§ 4.2. Практическая работа (решение задач)

11.3.1. Найти частные и полное приращения функции $z = xy^2 - \frac{x}{y}$ в точке $M_0(3; -2)$ при приращениях аргументов $\Delta x = 0{,}1$ и $\Delta y = -0{,}05$.

○ Принимаем $x_0 = 3$, $y_0 = -2$, $x_0 + \Delta x = x = 3{,}1$, $y_0 + \Delta y = y = -2{,}05$, $M_1(3{,}1; -2{,}05)$. Сначала определим $z(M_0) = z(3; -2) = 3(-2)^2 + \frac{3}{2} = 13{,}50$. Далее,

$$z(x_0 + \Delta x; y_0) = z(3{,}1; -2) = 3{,}1 \cdot (-2)^2 + \frac{3{,}1}{2} = 13{,}95;$$

$$z(x_0; y_0 + \Delta y) = z(3; -2{,}05) = 3 \cdot (-2{,}05)^2 + \frac{3}{2{,}05} = 14{,}07;$$

$$z(M_1) = z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) = z(3{,}1; -2{,}05) = \\ = 3{,}1 \cdot (-2{,}05)^2 + \frac{3{,}1}{2{,}05} = 14{,}54.$$

Таким образом,

$$\Delta_x z = z(x_0 + \Delta x; y_0) - z(x_0; y_0) = 0{,}45;$$

$$\Delta_y z = z(x_0; y_0 + \Delta y) - z(x_0; y_0) = 0{,}57;$$

$$\Delta z = z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - z(x_0; y_0) = 14{,}54 - 13{,}50 = 1{,}04.$$

Очевидно, что $\Delta z = 1{,}04 \neq 0{,}45 + 0{,}57 = 1{,}02 = \Delta_x z + \Delta_y z$. ●

Найти частные и полное приращения данной функции в данной точке и при данных приращениях аргументов:

11.3.2. $z = x^2 y$; $M_0(1; 2)$; $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta y = -0{,}2$.

11.3.3. $z = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 y^2 - (x - y)^2}$; $M_0(2; 2)$; $\Delta x = -0{,}2$; $\Delta y = 0{,}1$.

11.3.4. $z = \left(\dfrac{x^2 + y^2}{xy}\right)^2$; $M_0(1; 1)$; $\Delta x = -0{,}1$; $\Delta y = -0{,}1$.

Найти полные приращения данных функций в данных точках (или при переходе от точки M_0 к точке M_1):

11.3.5. $z = 3x^2 + xy - y^2 + 1$; $M_0(2; 1)$; $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta y = 0{,}2$.

11.3.6. $z = 3x^2 + xy - y^2 + 1$; $M_0(2; 1)$; $\Delta x = 0{,}01$; $\Delta y = 0{,}02$.

11.3.7. $z = x^2 - xy + y^2$; $M_0(2; 1)$; $M_1(2{,}1; 1{,}2)$.

11.3.8. $z = \lg(x^2 + y^2)$; $M_0(2; 1)$; $M_1(2{,}1; 0{,}9)$.

11.3.9. Найти частные производные функции $z = \frac{x}{y^3} + \frac{y}{x^3} - \frac{1}{6x^2y}$.

○ Частные производные функции двух и более переменных определяются по тем же формулам и правилам, что и функции одной переменной. Следует помнить только одно правило: если по одной переменной дифференцируем, то остальные считаются постоянными.

Имеем $\left(\text{напомним, что } \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}\right)$:

$$z'_x = \frac{1}{y^3}(x)' + y\left(\frac{1}{x^3}\right)' - \frac{1}{6y}\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1}{y^3} - \frac{3y}{x^4} + \frac{1}{3x^3y};$$

$$z'_y = x\left(\frac{1}{y^3}\right)' + \frac{1}{x^3}(y)' - \frac{1}{6x^2}\left(\frac{1}{y}\right)' = -\frac{3x}{y^4} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{6x^2y^2}.$$ ●

11.3.10. Найти частные производные функции $z = \frac{x^2 - 2xy}{y^2 + 2xy + 1}$.

○ Здесь используем правило дифференцирования дроби.

$$z'_x = \frac{(2x - 2y)(y^2 + 2xy + 1) - (x^2 - 2xy)2y}{(y^2 + 2xy + 1)^2};$$

$$z'_y = \frac{-2x(y^2 + 2xy + 1) - (2y + 2x)(x^2 - 2xy)}{(y^2 + 2xy + 1)^2}.$$ ●

Найти частные производные данных функций:

11.3.11. $z = e^{x^2+y^2}$.

