Моисеенко Павел, и КНиПО, ИВТ, 1.2.

СЛАУ

2.1.32 $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 = 5 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{array}\right)_{\text{II}-2\text{I}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$ $r(A)=1$; $r(A|B)=3$; $r(A) \neq r(A|B) \Rightarrow$ систем. не совм.

Ответ: нет решений.

2.1.33 $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 6x + 4y = 10 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 10 \end{array}\right)_{\text{II}-2\text{I}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $r(A) = r(A|B) = 1 < 2 = n \Rightarrow$ $\Rightarrow$ сист. совм. и неопред.; $n - r(A) = 2 - 1 = 1$

$|3| = 3 \Rightarrow x$ - главн, y - свободн $\Rightarrow \exists\, y = t$

$3x + 2t = 5$; $3x = 5 - 2t$; $x = \frac{5-2t}{3}$

Ответ: $\left(\frac{5-2t}{3}; t\right)$ - общ.; при $t = -2$: $(3; -2)$ - частное решение

2.1.34 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 = 1 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \end{array}\right)_{\substack{\text{II}+2\text{I} \\ \text{III}+2\text{I}}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$ $r(A) = 2$; $r(A|B) = 3$; $r(A) \neq r(A|B) \Rightarrow$ сист. не совм.

Ответ: ~~система не со~~ нет решений.

2.1.35 $\begin{cases} x - \sqrt{3}y = 1 \\ \sqrt{3}x - 3y = \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3}x + y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right)_{\text{III}\cdot 3 + \text{II}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_{\text{II}:\sqrt{3}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\frac{3}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_{\text{II}-\text{I}} \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $r(A) = 1$; $r(A|B) = 1$; $r(A) = r(A|B) \Rightarrow$ сист. совм. и неопредел. $n - r(A) = 2 - 1 = 1$; $|1| = 1 \Rightarrow x$ - главн, y - своб $\Rightarrow \exists\, y = t$

$x - \sqrt{3}t = 1$; $x = 1 + \sqrt{3}t$

Ответ: $(1 + \sqrt{3}t; t)$ - общее; при $t = 0$: $(1; 0)$ - частное решение.

2.1.36. $\begin{cases} 3x - y = -5 \\ 2x + 3y = 4 \\ -x + 1/3y = 5/3 \\ x + 1{,}5y = 2 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 1 & 1{,}5 & 2 \end{array}\right)_{\substack{3\text{III}+\text{I} \\ 2\text{IV}-\text{II}}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_{3\text{II}-2\text{I}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -5 \\ 0 & 11 & 22 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_{\text{II}:11} \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $r(A) = 2$; $r(A|B) = 2 = n$; $r(A) = r(A|B) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ сист. совм. и опред. $\begin{cases} 3x - y = -5 \\ y = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

Ответ: $(-1; 2)$ - общее и частное решен.

2.1.37. $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8 \\ 2x - 4y - 3z = -1 \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & -4 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right)_{-2\text{I}+3\text{II}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -20 & -13 & -19 \\ 2 & -4 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right)_{\text{II}-2\text{III}} \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -20 & -13 & -19 \\ 0 & -14 & -5 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right)_{-7\text{I}+10\text{II}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 41 & 123 \\ 0 & -14 & -5 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right)_{\text{II}:(-1)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 14 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 41 & 123 \end{array}\right)$ $r(A) = r(A|B) = n = 3 \Rightarrow$ сист. совм. и опред.

$\begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ 14y + 5z = 1 \\ 41z = 123 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -5y - z \\ 14y = -14 \\ z = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$ Ответ: $(2; -1; 3)$ - общее и частное решения

2.1.38

$$\begin{cases} -x+y-3z=5 \\ 3x-y-z=2 \\ 2x+y-9z=0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -9 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ II+3I \\ III+2I \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -10 & 17 \\ 0 & 3 & -15 & 10 \end{array}\right) 2III-3II \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -10 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 31 \end{array}\right)$$

$r(A)=2$; $r(A|B)=3$; $r(A) \neq r(A|B)$ => сист. не совместн. Ответ: нет решен.

2.1.39. $$\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ 3x+4y-2z=0 \\ 3x-2y+4z=0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) III-II \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} 2II-3I \\ III:2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) 11III+3II \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A|B)=n=3$ => сист. совм. и опред.

$$\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ 11y-z=0 \\ 8z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Ответ: $(0;0;0)$ — общее и частное решения.

2.1.40. $$\begin{cases} 3x+y-5z=0 \\ x-2y-z=0 \\ 2x+3y-4z=0 \\ x+5y-3z=0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ 3III-2I \\ IV-II \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} I-3II \\ \\ \\ IV-III \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ III-I \\ IV:(-2) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A|B)=n=3$ => сист. совм. и определ.

$$\begin{cases} x-2y-z=0 \\ 7y-2z=0 \\ z=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Ответ: $(0;0;0)$ — общее и частное решения

2.1.41. $$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1+3x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3=11 \\ 3x_1+4x_2-x_3=-5 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \\ 3 & 4 & -1 & -5 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ III-II \\ IV-I \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & -2 & -10 \end{array}\right) \begin{matrix} 3II-2I \\ \\ \\ IV+III \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} 2II+5III \\ III:2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 12 & 36 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 12 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) I-II \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 12 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) I:3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 12 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A|B)=n=3$ =>
=> система совм. и опред.

$$\begin{cases} x+y=0 \\ -y+z=5 \\ 12z=36 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \\ z=3 \end{cases}$$

Ответ: $(2;-2;3)$ — общее и частное решения.

2.1.42. $$\begin{cases} 2\sqrt{5}x_1-x_2+\sqrt{5}x_3=1 \\ 10x_1-\sqrt{5}x_2+5x_3=\sqrt{5} \\ -2x_1+\frac{\sqrt{5}}{5}x_2-x_3=-\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2\sqrt{5} & -1 & \sqrt{5} & 1 \\ 10 & -\sqrt{5} & 5 & \sqrt{5} \\ -2 & \frac{\sqrt{5}}{5} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right) II+5III \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2\sqrt{5} & -1 & \sqrt{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{\sqrt{5}}{5} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right) III\sqrt{5}+I \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2\sqrt{5} & -1 & \sqrt{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A|B)=1<3=n$ => сист. совм. и неопред.
$|1|=1$
$n-r(A)=3-1=2$ x_1 — главн., x_2, x_3 — свободн.

$2\sqrt{5}x_1-x_2+\sqrt{5}x_3=1$] $x_1=\frac{1}{2\sqrt{5}}t_1$; $x_3=\frac{1}{\sqrt{5}}t_2$; $1-x_2$

$t_1-x_2+t_2=1$, $-x_2=1-t_1-t_2$; $x_2=t_1+t_2-1$

Ответ: $(\frac{t_1}{2\sqrt{5}}; t_1+t_2-1; \frac{t_2}{\sqrt{5}})$ — общее; при $t_1=t_2=0$: $(0;-1;0)$ — частн. решен.

2.1.43. $$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3 \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7 \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ II-2I \\ III-3I \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} I-2II \\ \\ III-4II \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A|B)=2<4=n$ => сист. совм. и неопр.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1-0=1$; $n-r(A)=4-2=2$ => x_3, x_4 — главн., x_1, x_2 — свободн.

] $x_1=t_1$; $x_2=t_2$

$$\begin{cases}3t_1+4t_2+x_3=1\\ x_4=1\end{cases};\quad \begin{cases}x_3=1-3t_1-4t_2\\ x_4=1\end{cases};$$

Ответ: $(t_1; t_2; 1-3t_1-4t_2; 1)$ – общее; при $t_1=t_2=0$: $(0;0;1\,1)$ – частн. решение

2.1.44
$$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_4=4\\ x_1+x_2-2x_3=0\\ 3x_1+x_3-x_4=2\\ 2x_1+x_3+x_4=3\\ x_1+x_2+4x_3-3x_4=-3\end{cases}\quad \left(\begin{array}{cccc|c}2&1&0&3&4\\1&1&-2&0&0\\3&0&1&-1&2\\2&0&1&1&3\\1&1&4&-3&-3\end{array}\right)\begin{matrix}\text{I}-\text{IV}\\ \\ \text{III}-3\text{II}\\ \\ \text{V}-\text{II}\end{matrix}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&-1&2&1\\1&1&-2&0&0\\0&-3&7&-1&2\\2&0&1&1&3\\0&0&6&-3&-3\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ \text{III}+3\text{I}\\ \text{IV}-2\text{II}\\ \text{V}:3\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&-1&2&1\\1&1&-2&0&0\\0&0&4&5&5\\0&-2&5&1&3\\0&0&2&-1&-1\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ \text{III}-2\text{V}\\ \text{IV}+2\text{I}\\ \\ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&0&0\\0&1&-1&2&1\\0&0&0&7&7\\0&0&3&5&5\\0&0&2&-1&-1\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ \text{III}:7\\ \\ 3\text{V}-2\text{IV}\end{matrix}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&0&0\\0&1&-1&2&1\\0&0&0&1&1\\0&0&3&5&5\\0&0&0&-13&-13\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \text{II}-\text{III}\\ \\ \text{IV}-5\text{III}\\ \text{V}:(-13)-\text{III}\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&0&0\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&3&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&0&0\\0&1&-1&1&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$r(A)=r(A|B)=n=4 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ сист. совм. и опред.

