

§ 6. Определённый интеграл. Приёмы вычисления

§ 6.1. Теоретический материал

Основные понятия и свойства

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ и на этом отрезке произвольно выбраны точки x_0, x_1, \dots, x_n , так что $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ — выбрано разбиение этого отрезка на n частей. В каждом интервале $(x_{i-1}; x_i]$ произвольным образом выбрана точка c_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

⇒ Сумма вида

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i, \quad (1.1)$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

⇒ *Определённым интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел интегральных сумм S_n при условии, что длина наибольшего частичного отрезка Δx_i стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_i \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i. \quad (1.2)$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то предел (1.2) существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a; b]$ и от выбора точек c_i (*теорема существования* определённого интеграла). Функция $f(x)$ в этом случае называется *интегрируемой* на отрезке $[a; b]$. Более того, если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a; b]$ и непрерывна в нем, кроме конечного числа точек разрыва первого рода, то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определённого интеграла:

$$1. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$2. \int_a^a f(x) dx = 0.$$

$$3. \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt, \text{ т. е. переменную интегрирования можно обозначить любой буквой.}$$

$$4. \int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx.$$

$$5. \int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

$$6. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad a < c < b.$$

7. Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a; b]$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$; если $f(x) \leq 0$ для всех точек $x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.

8. Если $f(x) \leq g(x)$ на отрезке $[a; b]$, то $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

9. Если M — наибольшее, m — наименьшее значение $f(x)$ на $[a; b]$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

10. $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$, $c \in [a; b]$ (теорема о среднем).

$$11. \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

$$12. \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

Формула Ньютона - Лейбница

Если для непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ может быть найдена ее первообразная $F(x)$ (см. Гл. 8, § 1), то простым и удобным методом вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ является *формула Ньютона-Лейбница*:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (1.3)$$

При интегрировании *четных и нечетных функций* в симметричных пределах интегрирования полезно использовать формулу

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная функция,} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ — нечетная функция.} \end{cases}$$

Интегрирование подстановкой

При вычислении определенных интегралов часто используется метод подстановки или метод замены переменной интегрирования. Пусть для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \varphi(t)$. Если функция $\varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$, причем

$$a = \varphi(\alpha) \quad \text{и} \quad b = \varphi(\beta), \quad (1.4)$$

то справедлива формула:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt. \quad (1.5)$$

Формула (1.5) называется *формулой замены переменной интегрирования* в определенном интеграле.

Отметим, что:

- 1) функцию $x = \varphi(t)$ следует подобрать так, чтобы, подставив ее вместо x в подынтегральное выражение, получить более простой интеграл;
- 2) новые пределы интегрирования находить из соотношений (1.4);
- 3) при вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется (в отличие от неопределенного интеграла);
- 4) вместо подстановки $x = \varphi(t)$ применяют и подстановку $t = \psi(x)$.

Интегрирование по частям

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$, то имеет место формула

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (1.6)$$

Формула (1.6) называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла*.

Примеры

9.1.1. Используя формулу Ньютона–Лейбница, вычислить интеграл:

$$\int_1^4 x^2 dx.$$

○ Подынтегральная функция $f(x) = x^2$ на отрезке $[1; 4]$ имеет первообразную $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Тогда по формуле (1.3) имеем

$$\int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 21. \quad \bullet$$

9.1.2. Вычислить интеграл $\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

○ Подынтегральная функция имеет «почти табличный» вид. Для нахождения первообразной проведем преобразования также, как это делалось ранее (см. задачу 9.1.10).

$$\begin{aligned} \int_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} &= \int_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \int_{-4}^{-2} \frac{d(x+2)}{\sqrt{3^2-(x+2)^2}} = \\ &= \arcsin \frac{x+2}{3} \Big|_{-4}^{-2} = \arcsin 0 - \arcsin \left(-\frac{2}{3}\right) = \arcsin \frac{2}{3}. \quad \bullet \end{aligned}$$

9.1.12. Найти значение интеграла $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) dx$.

