§ 2. Неопределённый интеграл. Основные методы интегрирования

§ 2.1. Теоретический материал

Метода подстановки (замена переменной)

⇒ Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx$, при этом функции $\varphi'(x)$ и $f(x)$ непрерывны на заданном интервале. Тогда этот интеграл можно упростить с помощью подстановки $t = \varphi(x)$, используя равенство

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt. \qquad (2.1)$$

Эта формула называется формулой *замены переменной* в неопределенном интеграле.

Иногда удобнее делать подстановку не $t = \varphi(x)$, а $x = \psi(t)$, где $\psi(t)$ — функция, имеющая непрерывную производную (т. е. непрерывно дифференцируема). Применяя такую подстановку к интегралу $\int f(x)\,dx$, получим еще одну формулу замены переменной

$$\int f(x)\,dx = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt. \qquad (2.2)$$

Получающиеся после применения той или иной подстановки интегралы должны быть более удобны для интегрирования, чем исходные.

Не существует общего «рецепта», следуя которому можно всегда понять, какую подстановку надо применить к данному интегралу. Однако следует иметь в виду следующие полезные подсказки:

1) если под знаком интеграла стоит сложная функция $f(\varphi(x))$, то, как правило, используется подстановка $t = \varphi(x)$ (к примеру, если в подынтегральном выражении встречается функция $\sin\frac{1}{x}$, то стоит попробовать подстановку $t = \frac{1}{x}$, а если e^{x^2} — то $t = x^2$ и т. д.);

2) если в подынтегральном выражении есть готовый дифференциал функции $\varphi(x)$, т. е. выражение $\varphi'(x)\,dx$, то имеет смысл попробовать подстановку $t = \varphi(x)$. Поэтому целесообразно запомнить следующие формулы для наиболее часто встречающихся дифференциалов:

$\cos x\,dx = d(\sin x)$, $\quad \sin x\,dx = -d(\cos x)$,

$e^x\,dx = d(e^x)$, $\quad x\,dx = \frac{1}{2}d(x^2)$,

$\frac{1}{x}\,dx = d(\ln x)$, $\quad \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2d(\sqrt{x})$,

$\frac{1}{x^2}dx = -d\left(\frac{1}{x}\right)$, $\quad dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$,

$\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = d(\operatorname{tg} x)$, $\quad \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -d(\operatorname{ctg} x)$ и т. д.

В простых случаях введение новой переменной можно (после приобретения определенного навыка) проводить в уме, мысленно обозначив соответствующую функцию через t или какую-либо иную букву: $u, y, z, \ldots$

Интегрирование по частям (метод стрелок)

⇛ Пусть производные функций $u(x)$ и $v(x)$ существуют и непрерывны на заданном интервале. Тогда имеет место равенство

$$\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx. \tag{2.3}$$

Эта формула называется формулой *интегрирования по частям.*

Поскольку $v'(x)\,dx = dv(x)$, $u'(x)\,dx = du(x)$, то формулу (2.3) часто записывают в более компактном виде:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{2.4}$$

Метод интегрирования по частям целесообразно применять в тех случаях, когда получающийся в правой части формулы (2.3) (или формулы (2.4)) интеграл проще исходного либо подобен ему. Этим методом, например, пользуются, когда под знаком интеграла стоит произведение многочлена на одну из функций $\sin x$, $\cos x$, a^x, $\ln x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ и т. д. В частности, интегрирование по частям применяют к интегралам вида $\int x^n \cdot e^x\,dx$, $\int x^n \sin x\,dx$, $\int x^n \cos x\,dx$, $\int x^n \ln x\,dx$, $\int x^n \arcsin x\,dx$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ или подобным.

Также с помощью интегрирования по частям находятся интегралы вида $\int \arcsin x\,dx$, $\int \arccos x\,dx$, $\int \operatorname{arctg} x\,dx$, $\int \operatorname{arcctg} x\,dx$, $\int e^x \cos x\,dx$, $\int e^x \sin x\,dx$ и подобные им.

Более наглядно и просто интегрирование по частям записывается с помощью эквивалентного *метода стрелок*[1]

$$\int f(x) \cdot g(x)\,dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\,dx, \tag{2.5}$$

$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[d, "\int"'] & g(x) \arrow[d, "'"] \\ F(x) \arrow[ur, dashed, dash] & g'(x) \end{tikzcd}$$

[1] Автор С. Н. Федин.

т. е. при интегрировании произведения двух функций под каждой из них рисуется стрелка, при этом на конце одной стрелки $\left(\text{интегральной } \int\downarrow\right)$ пишется первообразная соответствующей функции, а на конце другой $\left(\text{дифференциальной } \downarrow'\right)$ — производная второй функции; тогда в правой части равенства получается произведение функции, стоящей на конце интегральной стрелки, на функцию в начале другой стрелки (эти функции соединены пунктиром в формуле (2.5)) минус интеграл от произведения функций на концах стрелок. Или, более кратко, справа получается: ***конец интегральной стрелки на начало другой минус интеграл от произведения функций на концах стрелок.***

Примеры

8.2.1. Найти интеграл, используя подходящую подстановку:

1) $\int(7x-1)^{23}dx$;

2) $\int x^2\cdot\sin(x^3+1)dx$;

3) $\int\frac{x\,dx}{x^2+1}$.

