

Министерство образования и науки Российской Федерации
Костромской государственный технологический университет
Кафедра высшей математики

А.В. Чередникова, И.В. Землякова

Введение в теорию графов

*Рекомендовано редакционно-издательским советом университета
в качестве учебно-методического пособия*

Кострома

КГТУ

2011

Чередникова А.В. Введение в теорию графов / А.В. Чередникова, И.В. Землякова. – Кострома: Изд-во Костром. гос. технол. ун-та, 2011. – 24 с.

В пособии рассматриваются основные понятия теории графов. Доступность изложения, сочетание теоретического материала с иллюстрирующими его примерами дают возможность использовать пособие для самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины «Дискретная математика».

Пособие предназначено для студентов 1 курса бакалавриата по направлению подготовки 090900 «Информационная безопасность» и студентов 2 курса бакалавриата по направлению подготовки 230100 «Информатика и вычислительная техника», 230400 «Информационные системы и технологии».

Пособие может быть также использовано при обучении математическим дисциплинам студентов бакалавриата всех направлений подготовки, государственные образовательные стандарты которых включают изучение и применение теории графов.

Рецензенты: Шведенко В.Н., д.т.н., профессор,
зав. каф. информационных технологий КГТУ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
§1. Основные понятия и определения.....	4
§2. Способы задания графов	7
§3. Изоморфные графы	9
§4. Взвешенные графы.....	10
§5. Подграф	10
§6. Операции над графами.....	12
§7. Маршруты, цепи, циклы	13
§8. Связность. Компоненты связности	13
§9. Метрические характеристики графа.....	16
§10. Деревья и их свойства. Лес.....	17
§11. Эйлеровы цепи и циклы	19
§12. Гамильтоновы цепи и циклы	20
§13. Планарные графы	21
§14. Раскраска графов. Хроматические графы.....	23
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	24

Введение

Теория графов является одним из разделов дискретной математики, который исследует свойства конечных или счетных множеств с заданными отношениями между их элементами. Особенностью этой теории является геометрический подход к изучению объектов.

Впервые понятие «граф» ввел в 1936 году венгерский математик Денеш Кёниг. Однако первая работа по теории графов была написана еще в 1736 году Леонардом Эйлером, в которой он решил «задачу о Кёнигсбергских мостах». Суть этой задачи состоит в следующем. На рис. 1 представлена схема центральной части города Кёнигсберг (ныне Калининград), которая включает два берега реки, два острова в ней и семь соединяющих их мостов. Требуется обойти все четыре части суши, пройдя по каждому мосту один раз, и вернуться в исходную точку. Позже мы рассмотрим решение этой задачи.

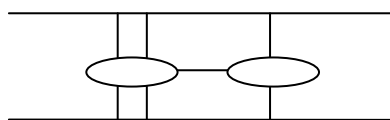


Рис. 1

Современная теория графов даёт исключительно удобный аппарат для моделирования структурных свойств различных систем и отношений между объектами разной природы. Поэтому она широко используется как в самой математике, так и ее приложениях в самых

разнообразных областях науки, техники и практической деятельности. В частности, теория графов находит свое применение в информатике и программировании, химии, экономике, логистике, в коммуникационных и транспортных системах, схемотехнике.

Следует отметить, что для понятия «граф» нет общепризнанного единого определения. Разные авторы подразумевают под «графом» различные объекты, хотя и очень похожие. В данном пособии рассматриваются только конечные графы и используется терминология [5], позволяющая на множестве всех графов ввести бинарное отношение «быть частным случаем».

§1. Основные понятия и определения

Пусть S – непустое конечное множество, $V^{(2)}$ – множество всех его двухэлементных подмножеств.

Определение 1.1. *Псевдографом* (или просто *графом*) G называется пара множеств (S, U) , где U – произвольное подмножество множества $V^{(2)}$. При этом пишут $G = (S, U)$.

Определение 1.2. Пусть $G = (S, U)$ – псевдограф. Элементы множества S называются *вершинами графа* G , а элементы множества U – его *ребрами*.

Определение 1.3. Граф $G = (S, U)$ называется *пустым* или *нуль-графом*, если $U = \emptyset$.

Определение 1.4. Число вершин графа $G = (S, U)$ называется его *порядком*.

Если порядок графа равен n , то пишут $|G| = n$.

Двухэлементное подмножество множества S (ребро), принадлежащее U и состоящее из элементов x и y будем обозначать через (x, y) .

В общем случае множество U может содержать пары с одинаковыми элементами вида (x, x) и одинаковые пары.

Определение 1.5. Ребра вида (x, x) называются **петлями**.

Определение 1.6. Одинаковые пары из множества U называются **кратными** (или **параллельными**) ребрами.

Таким образом, **псевдограф может содержать петли и кратные ребра**. В этом смысле псевдографы еще называются **графами с кратными ребрами и петлями**.

Определение 1.7. Псевдограф без петель называется **мультиграфом** (или графом с **кратными ребрами**).

Определение 1.8. Мультиграф без кратных ребер называется **простым графом**.

Таким образом, простой граф не содержит петель и кратных ребер.

Графы имеют наглядную графическую интерпретацию в виде **диаграмм**, состоящих из точек и линий, соединяющих некоторые из этих точек. Точки соответствуют вершинам графа, а линии – его ребрам. При этом форма и длина линий значения не имеют. Важно лишь, что две данные точки соединены или не соединены линией.

Пример 1.1. Указать какие из графов, диаграммы которых изображены на рис. 2 являются псевдографами, мультиграфами, простыми графами.

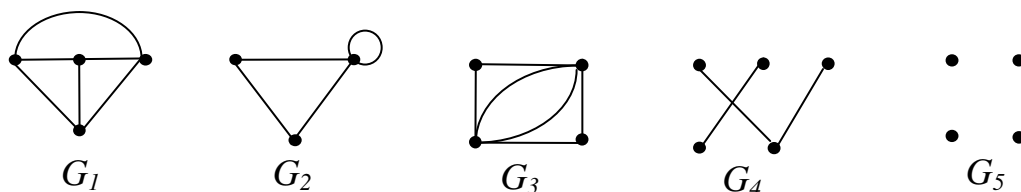


Рис.2

Решение. Все графы являются псевдографами, графы G_1, G_3, G_4, G_5 – мультиграфами, графы G_1, G_4, G_5 – простыми графами.

Определение 1.9. Граф называется **неориентированным** (кратко – **неорграфом**), если пары в множестве U являются неупорядоченными.

Если (x, y) – неупорядоченная пара, то ребро (x, y) называется **неориентированным**, а вершины x и y называются **концами** неориентированного ребра (x, y) .

Определение 1.10. Граф называется **ориентированным** (кратко – **орграфом**), если пары в множестве U являются упорядоченными.

Определение 1.11. Ребра орграфа называются **дугами** (или **ориентированными ребрами**).

Вершина x дуги (x, y) называется ее **началом**, а вершина y – ее **концом**. В этом случае говорят, что дуга (x, y) исходит из вершины x и входит в вершину y .

На диаграммах орграфов направления дуг отмечаются стрелками, которые примыкают к их концам.

Замечание 1.1. Неориентированное ребро (x, y) равносильно двум противоположно направленным дугам (x, y) и (y, x) . Поэтому неориентированный граф можно рассматривать как ориентированный граф, который вместе с каждой дугой (x, y) содержит и дугу (y, x) противоположного направления.

Условимся вершины графа обозначать буквами x, y, z (без индексов или с индексами), а ребра и дуги – буквами v, u, w (без индексов или с индексами).

