Моделирование колебаний пружинного маятника

Теория

Общие сведения о колебательном движении

Колебательным движением, или просто колебаниями, называют всякое движение или изменение состояния, характеризуемое той или иной степенью повторяемости во времени значений физических величин, определяющих это движение или состояние. С колебаниями мы встречаемся при изучении самых различных физических явлений: звука, света, переменных токов, радиоволн, качаний маятников и т. д. Оказывается, что существует общность закономерностей этих явлений и математических методов их исследования. Примерами колебательного движения могут служить колебания маятников, струн, мембран телефонов, заряда и тока в колебательном контуре и др.

Колебания сопровождаются попеременным превращением энергии одного вида в энергию другого вида.

Колебательное движение называют ***периодическим***, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени.

Все виды колебаний можно классифицировать по следующим параметрам:

- по физической природе (механические и электромагнитные);
- по характеру возникновения и существования (свободные, вынужденные, параметрические, автоколебания);
- по характеру зависимости колеблющейся величины от времени (гармонические и негармонические).

Несмотря на разную природу колебаний, в них обнаруживаются одни и те же физические закономерности; они описываются одними и теми же уравнениями, исследуются общими методами. В данном разделе мы рассмотрим ***механические колебания***, т.е. повторяющиеся изменения положений и скоростей каких-либо тел или частей тел, происходящие при наличии упругих сил, силы тяжести, а также других сил.

Простейшим типом периодических колебаний являются так называемые гармонические колебания. Колебания какой-либо физической величины A называются гармоническими, если они происходят по закону косинуса или синуса. Например, смещение колеблющейся точки в произвольный момент времени описывается уравнением

$$x = x_{max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_o). \qquad (1)$$

К величинам, характеризующим колебательный процесс, прежде всего, относятся период (T) и частота (ν), а также амплитуда (x_{max}) и фаза.

Величину x_{max}, равную максимальному значению колеблющейся величины, называют *амплитудой колебаний*.

Выражение $(\omega t + \varphi_o)$, стоящее под знаком синуса или косинуса, определяет состояние колеблющейся физической величины в данный момент времени t. Его называют *фазой колебания*. В момент начала отсчета времени

(t=0) фаза колебания равна φ_o. Поэтому величину φ_0 называют начальной фазой колебания, и она, очевидно, зависит от выбора начала отсчета времени. Фазу измеряют в радианах.

Величину ω, входящую в выражение для фазы колебания, называют циклической (или круговой) частотой колебаний. Физический смысл циклической частоты связан с понятиями периода колебаний T и частоты колебаний ν. Периодом незатухающих колебаний называют тот наименьший промежуток времени T, по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебания. За время T совершается одно полное колебание.

Частотой колебаний называют число полных колебаний, совершаемых за единицу времени:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Тогда циклическая частота $\omega=2\pi\nu$ численно равна числу полных колебаний, совершаемых за 2π секунд. В этом и состоит ее физический смысл.

Для того чтобы свободные колебания совершались по гармоническому закону, необходимо, чтобы сила, стремящаяся возвратить систему в положение равновесия, была пропорциональна смещению тела. Такие силы называются *квазиупругими*.

Скорость (первая производная координаты по времени) и ускорение (вторая производная координаты по времени) в случае гармонических колебаний также будут изменяться по гармоническому закону:

$$\upsilon_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x} = -x_{\max}\omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_o) = \upsilon_{x\max} \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \varphi_o + \frac{\pi}{2}\right); \qquad (2)$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t} = \ddot{x} = -x_{\max}\omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_o) = a_{x\max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_o + \pi). \qquad (3)$$

Отсюда видно, что скорость опережает смещение по фазе на $\pi/2$, а ускорение – на π, т.е. находится в противофазе со смещением.

Кроме аналитического способа описания поведения колебательной системы существует несколько способов его графического представления.

1) Временные ("плоские") диаграммы, где по горизонтальной оси отложено время, а по вертикальной – смещение, скорость или ускорение (рис. 1). Для гармонических колебаний график изменения колеблющейся величины во времени имеет вид синусоиды или косинусоиды.

