

§ 4. Частные производные. Полный дифференциал

§ 4.1. Теоретический материал

Определение частных производных

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x; y)$, определенную и непрерывную в некоторой области D . Считаем, что точки с координатами $(x; y)$, $(x + \Delta x; y)$, $(x; y + \Delta y)$, $(x + \Delta x; y + \Delta y)$, где $\Delta x, \Delta y$ — приращения аргументов, также принадлежат области D .

\Rightarrow Частными приращениями функции $z = f(x; y)$ по независимым переменным x и y называются разности $\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y)$, $\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y)$.

\Rightarrow Полным приращением функции $z = f(x; y)$, соответствующим приращениям аргументов Δx и Δy , называется разность $\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$.

Заметим, что в общем случае $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

\Rightarrow Частной производной функции $z = f(x; y)$ по переменным x и y называется предел отношения соответствующего частного приращения $\Delta_x z$ или $\Delta_y z$ к приращению данной переменной, при условии, что приращение переменной стремится к нулю:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \quad z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Приняты также обозначения: z'_x , $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x; y)$, $\frac{\partial}{\partial x} z$, $\frac{\partial}{\partial x} f$, $\frac{\partial}{\partial x} f(x; y)$ (аналогично по другой переменной).

Геометрический смысл частной производной

Исходим из рис. 126, на котором изображен график Γ функции $z = f(x; y)$; $P_0(x_0; y_0; z_0)$ — точка на графике, $M_0(x_0; y_0)$ — проекция P_0 на плоскость Oxy , $z_0 = M_0P_0$. Через прямую M_0P_0 проведены две плоскости p_1 и p_2 : p_1 параллельна плоскости Oxz , p_2 параллельна плоскости Oyz .

