Упражнения 11. Семантика языка первого порядка

Правила семантики языка логики предикатов первого порядка должны раскрыть смысл кванторов, однако только этим обойтись нельзя. Действительно, построение формулы языка первого порядка может включать в себя как шаги применения квантора к формуле (приписывания вместе с переменной), так и те типы шагов, которые обычно используются при построении бескванторных формул (для символов $\neg$, &, $\vee$, $\to$). Поскольку последовательность этих шагов может быть самой различной, то формулировка определения формулы должна включать в себя правило для каждого возможного шага построения формулы.

Учебные задачи

1. Выучить термины и их значения: *значение формулы языка первого порядка в данной интерпретации при данных значениях переменных*.

2. Научиться выполнять: *находить значение формулы языка первого порядка; находить значения переменных, при которых данная бескванторная формула имеет данное значение*.

Теоретические сведения

– *интерпретация сигнатуры языка в непустом множестве* M,
– *значение переменной в этом множестве*,
– *значение терма при данных значениях предметных переменных*,
– *значение атомарной формулы при данных значениях предметных переменных*

для языка первого порядка определяются точно также, как и для языка атомарных формул.

Определим теперь *значение неатомарной формулы* $\boldsymbol{A}$ *в выбранной интерпретации и при заданных значениях свободных переменных этой формулы*[1]. Как известно, всякая неатомарная формула строится из более коротких частей с помощью логических символов.

Определение значения неатомарной формулы.

(1) Пусть $\boldsymbol{A}$ есть $\neg\boldsymbol{B}$. Тогда значение формулы $\boldsymbol{A}$ есть *И*, если и только если значение формулы $\boldsymbol{B}$ при данных значениях переменных есть *Л*.

[1]Заметим, что каждая переменная атомарной формулы (как и всякой бескванторной формулы вообще) является свободной.

(2) Пусть $\boldsymbol{A}$ есть $(\boldsymbol{B}\&\boldsymbol{C})$. Тогда значение формулы $\boldsymbol{A}$ есть *И*, если и только если значения каждой из формул $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ при данных значениях переменных есть *И*.

(3) Пусть $\boldsymbol{A}$ есть $(\boldsymbol{B}\vee\boldsymbol{C})$. Тогда значение формулы $\boldsymbol{A}$ есть *И*, если и только если значение хотя бы одной из формул $\boldsymbol{B}$ или $\boldsymbol{C}$ при данных значениях переменных есть *И*.

(4) Пусть $\boldsymbol{A}$ есть $(\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{C})$. Тогда значение формулы $\boldsymbol{A}$ есть *Л*, если и только если при заданных значениях переменных значение формулы $\boldsymbol{B}$ есть *И*, а значение формулы $\boldsymbol{C}$ есть *Л*.

(5) Пусть $\boldsymbol{A}$ есть $\forall\boldsymbol{x}\boldsymbol{B}$. Тогда значение формулы $\boldsymbol{A}$ есть *И*, если и только если *при каждом* значении переменной $\boldsymbol{x}$ из множества M *и заданных значениях свободных переменных формулы* $\boldsymbol{A}$ значение формулы $\boldsymbol{B}$ есть *И*.

(6) Пусть $\boldsymbol{A}$ есть $\exists\boldsymbol{x}\boldsymbol{B}$. Тогда значение формулы $\boldsymbol{A}$ есть *И*, если и только если *хотя бы при одном* значении переменной $\boldsymbol{x}$ из множества M *и заданных значениях свободных переменных формулы* $\boldsymbol{A}$ значение формулы $\boldsymbol{B}$ есть *И*.

Для записи в языке исследователя значений произвольного терма $\boldsymbol{t}$ и произвольной формулы $\boldsymbol{A}$ можно использовать обозначения $\mathrm{val}\,(\boldsymbol{t})$ и $\mathrm{val}\,(\boldsymbol{A})$ соответственно[2]. Более короткие обозначения: $\mathcal{V}(\boldsymbol{t})$, $\mathcal{V}(\boldsymbol{A})$.

Упражнения для самостоятельного решения

1. Пусть сигнатура $S := \{c_0, c_1, f_1^1, f_2^2, f_3^2, P_1^2, P_2^1\}$, $\mathcal{A}$ — алгебраическая система, $\mathcal{A} := \langle\mathbb{Z}, S\rangle$, у которой c_0 есть имя числа 0, c_1 есть имя числа 1, и для всяких $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ выполнено:

$$f_1^1(m_1) = -m_1, \quad f_2^2(m_1, m_2) = m_1 + m_2, \quad f_3^2(m_1, m_2) = m_1 \cdot m_2,$$

$$P_1^2(m_1, m_2) = \textit{И}, \text{ если и только если } m_1 < m_2\,.$$

$$P_2^1(m) = \textit{И}, \text{ если и только если } m \text{ — четное число}\,.$$

1.1. Найдите значения формул:

(а) $\exists x_1 P_1^2 x_1 c_0$; (б) $\exists x_1 P_1^2 f_1^1 c_1 x_1$;

(в) $\exists x_1 \neg P_1^2 x_1 f_1^1 x_1$; (г) $\exists x_1 \neg P_2^1 f_2^2 x_1 x_1$.

1.2. Найдите значения формул:

(а) $\forall x_1 P_1^2 x_1 x_1$; (б) $\forall x_1 P_2^1 f_2^2 x_1 f_1^1 x_1$;

[2]От английского слова value — значение, оценка, ценность.