Рис. 1.
Временные диаграммы гармонических колебаний.

2) <u>Спектральный метод представления</u>: по горизонтальной оси откладывается частота колебаний, а по вертикали – амплитуда (или энергия, пропорциональная квадрату амплитуды). В случае чисто гармонических колебаний спектр будет состоять из одной единственной линии (рис. 2).

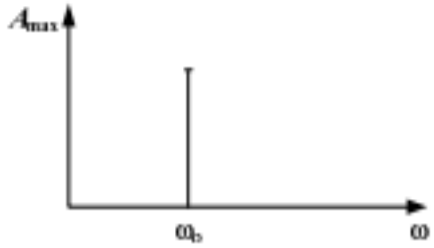

Рис. 2. Спектр гармонического колебания с частотой ω_0.

3) <u>Метод векторных диаграмм</u> (применим только для гармонических колебаний): на плоскости (рис. 3) выбирают произвольное начало координат O и произвольную ось O O′. Изучаемая гармоническая величина представляется вращающимся с угловой скоростью ω вектором, длина которого равна (или пропорциональна) амплитуде колебаний, и составляющим с осью OO′ угол φ_o, совпадающий с начальной фазой. Тогда вертикальная проекция вектора на ось изменяется со временем по гармоническому закону (при этом положительным считается вращение вектора против часовой стрелки). Мгновенное положение вектора определяется углом $\varphi(t)=\omega\cdot t+\varphi_o$, т.е. фазой колебаний в соответствующий момент времени.

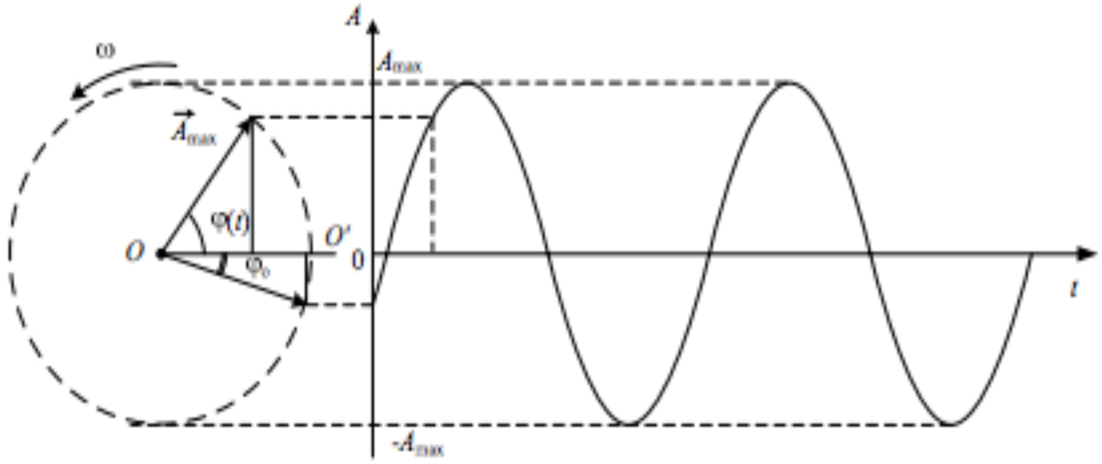

Рис. 3. Векторная диаграмма и связь вращательного и колебательного движений.

Ценность этого метода особенно проявляется при суммировании нескольких движений равной частоты.

Пусть, например, нужно сложить два колебания с одинаковыми частотами (рис. 4) $A_1 = A_{max_1}\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi_{o_1})$ и $A_2 = A_{max_2}\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi_{o_2})$:

$$A(t) = A_1(t)+A_2(t) = A_{max_1}\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi_{o_1})+A_{max_2}\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi_{o_2}) =$$
$$= A_{max}\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi_o).$$

