§ 4. Частные производные. Полный дифференциал

§ 4.1. Теоретический материал

Определение частных производных

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x;y)$, определенную и непрерывную в некоторой области D. Считаем, что точки с координатами $(x;y)$, $(x+\Delta x;y)$, $(x;y+\Delta y)$, $(x+\Delta x;y+\Delta y)$, где Δx, Δy — приращения аргументов, также принадлежат области D.

⇛ ***Частными приращениями*** функции $z = f(x;y)$ по независимым переменным x и y называются разности $\Delta_x z = f(x+\Delta x;y) - f(x;y)$, $\Delta_y z = f(x;y+\Delta y) - f(x;y)$.

⇛ ***Полным приращением*** функции $z = f(x;y)$, соответствующим приращениям аргументов Δx и Δy, называется разность $\Delta z = f(x+\Delta x;y+\Delta y) - f(x;y)$.

Заметим, что в общем случае $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

⇛ ***Частной производной*** функции $z = f(x;y)$ по переменным x и y называется предел отношения соответствующего частного приращения $\Delta_x z$ или $\Delta_y z$ к приращению данной переменной, при условии, что приращение переменной стремится к нулю:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \quad z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Приняты также обозначения: z'_x, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)$, $\frac{\partial}{\partial x}z$, $\frac{\partial}{\partial x}f$, $\frac{\partial}{\partial x}f(x;y)$ (аналогично по другой переменной).

Геометрический смысл частной производной

Исходим из рис. 126, на котором изображен график Г функции $z = f(x; y)$; $P_0(x_0; y_0; z_0)$ — точка на графике, $M_0(x_0; y_0)$ — проекция P_0 на плоскость Oxy, $z_0 = M_0P_0$. Через прямую M_0P_0 проведены две плоскости p_1 и p_2: p_1 параллельна плоскости Oxz, p_2 параллельна плоскости Oyz.