Рассмотрим ряд понятий и определений для неориентированных и ориентированных графов. При этом, если не будет оговорено особо, те же понятия и определения переносятся без изменений на неориентированные и ориентированные псевдографы.

Определение 1.12. Два ребра графа называются **смежными**, если они имеют общий конец.

Определение 1.13. Вершина x и ребро u графа называются **инцидентными**, если x является концом ребра u , и **неинцидентными** в противном случае.

Определение 1.14. Две вершины графа называются **смежными**, если существует инцидентное им ребро.

Определение 1.15. Число ребер (дуг) графа (орграфа) G , инцидентных данной вершине x_i называется **степенью (валентностью)** вершины x_i и обозначается через $\deg(x_i)$ (от англ. degree – степень).

Определение 1.16. Вершина графа называется **изолированной**, если ее степень равна нулю.

Определение 1.17. Вершина графа называется **висячей**, а если ее степень равна единице.

Замечание 1.2. В случае неориентированного псевдографа обычно считается, что вклад каждой петли, инцидентной некоторой вершине x , в ее степень $P(x)$ равен 2, в то время как вклад любого другого ребра, инцидентного вершине x равен 1.

Определение 1.18. **Полустепенью исхода (захода) вершины x_i** орграфа называется число $\deg^+(x_i)$ ($\deg^-(x_i)$) его дуг, исходящих из вершины x_i (заходящих в вершину x_i).

Для орграфа $\deg(x_i) = \deg^+(x_i) + \deg^-(x_i)$.

Замечание 1.3. В случае ориентированного псевдографа вклад каждой петли, инцидентной некоторой вершине x , равен 1, как в $\deg^+(x)$, так и в $\deg^-(x)$.

Пример 1.2. Найти степени вершин x_2, x_4 графа G_1 и полустепени исхода и захода вершин x_2, x_4 графа G_2 , изображенных на рис. 3.

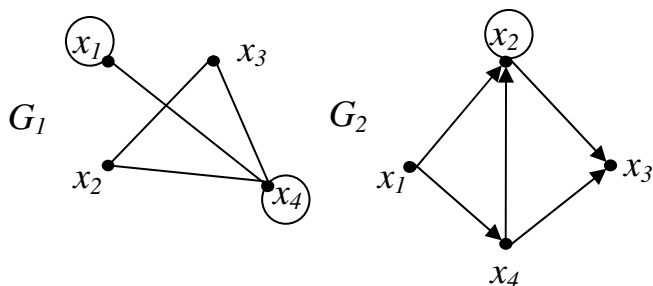


Рис.3

Решение. Для графа G_1 имеем:

$\deg(x_2) = 2$ и $\deg(x_4) = 5$.

Для графа G_2 имеем:

$\deg^+(x_2) = 2, \deg^-(x_2) = 3$ и

$\deg^+(x_4) = 2, \deg^-(x_4) = 1$.

Определение 1.19. Неориентированный простой граф, в котором любые две различные вершины смежны, называется **полным**. Полный граф порядка n обозначается через K_n .

На рис. 4 изображены диаграммы полных графов K_1 , K_2 , K_3 и K_4 .

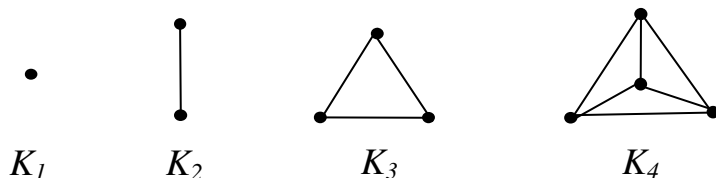


Рис.4

Определение 1.20. Неориентированный граф называется **двудольным**, если существует такое разбиение множества его вершин на две части (доли), что концы каждого ребра принадлежат разным частям.

Определение 1.21. Двудольный граф, любые две вершины которого, входящие в разные доли смежны, называется **полным двудольным**. Полный двудольный граф, доли которого состоят из p и q вершин, обозначается символом $K_{p,q}$.

На рис. 5 изображены полные двудольные графы $K_{1,4}$ и $K_{3,3}$.

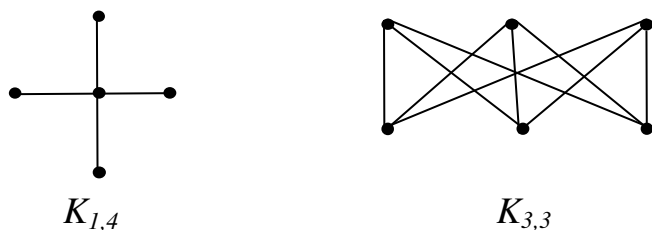


Рис.5

§2. Способы задания графов

1. **Перечислением (списком) вершин и ребер (дуг).**

2. **Геометрическим способом.** Граф может быть задан с помощью его **диаграммы**.

Пример 2.1. Пусть граф $G = (S, U)$ задан списком вершин и ребер:

$$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\},$$

$$U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_6), (x_2, x_3), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_3, x_6), (x_4, x_5)\}.$$

Тогда граф можно задать с помощью диаграммы, представленной на рис. 6.

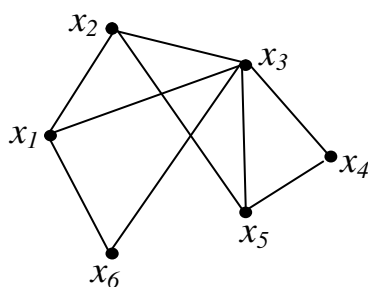


Рис.6

3. **Матричным способом.** Этот способ задания используется наиболее часто. Рассмотрим задание графа матрицей смежности вершин, матрицей смежности дуг, матрицей инцидентий и матрицей Кирхгофа.

Определение 2.1. Матрицей смежности вершин графа $G = (S, U)$ порядка n называется квадратная

матрица $P(G)$ = порядка n , строки и столбцы которой соответствуют вершинам графа, где элементы p_{ij} равны числу дуг, идущих из i -й вершины в j -ю.

Для неориентированного графа матрица смежности вершин является симметричной относительно главной диагонали (см. замечание 1.1).

Определение 2.2. Матрицей смежности дуг графа $G = (S, U)$, где $|U| = m$, называется квадратная матрица $Q(G) = \|q_{ij}\|$ порядка m , элементы q_{ij} которой равны единице, если дуга u_i непосредственно предшествует дуге u_j , и равны нулю в остальных случаях.

В случае неориентированного графа элемент q_{ij} равен единице, если u_i и u_j смежны, и нулю, если эти дуги не смежны.

Определение 2.3. Матрицей инциденций мультиграфа $G = (S, U)$, где $|S| = n$ и $|U| = m$, называется прямоугольная матрица $R(G)$ размерности $n \times m$. Элементы r_{ij} этой матрицы равны 1, если дуга u_j исходит из i -й вершины; -1, если дуга u_j входит в i -ю вершину; 0, если дуга u_j не инцидентна i -й вершине.

Для неориентированного мультиграфа элемент r_{ij} равен единице, если вершина x_i инцидентна ребру u_j , и нулю, если вершина x_i не инцидентна ребру u_j .

Определение 2.4. Матрицей Кирхгофа графа $G = (S, U)$, где $|S| = n$, называется матрица $B(G)$ = порядка n , где

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если } i \neq j \text{ и } x_i \text{ смежна с } x_j; \\ 0, & \text{если } i \neq j \text{ и } x_i \text{ не смежна с } x_j; \\ \deg(x_i), & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Очевидно, что сумма элементов в каждой строке и каждом столбце матрицы $B(G)$ равна нулю. Кроме того, из этого следует, что алгебраические дополнения всех элементов матрицы Кирхгофа равны между собой.

