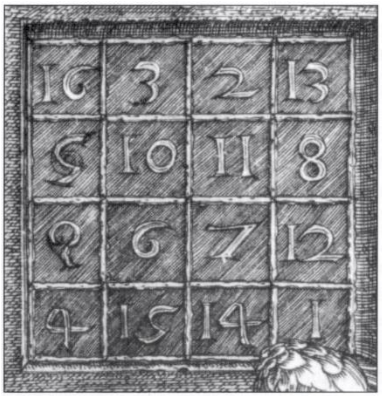
Тема 1. Основные понятия. Виды матриц. Операции над матрицами.

Содержание

История

Впервые матрица под названием "волшебный квадрат" упоминается еще в Древнем Китае. Подобные квадраты чуть позже были известны и у арабских математиков.

В те времена матрицы еще не имели такого обширного применения, а также не были сформулированы основные операции над матрицами. Прямоугольные таблицы чисел или иных объектов были интересны своими свойствами, нередко люди наделяли их магическими свойствами, использовали в роли оберегов (магический квадрат). В некоторых культурах матрицы применялись для определения степени близости родства для людей желающих вступить в брак.



С развитием теории определителей в конце 17 века швейцарский математик Габриэль Крамер (1704 - 1752) начал разрабатывать свою теорию и в 1751 году, не задолго до своей смерти, опубликовал "правило Крамера" - метод решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с ненулевым определителем матрицы системы. В этот же период появился и "метод Гаусса", применяемый для решения СЛАУ и основанный на последовательном исключении неизвестных.

Как отдельная теория, теория матриц получила свое активное развитие в середине 19 века в работах ирландского математика и физика Уильяма Гамильтона (1805 - 1865) и английского математика Артура Кэли (1821 - 1895). Фундаментальные результаты в теории матриц принадлежат также немецким математикам Карлу Вейерштрассу (1815 - 1897), Фердинанду Георгу Фробениусу (1849 - 1917) и французскому математику Мари Энмону Камиль Жордану (1838 - 1922).

(Современное название) Термин «матрица» был введен английским математиком Джеймсом Сильвестром (1814 - 1897) в 1850 году (в середине 19 века).

Применение матриц

Матрицы широко применяются в математике для компактной записи СЛАУ (систем линейных алгебраических уравнений) или систем дифференциальных уравнений. Тогда количество строк матрицы соответствует количеству уравнений системы, а количество столбцов равно количеству неизвестных. Матричный аппарат позволяет свести решение СЛАУ к операциям над матрицами.

Использование элементов алгебры матриц является одним из основных методов решения многих экономических задач. Особенно этот вопрос стал актуальным при разработке и использовании баз данных: при работе с ними почти вся информация хранится и обрабатывается в матричной форме.

В компьютерной графике используются операции с матрицами.

Итак, современная трактовка матриц позволила им крепко закрепиться в повсеместной жизни и найти применение как в математике, так и в физике, экономике, психологии, в компьютерной графике и других науках.

Основные определения и понятия

Матрицей размера mxn называется прямоугольная таблица, содержащая mxn чисел, состоящая из m строк и n столбцов.

Количество строк и столбцов матрицы задают ее размеры. Говоря о размерах матрицы, **сначала** указывают **количество строк**, а только **потом – количество столбцов**.

Обозначение:$A_{m\times n}$
Для краткости матрицу часто обозначают одной заглавной латинской буквой, например, AилиB.
В общем виде матрицу размером $m\times n$ записывают так

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица – это прямоугольная таблица каких-либо **элементов**. В качестве **элементов** мы будем рассматривать числа, то есть числовые матрицы.

Определение: Числа, составляющие матрицу, называются **элементами матрицы**.
Элементы матрицыAобозначаютсяa_{ij}, гдеi- номер строки, в которой находится элемент, аj- номер столбца.

Пример 1. Расположение элемента

Например, a_{23}– элемент стоит во 2-ой строке, 3-м столбце.

Пример 2. Определение значения элемента.

