Моделирование процесса остывания тела путем теплообмена через границу раздела двух сред

Теория

В конце 17 века британский ученый *Исаак Ньютон* изучал охлаждение тел. Эксперименты показали, что скорость охлаждения примерно пропорциональна разнице температур между нагретым телом и окружающей средой. Этот факт можно записать в виде дифференциального уравнения:

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha A\left(T_S - T\right),$$

где Q – количество теплоты, A – площадь поверхности тела, через которую передается тепло, T – температура тела, T_S – температура окружающей среды, α – *коэффициент теплопередачи*, зависящий от геометрии тела, состояния поверхности, режима теплопередачи и других факторов.

Поскольку $Q = CT$, где C – *теплоемкость* тела, то дифференциальное уравнение можно записать как

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\alpha A}{C}\left(T_S - T\right) = k\left(T_S - T\right).$$

Решение данного уравнение имеет вид:

$$T(t) = T_S + \left(T_0 - T_S\right)e^{-kt},$$

где T_0 обозначает начальную температуру тела.

Таким образом, температура тела уменьшается экспоненциально по мере охлаждения, приближаясь к температуре окружающей среды. Скорость охлаждения зависит от параметра $k = \frac{\alpha A}{C}$ (*коэффициента теплопроводности*). С увеличением коэффициента k (например, вследствие увеличения площади поверхности), тело будет охлаждаться быстрее (рисунок 1.)

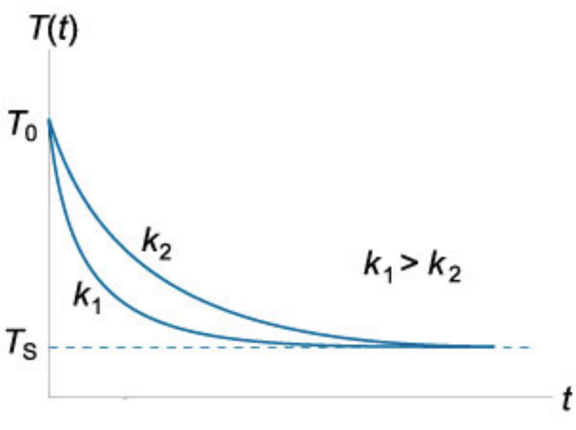

Рис.1

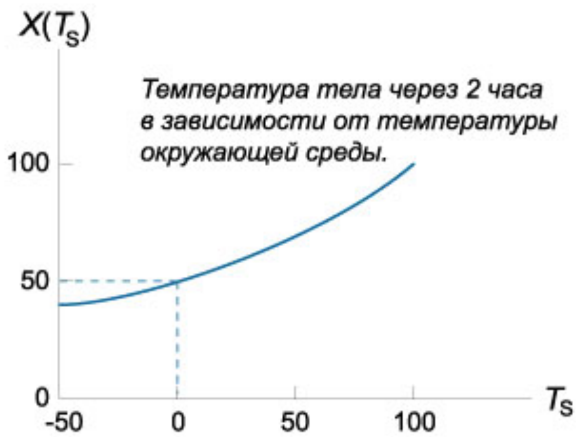

Рис.2

Пример 1.

Температура тела уменьшилась с 200° до 100° за первый час. Определить на сколько градусов понизится температура еще через один час, если температура окружающей среды 0°?

Решение.
Мы решим задачу сначала для случая произвольной температуры окружающей среды, а затем вычислим конечную температуру тела при температуре среды 0°.

Пусть начальная температура нагретого тела составляет $T_0 = 200^\circ$. Последующее изменение температуры описывается формулой:

$$T(t) = T_S + (T_0 - T_S)e^{-kt} = T_S + (200^\circ - T_S)e^{-kt}.$$

В конце первого часа тело охладилось до 100°. Следовательно, можно записать следующее соотношение:

$$T(t=1) = 100^\circ = T_S + (200^\circ - T_S)e^{-k\cdot 1}, \Rightarrow 100^\circ = T_S + (200^\circ - T_S)e^{-k}.$$

Спустя 2 часа температура тела становится равной X градусов:

$$X = T_S + (200^\circ - T_S)e^{-2k}.$$

Таким образом, мы получили систему двух уравнений с тремя неизвестными: T_S, k и X:

$$\begin{cases} 100 = T_S + (200 - T_S)e^{-k} \\ X = T_S + (200 - T_S)e^{-2k} \end{cases}.$$

Мы не можем однозначно определить температуру тела X через 2 часа из данной системы. Однако можно вывести зависимость X от температуры окружающей среды T_S. Выразим функцию e^{-k} из первого уравнения:

$$e^{-k} = \frac{100 - T_S}{200 - T_S}.$$

Тогда

$$e^{-2k} = \left(e^{-k}\right)^2 = \left(\frac{100 - T_S}{200 - T_S}\right)^2.$$

Следовательно, зависимость $X\left(T_S\right)$ имеет вид:

$$X\left(T_S\right) = T_S + \left(200 - T_S\right)\left(\frac{100 - T_S}{200 - T_S}\right)^2 = T_S + \frac{\left(100 - T_S\right)^2}{200 - T_S}.$$

Если, например, положить температуру окружающей среды равной нулю, то температура тела через два часа будет составлять

$$X\left(T_S = 0\right) = 0 + \frac{\left(100 - 0\right)^2}{200 - 0} = \frac{10000}{200} = 50^\circ.$$

Зависимость температуры тела X от температуры окружающей среды в данной задаче показана выше на рисунке 2.