Пример 2.2. Для графа G , изображенного на рис.7, составить матрицы смежности вершин, смежности дуг и инциденций.

Решение. Матрица смежности вершин $P(G)$:

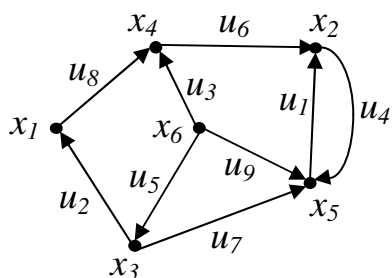


Рис.7

$$P(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица смежности дуг $Q(G)$ и матрица инциденций $R(G)$:

$$R(G) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§3. Изоморфные графы

Определение 3.1. Графы $G_1 = (S_1, U_1)$ и $G_2 = (S_2, U_2)$ называются **изоморфными** ($G_1 \cong G_2$), если между множествами их вершин S_1 и S_2 можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором две произвольные вершины смежны в одном из графов тогда и только тогда, когда соответствующие им вершины смежны в другом графе. В случае орграфов ориентация дуг также должна быть одинаковой.

Очевидно, что отношение «быть изоморфными» на множестве всех графов является отношением эквивалентности. Следовательно, множество всех графов разбивается на классы попарно изоморфных графов.

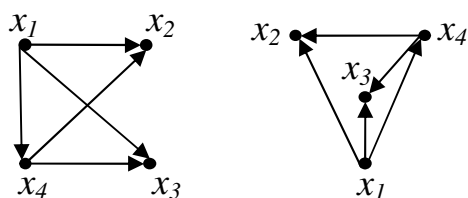


Рис.8

Замечание 3.1. Диаграмма задает граф с точностью до изоморфизма. Это означает, что все различные диаграммы, содержащие одну и ту же информацию о вершинах и ребрах (дугах) графа и их взаимном расположении являются изображениями одного и того же графа. Например, на рис. 8 представлено изображение одного и того же графа.

Для того чтобы различать изоморфные графы рассмотрим понятие помеченного графа.

Определение 3.2. Граф G порядка n называется **помеченным**, если его вершины занумерованы натуральными числами от 1 до n .

На рис. 9 изображены три разных помеченных графа порядка 3.

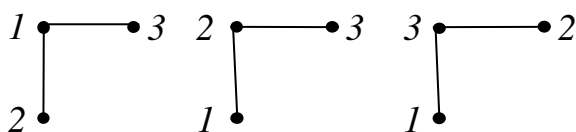


Рис.9

Таким образом, под **непомеченным** (или **абстрактным**) графом следует понимать класс изоморфных графов.

Замечание 3.2. Структура графа однозначно определяется его матрицей смежности вершин.

Теорема 3.1. Графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы смежности вершин получаются друг из друга в результате последовательности одновременных перестановок строк и столбцов (одновременно с перестановкой i -й и j -й строк переставляются i -й и j -й столбцы).

Из теоремы 3.1 следует, что ранги матриц смежности вершин изоморфных графов равны. Это позволяет ввести в рассмотрение следующее определение.

Определение 3.3. **Рангом графа** G ($rank\ G$) называется ранг его матрицы смежности вершин $P(G)$.

Замечание 3.3. Структура мультиграфа однозначно определяется его матрицей инциденций.

Теорема 3.2. Мультиграфы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы инциденций получаются друг из друга в результате последовательности произвольных перестановок строк и столбцов.

§4. Взвешенные графы

В различных приложениях теории графов ребрам (дугам) графов, представляющих собой модели реальных процессов, ставятся в соответствие какие-либо числовые характеристики. Например, если орграф изображает железнодорожную сеть, соединяющую несколько городов, то числовой характеристикой дуги может быть расстояние между городами. В таких случаях говорят, что дугам графа приписаны определенные веса.

Определение 4.1. Орграф $G = (S, U)$ называется **взвешенным орграфом** или **ориентированной сетью**, если каждой дуге $(x_i, x_j) \in U$ поставлено в соответствие некоторое число $\omega(x_i, x_j)$. При этом вершины орграфа называются **узлами сети**, а число $\omega(x_i, x_j)$ – **весом дуги** (x_i, x_j) .

Понятие взвешенного неорграфа или неориентированной сети определяется аналогично.

Простой взвешенный граф может быть также задан своей **матрицей весов** $\Omega = (\omega_{ij})$, где ω_{ij} – вес дуги (x_i, x_j) . Веса несуществующих дуг полагают равными нулю или бесконечности в зависимости от приложений.

§5. Подграф

Определение 5.1. Граф $G' = (S', U')$ называется **подграфом** графа $G = (S, U)$, если $S' \subseteq S$, а U' – множество всех ребер G , оба конца которых принадлежат S' .

Определение 5.2. Подграф называется **собственным**, если он отличен от самого графа.

Определение 5.3. Граф $G' = (S', U')$ называется **частью** графа $G = (S, U)$, если $S' \subseteq S$, а U' – подмножество множества всех ребер G , оба конца которых принадлежат S' .

Любой подграф графа является его частью, но не любая часть графа есть его подграф.

Так как подграф G' полностью определяется множеством S' своих вершин, то его можно обозначать кратко через $G'(S')$. Поэтому подграф $G' = (S', U')$ называют также **графом, порожденным множеством S'** (или **вершинно-порожденным графом**).

Пример 5.1. На рис. 10 изображены граф G , его подграф, порожденный множеством вершин x_1, x_2, x_4 , и его часть, содержащая все вершины G , но не все его ребра.

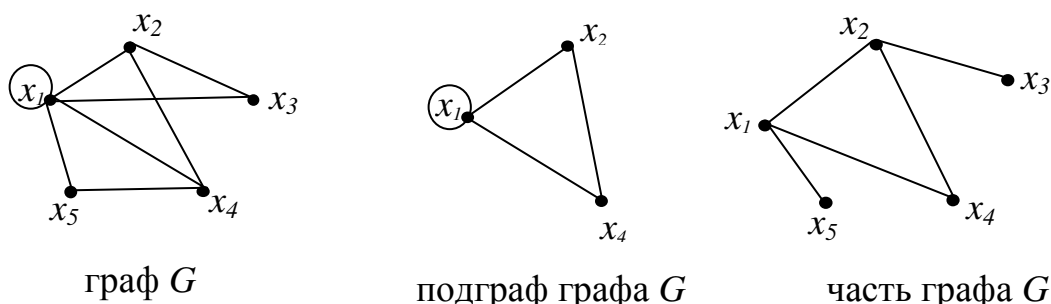


Рис.10

Все приведенные определения распространяются на орграфы.

Определим на множестве подграфов графа G отношение включения. Пусть $G'(S')$ и $G''(S'')$ – подграфы графа G . Говорят, что $G'(S')$ содержится в $G''(S'')$ (пишут $G' \subseteq G''$), если $S' \subseteq S''$. Легко видеть, что отношение включения подграфов графа G является отношением частичного порядка. При этом граф G является единственным максимальным элементом. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5.1. Пусть $G = (S, U)$ – произвольный псевдограф (ориентированный или неориентированный), $S' \subseteq S$, $S' \neq \emptyset$ и $G'(S')$ – подграф графа G . Тогда матрица смежности вершин $P(G')$ подграфа G' является подматрицей матрицы смежности вершин $P(G)$ графа G , находящейся на пересечении строк и столбцов, соответствующих вершинам из S' .