Задание. Чему равен элементa_{23}матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$?
Решение. Находим элемент, который стоит на пересечении второй строки и третьего столбца:

$$\begin{array}{cc} & \\ \text{вторая строка} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & \boxed{7} \end{pmatrix} \\ & \text{третий столбец} \end{array}$$

Таким образом,$a_{23}=7$.
Ответ.$a_{23}=7$

Определение: Строка матрицы называется **нулевой**, если все ее элементы равны нулю. Если хотя бы один из элементов строки не равен нулю, то строка называется **ненулевой**.

Примечание. Аналогичное определение и для **нулевого** и **ненулевого** столбцов матрицы.

Пример.

В матрице $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
первая строка является нулевой (любой элемент этой строки равен нулю);
вторая строка ненулевая, так как элемент $a_{21} = -1 \neq 0$.

Главным элементом некоторой строки матрицы A называется ее первый ненулевой элемент.

Пример-задание. Найти главные элементы каждой строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.

Главный элемент первой строки - это первый ненулевой элемент этой строки, а поэтому $a_{11} = 1$ - главный элемент строки под номером 1;

Аналогично $a_{23} = 1$ - главный элемент второй строки.

Пример: рассмотрим матрицу «два на три»:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Данная матрица состоит из шести **элементов**:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Все числа (элементы) внутри матрицы существуют сами по себе, то есть ни о каком вычитании речи не идет:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \cancel{5} & \cancel{-17} \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Это просто таблица (набор) чисел!

У каждого числа свое местоположение, и перемещать их нельзя!

Рассматриваемая матрица имеет две строки:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

и три столбца:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Когда говорят о размерах матрицы, то сначала указывают количество строк, а только потом – количество столбцов. В примере разобрана матрица «два на три».

Виды матриц

Строчная матрица

Матрицу, состоящую из единственной строки, называют строчной матрицей или матрицей-строкой. Таким образом, у строчной матрицы количество строк равно единице (m=1), а количество столбцов – произвольное ($n \in N$, где N – множество натуральных чисел).

Матрица-строка имеет вид $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$. Например:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -73 & \pi & 8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -1 & 31 & -tg\dfrac{\pi}{5} \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & 2\pi & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Иногда матрица, состоящая из одной строки, называется **вектор-строкой**.

Столбцовая матрица

Матрицу, состоящую из единственного столбца, называют столбцовой матрицей или матрицей-столбцом. Столбцовая матрица имеет вид $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$. Например:

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ \pi \\ -3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Для обозначения матрицы-столбца используют запись colon(a_{11}, a_{12}, …, a_{m1}). Такая запись позволяет экономить мести при записи матрицы. Например:

A = colon(2, π, –3), B = colon(3, 3)

Иногда матрица, состоящая из одного столбца, называется **вектор-столбцом**.

Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется **прямоугольной**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Квадратной матрицей n-го порядка называется матрица размера $n \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Число n называется **порядком** матрицы.

В случае квадратной матрицы вводятся понятие главной и побочной диагоналей.

Главной диагональю матрицы называется диагональ, идущая из левого верхнего угла матрицы в правый нижний ее угол.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \mathbf{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

Побочной диагональю той же матрицы называется диагональ, идущая из левого нижнего угла в правый верхний угол.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \mathbf{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{\dots} & a_{2n} \\ \dots & \mathbf{\dots} & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{m1}} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример квадратной матрицы

$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ - квадратная матрица порядка 2 или матрица второго порядка.

Элементы главной диагонали: 1 и 2.

Элементы побочной диагонали: 7 и – 3

Пример 2

Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

элементы 1, 2, -1 образуют главную диагональ; а элементы 3, 2, 2 - побочную.

Нулевой называется матрица, все элементы которой равны нулю.

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Диагональной называется квадратная матрица, у которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны нулю.

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Обозначение диагональной матрицы (для сокращения занимаемого места при записи): diag(a_{11}, a_{22}, …, a_{nn})

В скобках записываются все элементы главной диагонали.

Пример

$$\begin{pmatrix} 3x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Примечание. Диагональные элементы матрицы (т.е. элементы, стоящие на главной диагонали) могут также равняться нулю.

Пример

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = diag(1;0;3)$$

Скалярной называется диагональная матрица S, у которой все диагональные элементы равны между собой.