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=0\\ -x_3+x_2+x_4=0\\ 3x_3=0\\ x_4=1\end{cases};\quad \begin{cases}x_1=1\\ x_2=-1\\ x_3=0\\ x_4=1\end{cases}$$

Ответ: $(1;-1;0;1)$ – общее и частное решения.

2.1.45.
$$\begin{cases}45x_1-28x_2+34x_3-52x_4=9\\ 36x_1-23x_2+29x_3-43x_4=3\\ 35x_1-21x_2+28x_3-45x_4=16\\ 47x_1-32x_2+36x_3-48x_4=-17\\ 27x_1-19x_2+22x_3-35x_4=6\end{cases}\quad \left(\begin{array}{cccc|c}45&-28&34&-52&9\\36&-23&29&-43&3\\35&-21&28&-45&16\\47&-32&36&-48&-17\\27&-19&22&-35&6\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \text{II}-\text{III}\\ \\ \text{IV}-\text{I}\\ \\ \end{matrix}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}45&-28&34&-52&9\\1&-2&1&2&-13\\35&-21&28&-45&16\\2&-4&2&4&-26\\27&-19&22&-35&6\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ \text{III}-\text{V}\\ \text{IV}-2\text{II}\\ \\ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}45&-28&34&-52&9\\1&-2&1&2&-13\\8&-2&6&-10&10\\0&0&0&0&0\\27&-19&22&-35&6\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ \text{III}:2\\ \\ \\ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}45&-28&34&-52&9\\1&-2&1&2&-13\\4&-1&3&-5&5\\27&-19&22&-35&6\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\begin{matrix}\text{I}-11\text{III}\\ \\ \\ \text{IV}-7\text{III}\\ \\ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-17&1&2&-46\\1&-2&1&2&-13\\4&-1&3&-5&5\\-1&-12&1&0&-29\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\begin{matrix}\text{I}-\text{II}\\ \\ \text{III}-4\text{II}\\ \text{IV}+\text{II}\\ \\ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&-15&0&1&-33\\1&-2&1&2&-13\\0&7&-1&-13&57\\0&-14&2&2&-42\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\begin{matrix}\text{I}+2\text{III}\\ \\ \\ \text{IV}+2\text{III}\\ \\ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&-1&-2&-25&89\\1&-2&1&2&-13\\0&7&-1&-13&57\\0&0&0&-24&78\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\begin{matrix}\text{I}-\text{IV}\\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&2&-13\\0&-1&-2&-1&11\\0&7&-1&-13&57\\0&0&0&-24&78\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ \text{III}+7\text{II}\\ \\ \\ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&2&-13\\0&-1&-2&-1&11\\0&0&-15&-20&134\\0&0&0&-24&48\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\begin{matrix}\text{I}-45\text{II}\\ \\ \text{III}-35\text{II}\\ \text{IV}-2\text{II}\\ \text{V}-27\text{II}\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&61&-11&-142&594\\1&-2&1&2&-13\\0&49&-7&-116&471\\0&0&0&0&0\\0&35&-5&-89&354\end{array}\right)$$

$$\begin{matrix}\text{I}-2\text{V}\\ \\ \text{III}-\text{V}\\ \\ \\ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&-8&-1&36&-120\\1&-2&1&2&-13\\0&14&-2&-26&114\\0&0&0&0&0\\0&35&-5&-89&357\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ \text{III}+\text{I}\\ \\ \text{V}+4\text{I}\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&-8&-1&36&-120\\1&-2&1&2&-13\\0&6&-3&10&-6\\0&0&0&0&0\\0&3&-9&55&-122\end{array}\right)\begin{matrix}\text{I}+3\text{V}\\ \\ \text{III}-2\text{V}\\ \\ \\ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&-28&201&-489\\1&-2&1&2&-13\\0&0&15&-100&240\\0&0&0&0&0\\0&3&-9&55&-123\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ \text{III}:5\\ \\ \text{V}-3\text{I}\end{matrix}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&-28&201&-489\\1&-2&1&2&-13\\0&0&3&-20&48\\0&0&0&0&0\\0&0&75&-548&1344\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \text{V}-25\text{III}\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&2&-13\\0&1&-28&201&-489\\0&0&3&-20&48\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-48&144\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \text{V}:(-48)\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&2&-13\\0&1&-28&201&-489\\0&0&3&-20&48\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&-3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&2&-13\\0&1&-28&201&-489\\0&0&3&-20&48\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$r(A)=r(A|B)=n=4 \Rightarrow$ сист. совм. и опред.

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+2x_4=-13 \\ x_2-28x_3+201x_4=-489 \\ 3x_3-20x_4=48 \\ x_4=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \\ x_3=-4 \\ x_4=-3 \end{cases}$$

Ответ: $(1;2;-4;-3)$ - общ. и частн. решен.

2.1.46. $$\begin{cases} 6x_1+4x_2+5x_3+2x_4+3x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=3 \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=-7 \\ 9x_1+6x_2+x_3+3x_4+2x_5=2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 6&4&5&2&3&1 \\ 3&2&4&1&2&3 \\ 3&2&-2&1&0&-7 \\ 9&6&1&3&2&2 \end{array}\right)\begin{array}{l} I-2II \\ \\ III-II \\ IV-3II \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0&0&-3&0&-1&-5 \\ 3&2&4&1&2&3 \\ 0&0&-6&0&-2&-10 \\ 0&0&-11&0&-4&-7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3&2&4&1&2&3 \\ 0&0&-3&0&-1&-5 \\ 0&0&-6&0&-2&-10 \\ 0&0&-11&0&-4&-7 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ III-2II \\ 3IV-11II \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3&2&4&1&2&3 \\ 0&0&-3&0&-1&-5 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&-1&34 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3&2&4&1&2&3 \\ 0&0&-3&0&-1&-5 \\ 0&0&0&0&-1&34 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A|B)=3<5=n \Rightarrow$ сист. совм. и неопр.
$n-r(A)=5-3=2$

$$\begin{vmatrix} 4&1&2 \\ -3&0&-1 \\ 0&0&-1 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow x_1, x_2 \text{ - своб.}, x_3, x_4, x_5 \text{ - главн.}$$

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=3 \\ -3x_3-x_5=-5 \\ -x_5=34 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x_1+2x_2+4x_3+x_4-68=3 \\ -3x_3+34=-5 \\ x_5=-34 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_4=-3x_1-2x_2+19 \\ x_3=13 \\ x_5=-34 \end{cases}$$

$x_1=t_1 \Rightarrow x_4=-3t_1-2t_2+19$
$x_2=t_2$

при $t_1=t_2=0$: $(0;0;13;19;-34)$ - частн. реш.

Ответ: $(t_1;t_2;13;-3t_1-2t_2+19;-34)$ - общее реш.

2.1.44. $$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=1 \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=2 \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=1 \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5=2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1&1&3&-2&3&1 \\ 2&2&4&-1&3&2 \\ 3&3&5&-2&3&1 \\ 2&2&8&-3&9&2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ III-3I \\ IV-2I \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&1&3&-2&3&1 \\ 2&2&4&-1&3&2 \\ 0&0&-4&4&-6&-2 \\ 0&0&4&-2&6&0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ II-2I \\ III+IV \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&1&3&-2&3&1 \\ 0&0&-2&3&-3&0 \\ 0&0&0&2&0&-2 \\ 0&0&4&-2&6&0 \end{array}\right)\begin{array}{l} I+III \\ \\ \\ IV+2II \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&1&3&0&3&-1 \\ 0&0&-2&3&-3&0 \\ 0&0&0&2&0&-2 \\ 0&0&0&4&0&0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ 2III-IV \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&1&3&0&3&-1 \\ 0&0&-2&3&-3&0 \\ 0&0&0&0&0&-4 \\ 0&0&0&4&0&0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&1&3&0&3&-1 \\ 0&0&-2&3&-3&0 \\ 0&0&0&4&0&0 \\ 0&0&0&0&0&-4 \end{array}\right)$$

$r(A)=3$
$r(A|B)=4$
$r(A) \neq r(A|B) \Rightarrow$ сист. несовм. Ответ: нет решений.