Определение 5.4. *Кликой* называется полный подграф $G'(S')$ графа G .

Определение 5.5. *Звездой вершины x* называется часть графа G , содержащая вершину x , все инцидентные ей ребра и все смежные с x вершины.

Пример 5.2. На рис. 11 изображены граф G , клика графа G и звезда вершины x_5 графа G .

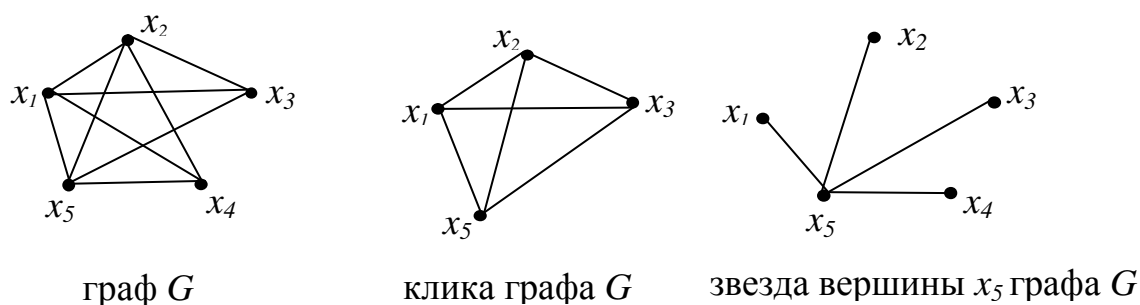


Рис.11

Следует отметить, что звезда вершины x является подграфом тогда и только тогда, когда любые две смежные с x вершины не соединены ребром.

Понятие звезды вершины для орграфа, как и степень вершины, расщепляется на две части.

Определение 5.6. *Полузвездой исхода (захода) вершины x* орграфа называется подграф, порожденный вершиной x и всеми вершинами, в которые из x (из которых в x) ведут ребра.

§6. Операции над графами

Рассмотрим некоторые основные операции, позволяющие из уже имеющихся графов получать новые графы.

1. Объединение (сумма) графов. *Объединением* $G_1 \cup G_2$ графов $G_1 = (S_1, U_1)$ и $G_2 = (S_2, U_2)$ называется граф $(S_1 \cup S_2, U_1 \cup U_2)$.

2. Пересечение (произведение) графов. *Пересечением* $G_1 \cap G_2$ графов $G_1 = (S_1, U_1)$ и $G_2 = (S_2, U_2)$, где $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, называется граф $(S_1 \cap S_2, U_1 \cap U_2)$.

3. Дополнение простого графа. *Дополнением простого графа* $G = (S, U)$ называется простой граф $\bar{G} = (S, \bar{U})$, имеющий те же вершины, что и граф G , причем любые две различные вершины смежны в \bar{G} тогда и только тогда, когда они не смежны в G .

4. Прямое произведение графов. Граф $G = (S, U)$ называется *произведением* $G_1 \times G_2$ графов $G_1 = (S_1, U_1)$ и $G_2 = (S_2, U_2)$, если $S = S_1 \times S_2$, а множество ребер U образуется следующим образом: вершины (x_1, x_2) и (y_1, y_2) смежны в графе G тогда и только тогда, когда либо вершины x_1 и y_1 совпадают, а вершины x_2 и y_2 смежны в G_2 , либо вершины x_2 и y_2 совпадают, а вершины x_1 и y_1 смежны в G_1 .

5. Удаление вершины. Операция, заключающаяся в удалении из графа $G = (S, U)$ вершины x и всех инцидентных ей ребер (дуг) называется операцией *удаления вершины* x из графа G . В результате получается подграф $G(S \setminus \{x\})$.

6. Удаление ребра (дуги). Операция, заключающаяся в удалении ребра (дуги) u из множества ребер (дуг) U графа $G = (S, U)$ называется *операцией удаления ребра (дуги)* u из графа G . Концы ребра (дуги) u не удаляются.

7. Добавление вершины. Операция, которая из графа $G = (S, U)$ порождает граф $G' = (S \cup \{x\}; U)$ называется *операцией добавления вершины* x к графу G .

8. Добавление ребра (дуги). Операция, которая из графа $G = (S, U)$ порождает граф $G' = (S \cup \{x, y\}; U \cup \{(x, y)\})$ называется *операцией добавления ребра (дуги)* (x, y) к графу G .

9. Отождествление вершин. Пусть x и y – две произвольные вершины графа $G = (S, U)$. Операцией *отождествления вершин* x и y называется операция, заключающаяся в удалении из графа G вершин x и y и присоединении к полученному графу новой вершины z , соединив ее ребром (дугой) с каждой из вершин, входящих в объединение M множеств вершин смежных с вершинами x и y в графе G . Если G – орграф, то для любой вершины $a \in M$ присоединяется дуга (a, z) , если $(a, x) \in U$ или $(a, y) \in U$, и дуга (z, a) , если $(x, a) \in U$ или $(y, a) \in U$.

10. Стягивание ребра (дуги). Операцией *стягивания ребра (дуги)* называется отождествление двух смежных вершин. Граф G называется *стягиваемым* к графу G_1 , если G_1 получается из G в результате некоторой последовательности стягиваний ребер (дуг).

11. Операция подразбиения ребра (дуги). Операцией *подразбиения ребра (дуги)* (x, y) графа $G = (S, U)$ называется операция, заключающаяся в удалении из U ребра (дуги) (x, y) , добавлении к S новой вершины z и добавлении к $U \setminus \{(x, y)\}$ двух ребер (x, z) и (z, y) .

§7. Маршруты, цепи, циклы

Определение 7.1. Пусть $G = (S, U)$ – граф (орграф). Чередующаяся последовательность его вершин и ребер (дуг)

$$x_1, u_1, x_2, u_2, \dots, x_k, u_k, x_{k+1} \quad (1)$$

(где $k \geq 1, x_i \in S, i = 1, \dots, k+1, u_j \in U, j = 1, \dots, k$) такая, что для каждого $j = 1, \dots, k$ ребро (дуга) u_j имеет вид (x_j, x_{j+1}) , называется **маршрутом**, соединяющим вершины x_1 и x_{k+1} (**путем** из вершины x_1 в вершину x_{k+1}). При этом вершина x_1 называется **начальной**, а вершина x_{k+1} – **конечной**.

Очевидно, что маршрут можно задать последовательностью его вершин x_1, x_2, \dots, x_{k+1} или последовательностью ребер u_1, u_2, \dots, u_k .

Определение 7.2. Длиной **маршрута (пути)** называется число ребер (дуг) в маршруте (пути).

Определение 7.3. Маршрут (путь) называется **замкнутым**, если его начальная и конечная вершины совпадают (т.е. $x_1 = x_{k+1}$).

Определение 7.4. **Цепью** называется незамкнутый маршрут (путь), в котором все ребра (дуги) попарно различны.

Определение 7.5. **Простой цепью** называется цепь, в которой все вершины попарно различны.

Определение 7.6. **Циклом (контуром)** называется замкнутый маршрут (путь), в котором все ребра (дуги) попарно различны.

Определение 7.7. **Простым циклом (контуром)** называется цикл (контур), в котором все вершины попарно различны.

Пример 7.1. Рассмотрим граф на рис.12. Привести пример (незамкнутого) маршрута, замкнутого маршрута, цепи (не являющейся простой), простой цепи, цикла (не являющегося простым), простого цикла.