Примечание. Если нулевая матрица является квадратной, то она также является и скалярной.

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix} = diag(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$$

Пример

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Единичной называется диагональная матрица с единицами на главной диагонали.

Обозначается E (иногда I), у которой в качестве нижнего индекса может присутствовать порядок матрицы:

Каждая единичная матрица является скалярной.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = diag(1,1,\ldots,1)$$

Пример

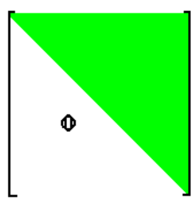
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Треугольной называется квадратная матрица, у которой все элементы выше главной диагонали или ниже её равны нулю.

Различают:

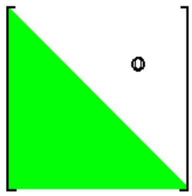
- **Верхнюю треугольную** матрицу

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & & \\ & \mathbb{O} & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$



- **Нижнюю треугольную** матрицу

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ & & \ddots & \mathbb{O} & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$



Запись общего вида подробнее:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Симметричной называют квадратную матрицу, элементы которой симметричны относительно главной диагонали. Более формально, симметричной называют такую матрицу A, что $\forall i, j : a_{ij} = a_{ji}$.

Примеры

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Транспонированная матрица–матрицаA^T, полученная из исходной матрицыAзаменой строк на столбцы.

То есть транспонированная матрица для матрицы A размеров $m \times n$ – это матрицаA^Tразмеров $n \times m$, определённая как

$$A_{ij}^T = A_{ji}.$$

Например,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

То есть для получения транспонированной матрицы из исходной нужно каждую строчку исходной матрицы записать в виде столбца в том же порядке.

Примечание: **симметричная** матрица равна своей **транспонированной** матрице:

$$A = A^T$$

Обратная матрица – это такая матрица A^{-1}, при умножении на которую исходная матрица A дает в результате единичную матрицу E.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Ортогональная матрица – это квадратная матрица *A* с вещественными элементами, результат умножения которой на A^T равен единичной матрице:

$$AA^T = A^T A = E,$$

или, что эквивалентно, её обратная матрица равна транспонированной матрице:

$$A^{-1} = A^T.$$

Ступенчатой называется матрица, удовлетворяющая следующим условиям:

1. если эта матрица содержит нулевую строку (т.е. строку, все элементы которой равны нулю), то все строки, расположенные под ней, также нулевые;
2. если первый ненулевой элемент некоторой строки расположен в столбце с номером i, то первый ненулевой элемент следующей строки должен находиться в столбце с номером большим, чем i.

Второе определение ступенчатой матрицы.

Ступенчатой называется матрица, которая содержит m строк и у которой первые $r \leq m$ диагональных элементов ненулевые, а элементы, лежащие ниже главной диагонали и элементы последних $m - r$ строк равны нулю, то есть это матрица вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3r} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Третье определение ступенчатой матрицы.

Матрица A называется **ступенчатой**, если:

1. все ее нулевые строки стоят после ненулевых;
2. в каждой ненулевой строке, начиная со второго, ее главный элемент стоит правее (в столбце с большим номером) главного элемента предыдущей строки.

По определению к ступенчатым матрицам будем относить нулевую матрицу Θ, а также матрицу, которая содержит одну строку.

Иногда такие матрицы называют еще **трапецевидными** и **квазитреугольными**.

Примеры ступенчатых матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Примеры **матриц**, которые **не являются ступенчатыми**:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Пример-задание

Выяснить, является ли матрица ступенчатой.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. Проверяем выполнение условий из определения:

1. все строки под первой нулевой строкой матрицы (четвертая строка) являются нулевыми;
2. первый ненулевой элемент строки № 1 находится во втором столбце, значит, первый ненулевой элемент второй строки должен находиться, по крайней мере, в третьем столбце - выполняется, т.к. первый ненулевой элемент второй строки $a_{23} = 3 \neq 0$ находится в третьем столбце; аналогично, первый ненулевой элемент третьей строки находится в шестом столбце, а первый ненулевой элемент предыдущей, второй, строки, находится в столбце с номером 3 и 3 < 6.