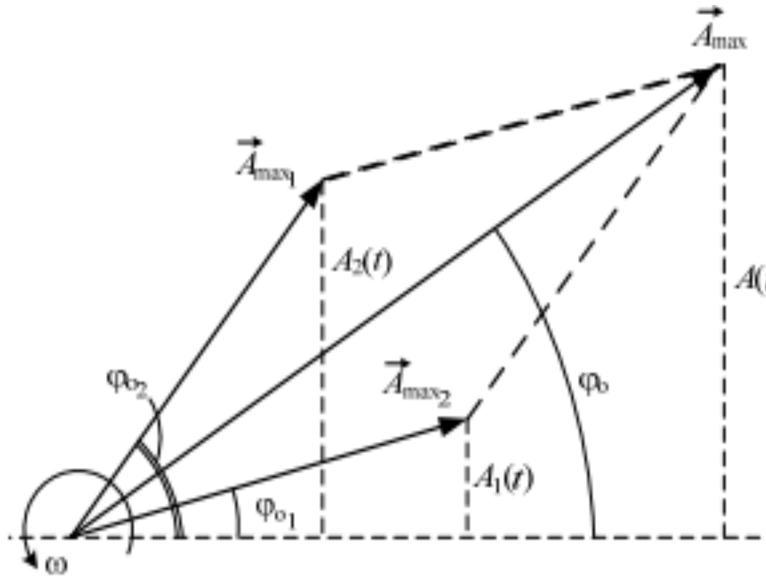

Рис. 4. Сложение гармонических колебаний одной частоты.

Амплитуду и начальную фазу результирующего колебания легко найти из рис. 4, на котором операция сложения гармонических величин представлена как операция сложения векторов $\vec{A}_{max_1}$ и $\vec{A}_{max_2}$ в момент времени t=0:

$$\vec{A}_{max} = \vec{A}_{max_1} + \vec{A}_{max_2},$$

$$A = \sqrt{\left(A_{max_1} \cdot \cos\varphi_{o_1} + A_{max_2} \cdot \cos\varphi_{o_2}\right)^2 + \left(A_{max_1} \cdot \sin\varphi_{o_1} + A_{max_2} \cdot \sin\varphi_{o_2}\right)^2},$$

$$\varphi_o = \operatorname{arctg}\frac{A_{max_1} \cdot \sin\varphi_{o_1} + A_{max_2} \cdot \sin\varphi_{o_2}}{A_{max_1} \cdot \cos\varphi_{o_1} + A_{max_2} \cdot \cos\varphi_{o_2}}.$$

Ясно, что вертикальная проекция результирующего вектора $\vec{A}_{max}$ также будет изменяться по гармоническому закону с той же частотой, поскольку взаимное расположение векторов $\vec{A}_{max_1}$ и $\vec{A}_{max_2}$ не изменяется с течением времени.

Способ векторных диаграмм тесно связан с удобным аналитическим способом представления гармонической величины комплексным числом (простые задачи, рассматриваемые в пособии, не требуют применения этого метода)

4) Метод фазовых диаграмм, удобный для качественного анализа движений (и не только гармонических!). В любой колебательной системе с одной степенью свободы смещение и скорость меняются со временем. Состояние системы в каждый момент времени можно характеризовать двумя значениями x и υ, и на плоскости этих переменных это состояние однозначно определяется положением изображающей точки с координатами (x;υ). С течением времени изображающая точка будет перемещаться по кривой, которую называют *фазовой траекторией* движения. Анализ траектории позволяет судить об особенностях процесса.

Плоскость переменных x и υ называется *фазовой плоскостью*. Семейство фазовых траекторий образует фазовый портрет колебательной системы.

Для периодического движения фазовая траектория – замкнутая кривая. В частности, фазовый портрет гармонического осциллятора представляет собой семейство эллипсов, каждому из которых соответствует энергия $E=E_p+E_к$, запасенная осциллятором. Покажем, что это действительно так. Координата и скорость гармонического колебания изменяются по закону косинуса или синуса:

$$x = x_{max} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_o),$$

$$\dot{x} = -\omega \cdot x_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_o).$$

Чтобы найти уравнение фазовой траектории надо исключить из данных уравнений время:

$$\left(\frac{x}{x_{max}}\right)^2 + \left(-\frac{\dot{x}}{\omega \cdot x_{max}}\right) = 1$$

– уравнение эллипса.