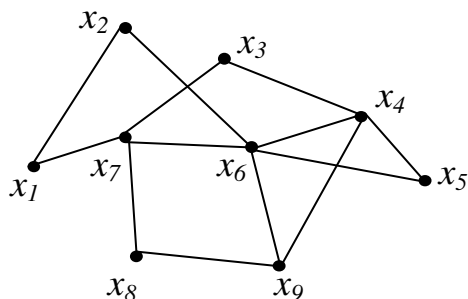


Рис.12

Решение. Пример (незамкнутого) маршрута:

$x_1 - x_7 - x_3 - x_4 - x_6 - x_9 - x_8$.

Пример замкнутого маршрута:

$x_1 - x_2 - x_6 - x_5 - x_4 - x_6 - x_7 - x_1$.

Пример цепи (не являющейся простой):

$x_9 - x_6 - x_2 - x_1 - x_7 - x_6 - x_4$.

Пример простой цепи:

$x_8 - x_7 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_2$.

Пример цикла (не являющегося простым):

$x_1 - x_2 - x_6 - x_9 - x_4 - x_6 - x_7 - x_1$.

Пример простого цикла:

$x_7 - x_3 - x_4 - x_6 - x_9 - x_8 - x_7$.

§8. Связность. Компоненты связности

Определение 8.1. Граф (орграф) называется **связным (сильно связным)**, если для любых двух его различных вершин существует маршрут (путь), соединяющий вершины x и y (из x в y).

Говорят, что вершина y орграфа (графа) G **достижима** из вершины x , если либо $y = x$, либо существует путь из x в вершину y (маршрут, соединяющий вершины x и y).

Таким образом, орграф G является сильно связным, если любые две его вершины взаимно достижимы.

Определение 8.2. Неориентированным псевдографом, ассоциированным с ориентированным псевдографом $G = (S, U)$, называется неориентированный псевдограф $F(G)$, полученный из G заменой всех ориентированных ребер на неориентированные.

Определение 8.3. Орграф G называется **слабо связным**, если ассоциированный с ним неориентированный псевдограф $F(G)$ является связным.

Определение 8.4. Граф (орграф) называется **несвязным**, если он не является связным (слабо связным).

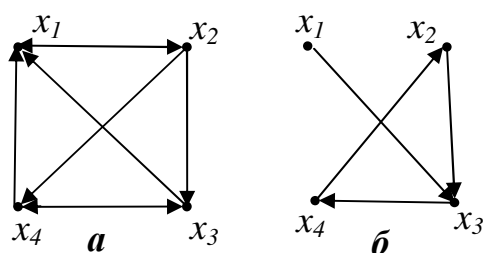


Рис. 13

Пример 8.1. На рис. 13, а изображен сильно связный орграф, а на рис. 13, б – слабо связный орграф, так как, например, вершина x_2 не достижима из вершины x_1 .

Замечание 8.1. Любой связный неориентированный граф является сильно связным.

Определение 8.5. Всякий максимальный по включению (сильно) связный подграф данного графа называется его (**сильной**) **связной компонентой** или (сильной) компонентой связности.

Утверждение 8.1. Пусть $G = (S, U)$ – псевдограф с k компонентами связности: $G_1 = (S_1, U_1), \dots, G_k = (S_k, U_k)$. Тогда

- 1) $S = S_1 \cup \dots \cup S_k, U = U_1 \cup \dots \cup U_k$, т.е. $G = G_1 \cup \dots \cup G_k$;
- 2) $S_i \cap S_j = \emptyset, U_i \cap U_j = \emptyset$ при $i \neq j$;
- 3) $|S_1| + \dots + |S_k| = |S|, |U_1| + \dots + |U_k| = |U|$.

Утверждение 8.2. Пусть $G = (S, U)$ – ориентированный псевдограф с k компонентами сильной связности: $G_1 = (S_1, U_1), \dots, G_k = (S_k, U_k)$. Тогда

- 1) $S = S_1 \cup \dots \cup S_k, U_1 \cup \dots \cup U_k \subseteq U$;
- 2) $S_i \cap S_j = \emptyset, U_i \cap U_j = \emptyset$ при $i \neq j$;
- 3) $|S_1| + \dots + |S_k| = |S|, |U_1| + \dots + |U_k| \leq |U|$.

Рассмотрим задачи нахождения сильных компонент орграфа и всех маршрутов, состоящих из ребер (дуг) графа.

Пусть $P(G)$ – матрица смежности вершин орграфа $G = (S, U)$ порядка n . Обозначим через матрицу $B = (b_{ij})$ квадратную матрицу порядка n , удовлетворяющую условию: $B = E + P + P^2 + \dots + P^n$.

Определение 8.6. Квадратная матрица $C = (c_{ij})$ порядка n , где

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } b_{ij} \neq 0, \\ 0, & \text{если } b_{ij} = 0, \end{cases}$$

называется **матрицей достижимости** орграфа G .

Заметим, что элемент c_{ij} равен единице тогда и только тогда, когда в орграфе G существует путь из вершины x_i в вершину x_j .

Определение 8.7. Квадратная матрица $L = (l_{ij})$ порядка n , где

$$l_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_i \text{ достижима из вершины } x_j, \\ 0, & \text{если вершина } x_i \text{ не достижима из вершины } x_j. \end{cases}$$

называется **матрицей контрдостижимости** орграфа G .

Известно, что $L = C^T$. Матрицы C и L используются для нахождения сильных компонент связности графа.

Определение 8.8. Квадратная матрица $F = (f_{ij})$ порядка n , удовлетворяющая условию $F = C * L$, где операция $*$ означает поэлементное произведение матриц C и L (то есть $f_{ij} = c_{ij} \cdot l_{ij}$ для любых i и j) называется **матрицей сильных компонент связности** орграфа G .

Элемент f_{ij} матрицы F равен единице тогда и только тогда, когда вершины x_i и x_j взаимно достижимы. Таким образом, множество вершин некоторой сильной компоненты связности $G_p = (S_p, U_p)$ орграфа $G = (S, U)$, кроме вершины x_i содержит также все вершины $x_j \in S$, для которых $f_{ij} = 1$.

Для определения количества маршрутов с заданным количеством ребер (дуг) графа используется следующая теорема.

Теорема 8.1. Пусть $P(G)$ – матрица смежности вершин графа $G = (S, U)$ порядка n и $P^k = (p_{ij}^{(k)})$ – k -я степень матрицы P . Тогда элемент $p_{ij}^{(k)}$ матрицы P^k равен числу маршрутов, состоящих из k ребер (дуг) графа G из вершины x_i в вершину x_j .

Пример 8.1. Найти сильные компоненты связности орграфа G , изображенного на рис. 14 и все маршруты длины три дуги, исходящие из вершины x_1 .

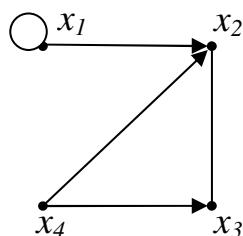


Рис. 14

Решение. Найдем матрицу смежности вершин орграфа G :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

. Так как порядок орграфа G равен

четырем, то для нахождения матрицы B вычислим P^k , где $k = 1, 2, 3, 4$:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $B = E + P + P^2 + P^3 + P^4$. Найдем матрицы

достижимости и контрдостижимости орграфа G :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем матрицу

$$F = C * L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

сильных компонент связности орграфа G :

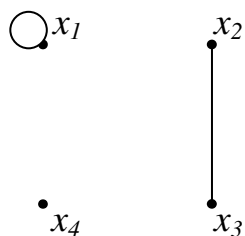


Рис. 15

Таким образом, данный орграф G содержит три сильные компоненты связности $G_1 = (S_1, U_1)$, $G_2 = (S_2, U_2)$ и $G_3 = (S_3, U_3)$, где $S_1 = \{x_1\}$, $S_2 = \{x_2, x_3\}$, $S_3 = \{x_4\}$, диаграммы которых изображены на рис. 15.