Итак, заданная матрица A является ступенчатой.

Противоположной матрицей к матрице A, называется матрица, обозначаемая «– A», такая, что A + (– A) = O, где O – нулевая матрица того же размера, что и матрица A.

Теорема. Каждая матрица A имеет единственную противоположную матрицу, причём – A = (– 1) A.

Доказательство. Пусть $A_{m\times n} = (a_{ij})$ произвольная матрица. Тогда из задания операций сложения матриц и умножения матрицы на число, следует, что для матрицы A существует противоположная матрица $(-1)A$:

$$A + (-A) = (a_{ij})_{m\times n} + (-1)(a_{ij})_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} + (-a_{ij})_{m\times n} =$$

$$= (a_{ij} + (-a_{ij}))_{m\times n} = (a_{ij} - a_{ij})_{m\times n} = (0)_{m\times n} = O_{m\times n}.$$

Докажем единственность противоположной матрицы. Предположим, что матрица A имеет противоположную матрицу $B_{m\times n} = (b_{ij})$, отличную от матрицы $(-1)A$. Тогда

$$A + B = O \iff (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = O \iff (a_{ij} + b_{ij}) = O \iff$$

$$\iff a_{ij} + b_{ij} = 0, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n, \iff$$

$$\iff b_{ij} = -a_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n.$$

Мы получили, что каждый элемент b_{ij} матрицы B равен соответствующему элементу матрицы $(-1)A$, а значит, матрицы B и $(-1)A$ равны. Полученное противоречие (по предположению матрицы B и $(-1)A$ не равны) доказывает то, что у матрицы A не существует противоположной матрицы отличной от $(-1)A$. ⊠

Существуют и другие виды матриц. Мы рассмотрели основные из них.

Операции над матрицами

Некоторые операции над матрицами, такие как сложение и вычитание, допускаются только для матриц одинакового размера.

Равенство матриц

Две матрицы А и В называются **равными** (А=В), если они одинакового размера (т.е. имеют одинаковое количество строк и одинаковое количество столбцов) и их соответствующие элементы равны.

Так, если $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то А=В, если:
$a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, $a_{21}=b_{21}$, $a_{22}=b_{22}$

Пример-задание 1.

Дано: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4-2 & 2+1 \end{pmatrix}$.
Вопрос: равны ли матрицы?
Эти матрицы равны, т.к.

- равны их размеры: $A_{1\times 2}$ и $B_{1\times 2}$,
- равны соответствующие элементы: $a_{11}=2=b_{11}=4-2=2$; $a_{12}=3=b_{12}=2+1=3$

Пример-задание 2.

Пусть задана матрица $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Найти все элементы матрицы A, если известно, что она равна матрице $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Решение.
Так как матрицы A и B равны (по условию), то равны и их соответствующие элементы, т.е. $a=-1, b=0, c=3, d=0$

Ответ. $a=-1, b=0, c=3, d=0$

Произведение матрицы на число

Определение 3. ***Произведением матрицы*** $A_{m\times n} = (a_{ij})$ ***на число*** α *называется матрица* $B_{m\times n} = (b_{ij})$, *где* $b_{ij} = \alpha a_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, т.е.

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \ldots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \ldots & \alpha a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \ldots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для нахождения произведения матрицы A на число α надо каждый элемент матрицы A умножить на число α.

Например,

$$3\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 5 & 3\cdot 0 \\ 3\cdot(-2) & 3\cdot 1 & 3\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 0 \\ -6 & 3 & 15 \end{pmatrix}.$$

Итак, в результате умножения матрицы на число получается матрица такой же размерности, что и исходная, каждый элемент которой является результатом произведения соответствующего элемента исходной матрицы на заданное число.

Мы получим одинаковый результат, умножая число на матрицу, или матрицу на число, то есть $\lambda A = A\lambda$.

Из определения следует, что общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

Данная операция, вместе с операцией сложения матриц, относится к **линейным операциям над матрицами**.

Пример-задание 1.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $2A$.

Решение.

$$2A = 2\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 \\ 2\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ответ. $2A = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Пример-задание 2.