Пример 2.

Тело с начальной температурой T_0 помещено в комнату с температурой T_{S0} и начинает охлаждаться в соответствии с законом Ньютона с постоянной величиной k. При этом температура комнаты медленно растет по линейному закону

$$T_S = T_{S0} + \beta t,$$

где β − известный параметр. Определить момент времени τ, когда температура тела и окружающей среды сравняются.

Решение.
Прежде всего, отметим разницу со случаем когда тело охлаждается в среде, температура которой постоянна. В этом случае температура тела формально будет бесконечно долго приближаться к температуре окружающей среды. В нашей же задаче температура среды линейно возрастает. Поэтому, рано или поздно температура тела станет равной температуре среды, то есть задача имеет решение. Будем считать также, что соблюдается квазистационарный режим, т.е. все переходные процессы в системе быстро затухают.

В таком случае процесс можно описать дифференциальным уравнением:

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T_S - T\right).$$

По условию задачи, $T_S = T_{S0} + \beta t$. Следовательно, последнее уравнение можно записать в виде:

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T_{S0} + \beta t - T\right) \;\; \text{или} \;\; T' + kT = kT_{S0} + k\beta t.$$

Мы получили линейное дифференциальное уравнение, которое можно решить, например, с помощью интегрирующего множителя:

$$u\left(t\right) = e^{\int k dt} = e^{kt}.$$

Общее решение уравнения записывается в форме

$$T\left(t\right) = \frac{\int e^{kt}\left(kT_{S0} + k\beta t\right)dt + C}{e^{kt}} = \frac{kT_{S0}\int e^{kt}dt + k\beta\int e^{kt}tdt + C}{e^{kt}}.$$

Второй интеграл в числителе находится интегрированием по частям:

$$\int \underbrace{e^{kt}}_{u'}\underbrace{t}_{v}\,dt = \begin{bmatrix} u' = e^{kt} \\ u = \frac{1}{k}e^{kt} \\ v = t \\ v' = 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{k}e^{kt}t - \int \frac{1}{k}e^{kt}dt = \frac{1}{k}e^{kt}t - \frac{1}{k^2}e^{kt} = \frac{1}{k}e^{kt}\left(t - \frac{1}{k}\right).$$

Таким образом, закон охлаждения тела имеет следующий вид:

$$T(t) = \frac{kT_{S0}\cdot\frac{1}{k}e^{kt} + k\beta\cdot\frac{1}{k}e^{kt}\left(t-\frac{1}{k}\right) + C}{e^{kt}} = T_{S0} + \beta t - \frac{\beta}{k} + Ce^{-kt}.$$

Постоянная C определяется из начального условия $T(t=0) = T_0$. Тогда

$$C = T_0 - T_{S0} + \frac{\beta}{k}.$$

Итак, процесс охлаждения тела описывается формулой

$$T(t) = T_{S0} + \beta t - \frac{\beta}{k} + \left(T_0 - T_{S0} + \frac{\beta}{k}\right)e^{-kt}.$$

В момент τ, температуры тела и окружающей среды становятся равными друг другу:

$$T(\tau) = T_{S0} + \beta\tau.$$

Время τ определяется из уравнения:

$$\cancel{T_{S0} + \beta\tau} = \cancel{T_{S0} + \beta\tau} - \frac{\beta}{k} + \left(T_0 - T_{S0} + \frac{\beta}{k}\right)e^{-k\tau}, \Rightarrow \left(T_0 - T_{S0} + \frac{\beta}{k}\right)e^{-k\tau} = \frac{\beta}{k},$$

$$\Rightarrow \frac{k}{\beta}\left(T_0 - T_{S0} + \frac{\beta}{k}\right) = e^{k\tau}, \Rightarrow \frac{k}{\beta}(T_0 - T_{S0}) + 1 = e^{k\tau}, \Rightarrow \tau = \frac{1}{k}\ln\left[\frac{k}{\beta}(T_0 - T_{S0}) + 1\right].$$

Мы можем сделать оценку времени τ для некоторых типичных значений параметров:

$$T_{S0} = 20^\circ C, \quad k = \frac{1}{5}\,\text{мин}^{-1}, \quad \beta = 2\,\frac{\text{град}}{\text{мин}}, \quad T_0 = 200^\circ C.$$

В результате получаем:

$$\tau = \frac{1}{k}\ln\left[\frac{k}{\beta}(T_0 - T_{S0}) + 1\right] = \frac{1}{\frac{1}{5}}\ln\left[\frac{\frac{1}{5}}{2}(200-20) + 1\right] = 5\ln\left[\frac{1}{10}\cdot 180 + 1\right] = 5\ln 19 \approx 5\cdot 2.944$$

$$\approx 14.77\,[\text{мин}].$$

На примере реальной задачи об остывании чашки кофе рассматривается проблема акт
и-
визации познавательной деятельности обучаемых на всех уровнях системы образования.