Моисеенко Павел, ИКНиТО, ИВТ, 1.2.

СЛАУ 2

2.2.16 $f(x)=ax^2+bx+c$; $f(-2)=-8$; $f(1)=4$; $f(2)=-4$

$$\begin{cases} 4a-2b+c=-8 \\ a+b+c=4 \\ 4a+2b+c=-4 \end{cases}$$

$$\Delta=\Delta A=\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}=4+2-8-4-8+2=-12\neq 0$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -8 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-8+8+8+4+16+8=36 \qquad a=-\frac{36}{12}=-3$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix}=16-4-32-16+16+8=-12 \qquad b=\frac{-12}{-12}=1$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 4 & -2 & -8 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix}=-16-16-32+32-8-32=-72 \qquad c=\frac{-72}{-12}=6$$

Ответ: $a=-3$; $b=1$; $c=6$.

2.2.17. $f(x)=a\cdot 3^x+bx^2+c$; $f(0)=2$; $f(1)=-1$; $f(2)=4$

$$\begin{cases} a+c=2 \\ 3a+b+c=-1 \\ 9a+4b+c=4 \end{cases} \qquad \Delta=\Delta A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 9 & 4 & 1 \end{vmatrix}=1+12-9-4=0 \Rightarrow$$ по формулам Крамера систему решить нельзя

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ II-3I \\ III-9I \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 4 & -8 & -14 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ III-4II \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{array}\right)$$

$r(A)=2$; $r(A|B)=3$; $r(A)\neq r(A|B) \Rightarrow$ сист. несовм.

Ответ: нет коэф., удовлетв. условию.

2.2.18. $$\begin{cases} x_1-x_2=5 \\ 2x_1+x_2=1 \end{cases} \qquad \Delta=\Delta A=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3\neq 0$$

1) $$\Delta_1=\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=6 \qquad x_1=\frac{6}{3}=2$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-9 \qquad x_2=\frac{-9}{3}=-3$$

2) $A_{11}=1$; $A_{12}=-2$; $A_{21}=1$; $A_{22}=1$; $\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{3}+\frac{1}{3} \\ -\frac{10}{3}+\frac{1}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ответ: $(2; -3)$.

2.2.19. $$\begin{cases} x_1-\sqrt{5}x_2=0 \\ 2\sqrt{5}x_1-5x_2=-10 \end{cases} \qquad \Delta=\Delta A=\begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & -5 \end{vmatrix}=5$$

1) $$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & -\sqrt{5} \\ -10 & -5 \end{vmatrix}=-10\sqrt{5} \qquad x_1=\frac{-10\sqrt{5}}{5}=-2\sqrt{5}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2\sqrt{5} & -10 \end{vmatrix}=-10 \qquad x_2=\frac{-10}{5}=-2$$

2) $A_{11}=-5$; $A_{12}=-2\sqrt{5}$; $A_{21}=\sqrt{5}$; $A_{22}=1$ $\quad \tilde{A}=\begin{pmatrix} -5 & -2\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 1 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} -5 & \sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} -5 & \sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} -1 & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2\sqrt{5} \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ответ: $(-2\sqrt{5}; -2)$.

2.2.20. $$\begin{cases} \alpha x-y=2 \\ 2x+\alpha y=1 \end{cases} \qquad \Delta=\Delta A=\begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix}=\alpha^2+2\neq 0$$

2

1) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda + 1$ $\qquad x = \dfrac{2\lambda+1}{\lambda^2+2}$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - 4$ $\qquad y = \dfrac{\lambda-4}{\lambda^2+2}$

2) $A_{11} = \lambda$; $A_{12} = -2$; $A_{21} = 1$; $A_{22} = \lambda$; $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -2 & \lambda \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \dfrac{1}{\lambda^2+2} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -2 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda/\lambda^2+2 & 1/\lambda^2+2 \\ -2/\lambda^2+2 & \lambda/\lambda^2+2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} \lambda/\lambda^2+2 & 1/\lambda^2+2 \\ -2/\lambda^2+2 & \lambda/\lambda^2+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\lambda+1}{\lambda^2+2} \\ \frac{\lambda-4}{\lambda^2+2} \end{pmatrix}$

Ответ: $\left(\dfrac{2\lambda+1}{\lambda^2+2}; \dfrac{\lambda-4}{\lambda^2+2} \right)$

2.2.21. $\begin{cases} ax + 3by = 1 \\ bx + 3ay = 1 \end{cases}$; $\Delta A = \begin{vmatrix} a & 3b \\ b & 3a \end{vmatrix} = 3a^2 - 3b^2 = 3(a^2 - b^2) = 3(a-b)(a+b)$

1) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3b \\ 1 & 3a \end{vmatrix} = 3a - 3b$ $\qquad x = \dfrac{3a-3b}{3a^2-3b^2} = a+b$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix} = a - b$ $\qquad y = \dfrac{a-b}{3a^2-3b^2} = 3(a+b)$

2) $A_{11} = 3a$, $A_{12} = -b$, $A_{21} = -3b$; $A_{22} = a$. $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3a & -b \\ -3b & a \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3a & -3b \\ -b & a \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \dfrac{1}{3(a^2-b^2)} \cdot \begin{pmatrix} 3a & -3b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/a^2-b^2 & -b/a^2-b^2 \\ -b/3(a^2-b^2) & a/a^2-b^2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} a/a^2-b^2 & -b/a^2-b^2 \\ -b/3(a^2-b^2) & a/a^2-b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ 3(a+b) \end{pmatrix}$

Ответ: $(a+b; 3a+3b)$

2.2.22. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ 4x + 5y + 6z = 19 \\ 7x + 8y = 1 \end{cases}$; $\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 84 + 96 - 105 - 48 - 0 = 27$

1) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 19 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 456 + 12 - 15 - 384 = 69$ $\qquad x = \dfrac{69}{27} = \dfrac{23}{9}$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 4 & 19 & 6 \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 12 + 336 - 399 - 6 = -57$ $\qquad y = -\dfrac{57}{27} = -\dfrac{19}{9}$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 19 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 256 + 266 - 280 - 8 - 152 = 87$ $\qquad z = \dfrac{87}{27} = \dfrac{29}{9}$

2) $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -48$; $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = +42$; $A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24$, $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21$; $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3$; $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6$, $A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -48 & 42 & -3 \\ 24 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \dfrac{1}{27} \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16/9 & 8/9 & -1/9 \\ 14/9 & -7/9 & 2/9 \\ -1/9 & 2/9 & -1/9 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} -16/9 & 8/9 & -1/9 \\ 14/9 & -7/9 & 2/9 \\ -1/9 & 2/9 & -1/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 19 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -128/9 + 152/9 - 1/9 \\ 112/9 - 133/9 + 2/9 \\ -8/9 + 38/9 - 1/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23/9 \\ -19/9 \\ 29/9 \end{pmatrix}$ Ответ: $\left(\dfrac{23}{9}; -\dfrac{19}{9}; \dfrac{29}{9} \right)$.

