

Лабораторная работа
«Моделирование процесса остывания тела путем
теплообмена через границу раздела двух сред»

Задача 1.

Природа переноса тепла от кофе к окружающему пространству сложна и включает в себя механизмы конвекции, излучения, испарения и теплопроводности. Исследовать зависимость остывания кофе в чашке при следующих исходных данных $t_{\text{среды}} = 22$, $t_{\text{жидкости}} = 83$, коэффициент остывания $\gamma = 0,0373$.

Требуется: 1) определить время, необходимое для остывания свежеприготовленного кофе до комфортной конкретно для каждого из вас (конкретного студента) температуры;

2) построить график, демонстрирующий процесса остывания кофе.

Модели

Физическая модель

Природа остывания кофе и перенос тепла от чашки с кофе окружающему пространству в общем случае включает в себя механизмы конвекции, излучения, испарения и теплопроводности. Каждый из этих механизмов имеет свою физическую природу и может быть представлен различными физическими, а значит и математическими моделями.

Явление теплопроводности обусловлено градиентом температур и может играть существенную роль, если чашка поставлена на поверхность из материала с большим коэффициентом теплопроводности (например, металл). Однако пренебречь механизмом теплопроводности можно, предполагая, что поверхность стола и окружающий воздух имеют значительно меньшее значение коэффициента теплопроводности.

Другой механизм остывания чашки за счет электромагнитного излучения не требует наличия в окружающем пространстве вещества. Излучаемый тепловой поток пропорционален четвертой степени температуры. При этом светлые (и блестящие) тела не только мало поглощают, но и мало излучают. Для кофе в светлой чашке механизм излучения менее эффективен, чем в темной.

Механизм испарения обусловлен явлениями на поверхности, площадь поверхности пропорциональна квадрату радиуса поверхности чашки. В тоже время объем чашки, определяющий запас внутренней энергии, а значит и температуру, пропорционален кубу линейного размера чашки. Исходя из этого механизм испарения, по-видимому, можно пренебречь.

Математическая модель

Природа переноса тепла от кофе к окружающему пространству сложна и в общем случае включает в себя механизмы конвекции, излучения и теплопроводности. В данном случае, когда разность температур между объектом и окружающей средой не очень велика, скорость изменения температуры объекта можно считать пропорциональной этой разности температур. Это утверждение более строго можно сформулировать на языке дифференциального уравнения:

$$\frac{dT}{dt} = -r(T - T_s) \quad (1.1)$$

где T — температура тела,

T_s — температура окружающей среды,

r — коэффициент остывания (коэффициент теплоотдачи).

Коэффициент остывания зависит от механизма теплопередачи, площади тела, находящегося в контакте со средой и тепловых свойств самого тела. В зависимости от степени идеализации задачи он может быть либо числом, либо вычисляемым выражением.

Соотношение (1.1) называется *законом теплопроводности Ньютона*.

В простейшем случае, если коэффициент r — константа, уравнение (1.1) можно решить аналитически:

$$\begin{aligned} \int \frac{d(T - T_s)}{T - T_s} &= -r \int dt \\ \ln(T - T_s) &= -rt + \text{Const} = -rt + \ln(T_0 - T_s) \\ T(t) &= T_s - (T_s - T_0) \cdot e^{-rt}, \end{aligned}$$

где T_0 — температура тела в момент времени $t = 0$.