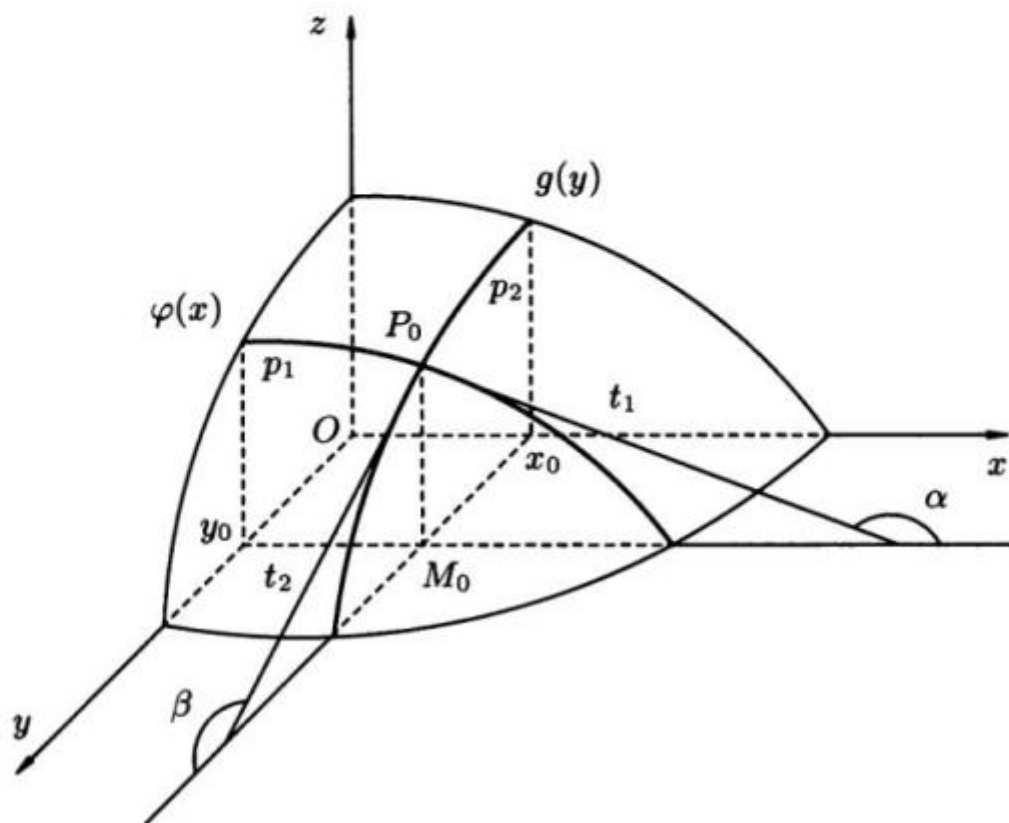


Рисунок 126

Сечение Γ с первой плоскостью представляет собой кривую $z = f(x; y_0) = \varphi(x)$ — функцию переменной x , а сечение Γ с p_2 представляет кривую $z = f(x_0; y) = g(y)$ — функцию переменной y . На чертеже изображены также касательные t_1 к $\varphi(x)$ в точке P_0 и t_2 — к $g(y)$ в точке P_0 . Тогда $z'_x(x_0; y_0) = \varphi'(x_0) = k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$ — угловой коэффициент t_1 , α_1 — угол наклона t_1 к Ox , $z'_y(x_0; y_0) = g'(y_0) = k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ — угловой коэффициент t_2 , α_2 — угол наклона t_2 к Oy .

Дифференциал функции

Если функция $f(x; y)$ обладает частными производными f'_x и f'_y , непрерывными в точке $M_0(x_0; y_0)$, то теорема Лагранжа (конечных приращений) для функции одной переменной позволяет получить следующее приближенное равенство (при $\Delta x \sim 0$, $\Delta y \sim 0$):

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) = \\ &= f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0 + \Delta y) + f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) = \\ &= f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x; y_0 + \Delta y) \Delta x + f'_y(x_0; y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta y \approx \\ &\approx f'_x(x_0; y_0) \Delta x + f'_y(x_0; y_0) \Delta y\end{aligned}$$

($0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$ — некоторые числа, фигурирующие в теореме Лагранжа).

Таким образом, полное приращение функции приближенно равно $f'_x(x_0; y_0) \Delta x + f'_y(x_0; y_0) \Delta y$.

\Rightarrow Это выражение представляет собой главную, линейную часть приращения функции и называется *дифференциалом* этой функции в данной точке.

Обозначение: $dz = z'_x dx + z'_y dy$ (здесь $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ — произвольные приращения аргументов). Приняты также обозначения: $d_x z = z'_x dx$, $d_y z = z'_y dy$ — частные дифференциалы функции z . Тогда $dz = d_x z + d_y z$ — полный дифференциал функции z .

Как правило, под дифференциалом функции будем понимать полный дифференциал.

\Rightarrow Если полное приращение Δz функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ можно представить в виде $\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \cdot \Delta x + \varepsilon_2 \cdot \Delta y$, где A и B не зависят от Δx и Δy , а $(\varepsilon_1; \varepsilon_2) \rightarrow (0, 0)$ при $(\Delta x; \Delta y) \rightarrow (0; 0)$, то функция $f(x; y)$ называется дифференцируемой в точке M_0 .

Теорема 11.8. Для того, чтобы функция $z = f(x; y)$ была дифференцируемой в данной точке, достаточно, чтобы она обладала частными производными, непрерывными в этой точке.

Сравнивая Δz и dz , заключаем, что они являются величинами одинакового порядка малости при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$, т. е. $\Delta z \approx dz$ ($\Delta x \sim 0$, $\Delta y \sim 0$). Это приближенное равенство (тем точнее, чем меньше Δx и Δy), записанное в виде

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y$$

называется *линеаризацией* функции $z = f(x; y)$ в окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$.

Это соотношение применяется в приближенных вычислениях: дифференцируемую функцию можно заменить линейной функцией в окрестности рассматриваемой точки.

Замечание. Понятие частных производных, дифференциала, линеаризации распространяются на функции трех и более переменных.