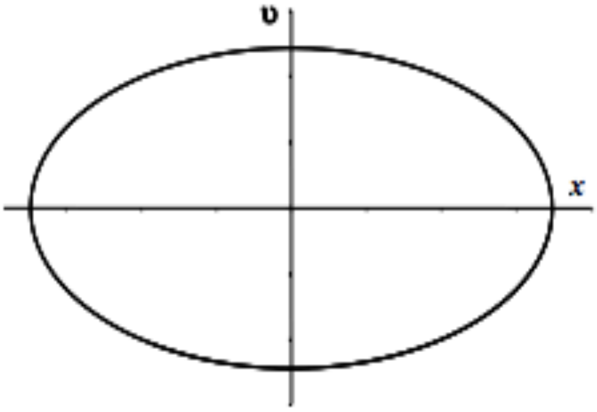

Рис. 5. Фазовая диаграмма гармонического осциллятора.

Фазовые диаграммы затухающих колебаний представляют собой спирали, скручивающиеся к началу координат тем быстрее, чем меньше добротность системы (рис. 6):

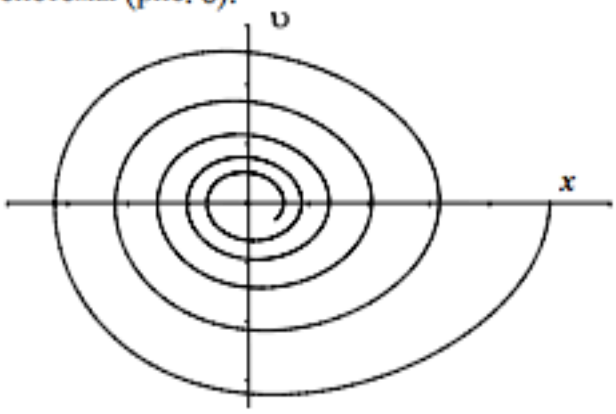

Рис. 6. Фазовая диаграмма затухающего колебания.

Особое внимание, уделяемое в физике и технике гармоническому движению, объясняется, прежде всего, тем, что существует громадное число физических систем, совершающих гармоническое движение (с очень большой степенью точности). Кроме того, периодическое негармоническое движение можно свести к сумме гармонических движений, причем эти составные движения доступны непосредственному наблюдению при помощи современной аппаратуры.

Моделирование свободных колебаний пружинного маятника

Простейший пружинный маятник представляет собой материальную точку массы m, прикрепленную к одному из концов упругой пружины и способную двигаться поступательно и прямолинейно. Точкой можно заменить и тело конечных размеров, если наложить требование одной степени свободы и пренебречь деформацией тела. Подобная идеализация оправдана, если длина пружины мала, так что можно считать, что вся она деформируется одновременно (время распространения деформации должно быть много меньше периода колебаний). Энергия упругой деформации тела должна быть много меньше его кинетической энергии. Для пружины же, наоборот, энергия деформации должна быть много больше ее кинетической энергии (именно в этом смысле говорят о невесомой пружине и абсолютно твердом, недеформируемом теле). Наконец, пружина должна подчиняться закону Гука, т.е. амплитуда колебаний должна быть мала.

Задача 1. Тело массы m, прикрепленное к пружине[3] жесткостью k, совершает колебания вдоль горизонтальной оси (рис. 1).

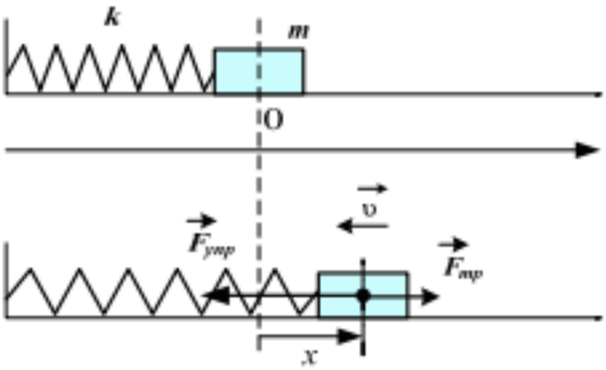

Рис. 1.

