тогда 2-ая определится из уравнения 3.1.

Также 3.1 можно решить методом Лагранжа.

$y' + p(x)y = g(x)y^n$, где $n \in R, n \neq 0, n \neq 1$, где $p(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции, называется уравнением Бернулли.

Оно приводится к однородному с помощью подстановки $z = y^{-n+1}$.

2.3.1. а) $y' + \operatorname{tg} x * y = \frac{1}{\cos x}$ имеет вид 3.1 → линейное.

Метод Бернулли.

$y = uv \to y' = u'v + uv'; u'v + uv' + \operatorname{tg} x\, uv = \frac{1}{\cos x}$ (3.3), подберём $u = v(x)$: $v' + v \operatorname{tg} x = 0 \to \frac{dv}{dx} + v \operatorname{tg} x = 0 \to \frac{dv}{v} + \operatorname{tg} x\, dx = 0, \ln|v| - \ln|\cos x| = \ln|C|, C \neq 0; v = C \cos x, C \neq 0$; при $C = 1, v = \cos x$, подставим в 3.3, $u' \cos x = \frac{1}{\cos x}$, т. е. $du = \frac{dx}{\cos^2 x} \to u = \operatorname{tg} x + C; y = uv = (\operatorname{tg} x + C) \cos x, y = C \cos x + \sin x$ — общее решение.

§4. Уравнения в полных дифференциалах

ДУ $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ (4.1) называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$, т. е. $dU(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ (4.2).

4.1 с учётом 4.2 можно записать в виде $dU(x,y) = 0$, поэтому его общий интеграл имеет вид $U(x,y) = C$.

Чтобы 4.1 было УПД, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ (4.3).

$U(x.y)$ может быть найдена из системы уравнений $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y), \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$, либо по формуле $U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$ (4.4), где (x_0, y_0) — некоторая фиксированная точка из области непрерывности $P(x,y), Q(x,y)$ из частных производных.

2.4.1. $e^x + y + \sin y + y'(e^y + x + x\cos y) = 0, y(\ln 2) = 0; (e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0; P(x,y) = e^x + y + \sin y, Q(x,y) = e^y + x + x\cos y; \frac{\partial P}{\partial y} = 1 + \cos y, \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + \cos y, \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \to$ усл. выполн.; $\frac{\partial U}{\partial x} = e^x + y + \sin y, \frac{\partial U}{\partial y} = e^y + x + x\cos y; U(x,y) = e^x + xy + x\sin y + e^y + C_1, e^x + xy + x\sin y + e^y + C_1 = C_2$ — общее решение; $e^2 + \ln 2 * 0 + \ln 2 * \sin 0 + e^0 = C \to C = 3 \to e^x + xx\sin y + e^y = 3$ — частный интеграл.

2.4.5. $(e^y + \sin x)dx + \cos x\, dy = 0; \frac{\partial P}{\partial y} = e^y, \frac{\partial Q}{\partial x} = -\sin x, \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}; t(y) = e^{\int \frac{Q'_x - P'_y}{P} dy}; t^y = e^{\int(-1)dy} = e^{-y}; (1 + e^{-y}\sin x)dx + e^{-y}\cos x\, dy = 0; P'y = -e^{-y}; \ln x = e^{-y}(-\sin x) = Q'x; \frac{\partial U}{\partial x} = 1 + e^{-y}\sin x, \frac{\partial U}{\partial y} = e^{-y}\cos x; U(x,y) = \int(1 + e^{-y}\sin x)dx = x + e^{-y}\cos x + \phi(y); \frac{\partial U}{\partial y} = e^{-y}\cos x + \phi'(y) = e^{-y}\cos x \to \phi'(y) = 0 \to \phi(y) = C_1; U(x,y) = x - e^{-y}\cos x + C_1; x - e^{-y}\cos x = C$ — общее решение.