2.2.23. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = -6 \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = -8 \end{cases}$; $\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 \end{vmatrix} = 48 + 60 + 24 - 54 - 32 - 40 = 6$

1) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -6 & 6 & 4 \\ -8 & 10 & 8 \end{vmatrix} = 192 - 64 - 180 + 144 - 160 + 96 = 28$ $\qquad x_1 = \dfrac{28}{6} = \dfrac{14}{3}$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -8 & 8 \end{vmatrix} = -48 + 48 - 48 + 54 + 32 - 64 = -26$ $\qquad x_2 = \dfrac{-26}{6} = -\dfrac{13}{3}$

3

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -6 \\ 3 & 10 & -8 \end{vmatrix} = -48-36+80-72+60+32 = 16 \qquad x_3 = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

2) $A_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = 8$; $A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \cdot (-1) = -4$; $A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 2$; $A_{21} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = 14$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -1$, $A_{23} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = -4$, $A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -10$; $A_{32} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 2 \\ 14 & -1 & -4 \\ -10 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 8 & 14 & -10 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 & 14 & -10 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & 7/3 & -5/3 \\ -2/3 & -1/6 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 4/3 & 7/3 & -5/3 \\ -2/3 & -1/6 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16/3 - 14 + 40/3 \\ -8/3 + 1 - 8/3 \\ 4/3 + 4 - 8/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/3 \\ -13/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}$$ Ответ: $\left(\frac{14}{3}; -\frac{13}{3}; \frac{8}{3}\right)$

2.2.24 $\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 6x+5y+4z=-2 \\ 9x+8y+7z=3 \end{cases}$; $\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 105+72+48-45-96-84 = 0$

Ответ: по формулам Крамера и с пом. обратн. матр. сист. реш. нельзя.

2.2.25 $\begin{cases} 3x+2y+z=-8 \\ 2x+3y+z=-3 \\ 2x+y+3z=-1 \end{cases}$; $\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 27+2+4-6-12-3 = 12$

1) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -8 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -72-2-3+3+8+18 = -48 \qquad x = -\frac{48}{12} = -4$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -8 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -27-16-2+6+3+48 = 12 \qquad y = \frac{12}{12} = 1$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9-12-16+48+9+4 = 24 \qquad z = \frac{24}{12} = 2$

2) $A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8$; $A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1) = -4$; $A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$; $A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1) = -5$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7$; $A_{23} = (-1)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$; $A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $A_{32} = (-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -5 & 7 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -5/12 & -1/12 \\ -1/3 & 7/12 & -1/12 \\ -1/3 & 1/12 & 5/12 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2/3 & -5/12 & -1/12 \\ -1/3 & 7/12 & -1/12 \\ -1/3 & 1/12 & 5/12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16/3 + 5/4 + 1/12 \\ 8/3 - 7/4 + 1/12 \\ 8/3 - 1/4 - 5/12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ Ответ: $(-4; 1; 2)$

2.2.26. $\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases}$, $\Delta A = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = a^3b+2b-3ab = a^3b+2b-4ab+ab = ab(a^2-4)+b(2+a) = ab(a-2)(a+2)+b(a+2) = (a+2)(a^2b-2ab+b) = b(a+2)(a^2-2a+1) = b(a+2)(a-1)^2$

Если $b=0$ или $a=-2$ или $a=1$, то по ф-ам Крамера и с пом. обр. матр. сист. решить нельзя.

1) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = a^2b+b^2+b-ab-ab^2-b = ab(a-1) - b^2(a-1) = (a-1)(ab-b^2) = (a-1)(a-b)b \qquad x = \frac{b(a-1)(a-b)}{b(a+2)(a-1)^2} = \frac{a-b}{(a+2)(a-1)}$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2b+1+1-b-a-a = a^2b-b+2-2a = b(a^2-1)-2(a-1) = b(a-1)(a+1)-2(a-1) = (a-1)(ab+b-2) \qquad y = \frac{(a-1)(ab+b-2)}{b(a+2)(a-1)^2} = \frac{ab+b-2}{b(a+2)(a-1)}$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = a^2b+b+b^2-ab-b^2a-b = b(a-1)(a-b) \qquad z = \frac{b(a-1)(a-b)}{b(a+2)(a-1)^2} = \frac{a-b}{(a+2)(a-1)}$

2) $A_{11}=\begin{vmatrix} ab & 1 \\ b & a \end{vmatrix}=a^2b-b$; $A_{12}=(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}=1-a$; $A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & ab \\ 1 & b \end{vmatrix}=b-ab$; $A_{21}=(-1)\begin{vmatrix} b & 1 \\ b & a \end{vmatrix}=b-ab$

$A_{22}=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}=a^2-1$; $A_{23}=(-1)\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & b \end{vmatrix}=b-ab$; $A_{31}=\begin{vmatrix} b & 1 \\ ab & 1 \end{vmatrix}=b-ab$; $A_{32}=(-1)\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1-a$; $A_{33}=\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & ab \end{vmatrix}=a^2b-b$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} a^2b-b & 1-a & b-ab \\ b-ab & a^2-1 & b-ab \\ b-ab & 1-a & a^2b-b \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} a^2b-b & b-ab & b-ab \\ 1-a & a^2-1 & 1-a \\ b-ab & b-ab & a^2b-b \end{pmatrix};\quad A^{-1}=\frac{1}{b(a-1)^2(a+2)}\begin{pmatrix} b(a-1)(a+1) & -b(a-1) & -b(a-1) \\ -(a-1) & (a-1)(a+1) & -(a-1) \\ -b(a-1) & -b(a-1) & b(a-1)(a+1) \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{b(a-1)(a+2)}\cdot\begin{pmatrix} b(a+1) & -b & -b \\ -1 & a+1 & -1 \\ -b & -b & b(a+1) \end{pmatrix};\quad X=\frac{1}{b(a-1)(a+2)}\cdot\begin{pmatrix} b(a+1) & -b & -b \\ -1 & a+1 & -1 \\ -b & -b & b(a+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{b(a-1)(a+2)}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} ba+b-b^2-b \\ -1+ab+b-1 \\ -b-b^2+ab+b \end{pmatrix}=\frac{1}{b(a-1)(a+2)}\cdot\begin{pmatrix} b(a-b) \\ ab+b-2 \\ b(a-b) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a-b)/((a-1)(a+2)) \\ (ab+b-2)/(b(a-1)(a+2)) \\ (a-b)/((a-1)(a+2)) \end{pmatrix}$$

Ответ: $\left(\frac{a-b}{(a-1)(a+2)};\ \frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)};\ \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}\right)$.

2.2.27. $\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3+8x_4=0 \\ x_1+3x_2-6x_3+2x_4=0 \\ 3x_1-2x_2+2x_3-2x_4=0 \\ 2x_1-x_2+2x_3=0 \end{cases}$; $\Delta A=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 3 & -6 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & -6 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}-$

$-2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}=-2\cdot(12+48-16-96-4+24)-1\cdot(24+16+24+144-8+8)-2\cdot(-12-16+6-72+8+2)=64-208+168=24$

1) $\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0+0+0+0=0$; $\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & -6 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0+0+0+0=0$; $\Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0+0+0+0=0$

$\Delta_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -6 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0+0+0+0=0$; $x_1=\frac{0}{24}=0$ $x_3=\frac{0}{24}=0$ $x_2=\frac{0}{24}=0$ $x_4=\frac{0}{24}=0$

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-8-12+4+12=-4$ $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-(12+24-8+4)=-32$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-6-12+8-2=-12$ $A_{14}=(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-(-4+18+12-24+2+(8))=14$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-(-32+8+16+4)=4$ $A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}=48-16-32+8=8$

$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-(-24-4+32-4)=0$ $A_{24}=(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-8-12+4+16+4-6=-2$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 3 & -6 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=48-8-48-4=-12$ $A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & -6 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-(16+16+96-8)=-120$

$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-8+4-48+4=-48$ $A_{34}=(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-(12-4-12-24-12-2)=42$

$A_{41}=(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 3 & -6 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-(12+48-16-96-4+24)=32$ $A_{42}=(-1)^{4+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & -6 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}=24+16+24+144-8+8=208$

$A_{43}=(-1)^{4+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}=-(-12-16+6-72+8+2)=84$ $A_{44}=(-1)^{4+4}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -6 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}=12-8-18-36-2-24=-76$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} -4 & -32 & -12 & 14 \\ 4 & 8 & 0 & -2 \\ -12 & -120 & -48 & 42 \\ 32 & 208 & 84 & -76 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} -4 & 4 & -12 & 32 \\ -32 & 8 & -120 & 208 \\ -12 & 0 & -48 & 84 \\ 14 & -2 & 42 & -76 \end{pmatrix}\quad A^{-1}=\frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix} -4 & 4 & -12 & 32 \\ -32 & 8 & -120 & 208 \\ -12 & 0 & -48 & 84 \\ 14 & -2 & 42 & -76 \end{pmatrix}\quad X=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} -4 & 4 & -12 & 32 \\ -32 & 8 & -120 & 208 \\ -12 & 0 & -48 & 84 \\ 14 & -2 & 42 & -76 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $(0; 0; 0; 0)$

Мошенко Павел, ИКНИТО, ИВТ, 1.2 1

СЛАУ 2 (продолжение)

2.2.24. 1)

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0&1&4&8\\0&3&-6&2\\0&-2&2&-2\\0&-1&2&0\end{vmatrix}=0\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}2&0&4&8\\1&0&-6&2\\3&0&2&-2\\2&0&2&0\end{vmatrix}=0\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}2&1&0&8\\1&3&0&2\\3&-2&0&-2\\2&-1&0&0\end{vmatrix}=0\quad \Delta_4=\begin{vmatrix}2&1&4&0\\1&2&-6&0\\3&-2&2&0\\2&-1&2&0\end{vmatrix}=0$$

Ответ: (0; 0; 0; 0).