Чему равна матрица $-3A$, если матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Решение.

$$-3A = 3\cdot\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\cdot(-1) & -3\cdot 3 \\ -3\cdot 0 & -3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Ответ. $-3A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

Сумма матриц

Определение 1. ***Суммой матриц*** $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *и* $B_{m\times n} = (b_{ij})$ *называется матрица* $C_{m\times n} = (c_{ij})$, *где каждый элемент* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, т.е.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \ldots & a_{2n}+b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \ldots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Таким образом, для нахождения суммы матриц надо сложить их соответствующие элементы.

Например,

$$\begin{pmatrix} 3 & 10 & 0 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 12 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3+1 & 10+4 & 0+(-2) \\ -5+3 & 2+12 & 3+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 2 & 14 & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание
Складывать можно только матрицы одинакового размера.

Пример
Задание.
Найти $A+B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
Решение.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 2} + \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1+4 & 4+4 \\ 2+5 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Ответ. $A + B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

Пример

Задание. Найти $A+B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$
Решение.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & -2+2 & 4+3 \\ 2+4 & 0+6 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 7 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ. $C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 7 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Разность матриц</u>

Разность двух матриц одинакового размера можно определить через операцию сложения матриц и через умножение матрицы на число.

Вычитание матриц вводится следующим образом: $A - B = A + (-1) \cdot B$

То есть к матрице A прибавляется матрица B, умноженная на (-1).

Определение 1

Разностью матриц A и B одного и того же размера называется матрица $C = A - B$ такого же размера, получаемая из исходных путем прибавления к матрице A матрицы B, умноженной на (–1).

Определение 2. ***Разностью матриц*** $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *и* $B_{m\times n} = (b_{ij})$ *называется матрица* $C_{m\times n} = (c_{ij})$, *где* $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, т.е.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \ldots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \ldots & a_{2n} - b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \ldots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}$$

Таким образом, для нахождения разности двух матриц надо от элементов первой матрицы вычесть соответствующие элементы второй матрицы.

Например,

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -15 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -4 & -2 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5-10 & 0-(-4) & -3-(-2) \\ -15-3 & 2-7 & 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ -18 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

На практике же от элементов матрицы A попросту отнимают соответствующие элементы матрицы B при условии, что заданные матрицы одного размера.

Замечание

Вычитать можно только матрицы одинакового размера.

Пример

Задание.

Найти матрицу $C = A - 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Решение.

$$C = A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-3) & 2-3 \\ 2-3 & -1-6 \\ 3-0 & 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ. $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Свойства сложения и вычитания матриц:

1. Ассоциативность $(A+B)+C = A+(B+C)$
2. $A + \Theta = \Theta + A$, где Θ - нулевая матрица соответствующего размера.
3. $A - A = \Theta$
4. Коммутативность $A + B = B + A$

Операции умножение матрицы на число и сумма матриц называются **линейными**.

Свойства линейных операций:

Везде далее матрицы A, B и C - матрицы одного размера.

1. Ассоциативность $(A+B)+C = A+(B+C)$
2. $A + \Theta = \Theta + A$, где Θ - нулевая матрица соответствующего размера.
3. $A - A = \Theta$
4. Коммутативность $A + B = B + A$
5. Дистрибутивность $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
6. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
7. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

Свойства операций сложения, вычитания и умножения матриц на число:

Пусть A, B и C произвольные матрицы размера m x n, а α и β любые действительные числа, тогда справедливы следующие утверждения.

1. Коммутативность A + B = B + A
2. Ассоциативность A + (B + C) = (A + B) + C
3. A + O = A
4. A – A = O
5. 1 · A = A
6. Дистрибутивность α · (A + B) = α · A + α · B
7. (α + β) · A = α · A + β · A
8. α · (β · A) = (α · β) · A
9. 0 · A = O

<u>Произведение двух матриц (умножение матриц)</u>

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на матрицу $B_{n\times k}$ называется матрица $C_{m\times k}$ такая, что элемент матрицы C, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце, т.е. элемент c_{ij}, равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-ого столбца матрицы B.

