

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ НЕАТОМАРНОЙ БЕСКВАНТОРНОЙ ФОРМУЛЫ.

(1) Пусть  $A$  есть  $\neg B$ . Тогда значение формулы  $A$  есть  $I$ , если и только если значение формулы  $B$  при данных значениях переменных есть  $L$ .

(2) Пусть  $A$  есть  $(B \& C)$ . Тогда значение формулы  $A$  есть  $I$ , если и только если значения каждой из формул  $B, C$  при данных значениях переменных есть  $I$ .

(3) Пусть  $A$  есть  $(B \vee C)$ . Тогда значение формулы  $A$  есть  $I$ , если и только если значение хотя бы одной из формул  $B$  или  $C$  при данных значениях переменных есть  $I$ .

(4) Пусть  $A$  есть  $(B \rightarrow C)$ . Тогда значение формулы  $A$  есть  $L$ , если и только если при заданных значениях переменных значение формулы  $B$  есть  $I$ , а значение формулы  $C$  есть  $L$ .

Для записи в языке исследователя значений произвольного терма  $t$  и произвольной формулы  $A$  можно использовать обозначения  $\text{val}(t)$  и  $\text{val}(A)$  соответственно (от английского слова value — значение, оценка, ценность).

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Пусть сигнатура  $\sigma := \{c_0, c_1, f_1^1, f_2^2, f_3^2, P_1^2, P_2^2\}$ ,  $\mathcal{A}$  — алгебраическая система,  $\mathcal{A} := \langle \mathbb{Z}, \sigma \rangle$ , у которой  $c_0$  есть имя числа 0,  $c_1$  есть имя числа 1, и для всяких  $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$  выполнено:

$$f_1^1(m_1) = -m_1, \quad f_2^2(m_1, m_2) = m_1 + m_2, \quad f_3^2(m_1, m_2) = m_1 \cdot m_2,$$

$$P_1^2(m_1, m_2) = I, \text{ если и только если } m_1 < m_2.$$

$$P_2^2(m) = I, \text{ если и только если } m \text{ — четное число.}$$

1.1. Найдите значения следующих формул при значении переменной  $x_0$  равном 5:

- |   |  |
|---|--|
| (а) $\neg P_1^2 x_0 f_3^2 f_2^2 c_1 c_1 f_2^2 c_1 c_1$ ;  | (б) $(P_1^2 x_0 c_0 \vee P_1^2 c_1 x_0)$ ;                         |
| (в) $(\neg P_2^1 x_0 \& P_1^2 c_0 x_0)$ ;                 | (г) $(P_1^2 f_1^1 x_0 c_0 \rightarrow P_1^2 f_1^1 x_0 x_0)$ ;      |
| (д) $\neg(P_2^1 x_0 \rightarrow P_1^2 x_0 f_2 x_0 c_1)$ ; | (е) $(\neg P_1^2 c_0 f_2^2 x_0 c_1 \rightarrow P_2^1 f_1^1 x_0)$ . |

1.2. Для каждой формулы укажите, если это возможно, пример значений переменных, при которых значение формулы есть  $I$ , и при которых оно есть  $L$ :

- |  |  |
|--|--|
| (а) $(P_1^2 x_0 x_1 \& \neg P_2^1 x_0)$ ;  | (б) $(\neg P_2^1 x_0 \vee P_1^2 x_0 c_0)$ ;              |
| (в) $\simeq f_2^2 x_0 x_1 f_3^2 x_1 x_0$ ; | (г) $(\neg P_2^1 x_0 \rightarrow P_2^1 f_2^2 x_0 c_1)$ . |

1.3. Найдите все значения предметных переменных, при которых следующая формула принимает значение  $I$ :

- |  |   |
|--|---|
| (а) $(\simeq f_1^1 x_0 x_0 \& \simeq f_2^2 x_0 x_1 f_2 c_1 c_1)$ ; | (б) $(\simeq f_3^2 x_0 x_0 c_1 \vee P_1^2 c_0 x_0)$ ;                   |
| (в) $(\simeq f_2^2 x_0 x_0 x_0 \rightarrow P_2^1 x_0)$ ;           | (г) $(\simeq x_1 f_3^2 x_0 f_2^2 c_1 c_1 \rightarrow \neg P_2^1 x_1)$ . |

1.4. Найдите все значения предметных переменных, при которых следующая формула принимает значение  $L$ :

- |  |  |
|--|--|
| (а) $(P_1^2 c_0 x_0 \& P_1^2 c_0 x_1)$ ;                     | (б) $(\simeq f_3^2 x_0 x_0 c_1 \vee \simeq f_2^2 x_0 x_1 x_0)$ ;     |
| (в) $(\simeq f_3^2 x_0 x_0 x_1 \rightarrow P_1^2 x_0 x_1)$ ; | (г) $((P_1^2 x_0 x_1 \& P_1^2 x_1 x_2) \rightarrow P_1^2 x_0 x_2)$ . |

1.5\*. Приведите пример формулы, состоящей из символов

$$f_2^2, P_2^1, \simeq, x_0, x_1, \rightarrow$$

которая принимает значение  $I$  в рассматриваемой интерпретации при любых значениях предметных переменных.

2. Пусть интерпретация сигнатуры  $\{c_0, c_1, f_1^1, f_2^1, P_1^1, P_2^2, P_3^2\}$  в множестве  $M := \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  такова, что  $c_0$  и  $c_1$  есть имена чисел 0 и 1 соответственно,

$$f_1^1(m) := \begin{cases} 6 - m, & \text{если } m > 0, \\ 0, & \text{если } m = 0, \end{cases} \quad f_2^1(m) := \begin{cases} m + 1, & \text{если } m < 5, \\ 0, & \text{если } m = 5, \end{cases}$$

$$P_1^1(m) = I \Leftrightarrow m \text{ — четное}, \quad P_2^2(m_1, m_2) = I \Leftrightarrow m_1 \text{ делится на } m_2,$$

$$P_3^2(m_1, m_2) = I \Leftrightarrow m_1 > m_2$$

для всяких  $m, m_1, m_2$  из  $M$ .

2.1. Найдите значения формул:

- |   |
|---|
| (а) $(P_2^2 f_1^1 x_0 x_0 \vee P_3^2 x_0 f_1^1 x_0)$ при значении $x_0$ , равном 4;                                     |
| (б) $(P_2^2 f_1^1 x_0 c_1 \rightarrow \simeq f_1^1 c_1 x_0)$ при значении $x_0$ , равном 1;                             |
| (в) $(\simeq f_1^1 x_0 f_1^1 x_1 \rightarrow P_3^2 x_1 x_0)$ при значениях $x_0$ и $x_1$ , равных 1 и 4 соответственно. |

2.2. При каких значениях переменных следующая формула принимает значение  $I$ : (а)  $(P_2^1 f_1^1 x_0 \& \neg \simeq x_0 c_0)$ ; (б)  $(P_2^2 x_0 x_1 \& P_3^2 x_1 x_0)$ ;

- (в)  $(P_1^1 x_0 \rightarrow P_3^2 f_2^1 f_2^1 c_1 x_0)$ ?

2.3\*. Напишите формулу, в которой содержит вхождения лишь одной из предметных переменных — переменной  $x_0$ . В интерпретации, данной в условии задачи, эта формула должна принимать значение  $I$ , если и только если значение переменной  $x_0$  принадлежит множеству  $\{1, 2\}$ .