2.2.28.
$$\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3+4x_4=-13\\-x_1+x_3+2x_4=-1\\3x_1+4x_2+5x_3=11\\5x_1+6x_2+7x_3-2x_4=19\end{cases}$$

$$\Delta A=\begin{vmatrix}1&2&-3&4\\-1&0&1&2\\3&4&5&0\\5&6&7&-2\end{vmatrix}\begin{matrix}\mathrm{I}+\mathrm{II}\\ \\ \mathrm{III}+3\mathrm{II}\\ \mathrm{IV}+5\mathrm{II}\end{matrix}=\begin{vmatrix}0&2&-2&6\\-1&0&1&2\\0&4&8&6\\0&6&12&8\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{2+1}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}2&-2&6\\4&8&6\\6&12&8\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \mathrm{II}-2\mathrm{I}\\ \mathrm{III}-3\mathrm{I}\end{matrix}=\begin{vmatrix}2&-2&6\\0&12&-6\\0&18&-10\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}12&-6\\18&-10\end{vmatrix}=-24$$

1)
$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-13&2&-3&4\\-1&0&1&2\\11&4&5&0\\19&6&7&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-13&2&-16&-22\\-1&0&0&0\\11&4&16&22\\19&6&26&36\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}2&-16&-22\\4&16&22\\6&26&36\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&0\\4&48&66\\6&74&102\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}48&66\\74&102\end{vmatrix}=24$$

($\mathrm{III}+\mathrm{I}$, $\mathrm{IV}+2\mathrm{I}$; $\mathrm{II}+8\mathrm{I}$, $\mathrm{III}+11\mathrm{I}$)

$$x_1=\frac{24}{-24}=-1$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&-13&-3&4\\-1&-1&1&2\\3&11&5&0\\5&19&7&-2\end{vmatrix}\begin{matrix}\mathrm{I}+\mathrm{II}\\ \\ \mathrm{III}+3\mathrm{II}\\ \mathrm{IV}+5\mathrm{II}\end{matrix}=\begin{vmatrix}0&-14&-2&6\\-1&-1&1&2\\0&8&8&6\\0&14&12&8\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}-14&-2&6\\8&8&6\\14&12&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-2&0\\-48&8&20\\-70&12&44\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix}-48&20\\-70&44\end{vmatrix}=-24$$

($\mathrm{I}-7\mathrm{II}$, $\mathrm{III}+3\mathrm{I}$)

$$x_2=\frac{-24}{-24}=1$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&2&-13&4\\-1&0&-1&2\\3&4&11&0\\5&6&19&-2\end{vmatrix}\begin{matrix}\mathrm{I}-2\mathrm{II}\\ \\ \\ \mathrm{IV}+\mathrm{II}\end{matrix}=\begin{vmatrix}3&2&-11&0\\-1&0&-1&2\\3&4&11&0\\4&6&18&0\end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix}3&2&-11\\3&4&11\\4&6&18\end{vmatrix}\begin{matrix}\mathrm{I}+\mathrm{II}\\ \\ \mathrm{III}-\mathrm{II}\end{matrix}=2\cdot\begin{vmatrix}6&6&0\\3&4&11\\1&2&7\end{vmatrix}=2\cdot(234-258)=-48\quad x_3=\frac{-48}{-24}=2$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}1&2&-3&-13\\-1&0&1&-1\\3&4&5&11\\5&6&7&19\end{vmatrix}\begin{matrix}\mathrm{I}+\mathrm{II}\\ \\ \mathrm{III}+3\mathrm{II}\\ \mathrm{IV}+5\mathrm{II}\end{matrix}=\begin{vmatrix}0&2&-2&-14\\-1&0&1&-1\\0&4&8&8\\0&6&12&14\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-2&-14\\4&8&8\\6&12&14\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&0\\4&12&36\\6&18&56\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}12&36\\18&56\end{vmatrix}=48\quad x_4=\frac{48}{-24}=-2$$

($\mathrm{II}+\mathrm{I}$, $\mathrm{III}+7\mathrm{I}$)

2)
$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}0&1&2\\4&5&0\\6&7&-2\end{vmatrix}=4\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-1&1&2\\3&5&0\\5&7&-2\end{vmatrix}=-8\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-1&0&2\\3&4&0\\5&6&-2\end{vmatrix}=4\quad A_{14}=(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}-1&0&1\\3&4&5\\5&6&7\end{vmatrix}=0$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2&-3&4\\4&5&0\\6&7&-2\end{vmatrix}=52\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1&-3&4\\3&5&0\\5&7&-2\end{vmatrix}=-44\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1&2&4\\3&4&0\\5&6&-2\end{vmatrix}=4\quad A_{24}=(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix}1&2&-3\\3&4&5\\5&6&7\end{vmatrix}=12$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}2&-3&4\\0&1&2\\6&7&-2\end{vmatrix}=-92\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1&-3&4\\-1&1&2\\5&7&-2\end{vmatrix}=88\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1&2&4\\-1&0&2\\5&6&-2\end{vmatrix}=-20\quad A_{34}=(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix}1&2&-3\\-1&0&1\\5&6&7\end{vmatrix}=-36$$

$$A_{41}=(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix}2&-3&4\\0&1&2\\4&5&0\end{vmatrix}=60\quad A_{42}=(-1)^{4+2}\cdot\begin{vmatrix}1&-3&4\\-1&1&2\\3&5&0\end{vmatrix}=-60\quad A_{43}=(-1)^{4+3}\cdot\begin{vmatrix}1&2&4\\-1&0&2\\3&4&0\end{vmatrix}=12\quad A_{44}=(-1)^{4+4}\cdot\begin{vmatrix}1&2&-3\\-1&0&1\\3&4&5\end{vmatrix}=24$$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}4&-8&4&0\\52&-44&4&12\\-92&88&-20&-36\\60&-60&12&24\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}4&52&-92&60\\-8&-44&88&-60\\4&4&-20&12\\0&12&-36&24\end{pmatrix}\quad A^{-1}=\frac{1}{-24}\cdot\begin{pmatrix}4&52&-92&60\\-8&-44&88&-60\\4&4&-20&12\\0&12&-36&24\end{pmatrix}\quad X=\frac{1}{-24}\cdot\begin{pmatrix}4&52&-92&60\\-8&-44&88&-60\\4&4&-20&12\\0&12&-36&24\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-13\\-1\\11\\19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

Ответ: (-1; 1; 2; -2)

2.2.29.
$$\begin{cases}-x_1+4x_2+5x_3-4x_4=-15\\x_1+2x_2-2x_3+4x_4=3\\2x_1+6x_2+x_3=-6\\3x_1+x_3+2x_4=11\end{cases}$$

$$\Delta A=\begin{vmatrix}-1&4&5&-4\\1&2&-2&4\\2&6&1&0\\3&0&1&2\end{vmatrix}\begin{matrix}\mathrm{I}+\mathrm{II}\\ \\ \mathrm{III}-2\mathrm{II}\\ \mathrm{IV}-3\mathrm{II}\end{matrix}=\begin{vmatrix}0&6&3&0\\1&2&-2&4\\0&2&5&-8\\0&-6&7&-10\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}6&3&0\\2&5&-8\\-6&7&-10\end{vmatrix}=-240$$

1)
$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-15&4&5&-4\\3&2&-2&4\\-6&6&1&0\\11&0&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}15&-26&5&-4\\-9&14&-2&4\\0&0&1&0\\17&-6&1&2\end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}15&-26&-4\\-9&14&4\\17&-6&2\end{vmatrix}=420-216-1768+952-468+360=-720$$