§9. Метрические характеристики графа

Пусть $G = (S, U)$ – связный граф и x_i, x_j – две его произвольные вершины.

Определение 9.1. *Расстоянием $d(x_i, x_j)$ между вершинами x_i и x_j называется длина кратчайшего маршрута, соединяющего эти вершины.*

Из определения 9.1. непосредственно следует:

- 1) кратчайший маршрут между вершинами является простой цепью;
- 2) $d(x_i, x_i) = 0$.

Определение 9.2. *Эксцентриситетом вершины x называется величина*

$$e(x) = \max_{y \in S} d(x, y). \quad (1)$$

Таким образом, эксцентриситет вершины равен расстоянию от данной вершины до наиболее удаленной от нее.

Определение 9.3. *Диаметром $d(G)$ графа G называется максимальный из всех эксцентриситетов вершин графа G , т.е.*

$$d(G) = \max_{x \in S} e(x) = \max_{x \in S} \max_{y \in S} d(x, y). \quad (2)$$

Определение 9.4. Вершина x называется *периферийной*, если $e(x) = d(G)$.

Определение 9.5. *Диаметральной цепью* называется простая цепь, расстояние между концами которой равно $d(G)$.

Теорема 9.1. Для любого связного графа G справедливо неравенство $d(G) \leq \text{rank } G$.

Определение 9.6. *Радиусом $r(G)$ графа G называется минимальный из всех эксцентриситетов вершин графа G , т.е.*

$$r(G) = \min_{x \in S} e(x) = \min_{x \in S} \max_{y \in S} d(x, y). \quad (3)$$

Определение 9.7. Вершина x называется *центральной*, если $e(x) = r(G)$.

Определение 9.8. Множество всех центральных вершин графа называется его *центром*.

Заметим, что центр может состоять как из одной, так и из нескольких вершин.

Пример 9.1. Найти эксцентриситеты вершин, радиусы и диаметры графа G , изображенного на рис. 16, периферийные и центральные вершины. Привести пример диаметральной цепи.

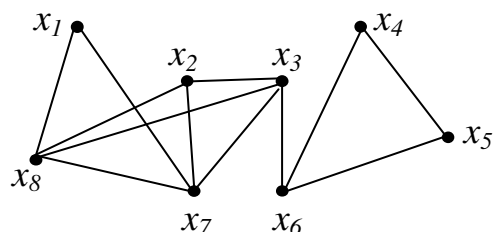


Рис. 16

Решение. Найдем эксцентриситеты всех вершин G : $e(x_1) = e(x_4) = e(x_5) = 4$, $e(x_2) = e(x_6) = e(x_7) = e(x_8) = 3$, $e(x_3) = 2$.

Следовательно, $d(G) = 4$, $r(G) = 2$. Получаем, что вершины x_1 , x_4 и x_5 являются периферийными, а вершина x_3 — центральной. Одной из диаметральных цепей является $x_1 - x_7 - x_3 - x_6 - x_5$.

§10. Деревья и их свойства. Лес

Определение 9.1. Любой связный неориентированный граф, не содержащий циклов, называется (*неориентированным*) **деревом**.

Определение 9.2. Любой неориентированный граф без циклов называется **лесом** или **ациклическим графом**.

Таким образом, компонентами связности любого леса являются деревья.

На рис. 17 показан лес, состоящий из двух деревьев.

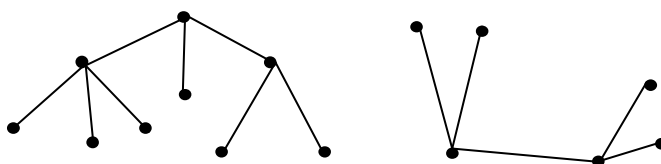


Рис. 17

Свойства деревьев сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 9.1. Пусть $G = (S, U)$ и $|S| = n$, $|U| = m$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) G — дерево;
- 2) G — связный граф и $m = n - 1$;
- 3) G — ациклический граф и $m = n - 1$;
- 4) любые две различные вершины графа соединяет единственная простая цепь;
- 5) G — ациклический граф, такой, что если какую-либо пару его несмежных вершин соединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно один цикл.

Теорема 9.2 (Кэли). Число деревьев с n занумерованными вершинами равно n^{n-2} .

Определение 9.3. *Ориентированным деревом (ордеревом)* называется ориентированный граф $G = (S, U)$, удовлетворяющий следующим двум условиям:

- 1) Существует единственная вершина $x_i \in S$, называемая **корнем**, не имеющая предшествующих вершин (т. е. $\deg^-(x_i) = 0$).
- 2) Любой вершине x_j , отличной от x_i , в орграфе G непосредственно $\deg^-(x_j) = 1$

предшествует ровно одна вершина (т. е. $\deg^-(x_j) = 1$).

Определение 9.4. *Узлом* ордерова называется вершина, отличная от корня.

Определение 9.5. *Листом* ордерова называется вершина x такая, что $\deg^-(x) = 1$ и $\deg^+(x) = 0$.

Определение 9.6. *Ветвью* ордерова называется путь из корня в лист.

Определение 9.7. *Высотой* ордерова называется длина его наибольшей ветви.

Определение 9.8. *Уровнем вершины* ордерова называется расстояние от корня до этой вершины.

Отметим, что корень имеет уровень 0.

Определение 9.9. *Ярусом ордерова* называется множество вершин одного уровня.

Замечание 9.1. Неориентированное дерево можно преобразовать в ориентированное, выбрав в качестве корня произвольную вершину. На рис. 4 корень графа – вершина x_7 .

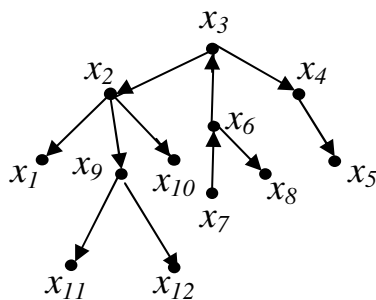


Рис. 18

Пример 9.1. Рассмотрим ордер, изображенный на рис. 18. Тогда: все вершины, кроме x_7 являются узлами ордерова; вершины $x_1, x_5, x_8, x_{10}, x_{11}, x_{12}$ – листьями; путь $x_7 \rightarrow x_6 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2 \rightarrow x_{10}$ – одна из ветвей; высота ордерова равна 5; множество вершин $\{x_1, x_5, x_9, x_{10}\}$ уровня 4 образуют один из ярусов ордерова.

Определение 9.10. *Остовом* неорграфа $G = (S, U)$ называется его часть $G' = (S', U')$, такая, что $S' = S$ и G' – лес, образующий дерево на любой связной компоненте графа G .

компоненте графа G .

Из определения 9.10 следует, что если G – связный неорграф, то остов G' является деревом, которое будем называть **остовным деревом** графа G .

Определение 9.11. *Остовом* орграфа G называется его часть G' , такая, что ассоциированный с G' неорграф $F(G')$ является остовом графа $F(G)$.