(в) $\forall x_1 \neg P_1^2 x_1 f_2^2 x_1 x_1$; (г) $\forall x_1 P_1^2 f_2^2 x_1 x_1 f_2^2 x_1 c_1$.

1.3. Найдите значения формул:

(а) $(\forall x_0\, P_1^2 x_0 c_1 \vee P_1^2 f_1^1 x_0 c_1)$ при значении x_0, равном 2;

(б) $\exists x_1 (P_1^2 x_0 x_1 \,\&\, P_1^2 f_1^1 x_0 x_1)$ при значении x_0 равном 1.

1.4. Найдите значения формул:

(а) $\exists x_0 \forall x_1 P_1^2 x_0 x_1$; (б) $\exists x_0 \forall x_1 P_2^1 f_3^2 x_0 x_1$;

(в) $\exists x_0 \forall x_1 (P_1^2 x_0 x_1 \vee P_1^2 x_0 f_1^1 x_1)$; (г) $\exists x_2 \forall x_1 (P_2^1 x_1 \to P_2^1 f_2^2 x_1 x_2)$.

1.5. Найдите значения формул:

(а) $\forall x_0 \exists x_1 P_2^1 f_3^2 x_0 x_1$; (б) $\forall x_0 \exists x_1 P_1^2 x_0 x_1$;

(в) $\forall x_0\, \exists x_1\, (P_1^2 x_0 x_1 \,\&\, P_1^2 f_1^1 x_1 x_0)$; (г) $\forall x_0\, \exists x_1\, (P_2^1 x_0 \to P_2^1 f_2^2 x_0 x_1)$.

1.6*. Приведите пример формулы, состоящей из символов f_2^2, P_2^1, x_1, $\forall$, $\neg$, которая принимает значение *И* в рассматриваемой интерпретации (и не принимает никаких других значений).

1.7. Найдите все значения предметных переменных, при которых следующая формула принимает значение *И*:

(а) $\forall x_1 f_2^2 x_0 x_1 \doteq c_1$; (б) $\forall x_0 (P_1^2 x_0 f_1^1 x_0 \to P_1^2 x_0 x_1)$;

(в) $\exists x_0 P_1^2 f_3^2 x_0 x_1 f_2^2 x_0 x_1$; (г) $\forall x_0 (P_1^2 x_0 c_1 \to P_1^2 x_1 f_3^2 x_1 x_0)$.

1.8. Найдите все значения предметных переменных, при которых следующая формула принимает значение *Л*:

(а) $\neg \exists x_1\, P_1^2 f_2^2 x_0 x_1 c_1$; (б) $\forall x_0 (\neg P_1^2 x_0 f_1^1 x_0 \to P_1^2 f_1^1 x_1 x_0)$;

(в) $\neg \forall x_0 (P_1^2 x_0 c_1 \to P_1^2 x_0 f_1^1 x_1)$; (г) $\exists x_0 \neg P_1^2 f_3^2 x_0 x_1 f_2^2 f_1^1 x_0 x_1$.

2*. Приведите пример множества и интерпретации сигнатуры $\{f_1^1, P_1^2\}$ в этом множестве, при которой формула $\exists x_0 \forall x_1 P_1^2 x_0 f_1^1 x_1$ принимает значение *И*.

Задание 12. Истинные и выполнимые на алгебраической системе формулы

Алгебраическая система представляет собою своего рода абстрактный "мир" — множество с заданными на нем отношениями, выделенными элементами и функциями. Многие (если не сказать — все важные) объекты математики удается трактовать как те или иные алгебраические системы.

Интерпретировав сигнатуру языка первого порядка в некоторой алгебраической системе, мы тем самым связываем формулы языка с данным "миром" и придаем формуле смысл в этом "мире". Интерпретированная формула, если она замкнута, *выражает высказывание* об этом "мире". Поэтому ее, подобно предложению естественного языка, называют *предложением*. Незамкнутую интерпретированная формулу, можно рассматривать как своего рода уравнение, заданное на данном "мире". Она задает на данном мире *предикат*. Некоторые из связей между интерпретированной и данной алгебраической системой сейчас и будут изучаться.

Учебные задачи

1. Выучить термины и их значения: *формула, истинная на данной алгебраической системе; модель формулы; формула, выполнимая на алгебраической системе*.

2. Научиться выполнять: *выяснять, является ли данная формула истинной на данной алгебраической системе; выяснять, является ли данная формула выполнимой на данной алгебраической системе*.

Теоретические сведения

Будем рассматривать алгебраические системы, сигнатура которых равна сигнатуре данного языка.

Определения. 1. Формула называется *выполнимой в алгебраической системе* $\langle M, S\rangle$, если она принимает значение *И* хотя бы при одном наборе значений свободных переменных из множества M.

2. Формула называется *истинной на алгебраической системе* $\langle M, S\rangle$, если она принимает значение *И* при всех наборах значений свободных переменных из множества M.

Обозначение. Если формула истинна на алгебраической системе $\langle M, S\rangle$, то пишут: $\langle M, S\rangle \vDash$.

Замечания. 1. Между свойствами выполнимости и истинности формулы на алгебраической системе существует тесная взаимосвязь: *формула истинна на некоторой алгебраической системе, если и только если на этой алгебраической системе невыполнимо отрицание данной формулы.*

2. Для замкнутой формулы понятия формулы, выполнимой на алгебраической системе и формулы истинной на алгебраической системе равнообъемны: *замкнутая формула истинна на некоторой алгебраической системе тогда и только тогда, когда она на данной алгебраической системе выполнима.*