11.3.12. $u = t^5 \sin^3 z$.

11.3.13. $v = x^4 \cos^2 y - y^4 \sin^3 x^5$.

11.3.14. $z = x^2 \cos 2xy - y^2 \sin(x+y)$.

11.3.15. $u = x^y + (xy)^z + z^{xy}$.

11.3.16. Найти частные производные, частные дифференциалы и полный дифференциал функции $z = \cos\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}$.

○ Здесь имеем дело с производными сложной функции и дроби.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3} \cdot \left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right)'_x =$$
$$= -\sin\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3} \cdot \frac{2x(x^3 + y^3) - 3x^2(x^2 + y^2)}{(x^3 + y^3)^2}.$$

Ввиду симметрии выражения $\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}$ относительно x и y можно писать сразу

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\frac{2y(x^3+y^3)-3y^2(x^2+y^2)}{(x^3+y^3)^2}.$$

После преобразований получаем ответы:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\frac{-x^4-3x^2y^2+2xy^3}{(x^3+y^3)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\frac{-y^4-3x^2y^2+2x^3y}{(x^3+y^3)^2};$$

$$d_x z = \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^3+y^3)^2}\cdot\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\,dx;$$

$$d_y z = \frac{y^4+3x^2y^2-2yx^3}{(x^3+y^3)^2}\cdot\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\,dy;$$

$$dz = \frac{1}{(x^3+y^3)^2}\cdot\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\times$$
$$\times\Big[x(x^3+3xy^2-2y^3)dx + y(y^3+3x^2y-2x^3)\,dy\Big]. \quad \bullet$$

11.3.17. Найти полный дифференциал функции $u = \dfrac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$.

○ Так как

$$u'_x = \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}},\quad u'_y = \frac{-xy}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}},\quad u'_z = \frac{-xz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}},$$

то полный дифференциал имеет вид

$$du = \frac{dx}{\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{xy\,dy + xz\,dz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}. \quad \bullet$$

11.3.18. Вычислить приближенно $1{,}07^{3{,}97}$.

○ Число $1{,}07^{3{,}97}$ есть частное значение функции $f(x;y) = x^y$ при $x = 1{,}07$, $y = 3{,}97$. Известно, что $f(1;4) = 1$. Поэтому принимаем $x_0 = 1$, $y_0 = 4$. Тогда $\Delta x = x - x_0 = 0{,}07$, $\Delta y = y - y_0 = -0{,}03$. Значение $f(x+\Delta x; y+\Delta y)$ вычислим при помощи формулы линеаризации: $f(x_0;y_0) + df(x_0;y_0)$. Имеем:

$$f'_x = yx^{y-1},\quad f'_y = x^y\ln x,\quad f'_x(1;4) = 4,\quad f'_y(1;4) = 0,$$
$$df(1;4) = 4\cdot 0{,}07 + 0\cdot(-0{,}03) = 0{,}28.$$

Таким образом, $1{,}07^{3{,}97} \approx 1 + 0{,}28 = 1{,}28$. $\bullet$

Вычислить приближенно:

11.3.19. $1{,}04^{2{,}03}$. **11.3.20.** $\sqrt{(1{,}04)^2+(3{,}01)^2}$.

11.3.21. $\sin 28^\circ \cdot \cos 61^\circ$.

11.3.22. Вычислить приближенно $\sqrt{(\sin^2 1{,}55 + 8e^{0{,}015})^5}$.

❍ 1) Принимаем $f(x;y) = (\sin^2 x + 8e^y)^{\frac{5}{2}}$, $x_0 = 1{,}571 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = 0$, $x = 1{,}55$, $\Delta x = x - x_0 = 1{,}55 - 1{,}571 = -0{,}021$, $y = 0{,}015$, $\Delta y = 0{,}015$.

2) $f(x_0;y_0) = (\sin\frac{\pi}{2} + 8e^0)^{\frac{5}{2}} = 243$.

3) $f'_x = \frac{5}{2}(\sin^2 x + 8e^y)^{\frac{3}{2}} \cdot \sin 2x$, $f'_y = \frac{5}{2}(\sin^2 x + 8e^y)^{\frac{3}{2}} \cdot 8e^y$, $f'_x(x_0;y_0)=0$, так как $\sin 2x_0 = \sin\pi = 0$, $f'_y(x_0;y_0) = 20(1+8)^{\frac{3}{2}} = 540$, $df(x_0;y_0) = 540\cdot 0{,}015 = 8{,}1$.