К составлению уравнений простейшего пружинного маятника.

Согласно второму закону Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \tag{1.1}$$

где m – масса тела, $\vec{F}$ – равнодействующая всех сил, приложенных к телу, $\vec{a}$ – ускорение, сообщаемое этой силой. Ось Ox направим вправо, и начало отсчета совместим с положением равновесия тела (пружина не деформирована).

Пренебрежем для начала затуханием колебаний, т.е. положим, что трение в системе отсутствует ($\vec{F}_{тр} = 0$), и будем считать, что на тело действует только сила упругости $\vec{F} = \vec{F}_{упр}$. Именно она и сообщает телу ускорение. В проекции на выбранное направление уравнение движения перепишется в виде:

$$ma_x = F_x, \tag{1.2}$$

где a_x – проекция ускорения на ось Ox, F_x – проекция силы упругости на ту же ось. Эта проекция прямо пропорциональна смещению тела из положения равновесия (при данном выборе начала отсчета – его координате), причем проекция силы и координата имеют противоположные знаки (т.к. сила упругости всегда противоположна смещению тела): $F_x = -kx$, где x – координата тела (смещение). Следовательно, уравнение (1.2) принимает вид:

$$ma_x = -kx. \tag{1.3}$$

Это и есть уравнение движения тела под действием силы упругости.

Перепишем его в другом виде, выразив проекцию ускорения:

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x \tag{1.4}$$

или

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0 \tag{1.4, a}$$

уравнение свободных незатухающих колебаний пружинного маятника[4] – линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Величина $\omega_o = \sqrt{k/m}$ представляет собой собственную циклическую частоту колебательной системы.

Аналитическое решение этого уравнения (*математическая модель*):

$$\begin{cases} x = x_{\max}\sin(\omega_o \cdot t + \varphi_o); \\ \upsilon_x = \omega_o \cdot x_{\max} \cdot \cos(\omega_o \cdot t + \varphi_o) = \omega_o \cdot x_{\max} \cdot \sin(\omega_o \cdot t + \varphi_o + \frac{\pi}{2}); \\ a_x = -\omega_o^2 \cdot x_{\max} \cdot \sin(\omega_o \cdot t + \varphi_o) = \omega_o^2 \cdot x_{\max} \cdot \sin(\omega_o \cdot t + \varphi_o + \pi). \end{cases} \tag{*}$$

Эти формулы позволяют найти величины x, υ_x, a_x в любой момент времени. Они были получены в математическом анализе путем аналитического решения уравнения (1.4, a). Однако, поскольку движение тела происходит под действием переменной силы (а, следовательно, не является равноускоренным), задача эта крайне сложна.

Для решения (1.4) воспользуемся методом половинного интервала[5] и составим систему уравнений (*расчетные формулы*):

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{1/2} \approx \left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{o} - \dfrac{k}{m}\cdot x_o \cdot \dfrac{\Delta t}{2}; \\
\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{i+1/2} \approx \left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{i-1/2} - \dfrac{k}{m}\cdot x_i \cdot \Delta t; \\
x_{i+1} \approx x_i + \left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{i+1/2} \cdot \Delta t.
\end{cases} \tag{1.5}
$$

Предположим теперь, что помимо силы упругости на тело действует сила трения, пропорциональная скорости движения $F_{тр} = f \cdot \upsilon$, где f – коэффициент трения (сопротивления). Тогда уравнение движения (с учетом того, что сила трения направлена противоположно скорости) примет вид:

$$
m \cdot \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -k \cdot x - f \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t};
$$

$$
\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{f}{m}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{k}{m}\cdot x = -2\beta \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \omega_o \cdot x, \tag{1.6}
$$

где x – смещение тела из положения равновесия в произвольный момент времени; $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ – скорость тела в тот же момент, $\omega_o = \sqrt{k/m}$ – собственная циклическая частота колебаний пружинного маятника, $\beta = f/2m$ – коэффициент затухания. Это уравнение свободных затухающих колебаний, и оно также легко решается методом половинного интервала.