$C_{m\,x\,k} = (c_{ij})$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots \cancel{+ a_{i,k-1}b_{k-1,j}} + a_{in}b_{jn}\, i = 1,\ldots,m,\; j = 1,\ldots,k.$$

Обозначение: AB или A·B

Примечания:

1. Умножать матрицы можно тогда и только тогда, когда количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы.
2. В общем случае, произведение AB не совпадает с произведением BA.
3. Часто одно из произведений AB или BA – не существует.
4. Мнемонический приём для запоминания: «умножаем строку на столбец».

Пример 1.

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$

Найти произведение AB и BA. Или доказать, что произведения не существует.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot0+2\cdot2 & 1\cdot1+2\cdot(-2) & 1\cdot3+2\cdot1\\ 3\cdot0+(-1)\cdot2 & 3\cdot1+(-1)\cdot(-2) & 3\cdot3+(-1)\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -3 & 5\\ -2 & 5 & 8\end{pmatrix}$$

BA – не существует. Так как в матрице B количество столбцов равно 3, а в матрице A количество строк равно 2.

Пример 2.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

Найти AB, если

Решение.

Так как $A=A_{2\times3}$, а $B=B_{3\times1}$, то в результате получим матрицу размера $C=C_{2\times1}$, т.е. матрицу вида $C=\begin{pmatrix}c_{11}\\ c_{21}\end{pmatrix}$.

Найдем элементы данной матрицы:

$c_{11}=a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+a_{13}\cdot b_{31}=1\cdot1+2\cdot2+0\cdot3=5$

$c_{21}=a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+a_{23}\cdot b_{31}=3\cdot1+1\cdot2+(-1)\cdot3=2$

Таким образом, получаем, что:

$C=AB=\begin{pmatrix}5\\ 2\end{pmatrix}$

Все вычисления можно было сделать в более компактном виде:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}_{3\times1}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot2+0\cdot3\\ 3\cdot1+1\cdot2+(-1)\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 2\end{pmatrix}$$

Ответ. $C=AB=\begin{pmatrix}5\\ 2\end{pmatrix}$

Пример 3.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

Вычислить AB и BA, если

Решение. Так как $A=A_{3\times2}$, а $B=B_{2\times2}$, то произведение возможно и результатом операции умножения будет матрица $C=C_{3\times2}$, а это матрица вида $C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\\ c_{31} & c_{32}\end{pmatrix}$.

Вычислим элементы матрицы C:

$c_{11}=a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}=1\cdot1+(-1)\cdot2=-1$

$c_{12}=a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}=1\cdot1+(-1)\cdot0=1$

$c_{21}=a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}=2\cdot1+0\cdot2=2$

$c_{22}=a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}=2\cdot1+0\cdot0=2$

$c_{31}=a_{31}\cdot b_{11}+a_{32}\cdot b_{21}=3\cdot1+0\cdot2=3$

$c_{32}=a_{31}\cdot b_{12}+a_{32}\cdot b_{22}=3\cdot1+0\cdot0=3$

Итак, $C=AB=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}$.

Выполним произведения в более компактном виде:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}_{3\times 2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1+(-1)\cdot 2 & 1\cdot 1+(-1)\cdot 0 \\ 2\cdot 1+0\cdot 2 & 2\cdot 1+0\cdot 0 \\ 3\cdot 1+0\cdot 2 & 3\cdot 1+0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем теперь произведение $D = BA = B_{2\times 2} \cdot A_{3\times 2}$. Так как количество столбцов матрицы B (первый сомножитель) не совпадает с количеством строк матрицы A (второй сомножитель), то данное произведение неопределенно. Умножить матрицы в данном порядке невозможно, такой матрицы не существует.

Ответ. $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

В обратном порядке умножить данные матрицы невозможно, так как количество столбцов матрицы B не совпадает с количеством строк матрицы A .

Матрицы называются **коммутирующими**, если AB = BA. То есть говорят, что эти матрицы коммутируют.