Окончательно,

$$\sqrt{(\sin^2 1{,}55 + 8e^{0{,}015})^5} \approx 243 + 8{,}1 = 251{,}1.$$ ●

Вычислить приближенно:

11.3.23. $\operatorname{arctg}\frac{1{,}02}{0{,}95}$. **11.3.24.** $\sqrt{5e^{0{,}02}+2{,}03^2}$.

11.3.25. $\ln(0{,}09^3 + 0{,}99^3)$.

11.3.26. Вычислить приближенно $\cos 2{,}36 \cdot \operatorname{arctg} 0{,}97 \cdot 3^{2{,}05}$.

❍ Имеем дело с функцией трех переменных $f(x;y;z) = \cos x \cdot \operatorname{arctg} y \cdot 3^z$. $x_0 = \frac{3\pi}{4} = 2{,}356$, $x = 2{,}36$, $\Delta x = 0{,}004$, $y_0 = 1$, $y = 0{,}97$, $\Delta y = -0{,}03$, $z_0 = 2$, $z = 2{,}05$, $\Delta z = 0{,}05$. Наконец,

$$f(x_0;y_0;z_0) = \cos\frac{3\pi}{4}\cdot\operatorname{arctg} 1\cdot 3^2 = -\frac{9\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4} \approx -4{,}9957.$$

Найдем сначала дифференциал в общем виде

$$df = -\sin x\cdot\operatorname{arctg} y\cdot 3^z\Delta x + \frac{\cos x\cdot 3^z}{1+y^2}\Delta y + \cos x \operatorname{arctg} y\cdot 3^z \ln 3\cdot\Delta z.$$

А теперь составим числовое выражение дифференциала в точке.

$$df(x_0;y_0;z_0) = -9\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\cdot 0{,}004 - \frac{9\sqrt{2}}{4}\cdot 0{,}03 - 9\ln 3\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{4}\cdot 0{,}05 \approx$$

$$\approx -0{,}0199 - 0{,}0954 - 0{,}2744 = -0{,}3718.$$

Окончательно,

$$\cos 2{,}36 \cdot \operatorname{arctg} 0{,}97 \cdot 3^{2{,}05} \approx -4{,}9957 - 0{,}3718 = -5{,}3675. \quad \bullet$$

Вычислить приближенно:

11.3.27. $1{,}002 \cdot 2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3$. **11.3.28.** $\dfrac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98 \cdot \sqrt[4]{1{,}05^3}}}$.

Ответы

11.3.2. $\Delta_x z = 0{,}42$, $\Delta_y z = -0{,}2$, $\Delta z = 0{,}178$. **11.3.3.** $\Delta_x z = 0{,}0031$, $\Delta_y z = 0{,}0006$, $\Delta z = 0{,}0063$. **11.3.4.** $\Delta_x z = 0{,}04$, $\Delta_y z = 0{,}04$, $\Delta z = 0$. **11.3.5.** 1,31. **11.3.6.** 0,2109. **11.3.7.** 0,33. **11.3.8.** 0,0187. **11.3.11.** $z'_x = 2xe^{x^2+y^2}$, $z'_y = 2ye^{x^2+y^2}$. **11.3.12.** $u'_t = 5t^4 \sin^3 z$, $u'_z = 3t^5 \sin^2 z \cos z$. **11.3.13.** $v'_x = 4x^3 \cos^2 y - 15x^4 y^4 \sin^2 x^5 \cdot \cos x^5$, $v'_y = -x^4 \sin 2y - 4y^3 \sin^3 x^5$. **11.3.14.** $z'_x = 2x \cos 2xy - 2yx^2 \sin 2xy - y^2 \cos(x+y)$, $z'_y = -2x^3 \sin 2xy - 2y \sin(x+y) + y^2 \cos(x+y)$. **11.3.15.** $u'_x = yx^{y-1} + y^z z x^{z-1} + yz^{xy} \ln z$, $u'_y = x^y \ln x + x^z z y^{z-1} + xz^{xy} \ln z$, $u'_z = (xy)^z \ln(x \cdot y) + xyz^{xy-1}$. *Указание*. Следует заметить, что здесь имеем дело по существу с двумя формулами: для производной степенной и показательной функций. **11.3.19.** 1,08. **11.3.20.** 3,185. **11.3.21.** 0,227. *Указание*. От градусов следует переходить к радианам (числам). Тогда $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $y_0 = \frac{\pi}{3}$, $\Delta x = -2^\circ = \frac{-\pi}{90}$, $\Delta y = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$. Везде принимать $\pi = 3{,}14$ и производить соответствующие расчеты. **11.3.23.** 0,82. **11.3.24.** 3,037. **11.3.25.** $-0{,}03$. **11.3.27.** 108,972. **11.3.28.** 1,054.