1) Данный интеграл — почти табличный и поэтому легко вычисляется с помощью свойства 5 интеграла из предыдущего параграфа. Однако такие интегралы можно находить и с помощью замены переменной.

В нашем случае применим подстановку $t=7x-1$. Тогда $dt=7dx$, откуда $dx=\frac{1}{7}dt$. Поэтому

$$\int(7x-1)^{23}dx=\int t^{23}\cdot\frac{1}{7}dt=\frac{1}{7}\int t^{23}dt=\frac{1}{7}\cdot\frac{t^{24}}{24}+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим окончательно:

$$\int(7x-1)^{23}dx=\frac{(7x-1)^{24}}{168}+C.$$

2) Подынтегральное выражение содержит сложную функцию $\sin(x^3+1)$, поэтому стоит попробовать подстановку $t=$ $=x^3+1$. Тогда $dt=d(x^3+1)=3x^2dx$, откуда $x^2dx=\frac{1}{3}dt$. Таким образом,

$$\int x^2\sin(x^3+1)\,dx=\int\sin(x^3+1)\cdot x^2dx=\int\sin t\cdot\frac{1}{3}dt=$$
$$=\frac{1}{3}\int\sin t\,dt=-\frac{1}{3}\cos t+C=-\frac{1}{3}\cos(x^3+1)+C.$$

3) Поскольку $x\,dx=\frac{1}{2}d(x^2)=\frac{1}{2}d(x^2+1)$, а выражение x^2+1 стоит в знаменателе подынтегральной дроби, то целесообразно

сделать замену $t = x^2 + 1$. Тогда

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \int \frac{\frac{1}{2}\,dt}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Мы избавились от знака модуля в последнем выражении, так как $x^2 + 1 > 0$, $\forall x$. ●

Последний из разобранных интегралов является частным случаем интегралов вида $\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)}$ (в числителе подынтегральной дроби здесь стоит производная знаменателя), решаемых с помощью замены $t = f(x)$. Поэтому

$$\boxed{\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C.}$$

8.2.10. Найти интеграл с помощью подстановки, предварительно преобразовав подынтегральное выражение:

1) $\int \frac{x - \sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$; 2) $\int \frac{5x-1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

❍ 1) Представим исходный интеграл в виде разности двух интегралов:

$$\int \frac{x - \sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{x}{x^2} - \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\right)dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx.$$

Первый из двух последних интегралов — табличный, а во втором надо сделать подстановку $t = \frac{1}{x}$. Тогда $dt = -\frac{dx}{x^2}$, откуда $\frac{dx}{x^2} = -dt$. Следовательно,

$$\int \frac{x - \sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx = \ln|x| - \int \sin t \cdot (-dt) = \ln|x| + \int \sin t\,dt =$$
$$= \ln|x| - \cos t + C = \ln|x| - \cos\frac{1}{x} + C.$$

2) Запишем данный интеграл как разность двух интегралов:

$$\int \frac{5x-1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int\left(\frac{5x}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx =$$
$$= 5\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Второй из двух полученных интегралов — табличный, а в первом сделаем подстановку $t = 4 - x^2$. При этом условимся писать все вспомогательные выкладки и обозначения, относящиеся к данной подстановке, в квадратных скобках под соответствующим интегралом. В частности,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left[\begin{array}{l} t = 4-x^2 \Rightarrow dt = -2x\,dx \\ \Rightarrow x\,dx = -\frac{1}{2}dt \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}} =$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t} + C = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{4-x^2} + C.$$

Таким образом,

$$\int \frac{5x-1}{\sqrt{4-x^2}}dx = -5\sqrt{4-x^2} - \arcsin\frac{x}{2} + C. \qquad \bullet$$

8.2.15. Найти интеграл, используя подходящую подстановку $x = \psi(t)$:

1) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$;

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$.

○ 1) Сделаем такую замену $x = \psi(t)$, чтобы подкоренное выражение $1 - x^2$ стало полным квадратом. Подходит, например, подстановка $x = \sin t$ (или $x = \cos t$). Тогда

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}dx}{x^2} = [x = \sin t \Longrightarrow dx = \cos t\,dt] =$$
$$= \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt}{\sin^2 t} = \int \frac{\sqrt{\cos^2 t}\cdot\cos t\,dt}{\sin^2 t} = \int \frac{\cos^2 t\,dt}{\sin^2 t} =$$
$$= \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt = \int\left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt =$$
$$= -\operatorname{ctg} t - t + C.$$

Учитывая, что $t = \arcsin x$, получим окончательно:

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = -\operatorname{ctg}(\arcsin x) - \arcsin x + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C.$$

2) Сделаем замену $x = t^2$, чтобы корни извлекались нацело:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \left[x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt, \quad t = \sqrt{x}\right] = \int \frac{2t\,dt}{t(1+t)} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t+1} = 2\ln|t+1| + C = 2\ln(\sqrt{x}+1) + C. \quad \bullet$$

8.2.20. Найти интеграл, используя интегрирование по частям:

1) $\int x \cdot e^x\,dx$;

2) $\int \ln x\,dx$;

3) $\int x^2 \cos x\,dx$.

