§ 3.2. Практическая работа (решение задач)

7.3.11. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \sin 3x}{\ln x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{x - \sin x}$.

◯ 1) Поскольку $\ln \sin 3x$ и $\ln x$ стремятся к бесконечности при $x \to 0$, то в данном случае имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \sin 3x}{\ln x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln \sin 3x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{3x \cdot \cos 3x}{\sin 3x} =$$

$$= 3 \lim_{x\to 0} \cos 3x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)} = 3 \cdot \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}} = 1.$$

В последнем равенстве мы воспользовались первым замечательным пределом.

2) $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = \lim\limits_{x\to 0} (x - \sin x) = 0$, поэтому имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^3)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(3x^2)'}{(1 - \cos x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{6x}{\sin x} = 6 \cdot \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = 6.$$

В этом примере правило Лопиталя применялось дважды. ●

Найти пределы:

7.3.12. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3 + x - 10}{x^3 - 3x - 2}$.

7.3.13. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$.

7.3.14. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$.

7.3.15. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

7.3.16. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^3}$.

7.3.17. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} 2x}$.

7.3.18. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0+0} x \ln x$;

2) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1}\right)$.

1) Здесь имеет место неопределенность вида $0 \cdot \infty$, которую мы раскроем, предварительно сведя ее к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$; а далее воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0+0} x\cdot \ln x = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = -\lim_{x\to 0+0} x = 0.$$

2) Имеем неопределенность $\infty - \infty$. Сведем ее к неопределенности $\frac{0}{0}$, приведя дроби к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\ln x)'} = \lim_{x\to 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)'}{\left(\ln x + 1 - \frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Правило Лопиталя в этом примере применялось дважды. ●

Найти пределы:

7.3.19. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 \cdot e^{-x}$.

7.3.20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$.

7.3.21. $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$.

7.3.22. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x^3} - \frac{1}{1-x^2}\right)$.

7.3.23. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

1) В этом случае имеем неопределенность вида 0^0. Неопределенности этого вида, также как и неопределенности вида 1^∞, ∞^0, можно найти, предварительно вычислив предел от логарифма функции.

Итак, обозначим $y = x^x$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \ln(x^x) = \lim_{x\to 0} x\ln x = 0$$

(задача 7.3.18). Таким образом,

$$\ln \lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} \ln y = 0,$$

откуда $\lim\limits_{x\to 0} y = 1$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$.

2) Здесь неопределенность вида 1^∞. Обозначив $y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$, найдем $\lim\limits_{x\to 0} \ln y$:

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \ln(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\ln(\cos x))'}{x'} = \lim_{x\to 0}(-\operatorname{tg} x) = 0.$$

Отсюда $\ln \lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} \ln y = 0$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1$. ●

Найти пределы, используя правило Лопиталя:

7.3.24. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{tg} x}$.

7.3.25. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

7.3.26. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

7.3.27. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{1+\ln x}}$.

7.3.28. Разложить многочлен $P(x) = x^4 - x^3 + 5x^2 - 4x + 1$ по степеням $x - 1$, используя формулу Тейлора.

❍ Так как $P^{(n)}(x) \equiv 0$ при $n \geqslant 5$, то в разложении данного многочлена по формуле Тейлора будут только слагаемые вида $\frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)$, где $k \leqslant 4$. Поэтому

$$P(x) = P(1) + \frac{P'(1)}{1!}(x-1) + \frac{P''(1)}{2!}(x-1)^2 +$$

$$+ \frac{P'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{P^{(IV)}(1)}{4!}(x-1)^4.$$

Учитывая, что $P(1) = 2$, $P'(1) = 7$, $P''(1) = 16$, $P'''(1) = 18$, $P^{(IV)}(1) = 24$, получим окончательно

$$P(1) = 2 + 7(x-1) + 8(x-1)^2 + 3(x-1)^3 + (x-1)^4.$$ ●

Разложить многочлен $P(x)$ по степеням $x - x_0$, если

7.3.29. $P(x) = x^3 + 4x^2 - 6x - 8$, $x_0 = -1$.

7.3.30. $P(x) = x^5 - 3x^4 + 7x + 2$, $x_0 = 2$.

7.3.31. **1)** Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке $x_0 = 1$;

2) Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$ до $o(x^3)$.

1) Сначала найдем формулу для n-го члена разложения. Так как

$$f'(1) = -1!,\ f''(1) = 2!,\ f'''(1) = -3!,\ f^{(IV)}(1) = 4!,\ \ldots,\ f^{(n)}(1) = (-1)^n \cdot n!,$$

то $\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = (-1)^n \cdot (x-1)^n$. Отсюда

$$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \ldots \cdots + (-1)^n \cdot (x-1)^n + o((x-1)^n), \quad x \to x_0.$$

2) Необходимо представить данную функцию в виде

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}(0) + \frac{\operatorname{arctg}'(0)}{1!}x + \frac{\operatorname{arctg}''(0)}{2!}x^2 + \frac{\operatorname{arctg}'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Учитывая, что

$$\operatorname{arctg}(0) = 0, \quad \operatorname{arctg}'(0) = \frac{1}{1+x^2}\bigg|_{x=0} = 1,$$

$$\operatorname{arctg}''(0) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\bigg|_{x=0} = 0, \quad \operatorname{arctg}'''(0) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}\bigg|_{x=0} = -2,$$

получим требуемое разложение:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$ ●

Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x)$ в точке x_0:

7.3.32. $f(x) = 2^x$, $x_0 = \log_2 3$.

7.3.33. $f(x) = \frac{x^2 \ln x}{2}$, $x_0 = 1$.

Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x)$ до $o(x^k)$, где

7.3.34. $f(x) = e^{2-x}$, $k = 4$.

7.3.35. $f(x) = \arcsin x$, $k = 3$.

Ответы

7.3.12. $1\frac{4}{9}$.

7.3.13. 1. **7.3.14.** 1. **7.3.15.** 0. **7.3.16.** $+\infty$. **7.3.17.** 0. **7.3.19.** 0. **7.3.20.** 0.
7.3.21. 1. **7.3.22.** ∞. **7.3.24.** 1. **7.3.25.** e^{-2}. **7.3.26.** 1. **7.3.27.** e.
7.3.29. $(x+1)^3 + (x+1)^2 - 11(x+1) + 1$.
7.3.30. $(x-2)^5 + 7(x-2)^4 + 16(x-2)^3 + 8(x-2)^2 - 9(x-2)$.

7.3.32. $3 + 3\ln 2 \cdot (x - \log_2 3) + \frac{3\ln^2 2(x-\log_2 3)^2}{2!} + \ldots$

$\ldots + \frac{3\ln^n 2(x-\log_2 3)^n}{n!} + o((x-\log_2 3)^n),\ x \to x_0$.

7.3.33. $\frac{1}{2}(x-1) + \frac{3(x-1)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} - \frac{(x-1)^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{(x-1)^5}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$

$\ldots + \frac{(-1)^{n-1}\cdot(x-1)^n}{(n-2)(n-1)\cdot n} + o((x-1)^n),\ x \to 1$.

7.3.34. $e^2 - e^2x + \frac{e^2x^2}{2!} - \frac{e^2x^3}{3!} + \frac{e^2x^4}{4!} + o(x^4)$. **7.3.35.** $x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.