($\mathrm{I}+6\mathrm{III}$, $\mathrm{II}-6\mathrm{III}$)

$$x_1=\frac{-720}{-240}=3$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}-1&-15&5&-4\\1&3&-2&4\\2&-6&1&0\\3&11&1&2\end{vmatrix}\begin{matrix}I+II\\ \\ III-2II\\ IV-3II\end{matrix}=\begin{vmatrix}0&-12&3&0\\1&3&-2&4\\0&-12&5&-8\\0&2&7&-10\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}-12&3&0\\-12&5&-8\\2&7&-10\end{vmatrix}=-(600-48-360-672)=480$$

$$x_2=\frac{480}{-240}=-2$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}-1&4&-15&-4\\1&2&3&4\\2&6&-6&0\\3&0&11&2\end{vmatrix}\begin{matrix}I+II\\ \\ III-2II\\ IV-3II\end{matrix}=\begin{vmatrix}0&6&-12&0\\1&2&3&4\\0&2&-12&-8\\0&-6&2&-10\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}6&-12&0\\2&-12&-8\\-6&2&-10\end{vmatrix}=-(720-576+96-240)=0$$

$$x_3=\frac{0}{-240}=0$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}-1&4&5&-15\\1&2&-2&3\\2&6&1&-6\\3&0&1&11\end{vmatrix}\begin{matrix}I+II\\ \\ III-2II\\ IV-3II\end{matrix}=\begin{vmatrix}0&6&3&-12\\1&2&-2&3\\0&2&5&-12\\0&-6&7&2\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}6&3&-12\\2&5&-12\\-6&7&2\end{vmatrix}=-(60-168+216-360+504-12)=-240$$

$$x_4=\frac{-240}{-240}=1$$

2) $A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}2&-2&4\\6&1&0\\0&1&2\end{vmatrix}=52$ $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1&-2&4\\2&1&0\\3&1&2\end{vmatrix}=-6$ $A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1&2&4\\2&6&0\\3&0&2\end{vmatrix}=-68$ $A_{14}=(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix}1&2&-2\\2&6&1\\3&0&1\end{vmatrix}=-44$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}4&5&-4\\6&1&0\\0&1&2\end{vmatrix}=76$ $A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}-1&5&-4\\2&1&0\\3&1&2\end{vmatrix}=-18$ $A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}-1&4&-4\\2&6&0\\3&0&2\end{vmatrix}=-44$ $A_{24}=(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix}-1&4&5\\2&6&1\\3&0&1\end{vmatrix}=-92$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}4&5&-4\\2&-2&4\\0&1&2\end{vmatrix}=-60$ $A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}-1&5&-4\\1&-2&4\\3&1&2\end{vmatrix}=-30$ $A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}-1&4&-4\\1&2&4\\3&0&2\end{vmatrix}=60$ $A_{34}=(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix}-1&4&5\\1&2&-2\\3&0&1\end{vmatrix}=60$

$A_{41}=(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix}4&5&-4\\2&-2&4\\6&1&0\end{vmatrix}=-48$ $A_{42}=(-1)^{4+2}\cdot\begin{vmatrix}-1&5&-4\\1&-2&4\\2&1&0\end{vmatrix}=24$ $A_{43}=(-1)^{4+3}\cdot\begin{vmatrix}-1&4&-4\\1&2&4\\2&6&0\end{vmatrix}=-48$ $A_{44}=(-1)^{4+4}\cdot\begin{vmatrix}-1&4&5\\1&2&-2\\2&6&1\end{vmatrix}=-24$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}52&-6&-68&-44\\76&-18&-44&-92\\-60&-30&60&60\\-48&24&-48&-24\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}52&76&-60&-48\\-6&-18&-30&24\\-68&-44&60&-48\\-44&-92&60&-24\end{pmatrix}\quad A^{-1}=\frac{1}{-240}\begin{pmatrix}52&76&-60&-48\\-6&-18&-30&24\\-68&-44&60&-48\\-44&-92&60&-24\end{pmatrix}\quad X=\frac{1}{-240}\begin{pmatrix}52&76&-60&-48\\-6&-18&-30&24\\-68&-44&60&-48\\-44&-92&60&-24\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-15\\3\\-6\\11\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{-1}{240}\cdot\begin{pmatrix}-780+228+360-528\\90-54+180+264\\1020-132-360-528\\660-276-360-264\end{pmatrix}=\frac{-1}{240}\begin{pmatrix}-720\\480\\0\\-240\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

Ответ: $(2; -2; 0; 1)$.

2.2.30. $f(x)=ax^3+bx^2+c$, $f(-1)=3$; $f(1)=1$; $f(2)=-15$

$$\begin{cases}-a+b+c=3\\a+b+c=1\\8a+4b+c=-15\end{cases}\quad \Delta A=\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&1&1\\8&4&1\end{vmatrix}\begin{matrix}\\II+I\\III+8I\end{matrix}=\begin{vmatrix}-1&1&1\\0&2&2\\0&12&9\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}(-1)\begin{vmatrix}2&2\\12&9\end{vmatrix}=6\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}3&1&1\\1&1&1\\-15&4&1\end{vmatrix}=-6\quad a=\frac{-6}{6}=-1$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}-1&3&1\\1&1&1\\8&-15&1\end{vmatrix}=-18\quad b=\frac{-18}{6}=-3\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}-1&1&3\\1&1&1\\8&4&-15\end{vmatrix}=30\quad c=\frac{30}{6}=5$$

Ответ: $a=-1$; $b=-3$; $c=5$.

2.2.31. $f(x)=a\cdot\log_3 x+bx+c$, $f(1)=5$; $f(3)=8$; $f(9)=19$

$$\begin{cases}b+c=5\\a+3b+c=8\\2a+9b+c=19\end{cases}\quad \Delta A=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&3&1\\2&9&1\end{vmatrix}=4\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}5&1&1\\8&3&1\\19&9&1\end{vmatrix}=-4\quad a=\frac{-4}{4}=-1\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}0&5&1\\1&8&1\\2&19&1\end{vmatrix}=8$$

$$b=\frac{8}{4}=2\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}0&1&5\\1&3&8\\2&9&19\end{vmatrix}=12\quad c=\frac{12}{4}=3$$

Ответ: $a=-1$; $b=8$; $c=3$

СЛАУ 3

2.3.26. $\begin{cases}2x_1-x_2=0\\-4x_1+2x_2=0\end{cases}$ $\begin{pmatrix}2&-1\\-4&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\II+2I\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1\\0&0\end{pmatrix}$ $r(A)=1<n=2\Rightarrow$ сист. совм. и неопр.
$n-r(A)=2-1=1$

$M_1=|2|=2\neq 0\Rightarrow x_1$ – главн.; x_2 – своб.; $\exists\, x_2=t$; $2x_1-t=0$; $x_1=\frac{t}{2}$

Ответ: $\left(\frac{t}{2}; t\right)$ – общ., $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ – частн., $\left\{\left(\frac{1}{2}; 1\right)\right\}$ – ФСР

3

2.3.27. $\begin{cases} x-\sqrt{3}y=0 \\ \sqrt{3}x-3y=0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}_{II-\sqrt{3}I} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r(A)=1<n=2 \Rightarrow$ сист. совм. и неопр.
$n-r(A)=2-1=1$

$M_1=|1|=1\neq 0 \Rightarrow x$ – главн., y – своб., $\exists\, y=t$; $x-\sqrt{3}t=0$; $x=\sqrt{3}t$

Ответ: $(\sqrt{3}t;\ t)$ – общ., $(\sqrt{3};\ 1)$ – частн., $\{(\sqrt{3};1)\}$ – ФСР

2.3.28. $\begin{cases} 3x+4y=0 \\ 4x-3y=0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}_{3II-4I} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -25 \end{pmatrix}$ $2-1=1$
$r(A)=1<2=n \Rightarrow$ сист. совм. и неопр.

$M_1=|3|=3\neq 0 \Rightarrow x_1$ – главн., y – своб., $\exists\, y=t$ $\begin{cases} 3x-4t=0 \\ -25t=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x-4\cdot 0=0 \\ t=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ t=0 \end{cases}$
Ответ: $(0;0)$ – общ. и частн., $\{(0;0)\}$ – ФСР.