○ 1) Проинтегрируем по частям, используя метод стрелок:

$$\int x \cdot e^x\,dx = x \cdot e^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, "'"'] \arrow[dr, dashed] & e^x \arrow[d, "\int"] \\ 1 & e^x \end{tikzcd}$$

Заметим, что если бы мы поменяли порядок стрелок, то в итоге получился бы более сложный интеграл:

$$\int x \cdot e^x\,dx = \frac{x^2}{2} \cdot e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x\,dx.$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, "\int"'] & e^x \arrow[d, "'"] \\ \frac{x^2}{2} \arrow[ur, dashed] & \cdot\, e^x \end{tikzcd}$$

Умение выбирать нужный порядок стрелок (к счастью, здесь возможны только два варианта) приходит с практикой.

2) Для того, чтобы к этому интегралу можно было применить метод стрелок, необходимо иметь произведение двух

функций под знаком интеграла. Для этого домножим подынтегральную функцию на единицу. Тогда

$$\int \ln x\,dx = \int 1 \cdot \ln x\,dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int dx =$$

$$x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= x\ln x - x + C.$$

3) Воспользуемся методом стрелок:

$$\int x^2 \cdot \cos x\,dx = x^2 \cdot \sin x - \int 2x\sin x\,dx.$$

$$2x \cdot \sin x$$

После однократного применения метода стрелок получили более простой интеграл. Тем не менее для его вычисления требуется еще раз применить этот метод:

$$\int 2x \cdot \sin x\,dx = -2x \cdot \cos x - \int 2 \cdot (-\cos x)dx =$$

$$2 \cdot (-\cos x)$$

$$= -2x \cdot \cos x + 2\int \cos x\,dx = -2x \cdot \cos x + 2\sin x + C.$$

Отсюда окончательно

$$\int x^2 \cdot \cos x\,dx = x^2 \cdot \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$ ●

8.2.27. Найти интеграл $\int e^x \cdot \cos x\,dx$.

○ Используем метод стрелок:

$$\int e^x \cdot \cos x\,dx = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x\,dx.$$

$$e^x \cdot \sin x$$

К полученному в правой части равенства интегралу (отметим, что он, в сущности, не проще исходного) снова применим метод стрелок:

$$\int e^x \cdot \sin x\, dx = -e^x \cos x - \int e^x(-\cos x)dx =$$

$$e^x \cdot (-\cos x)$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx.$$

Отсюда

$$\int e^x \cdot \cos x\, dx = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cdot \cos x\, dx\right) =$$

$$= e^x(\sin x + \cos x) - \int e^x \cdot \cos x\, dx.$$

В итоге снова получили исходный интеграл, и может показаться, что решение зашло в тупик. Однако, перенеся этот интеграл в левую часть равенства, получим[1]

$$2\int e^x \cdot \cos x\, dx = e^x(\sin x + \cos x) + C.$$

Теперь окончательно

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + C. \qquad \bullet$$

---

[1] Появление константы C объясняется тем, что фактически все интегральные формулы, в том числе и формула интегрирования по частям, верны с точностью до константы, которую обычно в этих формулах не пишут. Ну а поскольку в данном случае произвольная константа C неявно присутствует в интеграле из левой части равенства, то она должна появиться и в правой части.

При вычислении некоторых интегралов приходится комбинировать подстановку с методом интегрирования по частям.

8.2.30. Найти интеграл:

1) $\int \operatorname{arctg} x\, dx$;

2) $\int \sin\sqrt{x}\, dx$.

○ 1) Сначала воспользуемся методом стрелок:

$$\int 1 \cdot \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2}.$$

$$x \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

К полученному интегралу применим подстановку $t = 1+x^2$:

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

$$\left[t = 1 + x^2 \Rightarrow dt = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}dt\right]$$

Отсюда находим

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

2) В этом интеграле, наоборот, сначала сделаем подстановку, а потом применим метод стрелок:

$$\int \sin\sqrt{x}\,dx = \int \sin t \cdot 2t\,dt = -2t\cdot\cos t - \int(-\cos t)\cdot 2dt =$$

$$\begin{bmatrix} x = t^2 \Rightarrow \\ dx = 2t\,dt \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \int\downarrow \quad \downarrow{}' \\ (-\cos t)\cdot 2 \end{matrix}$$

$$= -2t\cos t + 2\int \cos t\,dt = -2t\cos t + 2\sin t + C =$$

$$= -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C. \quad \bullet$$