Понятие остовного дерева для связного орграфа вводится аналогично.

Замечание 9.2. 1) В каждом графе существует остов, который можно получить, разрушая в каждой связной компоненте циклы, то есть удаляя лишние ребра.

2) Остов графа определяется неоднозначно.

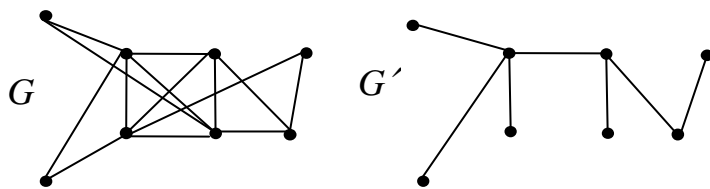


Рис. 19

Пример 9.2. На рис. 19 изображены неорграф G и один из его остовов G' .

Для подсчета числа остовов в неорграфе используется матрица Кирхгофа.

Теорема 9.3 (Кирхгофа). Число остовных деревьев в связном неорграфе G порядка $n \geq 2$ равно алгебраическому дополнению любого элемента матрицы Кирхгофа.

Из определения дерева вытекает следующая теорема.

Теорема 9.4. Пусть $G = (S, U)$ – произвольный неорграф, $|S| = n$, $|U| = m$, k – число компонент связности графа G . Число ребер, которые необходимо удалить для получения остова, не зависит от последовательности их удаления и равно $m - n + k$.

Доказательство. Пусть i -я компонента связности G_i содержит n_i вершин и m_i ребер. По условию G – связный граф. Следовательно, остов G'_i графа G_i является деревом, а значит, он содержит $n_i - 1$ ребро. Таким образом, для получения остова G'_i из i -й компоненты связности G_i требуется удалить $m_i - (n_i - 1)$ ребер.

Просуммируем удаляемые ребра по всем компонентам связности,

$$\sum_{i=1}^k m_i = m, \quad \sum_{i=1}^k n_i = n.$$

учитывая,

что

Получим

$$\sum_{i=1}^k (m_i - n_i + 1) = m - n + k.$$

Определение 9.12. Число $\nu(G) = m - n + k$ называется **цикломатическим числом** или **циклическим рангом** графа G .

Определение 9.13. Число $\nu^*(G) = n - k$ называется **коциклическим рангом** или **корангом**.

Таким образом, $\nu^*(G)$ равно числу ребер, входящему в любой остов графа G . Очевидно, что $\nu(G) + \nu^*(G) = m$.

Из теоремы 9.4 непосредственно вытекают два следствия.

Следствие 9.4.1. Неорграф G является лесом тогда и только тогда, когда $\nu(G) = 0$.

Следствие 9.4.2. Неорграф G имеет единственный цикл тогда и только тогда, когда $\nu(G) = 1$.

Пример 9.3. Найти для графа G , изображенного на рис. 5, цикломатическое число и коциклический ранг.

Решение. Граф G имеет 8 вершин, 14 ребер и 1 компоненту связности. Тогда, согласно по теореме 9.4, цикломатическое число $\nu(G) = 14 - 8 + 1 = 7$, а коциклический ранг $\nu^*(G) = 8 - 1 = 7$.

§11. Эйлеровы цепи и циклы

Пусть G – псевдограф.

Определение 10.1. *Цепь (цикл)* называется *эйлеровым (эйлеровой)*, если она (он) проходит по одному разу через каждое ребро псевдографа G .

Определение 10.2. *Псевдограф G* называется *эйлеровым*, если он содержит эйлеров цикл.

Заметим, что эйлеров псевдограф можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не повторяя линий.

Теорема 10.1. Для того чтобы связный псевдограф обладал эйлеровым циклом, необходимо и достаточно, чтобы степени его вершин были четными.

Теорема 10.2. Для того чтобы связный псевдограф обладал эйлеровой цепью, необходимо и достаточно, чтобы он имел ровно две вершины нечетной степени.

Таким образом, мы имеем легко проверяемые необходимые и достаточные условия существования в произвольном связном псевдографе эйлерова цикла или эйлеровой цепи.

Пример 10.1 (решение задачи о кенигсбергских мостах). Поставим в соответствие схеме центральной части города Кенигсберг, приведенной на рис. 1, мультиграф G , изображенный на рис. 20, в котором каждой части суши соответствует вершина, а каждому мосту – ребро, соединяющее соответствующие вершины. На языке теории графов задача формулируется следующим образом: найти эйлеров цикл в мультиграфе G .

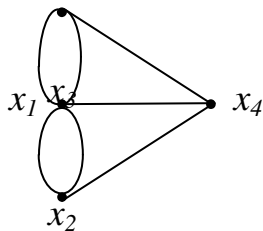
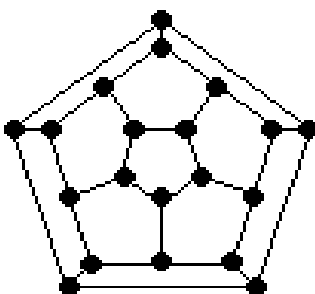


Рис. 20

Воспользуемся теоремой 10.1. Заметим, что для мультиграфа G , изображенного на рис. 5, имеем $\deg(x_1) = 5$, $\deg(x_2) = \deg(x_3) = \deg(x_4) = 3$, то есть необходимое и достаточное условие существования эйлерова цикла не выполняется, следовательно, мультиграф G не обладает эйлеровым циклом.

§12. Гамильтоновы цепи и циклы

В 1857 году математик Гамильтон придумал игру «Кругосветное путешествие». Она включала додекаэдр (правильный многогранник), двенадцать граней которого представляли собой равные правильные пятиугольники. В каждой из двадцати вершин тела, просверливалась дырка, в которую вставлялся колышек, изображавший город (столицу). Используя веревку, требовалось найти путь через города, посетив каждый город один раз, и вернуться в исходный город. Додекаэдр на плоскости изображается так, как показано на рис. 21.



На языке теории графов задача сводится к нахождению в псевдографе простого цикла, проходящего через каждую вершину. Отсюда любой цикл псевдографа,

обладающий таким свойством, называется циклом.

гамильтоновым

Определение 11.1. *Простая цепь (цикл)* в псевдографе G называется *гамильтоновой (гамильтоновым)*, если она (он) проходит через каждую вершину псевдографа G .

Рис. 21

Определение 11.2. Псевдограф, у которого есть гамильтонов цикл, называется *гамильтоновым графом*.

Очевидно, вопросы существования гамильтоновых цепей и циклов в псевдографах сводятся к аналогичным вопросам для простых графов. Следует отметить, что до сих пор неизвестны необходимые и достаточные условия существования в произвольном простом графе гамильтонова цикла или гамильтоновой цепи.

Однако имеется класс графов, в которых заведомо существуют гамильтоновы цепи и циклы – это полные графы. Таким образом, полнота графа является простейшим достаточным условием существования гамильтоновых цепей и циклов в простом графе.

Очевидным простейшим необходимым условием существования гамильтоновых цепей и циклов в простом графе является его связность. Более тонким необходимым условием существования гамильтоновых цепей и циклов в простом графе является отсутствие в нем точек сочленения, то есть вершин, удаление которых увеличивает число компонент связности.

§13. Планарные графы

В замечании 3.1. отмечалось, что граф с точностью до изоморфизма можно изобразить разными диаграммами. На практике при изготовлении микросхем возникает задача изображения схемы радиоэлектронного устройства, представляющей собой граф, на плоскости так, чтобы проводники не пересекались. Аналогичная задача возникает при проектировании железнодорожных и других путей, где нежелательны переезды.