2.3.29. $\begin{cases} x_1+2x_2=0 \\ -\sqrt{3}x_1-\sqrt{12}x_2=0 \\ 2x_1+4x_2=0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{12} \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ II+\sqrt{3}I \\ III-2I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r(A)=1<2=n \Rightarrow$ сист. совм. и неопред.
$n-r(A)=2-1=1$
$M_1=|1|=1\neq 0 \Rightarrow x_1$ – главн., x_2 – своб., $\exists\, x_2=t$, $x_1+2t=0$; $x_1=2t$
Ответ: $(2t;\ t)$ – общ., $(2;\ 1)$ – частн., $\{(2;1)\}$ – ФСР

2.3.30. $\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ 4x-2y-2z=0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}_{II-2I} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r(A)=1<3=n \Rightarrow$ сист. совм. и неопр.
$n-r(A)=3-1=2$

$M_1=|2|=2\neq 0 \Rightarrow x$ – главн.; y, z – своб.: $\exists\, y=t_1,\ z=t_2$, $2x-t_1-t_2=0$; $2x=t_1+t_2$;
$x=(t_1+t_2)/2$ $\left(\frac{t_1}{2}+\frac{t_2}{2};\ t_1\cdot 1+t_2\cdot 0;\ t_1\cdot 0+t_2\right)=t_1\left(\frac{1}{2};1;0\right)+t_2\left(\frac{1}{2};0;1\right)$
Ответ: $\left(\frac{t_1+t_2}{2};\ t_1;\ t_2\right)$ – общ., $\left(\frac{1}{2};\ 1;\ 0\right)$ – частн., $\left\{\left(\frac{1}{2};1;0\right);\left(\frac{1}{2};0;1\right)\right\}$ – ФСР.

2.3.31. $\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{I-2II} \sim \begin{pmatrix} 0 & -5 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \end{pmatrix}$ $r(A)=2<3=n \Rightarrow$ сист. совм. и неопр.
$n-r=3-2=1$
$M_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}=-5\neq 0 \Rightarrow x, y$ – главн., z – своб., $\exists\, z=t$, $\begin{cases} x+2y+3t=0 \\ -5y-7t=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3t+\frac{14}{5}t \\ y=-\frac{7}{5}t \end{cases}$
$\begin{cases} x=-t/5 \\ y=-\frac{7}{5}t \end{cases}$ Ответ: $\left(-\frac{t}{5};\ -\frac{7}{5}t;\ t\right)$ – общ., $\left(-\frac{1}{5};\ -\frac{7}{5};\ 1\right)$ – частн., $\left\{\left(-\frac{1}{5};\ -\frac{7}{5};\ 1\right)\right\}$ – ФСР.

3.3.32. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+5x_2+3x_3=0 \\ 3x_1+4x_2+2x_3=0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ II\cdot 3-2I \\ III-I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{11III-2II} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ $r(A)=n=3 \Rightarrow$ сист. совм. и опред.

$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=0 \\ 11x_2+8x_3=0 \\ -5x_3=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases}$ Ответ: $(0;0;0)$ – общ. и частн. решен.

2.3.33. $\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ 5x_1-3x_2-8x_3=0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & -8 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ II-2I \\ III-5I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}_{III-II} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r(A)=2<3=n \Rightarrow$ сист. совм. и неопр.
$n-r=1$
$M_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}=7\neq 0 \Rightarrow x_1, x_2$ – главн., x_3 – своб., $\exists\, x_3=t$, $\begin{cases} x_1-2x_2-3t=0 \\ 7x_2+7t=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=t \\ x_2=-t \end{cases}$
Ответ: $(t;\ -t;\ t)$ – общ., $(0;0;0)$ – частн., $\{(1;-1;1)\}$ – ФСР

2.3.34. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=0 \\ -x_1+2x_2-3x_3=0 \\ 2x_1-4x_2+6x_3=0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ II+I \\ III-2I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r(A)=1<3=n \Rightarrow$ сист. совм. и неопр.
$n-r=2$
$M_1=|1|=1\neq 0 \Rightarrow x_1$ – главн., x_2, x_3 – своб. $\exists\, x_2=t_1,\ x_3=t_2$, $x_1-2t_1+3t_2=0$; $x_1=2t_1-3t_2$
Ответ: $(2t_1-3t_2;\ t_1;\ t_2)$ – общ., $(2;1;0)$ – частн., $\{(2;1;0)\ (-3;0;1)\}$ – ФСР.

2.3.35. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_1+3x_2-2x_3=0 \\ x_1+8x_2-5x_3=0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 8 & -5 \end{pmatrix}\begin{matrix} I-III\cdot 2 \\ II-III \\ \\ IV-III \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{matrix} I+IV \\ II-IV \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4

$r(A)=2<3=n \Rightarrow$ сист. совм. и неопред.; $n-r=1$

$M_2=\begin{vmatrix}1&3\\0&5\end{vmatrix}=5\neq0 \Rightarrow x_1,x_2$ — главн., x_3 — своб., $\exists\, x_3=t$ $\begin{cases}x_1+3x_2-2t=0\\5x_2-2t=0\end{cases}$

$\begin{cases}x_1+\frac{9t}{5}-2t=0\\x_2=3t/5\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=t/5\\x_2=3t/5\end{cases}$ Ответ: $(t/5;3t/5;t)$ — общ., $(1/5;3/5;1)$ — частн., $\{(\frac{1}{5};\frac{3}{5};1)\}$ — ФСР.

2.3.36. $\begin{cases}x_1-x_2+x_5=0\\x_2-x_4+x_6=0\\x_1-x_2+x_5-x_6=0\\x_2-x_3+x_6=0\\x_1-x_4+x_5=0\end{cases}$ $\begin{pmatrix}1&0&-1&0&1&0\\0&1&0&-1&0&1\\1&-1&0&0&1&-1\\0&1&-1&0&0&1\\1&0&0&-1&1&0\end{pmatrix}\begin{matrix}I-V\\II-V\\III-V\\ \\ \end{matrix}\begin{pmatrix}0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&-1&0&0\\0&-1&0&1&0&-1\\0&1&-1&0&0&1\\1&0&0&-1&1&0\end{pmatrix}\begin{matrix}I+II\\ \\III+IV\\ \\ \end{matrix}\sim$

$\sim\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&1&-1&0&0\\0&0&-1&1&0&0\\0&1&-1&0&0&1\\1&0&0&-1&1&0\end{pmatrix}II+III\sim\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&-1&1&0&0\\0&1&-1&0&0&1\\1&0&0&-1&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-1&1&0\\0&1&-1&0&0&1\\0&0&-1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ $r(A)=3<6=n \Rightarrow$ сист. совм. и неопред.; $n-r=3$

$M_3=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&-1\end{vmatrix}=-1\neq0 \Rightarrow x_1,x_2,x_3$ — главн. x_4,x_5,x_6 — своб. $\exists\, x_4=t_1,\ x_5=t_2,\ x_6=t_3$

$\begin{cases}x_1-t_1+t_2=0\\x_2-x_3+t_3=0\\x_3+t_1=0\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=t_1-t_2\\x_2=t_1-t_3\\x_3=t_1\end{cases}$ $(t_1-t_2+t_3\cdot0;\ t_1+t_2-t_3;\ t_1+t_2\cdot0+t_3\cdot0;\ t_1+t_2\cdot0+t_3\cdot0;$

$t_1\cdot0+t_2+t_3\cdot0;\ t_1\cdot0+t_2\cdot0+t_3)=t_1(1;1;1;1;0;0)+t_2(-1;0;0;0;1;0)+t_3(0;-1;0;0;0;1)$

Ответ: $(t_1-t_2;t_1-t_3;t_1;t_1;t_2;t_3)$ — общ., $(0;0;0;0;0;0)$ — частн., $\{(1;1;1;1;0;0)(-1;0;0;0;1;0)(0;-1;0;0;0;1)\}$ — ФСР.

2.3.37. $\begin{cases}x_1+x_2-x_3+2x_4=0\\x_1+3x_2-3x_3+4x_4=0\\3x_1+2x_2+x_3=0\\x_1+3x_2-5x_4=0\end{cases}$ $\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\1&3&-3&4\\3&2&1&0\\1&3&0&-5\end{pmatrix}\begin{matrix}I-IV\\II-IV\\III-3IV\\ \\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}0&-2&-1&7\\0&0&-3&9\\0&-7&1&15\\1&3&0&-5\end{pmatrix}2III-7I\sim\begin{pmatrix}0&-2&-1&7\\0&0&-3&9\\0&0&9&-11\\1&3&0&-5\end{pmatrix}III+3II\sim$

$\sim\begin{pmatrix}0&-2&-1&7\\0&0&-3&9\\0&0&0&16\\1&3&0&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&0&5\\0&-2&-1&7\\0&0&-3&9\\0&0&0&16\end{pmatrix}$ $r(A)=n=4 \Rightarrow$ сист. совм. и опред. $\begin{cases}x_1+3x_2+5x_4=0\\-2x_2-x_3+7x_4=0\\-3x_3+9x_4=0\\16x_4=0\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3=0\\x_4=0\end{cases}$ Ответ: $(0;0;0;0)$ — общ. и частн. реш.

