

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Пусть $\langle \mathbb{N}, \sigma \rangle$ — алгебраическая система сигнатуры $\sigma = \{f_1^1, P_1^2\}$, носитель которой есть \mathbb{N} — множество натуральных чисел. Пусть при этом для всяких $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ выполнено:

$$f_1^1(m) = m^2; \quad P_1^2(m_1, m_2) = I \Leftrightarrow m_1 < m_2.$$

Для каждой из следующих формул выясните, является ли она выполнимой в алгебраической системе $\langle \mathbb{N}, \sigma \rangle$ и является ли она на ней истинной:

- | | |
|--|---|
| (а) $\exists x_0 \simeq x_0 x_0$; | (б) $P_1^2 x_1 x_2$; |
| (в) $P_1^2 f_1^1 x_1 x_1$; | (г) $\neg \simeq x_1 f_1^1 x_1$; |
| (д) $\simeq x_1 x_2 \vee (P_1^2 x_1 x_2 \vee P_1^2 x_2 x_1)$; | (е) $\exists x_1 \exists x_2 \neg \simeq x_1 x_2$; |

2. Рассмотрим три алгебраические системы сигнатуры $\sigma = \{P_1^2, P_2^2\}$, носителями которых служат следующие множества:

$$M = \{0, 1, 2, 4\}, \quad N = \{2, 3, 4, 6, 8\}, \quad K = \{3, 6, 12\}.$$

Предикатные символы интерпретируются в каждой из них условиями:

$$P_1^2(m_1, m_2) = I \Leftrightarrow m_1 \text{ делится на } m_2,$$

$$P_2^2(m_1, m_2) = I \Leftrightarrow m_1 > m_2.$$

2.1. Для каждой из алгебраических систем $\langle M, \sigma \rangle$, $\langle N, \sigma \rangle$, $\langle K, \sigma \rangle$ выясните, какие из формул являются истинными на ней:

- | | |
|---|---|
| (а) $\exists x_1 \neg P_1^2 x_1 x_1$; | (б) $\forall x_1 \exists x_2 P_1^2 x_1 x_2$; |
| (в) $\forall x_1 \forall x_2 (P_1^2 x_1 x_2 \vee P_1^2 x_2 x_1)$; | (г) $\forall x_1 \forall x_2 (P_2^2 x_1 x_2 \rightarrow P_1^2 x_2 x_1)$; |
| (д) $\forall x_1 \forall x_2 (\neg(x_1 \simeq x_2) \rightarrow (P_2^2 x_1 x_2 \vee P_2^2 x_2 x_1))$; | |
| (е) $\exists x_1 \forall x_2 (\neg(x_2 \simeq x_1) \rightarrow P_1^2 x_1 x_2)$. | |

2.2. Для каждой из алгебраических систем $\langle M, \sigma \rangle$, $\langle N, \sigma \rangle$, $\langle K, \sigma \rangle$ выясните, какие из формул являются выполнимыми на ней:

- | | |
|--|--|
| (а) $P_1^2 x_1 x_1$; | (б) $P_2^2 x_1 x_2 \rightarrow P_1^2 x_2 x_1$; |
| (в) $\neg(x_1 \simeq x_2) \rightarrow P_1^2 x_2 x_1$; | (г) $P_2^2 x_1 x_2 \& P_1^2 x_2 x_3 \& \neg P_1^2 x_1 x_3$; |
| (д) $(P_1^2 x_1 x_2 \& P_1^2 x_2 x_3) \rightarrow P_1^2 x_1 x_3$; | (е) $\exists x_1 \forall x_2 (P_2^2 x_2 x_1 \& P_1^2 x_2 x_1)$. |

3. Перед вами “мир”, состоящий из черных и белых треугольников, квадратов и кругов двух различных размеров:



Возьмем сигнатуру, состоящую из символов одноместных отношений

Бел¹, Черн¹, Мал¹, Больш¹, Треуг¹, Квадр¹, Круг¹

и символов двухместных отношений Лев², Прав². Будем использовать в качестве переменных буквы x и y .

Зададим интерпретацию сигнатуры в этом “мире” и подобных ему “мирах” следующим образом:

Бел¹(m) = $I \Leftrightarrow m$ — белая фигура,

Черн¹(m) = $I \Leftrightarrow m$ — черная фигура,

Мал¹(m) = $I \Leftrightarrow m$ — малая фигура,

Больш¹(m) = $I \Leftrightarrow m$ — большая фигура,

Треуг¹(m) = $I \Leftrightarrow m$ — треугольник,

Квадр¹(m) = $I \Leftrightarrow m$ — квадрат,

Круг¹(m) = $I \Leftrightarrow m$ — круг,

Лев²(m_1, m_2) = $I \Leftrightarrow$ фигура m_1 расположена левее, чем m_2 ,

Прав²(m_1, m_2) = $I \Leftrightarrow$ фигура m_1 расположена правее, чем m_2 .

Какие из следующих предложений истинны в данном мире, а какие ложны:

- | | |
|--|--|
| (а) $\exists x (\text{Квадр}^1 x \& \text{Больш}^1 x)$; | (б) $\exists x (\text{Треуг}^1 x \& \text{Больш}^1 x)$; |
| (в) $(\exists x \text{Треуг}^1 x \& \exists x \text{Больш}^1 x)$; | (г) $\exists x \exists y (\text{Треуг}^1 x \& \text{Больш}^1 y)$; |
| (д) $\exists x (\text{Круг}^1 x \vee \text{Мал}^1 x)$; | (е) $\forall x (\text{Квадр}^1 x \vee \text{Мал}^1 x)$; |
| (ж) $\forall x (\text{Больш}^1 x \vee \text{Мал}^1 x)$; | (з) $(\forall x \text{Больш}^1 x \vee \forall x \text{Мал}^1 x)$; |
| (и) $(\forall x \text{Квадр}^1 x \vee \exists x \text{Мал}^1 x)$; | (к) $\forall x (\text{Треуг}^1 x \rightarrow \text{Мал}^1 x)$; |
| (л) $\forall x (\text{Больш}^1 x \rightarrow \text{Треуг}^1 x)$; | (м) $\exists x (\text{Больш}^1 x \rightarrow \text{Треуг}^1 x)$. |

ЗАДАНИЕ 13. Модели формул

Можно для алгебраической системы искать истинную или выполнимую на ней формулу, а можно наоборот, для формулы подбирать или строить алгебраическую систему, на которой данная формула выполнима или истинна. Этим и предлагается сейчас заняться.

УЧЕБНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Выучить термины и их значения: *модель формулы*.