Таким образом, возникает потребность введения понятия плоского графа.

Определение 12.1. *Плоским* называется граф, вершины которого являются точками плоскости, а ребра – непрерывными плоскими линиями без самопересечений, причем никакие два ребра не имеют общих точек, кроме быть может, инцидентной им обоим вершины.

Определение 12.2. *Планарным* называется любой граф, изоморфный плоскому графу.

Все планарные графы укладываются на плоскости (имеют плоскую укладку).

Пример 12.1. На рис. 22 изображен планарный граф G и изоморфный ему плоский граф \tilde{G} (плоская укладка графа G).

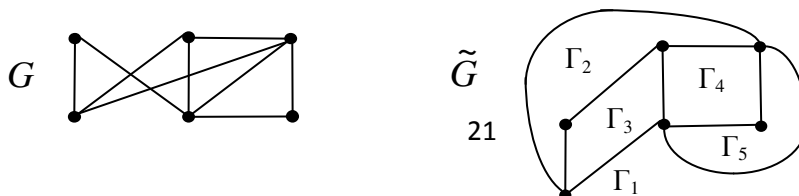


Рис. 22

Очевидно, что следующие утверждения справедливы:

- 1) любой подграф планарного графа планарен;
- 2) граф планарен тогда и только тогда, когда каждая связная компонента этого графа является планарным графом.

Определение 12.3. *Гранью* плоского графа называется множество точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена плоской кривой, не пересекающей ребер этого графа.

Определение 12.4. *Границей грани* плоского графа называется множество вершин и ребер, принадлежащих этой грани.

Пример 12.2. Плоский граф \tilde{G} на рис.1 имеет пять граней: $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$. Неограниченная грань Γ_1 называется *внешней*, а остальные грани: $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$ – *внутренними*.

Теорема 12.1 (Эйлера). Пусть $G = (S, U)$ – связный планарный граф порядка n и $|S| = n, |U| = m$, f – число граней плоского графа. Тогда справедливо равенство

$$n - m + f = 2 \quad (1)$$

Доказательство. Пусть G' – некоторый остов графа G . Он имеет всего одну внешнюю грань, n вершин и $n - 1$ ребер, поэтому формула (1) для остова G' выполняется. Будем поочередно добавлять к остову G' недостающие ребра графа G . При каждом добавлении число вершин не изменится, число ребер и число граней увеличится на единицу.

Таким образом, формула (1) будет верна для всякого графа, получающегося в результате таких операций, а поскольку графом G заканчивается вся эта процедура, то формула (1) будет верна и для него. †

Известны несколько критериев планарности графа. Для формулировки одного из них введем понятие гомеоморфизма графов.

Определение 12.5. Два графа называются *гомеоморфными*, если они могут быть получены из одного и того же графа подразбиением его ребер.

На рис. 23 изображен исходный граф G и два гомеоморфных графа G_1 и G_2 .

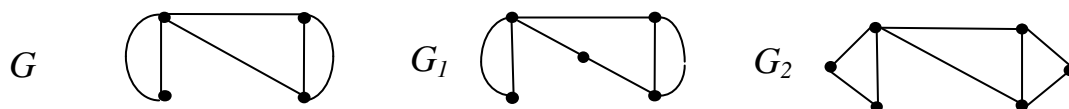


Рис. 23

Теорема 12.2 (Понтрягина – Куратовского). Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.

Следующая теорема представляет собой эквивалентную формулировку критерия планарности 12.2.

Теорема 12.3. Граф планарен тогда и только тогда, когда в нем нет подграфов, стягиваемых к графам K_5 или $K_{3,3}$.

Для непланарных графов вводятся характеристики, представляющие ту или иную меру непланарности.

Определение 12.6. *Искаженностью* $sk(G)$ графа G или *числом планарности* называется наименьшее число ребер, удаление которых приводит к планарному графу.

Для полного графа порядка n справедлива следующая формула:

$$sk(K_n) = C_n^2 - 3n + 6, n \geq 3. \quad (2)$$

Определение 12.7. *Толщина* $t(G)$ графа G называется наименьшее число планарных подграфов графа G , объединение которых дает сам граф.

Толщина графа равна минимальному числу плоскостей k , при котором граф G разбивается на плоские части G_1, G_2, \dots, G_k .

Очевидно, что толщина планарного графа равна единице. Для полного графа порядка n справедлива следующая формула:

$$t(K_n) = \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil. \quad (3)$$

§14. Раскраска графов. Хроматические графы

Пусть $G = (S, U)$ – неориентированный граф.

Определение 13.1. *Раскраской графа* называется такое приписывание цветов его вершинам, что любые две смежные вершины были окрашены в различные цвета.

Определение 13.2. *Хроматическим числом* $\chi(G)$ графа G называется минимальное число цветов, требующееся для его раскраски. При этом если $\chi(G) = k$, то граф G называется *k-хроматическим*.

Найдем хроматические числа некоторых известных графов. Например, $\chi(K_n) = n$, $\chi(\overline{K_n}) = 1$, $\chi(K_{n,m}) = 2$, $\chi(D) = 2$, где $\overline{K_n}$ – дополнение к графу K_n , а D – дерево.

Задачи раскраски вершин и ребер графа занимают важное место в истории развития теории графов и в самой теории. К построению раскрасок сводятся многие практические задачи, например, задачи составления расписаний, распределения оборудования и другие. Широкое применение задача раскраски графов имеет в программировании, особенно при решении фундаментальных теоретических проблем.

Проблема раскраски планарных графов является одной из самых знаменитых проблем теории графов. Она возникла из задачи раскраски географической карты, при которой любые две соседние страны должны быть окрашены в различные цвета.

В 1879 г. английский математик Кэли сформулировал *гипотезу четырех красок*: «Всякий планарный граф 4-раскрашиваем».

Попытки доказать эту гипотезу привели к 1890 г. к появлению следующей теоремы.

Теорема 13.1 (Хивуда). Всякий планарный граф 5-раскрашиваем.

В 1976 г. американские математики К. Appel и В. Хейкен доказали гипотезу четырех красок, существенно используя при этом компьютерные вычисления. Следует отметить, что такое доказательство является очень сложным и трудно воспроизводимым, поэтому оно не удовлетворяет многих математиков.

Список литературы

1. Андерсон Дж.А. Дискретная математика и комбинаторика. – М.: Вильямс, 2004.
2. Асанов М.О. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы: учебное пособие / М.О. Асанов, В.А. Баранский, В.В. Расин. – СПб.: Лань, 2010.
3. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера. – СПб.: Лань, 2007.
4. Лапшин А.Б. Дискретная математика и математическая логика. Ч.4. Элементы теории графов / А.Б.Лапшин, О.Б. Садовская. – Кострома, Изд-во Костром. гос. технол. ун-та, 2005.
5. Нефедов В.Н. Курс дискретной математики: Учеб пособие / В.Н. Нефедов, В.А. Осипова. – М: Изд-во МАИ, 1992.
6. Палий И.А. Дискретная математика. Курс лекций / И.А. Палий. – М.: Эксмо, 2008.
7. Редькин Н.П. Дискретная математика: Курс лекций для студентов-механиков: Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2006.
8. Судоплатов С.В. Дискретная математика: Учебник / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. – М.: ИНФРА-М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007.
9. Шапорев С.Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006.
10. Шепелев Ю.П. Дискретная математика. Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2008.