Задание

6.2.1. Написать первые четыре члена последовательности $\{x_n\}$, если:

1) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;

2) x_n — n-й знак в десятичной записи числа e;

3) $x_1 = 1$, $x_n = x_{n-1} + 2$.

◐ 1) Подставляя поочередно $n = 1, 2, 3, 4$ в формулу для общего члена последовательности, найдем: $x_1 = -1$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_3 = -\dfrac{1}{3}$, $x_4 = \dfrac{1}{4}$.

2) Поскольку $e = 2{,}71828\ldots$, то $x_1 = 2$, $x_2 = 7$, $x_3 = 1$, $x_4 = 8$.

3) В соответствии с формулой $x_n = x_{n-1} + 2$ получим: $x_2 = x_1 + 2 = 3$, $x_3 = x_2 + 2 = 5$, $x_4 = x_3 + 2 = 7$. ●

Написать первые четыре члена последовательности $\{x_n\}$, если:

6.2.2. $x_n = 2^{n+1}$.

6.2.3. $x_n = n^2 + 2n + 3$.

6.2.4. $x_n = (-1)^n + 1$.

6.2.5. $x_n = \dfrac{n+1}{n^2}$.

6.2.6. $x_n = \sin\dfrac{\pi n}{2}$.

6.2.7. $x_1 = -1$, $x_n = -n \cdot x_{n-1}$.

Зная несколько первых членов последовательности $\{x_n\}$, написать формулу ее общего члена:

6.2.8. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$

6.2.9. $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$

6.2.10. $2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, \ldots$

6.2.11. $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$

6.2.12. Какие из следующих последовательностей ограничены сверху? ограничены снизу? ограничены?

1) $2, 4, 6, 8, \ldots$;

2) $-1, -4, -9, -16, \ldots$;

3) $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \ldots$;

4) $-2, 4, -8, 16, \ldots$

◑ 1) Данная последовательность, состоящая из всех четных положительных чисел, ограничена снизу, но не ограничена сверху.

2) Последовательность ограничена сверху ($x_n = -n^2 < 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$), но не ограничена снизу.

3) Последовательность ограничена, так как она ограничена снизу и сверху: $0 < x_n = \frac{1}{3^n} < 1$.

4) Последовательность $\{(-2)^n\}$ не ограничена, так как для любого числа $M > 0$ можно найти такой номер n, что $|x_n| = 2^n > M$. ●

Какие из следующих последовательностей $\{x_n\}$ ограничены, если:

6.2.13. $x_n = (-1)^n$.

6.2.14. $x_n = n^3 + 2n$.

6.2.15. $x_n = -\ln n$.

6.2.16. $x_n = \dfrac{n+1}{n}$.

6.2.17. $x_n = (-1)^n \cdot n$.

6.2.18. $x_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n=2k, \\ \sqrt{n} & \text{при } n=2k+1. \end{cases}$

6.2.19. Какие из следующих последовательностей монотонные, а какие — строго монотонные:

1) $x_n = 2n + 1$;

2) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;

3) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$;

4) $x_n = [\sqrt{n}]$;

5) $-1, -1, -2, -2, -3, -3, \dots$?

◑ 1) Данная последовательность строго возрастает, т. к. $x_{n+1} = 2(n+1)+1 = 2n+3 > 2n+1 = x_n$ для всех натуральных чисел n.

2) Последовательность $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots\right\}$ не является ни монотонной, ни строго монотонной, так как, например, $x_1 < x_2$, но $x_2 > x_3$.

3) $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\} = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots\right\}$ — убывающая последовательность, так как $x_n = \dfrac{1}{n^2} > x_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

4) Последовательность $\{[\sqrt{n}]\} = \{1, 1, 1, 2, 2, \dots\}$ — неубывающая, так как $x_{n+1} = [\sqrt{n+1}] \geqslant [\sqrt{n}] = x_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ и к тому же, например, $x_1 = x_2$.

5) Данная последовательность невозрастающая, так как $x_n \leqslant x_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$ и некоторые (например, первый и второй) члены этой последовательности равны между собой. ●

Какие из следующих последовательностей монотонные? строго монотонные? ограниченные?