Свойства произведения матриц:

1. Ассоциативность $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
2. Ассоциативность по умножению $(\mu \cdot A) \cdot B = \mu \cdot (A \cdot B)$
3. Дистрибутивность $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, и $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
4. Умножение на единичную матрицу $E_m \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n} \cdot E_n = A_{m\times n}$
5. В общем случае умножение матриц не коммутативно, т.е. $AB \neq BA$

Транспонирование матриц

Свойства операции транспонирования матриц:

1. $\left(A^T\right)^T = A$
2. $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Элементарные преобразования над строками матрицы. Эквивалентные матрицы

Определение

Элементарными преобразованиями над строками матриц называются следующие преобразования строк:

1. умножение строки на ненулевое число;
2. перестановка двух строк;
3. прибавление к одной строке матрицы другой ее строки, умноженной на некоторое ненулевое число.

Если от матрицы A к матрице B перешли с помощью эквивалентных преобразований над строками, то такие матрицы называются **эквивалентными** и обозначают $A \sim B$.

Примеры элементарных преобразований

Продемонстрируем все элементарные преобразования на примере матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Умножим первую строку матрицы на два, то есть каждый элемент первой строки умножаем на двойку, в результате получим матрицу B , эквивалентную заданной матрице A :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim B=\begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 3\cdot 2 & 3\cdot 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Поменяем первую и вторую строки матрицы B местами, получаем эквивалентную ей матрицу C :

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim C=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

От первой строки матрицы C отнимем вторую строку, получаем эквивалентную матрицу D :

$$C=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim D=\begin{pmatrix} 3-2 & 2-6 & 2-6 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

В итоге делаем вывод, что матрицы A и D эквивалентны, так как от одной из них перешли к другой при помощи эквивалентных преобразований над строками.

Элементарные преобразования над матрицами обычно применяются для перехода от матрицы к эквивалентной ей матрице в **канонической форме** (матрице у которой в начале главной диагонали находятся подряд несколько единиц), что позволяет определить ранг матрицы. Так же проведение таких преобразований над строками матриц позволяет перейти от матрицы к эквивалентной ей ступенчатой матрице, что широко применяется в методе Гаусса решения систем линейных уравнений.

Блочные матрицы

Блочные матрицы. Предположим, что некоторая матрица A = (a_{ij}) при помощи горизонтальных и вертикальных прямых разбита на отдельные прямоугольные клетки, каждая из которых представляет собой матрицу меньших размеров и называется **блоком исходной матрицы**. В таком случае возникает возможность рассмотрения исходной матрицы A как некоторой новой (так называемой **блочной**) матрицы A = ($A_{\alpha\beta}$), элементами $A_{\alpha\beta}$ которой служат указанные блоки.

Указанные элементы мы обозначаем большой латинской буквой, чтобы подчеркнуть, что они являются, вообще говоря, матрицами, а не числами и (как обычные числовые элементы) снабжаем двумя индексами, первый из которых указывает номер «блочной» строки, а второй – номер «блочного» столбца. Например, матрицу

$$A=\left\|\begin{array}{cccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{array}\right\|$$

можно рассматривать как блочную матрицу $A=\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix}$, элементами которой служат следующие блоки:

$$A_{11}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{Vmatrix}, \quad A_{12}=\begin{Vmatrix} a_{15} & a_{16} \\ a_{25} & a_{26} \end{Vmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{Vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{Vmatrix}, \quad A_{22}=\begin{Vmatrix} a_{35} & a_{36} \\ a_{45} & a_{46} \\ a_{55} & a_{56} \end{Vmatrix}.$$

Замечательным является тот факт, что основные операции с блочными матрицами совершаются по тем же правилам, по которым они совершаются с обычными числовыми матрицами, только в роли элементов выступают блоки.

В самом деле, элементарно проверяется, что если матрица A = (a_{ij}) является блочной и имеет блочные элементы $A_{\alpha\beta}$, то при том же разбиении на блоки матрице λA = (λa_{ij}) отвечают блочные элементы $\lambda A_{\alpha\beta}$. При этом блочные элементы $\lambda A_{\alpha\beta}$ сами вычисляются по правилу умножения матрицы $A_{\alpha\beta}$ на число λ.

Столь же элементарно проверяется, что если матрицы A и B имеют одинаковые порядки и одинаковым образом разбиты на блоки, то сумме матриц A и B отвечает блочная матрица с элементами $C_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta}$ (здесь $A_{\alpha\beta}$ и $B_{\alpha\beta}$ – блочные элементы матриц A и B).