2.3.38. $\begin{cases}2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0\\3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0\\4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0\end{cases}$ $\begin{pmatrix}2&-4&5&3\\3&-6&4&2\\4&-8&17&11\end{pmatrix}\begin{matrix}2II-3I\\III-2I\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}2&-4&5&3\\0&0&-7&-5\\0&0&7&5\end{pmatrix}III+II\sim\begin{pmatrix}2&-4&5&3\\0&0&-7&-5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$r(A)=2<4=n \Rightarrow$ сист. совм. и неопр. $n-r=2$ $M_2=\begin{vmatrix}5&3\\-7&-5\end{vmatrix}=-4\neq0 \Rightarrow x_3,x_4$ — главн., x_1,x_2 — своб., $\exists\, x_1=t_1$, $\exists\, x_2=t_2$

$\begin{cases}2t_1-4t_2+5x_3+3x_4=0\\-7x_3-5x_4=0\end{cases}$ $\begin{cases}2t_1-4t_2-\frac{25}{7}x_4+3x_4=0\\x_3=-5x_4/7\end{cases}$ $\begin{cases}2(t_1-2t_2)=\frac{25}{7}x_4-\frac{21}{7}x_4\\x_3=-\frac{5}{7}x_4\end{cases}$

$\begin{cases}2(t_1-2t_2)=\frac{4x_4}{7}\\x_3=-\frac{5}{7}x_4\end{cases}$ $\begin{cases}7(t_1-2t_2)/2=x_4\\x_3=-\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{t_1-2t_2}{}\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=\frac{7}{2}t_1-7t_2\\x_3=-\frac{5}{2}\cdot\frac{t_1-2t_2}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=\frac{7}{2}t_1-7t_2\\x_3=-\frac{5}{4}t_1+\frac{10}{4}t_2\end{cases}$

$\begin{cases}x_4=\frac{7}{2}t_1-7t_2\\x_3=\frac{5}{2}t_2-\frac{5}{4}t_1\end{cases}$ Ответ: $(t_1;t_2;\frac{5}{2}t_2-\frac{5}{4}t_1;\frac{7}{2}t_1-7t_2)$ — общ., $(1;0;-\frac{5}{4};\frac{7}{2})$ — частн.,

$(t_1+0\cdot t_2;t_1\cdot0+t_2;\frac{5}{2}t_2-\frac{5}{4}t_1;\frac{7}{2}t_1-7t_2)$ $\{(1;0;-\frac{5}{4};\frac{7}{2});(0;1;\frac{5}{2};-7)\}$

2.3.39 $\begin{cases}5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5=0\\2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2x_5=0\\5x_1+9x_2-3x_3+x_4+6x_5=0\\7x_1+9x_2-3x_3+5x_4+6x_5=0\end{cases}$ $\begin{pmatrix}5&6&-2&7&4\\2&3&-1&4&2\\5&9&-3&1&6\\7&9&-3&5&6\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\III-I\\2IV-7II\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}5&6&-2&7&4\\2&3&-1&4&2\\0&3&-1&-6&2\\0&-3&1&-18&-2\end{pmatrix}\begin{matrix}2I-5II\\ \\ \\IV+III\end{matrix}\sim$

$\sim\begin{pmatrix}0&-3&1&-6&-2\\2&3&-1&4&2\\0&3&-1&-6&2\\0&0&0&-24&0\end{pmatrix}\begin{matrix}I-III\\II-III\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\2&0&0&10&0\\0&3&-1&-6&2\\0&0&0&-24&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ /2\\ \\ /(-24)\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&5&0\\0&3&-1&-6&2\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ $r(A)=3<5=n \Rightarrow$ сист. совм. и неопред. $n-r=2$ $M_3=\begin{vmatrix}1&0&5\\0&3&-6\\0&0&1\end{vmatrix}=3\neq0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1,x_2,x_4$ — главн., x_3,x_5 — своб., $\exists\, x_3=t_1$, $x_5=t_2$

$\begin{cases}x_1+5t_1=0\\3x_2-t_1-6x_4+2t_2=0\\x_4=0\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=-5t_1\\3x_2=t_1-2t_2\\x_4=0\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=-5t_1\\x_2=(t_1-2t_2)/3\\x_4=0\end{cases}$

Ответ: $(-5t_1;\frac{t_1}{3}-\frac{2}{3}t_2;t_1;0;t_2)$ — общ., $(-5;\frac{1}{3};1;0;0)$ — частн.,

$\{(-5;\frac{1}{3};1;0;0)(0;-\frac{2}{3};0;0;1)\}$ — ФСР.

2.3.40. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{I}-2\mathrm{III} \\ \mathrm{II}-4\mathrm{III} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1-2a & -1 \\ 0 & -1-4a & 5 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix} \mathrm{II}+\mathrm{I} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1-2a & -1 \\ 0 & -6a & 4 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & -6a & 4 \\ 0 & 1-2a & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -6a = 0 \\ 1-2a = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0 \\ 1 = 0 \end{cases}$ – ложь $\Rightarrow \left[\begin{matrix} -6a = 0 \\ 1-2a = 0 \end{matrix}\right.$ $\left[\begin{matrix} a = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{matrix}\right.$ Если $a \neq 0$ и $a \neq \frac{1}{2}$, то тогда нельзя привести матрицу к ступенч. виду

1) $a = 0 \Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathrm{II}+4\mathrm{III} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r(A) = 2 < 3 = n$ сист. совм. и неопред.; $n-r = 1$ $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow x_1, x_3$ – главн., x_2 – своб. $\exists x_2 = t$

$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ Ответ: $(0; t; 0)$ – общ., $(0; 1; 0)$ – частн., $\{(0; 1; 0)\}$ – ФСР.

2) $a = \frac{1}{2} \Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $r(A) = n = 3 \Rightarrow$ сист. совм. и опред. $\begin{cases} x_1 + x_2/2 + 2x_3 = 0 \\ -3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -1x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ Ответ: $(0; 0; 0)$ – общ. и частн. реш.

2.3.41 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 - 6x_2 - 4x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - \lambda x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & -4 & -1 \\ 3 & 5 & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{II}-3\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-5\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}-3\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & -3 & 9 \\ 0 & 21 & -9 & 9 \\ 0 & 14 & -\lambda-3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 11\mathrm{III}-21\mathrm{II} \\ 11\mathrm{IV}-14\mathrm{II} \end{matrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -36 & -90 \\ 0 & 0 & -11(\lambda+3)+42 & -60 \end{pmatrix} \mathrm{IV}/2 - 4\mathrm{III}/3 \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -36 & -90 \\ 0 & 0 & \frac{-11(\lambda+3)+42}{2}+42 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{III}/-18 \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{11(3-\lambda)}{2} & 0 \end{pmatrix}$ $\frac{11(3-\lambda)}{2} = 0$ $33 - 11\lambda = 0$ $\lambda = 3$

При $\lambda = 3$ можно привести матрицу к ступенч. виду

$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r(A) = 3 < 4 = n \Rightarrow$ сист. совм. и неопред. $n - r = 1$ $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -22 \neq 0 \Rightarrow x_1, x_2, x_3$ – главн., x_4 – своб. $\exists x_4 = t$

$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2t = 0 \\ 11x_2 - 3x_3 - 9t = 0 \\ -2x_3 - 5t = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 3x_2 - x_3 + 2t \\ 11x_2 = 9t - 7{,}5t \\ x_3 = -5t/2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 2t + 2{,}5t + 3t/22 \\ x_2 = 3t/22 \\ x_3 = -5t/2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 39t/11 \\ x_2 = 3t/22 \\ x_3 = -5t/2 \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{39}{11}t; \frac{3}{22}t; -\frac{5}{2}t; t\right)$ – общ., $\left(\frac{39}{11}; \frac{3}{22}; -\frac{5}{2}; 1\right)$ – частн., $\left\{\left(\frac{39}{11}; \frac{3}{22}; -\frac{5}{2}; 1\right)\right\}$ – ФСР