6.2.20. $x_n = n - \frac{1}{n}$. **6.2.21.** $x_n = \cos\frac{\pi n}{2}$.

6.2.22. $x_n = -\frac{n^2+1}{n^2}$. **6.2.23.** $x_n = -\sqrt{n}$.

6.2.24. $x_n = \pi, \pi, \pi, \ldots$

6.2.25. Пусть $\{x_n\} = \{n\}$, $\{y_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ — две последовательности. Найти последовательности $\{x_n+y_n\}$, $\{x_n-y_n\}$, $\{x_n\cdot y_n\}$ и $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$.

❍ По определению операций над последовательностями имеем:

$$\{x_n + y_n\} = \left\{n + \frac{1}{n}\right\} = \left\{2, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3}, \ldots\right\};$$
$$\{x_n - y_n\} = \left\{n - \frac{1}{n}\right\} = \left\{0, \frac{3}{2}, 2\frac{2}{3}, \ldots\right\};$$
$$\{x_n \cdot y_n\} = \{1\} = \{1, 1, 1, \ldots\};$$
$$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \left\{n : \frac{1}{n}\right\} = \{n^2\} = \{1, 4, 9, \ldots\}.$$ ●

Найти последовательности $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$ *и* $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$, *если:*

6.2.26. $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-2)^n$. **6.2.27.** $x_n = n^2 + 1$, $y_n = n$.

Найти последовательности $\alpha x_n + \beta y_n$, *если:*

6.2.28. $x_n = n$, $y_n = 3n$, $\alpha = 2$, $\beta = -1$.

6.2.29. $x_n = (\sqrt{2})^n$, $y_n = 1$, $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = -5$.

Ответы

6.2.2. $x_1 = 4$, $x_2 = 8$, $x_3 = 16$, $x_4 = 32$. **6.2.3.** $x_1 = 6$, $x_2 = 11$, $x_3 = 18$, $x_4 = 27$. **6.2.4.** $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$. **6.2.5.** $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{3}{4}$, $x_3 = \frac{4}{9}$, $x_4 = \frac{5}{16}$.

6.2.6. $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$. **6.2.7.** $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -6$, $x_4 = 24$. **6.2.8.** $x_n = \frac{1}{2n-1}$. **6.2.9.** $x_n = \frac{1}{n^2}$. **6.2.10.** $x_n = \frac{n+1}{n}$. **6.2.11.** $x_n = (-1)^n \cdot n$.

6.2.13. Ограниченная последовательность. **6.2.14.** Ограниченная снизу последовательность. **6.2.15.** Ограниченная сверху последовательность. **6.2.16.** Ограниченная последовательность. **6.2.17.** Неограниченная последовательность. **6.2.18.** Ограниченная снизу последовательность. **6.2.20.** Строго возрастающая, неограниченная последовательность. **6.2.21.** Немонотонная, ограниченная последовательность. **6.2.22.** Строго возрастающая, ограниченная последовательность. **6.2.23.** Строго убывающая, ограниченная сверху последовательность. **6.2.24.** Монотонная, ограниченная последовательность. **6.2.26.** $\{x_n + y_n\} = \{(-1)^n + (-2)^n\} = \{-3, 5, -9, \ldots\}$, $\{x_n - y_n\} = \{1, -3, 7, \ldots\}$, $\{x_n \cdot y_n\} = \{2^n\} = \{2, 4, 8, \ldots\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$.

6.2.27. $\{x_n + y_n\} = \{n^2 + n + 1\} = \{3, 7, 13, \ldots\}$, $\{x_n - y_n\} = \{n^2 - n + 1\} = \{1, 3, 7, \ldots\}$, $\{x_n \cdot y_n\} = \{n^3 + n\} = \{2, 10, 30, \ldots\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \left\{n + \frac{1}{n}\right\} = \left\{2, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3}, \ldots\right\}$.

6.2.28. $\{\alpha x_n + \beta y_n\} = \{2x_n - y_n\} = \{-n\} = \{-1, -2, -3, \ldots\}$.

6.2.29. $\{\alpha x_n + \beta y_n\} = \{\sqrt{2}x_n - 5y_n\} = \{(\sqrt{2})^{n+1} - 5\} = \{-3, 3\sqrt{2} - 5, -1, \ldots\}$.