Предлагается внедрение в учебный процесс
реальных задач, реализуемых с использованием
пакетов компьютерной математики.
Существуе
т определенная пробле
ма создания дополнительной мотивации обучаемых
при
изучении дисциплин, требующих математической подготовки (и не только базовой).
Проблема реальная, так как обучаемые хотят решать реальные задачи, что на младших ку
р-
сах даже технических вузов не всегда представляется возможным.
Обучаемые
на младших
курсах
не имеют соответствующей математической подготовки.
Выход можно искать в при-
менении прикладных пр
ограмм, разрабатываемых на основе пакетов компьютерной матем
а-
тики, таких как
Matlab
и
Mat
hcad
.
Рассмотрим практическую реализацию данной концепции
на примере задачи об остывании чашки кофе.
Формулировка проблемы
.
Посетитель зашел в кафе и заказал чашку кофе. Температура в помещении 18
С.
Посет
и-
тель считает комфортной температуру кофе
50
С. Требуется определить время, необходимое
для остывания
свежеприготовленного
кофе до комфортной
для посетителя
температуры.
Физическая модель
.

Природа остывания кофе и перенос тепла от чашки с кофе окружающему пространству в
общем случае включает в себя механизмы конвекции, излучения, испарения и теплопрово
д-
ности. Каждый из этих механизмов имеет свою физическую природу и может быть пре
д-
ставлен
различными физическими, а значит и математическими моделями.
Явление теплопроводности обусловлено градиентом температур и может играть сущ
е-
ст венную роль, если чашка поставлена на поверхность из материала с большим коэффицие
н-
том теплопроводности (на
пример, металл
).
Однако пренебречь механизмом теплопроводно-
сти можно
, предполагая, что поверхность стола и окружающий воздух имеют значительно
меньшее значение коэффициента теплопроводности.
Другой механизм остывания чашки за счет электромагнитного излучения не требует
наличия в окружающем пространстве вещества. Излучаемый тепловой поток пропорцион
а-
лен четвертой степени температуры. При этом светлые (и блестящие) тела не только мало
поглощают, но и мало излучают. Для кофе в светлой чашке механизм излучения
менее э
ф-
фективен, чем в темной.
Механизм испарения обусловлен
явлениями на поверхности, площадь поверхности про-
порциональна квадрату радиуса поверхности чашки. В тоже время объем чашки, определя-
ющий запас внутренней энергии, а значит и температуру, пропорционален кубу линейного
размера чашки. Исходя из этого механизмом испарения, по
-
видимому, можно пренебречь.

12. Остывание тел

Задачу остывания тела рассмотрим на примере остывания чашки кофе.

1. 1. Остывание чашки кофе

Природа переноса тепла от кофе к окружающему пространству сложна и в общем случае включает в себя механизмы конвекции, излучения и теплопроводности. В данном случае, когда разность температур между объектом и окружающей средой не очень велика, скорость изменения температуры объекта можно считать пропорциональной этой разности температур. Это утверждение более строго можно сформулировать на языке дифференциального уравнения:

, (1.1)

где T— температура тела,T_S — температура окружающей среды, r— «коэффициент остывания».

Этот «коэффициент остывания» зависит от механизма теплопередачи, площади тела, находящегося в контакте со средой и тепловых свойств самого тела. В зависимости от степени идеализации задачи он может быть либо числом, либо вычисляемым выражением. Это соотношение (1.1) называется *законом теплопроводности Ньютона*.

1. Задание 1.

Моделирование в системе MatLabпроцесса остывания чашки кофе и сравнение результатов с экспериментальными данными.

1. Занесите в виде двух векторов ttиyyэкспериментальные данные для остывания настоящей чашки кофе. Температура регистрировалась с точностью 0.1 °С. Температура окружающего воздуха равнялась 22.0 °С.

Время, мин.	T, °С	Время, мин.	T, °С	Время, мин.	T, °С	Вре ми
0.0	83.0	4.0	71.1	8.0	64.7	
1.0	77.7	5.0	69.4	9.0	63.4	
2.0	75.1	6.0	67.8	10.0	62.1	

3.0	73.0	7.0	66.4	11.0	61.0	

2. Постройте график экспериментальных данных