§ 6. Частные производные и дифференциалы высших порядков

§ 6.1. Теоретический материал

Определение частных производных второго порядка

Если задана функция z=f(x;y) и вычислены ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)$, то они, вообще говоря, могут быть также дифференцируемыми функциями двух независимых переменных x и y. Приняты обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$
 — вторая частная производная по x ;

 $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ — смешанные частные производные второго порядка;

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$
 — вторая частная производная по y .

Теорема 11.13 (Шварца). Если смешанные частные производные второго порядка непрерывны, то они равны между собой. Другими словами, результат смешанного дифференцирования не зависит от порядка.

Дифференциал второго порядка

Выражение

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

называется вторым дифференциалом или дифференциалом второго порядка для функции z.

Производные и дифференциалы высших порядков

По аналогии можно определить частные и смешанные производные высших порядков, часть которых, согласно теореме Шварца, равны между собой.

Таким образом, имеем три различных производных второго порядка, четыре различных производных третьего порядка

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$$
, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$

и так далее.

Число разных частных производных порядка n от функции двух переменных равно n+1:

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y}, \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2} \partial y^2}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial x^2 \partial y^{n-2}}, \frac{\partial^n z}{\partial x \partial y^{n-1}}, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}.$$

Дифференциалы высших порядков определяются по аналогии:

$$d^3z = d(d^2z) = \frac{\partial^3z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3z}{\partial x^2\partial y}dx^2\,dy + 3\frac{\partial^3z}{\partial x\partial y^2}dx\,dy^2 + \frac{\partial^3z}{\partial y^3}dy^3.$$

Выражение для $d^n z$ формально можно записать в виде

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n(z),$$

напоминающем формулу бинома Ньютона.