Пусть, A и B – две блочные матрицы такие, что число столбцов каждого блока $A_{\alpha\beta}$ равно числу строк блока $B_{\beta\gamma}$ (так что при любых α, β и γ определено произведение матриц $A_{\alpha\beta}B_{\beta\gamma}$). Тогда произведение C = A B представляет собой матрицу с элементами $C_{\alpha\gamma}$, определяемыми формулой

$$C_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma}.$$

Для доказательства этой формулы достаточно расписать левую и правую ее части в терминах обычных (числовых) элементов матриц A и B.

Например, рассмотрим умножение матриц размера 4x4.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$$

Каждую матрицу можно разбить на блоки 2x2. По 4 блока на каждую:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] \bullet \left[\begin{array}{cc|cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ \hline c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{array}\right]$$

Затем эти блоки можно умножить по формуле. Например, для первого блока:

$$C_{11} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix}$$

Аналогично можно разбивать матрицу 16x16, 256x256 и так далее (любую квадратную матрицу с количеством строк/столбцов равным степени двойки).

Это можно использовать при программировании произведений квадратных матриц рассмотренного размера.

Примечание

с сайта http://blog2k.ru/archives/3323 (статья «Блочное умножение матриц для программистов»):

«Допустим у вас есть метод, который очень быстро умножает матрицы 4×4 (есть такие операции в NEON, SIMD и прочих MMX) и вам надо ускорить умножение огромной матрицы 32×32.

Оптимизированная версия кода из лекции MIT:

```
void Rec_Mult(double *C, double *A, double *B, int n, int rowsize)
{
    if (n == 1)
    {
        C[0] += A[0] * B[0];
    }
    else
    {
        int d11 = 0;
        int d12 = n / 2;
        int d21 = (n / 2) * rowsize;
        int d22 = (n / 2) * (rowsize + 1);

        // C11 += A11 * B11
        Rec_Mult(C + d11, A + d11, B + d11, n / 2, rowsize);
        // C11 += A12 * B21
        Rec_Mult(C + d11, A + d12, B + d21, n / 2, rowsize);

        // C12 += A11 * B12
        Rec_Mult(C + d12, A + d11, B + d12, n / 2, rowsize);
        // C12 += A12 * B22
        Rec_Mult(C + d12, A + d12, B + d22, n / 2, rowsize);

        // C21 += A21 * B11
        Rec_Mult(C + d21, A + d21, B + d11, n / 2, rowsize);
        // C21 += A22 * B21
        Rec_Mult(C + d21, A + d22, B + d21, n / 2, rowsize);

        // C22 += A21 * B12
        Rec_Mult(C + d22, A + d21, B + d12, n / 2, rowsize);
        // C22 += A22 * B22
        Rec_Mult(C + d22, A + d22, B + d22, n / 2, rowsize);
    }
}
```
»

В качестве примера применения блочных матриц остановимся на понятии так называемой прямой суммы квадратных матриц.

Прямой суммой двух квадратных матриц A и B порядков m и n соответственно называется квадратная блочная матрица C порядка m + n, равная $C = \begin{Vmatrix} A & O \\ O & B \end{Vmatrix}$. Для обозначения прямой суммы матриц A и B используется запись $C = A \oplus B$.

Из определения прямой суммы матриц A и B очевидно, что эта сумма, вообще говоря, не обладает перестановочным свойством. Однако элементарно проверяется справедливость сочетательного свойства: $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.

С помощью свойств операций над блочными матрицами легко проверяются следующие формулы, устанавливающие связь между операцией прямого суммирования и операциями обычного сложения и перемножения матриц:

$$(A_m \oplus A_n) + (B_m \oplus B_n) = (A_m + B_m) \oplus (A_n + B_n),$$

$$(A_m \oplus A_n)(B_m \oplus B_n) = A_m B_m \oplus A_n B_n$$

(в этих формулах A_m и B_m – произвольные квадратные матрицы порядка m, а A_n и B_n – произвольные квадратные матрицы порядка n).