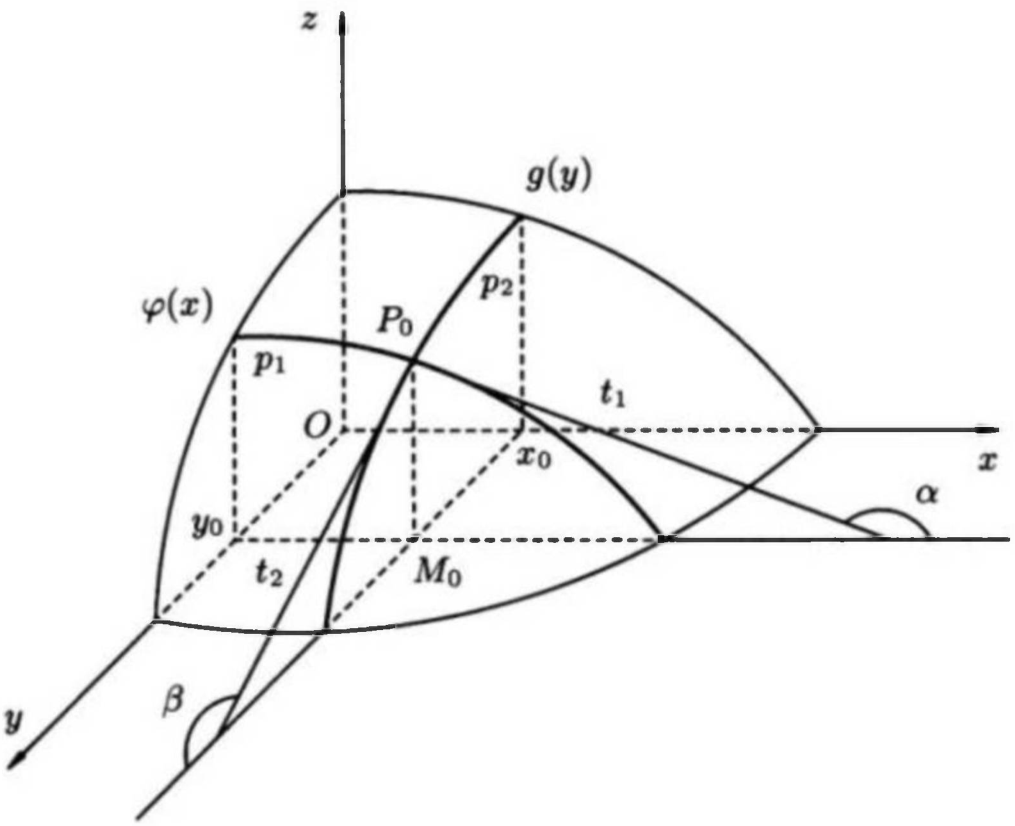

Рисунок 126

Сечение Г с первой плоскостью представляет собой кривую $z = f(x; y_0) = \varphi(x)$ — функцию переменной x, а сечение Г с p_2 представляет кривую $z = f(x_0; y) = g(y)$ — функцию переменной y. На чертеже изображены также касательные t_1 к $\varphi(x)$ в точке P_0 и t_2 — к $g(y)$ в точке P_0. Тогда $z'_x(x_0; y_0) = \varphi'(x_0) = k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$ — угловой коэффициент t_1, α_1 — угол наклона t_1 к Ox, $z'_y(x_0; y_0) = g'(y_0) = k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ — угловой коэффициент t_2, α_2 — угол наклона t_2 к Oy.

Дифференциал функции

Если функция $f(x;y)$ обладает частными производными f'_x и f'_y, непрерывными в точке $M_0(x_0;y_0)$, то теорема Лагранжа (конечных приращений) для функции одной переменной позволяет получить следующее приближенное равенство (при $\Delta x \sim 0$, $\Delta y \sim 0$):

$$
\begin{aligned}
\Delta z &= f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) - f(x_0;y_0) = \\
&= f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) - f(x_0; y_0+\Delta y) + f(x_0; y_0+\Delta y) - f(x_0;y_0) = \\
&= f'_x(x_0+\theta_1\Delta x; y_0+\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0; y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y \approx \\
&\approx f'_x(x_0;y_0)\Delta x + f'_y(x_0;y_0)\Delta y
\end{aligned}
$$

($0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_1 < 1$ — некоторые числа, фигурирующие в теореме Лагранжа).

Таким образом, полное приращение функции приближенно равно $f'_x(x_0;y_0)\Delta x + f'_y(x_0;y_0)\Delta y$.

⇛ Это выражение представляет собой главную, линейную часть приращения функции и называется ***дифференциалом*** этой функции в данной точке.

Обозначение: $dz = z'_x dx + z'_y dy$ (здесь $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ — произвольные приращения аргументов). Приняты также обозначения: $d_x z = z'_x dx$, $d_y z = z'_y dy$ — частные дифференциалы функции z. Тогда $dz = d_x z + d_y z$ — полный дифференциал функции z.

Как правило, под дифференциалом функции будем понимать полный дифференциал.

⇛ Если полное приращение Δz функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ можно представить в виде $\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \varepsilon_1\cdot\Delta x + \varepsilon_2\cdot\Delta y$, где A и B не зависят от Δx и Δy, а $(\varepsilon_1;\varepsilon_2) \to (0,0)$ при $(\Delta x;\Delta y) \to (0;0)$, то функция $f(x;y)$ называется дифференцируемой в точке M_0.

Теорема 11.8. Для того, чтобы функция $z = f(x;y)$ была дифференцируемой в данной точке, достаточно, чтобы она обладала частными производными, непрерывными в этой точке.

Сравнивая Δz и dz, заключаем, что они являются величинами одинакового порядка малости при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, т. е. $\Delta z \approx dz$ ($\Delta x \sim 0$, $\Delta y \sim 0$). Это приближенное равенство (тем точнее, чем меньше Δx и Δy), записанное в виде

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y$$

называется *линеаризацией* функции $z = f(x; y)$ в окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$.

Это соотношение применяется в приближенных вычислениях: дифференцируемую функцию можно заменить линейной функцией в окрестности рассматриваемой точки.

Замечание. Понятие частных производных, дифференциала, линеаризации распространяются на функции трех и более переменных.