○ Это также «почти табличный» интеграл. Для нахождения первообразной (и использования формулы Ньютона–Лейбница) применим формулу понижения степени (как это сделано в задаче 8.1.22):

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)\right) dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) dx = \\ &= \frac{1}{2} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 0 - \frac{1}{4} \left(\sin \left(-\frac{2}{3} \pi \right) - \sin \frac{\pi}{3} \right) = \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \left(\pi + \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right). \bullet
\end{aligned}$$

9.1.20. Вычислить $\int_1^2 \frac{x^4 + 1}{x^3(x^2 + 1)} dx$.

○ Под знаком интеграла стоит рациональная дробь. Для нахождения первообразной используются правила, приведенные в § 3 главы 8. Применим их. Для этого разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей:

$$\frac{x^4 + 1}{x^3(x^2 + 1)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{Dx + E}{x^2 + 1}.$$

Тогда $x^4 + 1 = A(x^2 + 1) + Bx(x^2 + 1) + Cx^2(x^2 + 1) + (Dx + E)x^3$, т. е. $x^4 + 1 = (C + D)x^4 + (B + E)x^3 + (A + C)x^2 + Bx + A$. Отсюда

$$\begin{cases} C + D = 1, \\ B + E = 0, \\ A + C = 0, \\ B = 0, \\ A = 1. \end{cases}$$

Находим, что $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$, $D = 2$, $E = 0$. Итак,

$$\frac{x^4 + 1}{x^3(x^2 + 1)} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Первое и второе слагаемые имеют табличные интегралы, третье — «почти табличное», легко вычисляется после внесения $2x$ под знак дифференциала (см. задачу 9.2.1).

Поэтому

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{x^4 + 1}{x^3(x^2 + 1)} dx &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx = \\
&= \left(-\frac{1}{2x^2} - \ln x + \ln(x^2 + 1) \right) \Big|_1^2 = \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \ln 2 + \ln 1 + \ln 5 - \ln 2 = \ln \frac{5}{4} + \frac{3}{8}. \bullet
\end{aligned}$$

9.1.26. Найти значение интеграла $\int_0^2 f(x) dx$, если

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x < 1; \\ 2, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

○ Подынтегральная функция имеет на отрезке $[0; 2]$ одну точку разрыва ($x = 1$) первого рода, ограничена на нем.

Тогда:

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 2 dx = \\ &= e^x \Big|_0^1 + 2x \Big|_1^2 = e - 1 + 4 - 2 = e + 1. \quad \bullet \end{aligned}$$

9.1.46. Вычислить интеграл $\int_1^9 \frac{dx}{5 + 2\sqrt{x}}$ с помощью замены переменных.

○ Применим подстановку $\sqrt{x} = t$. Тогда $x = t^2$, $dx = 2t dt$.

Находим новые пределы интегрирования: $\frac{x}{t = \sqrt{x}} \Big| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \Big| \begin{matrix} 9 \\ 3 \end{matrix}$.

Применяя формулу (1.5), получим:

$$\begin{aligned} \int_1^9 \frac{dx}{5 + 2\sqrt{x}} &= \int_1^3 \frac{2t dt}{5 + 2t} = \int_1^3 \frac{2t + 5 - 5}{2t + 5} dt = \\ &= \int_1^3 \left(1 - \frac{5}{2t + 5}\right) dt = t \Big|_1^3 - 5 \cdot \frac{1}{2} \ln |2t + 5| \Big|_1^3 = \\ &= 3 - 1 - \frac{5}{2} (\ln 11 - \ln 7) = 2 - \frac{5}{2} \ln \frac{11}{7}. \quad \bullet \end{aligned}$$

9.1.51. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + 2 \cos x}$ с помощью подстановки.

○ Положим $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Тогда получаем $x = 2 \operatorname{arctg} t$, $dx =$

$= \frac{2}{1+t^2} dt$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Пределы интегрирования $\frac{x}{t} \Big| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \Big| \begin{matrix} \frac{\pi}{2} \\ 1 \end{matrix}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x} &= \int_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{3+2 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{2}{t^2+5} dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} \Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}. \bullet\end{aligned}$$

9.1.52. При помощи замены переменной вычислить интеграл

$$\int_2^3 x(3-x)^7 dx.$$

○ Полагая $t = 3 - x$, получим: $x = 3 - t$, $dx = -dt$. Пределы интегрирования $\begin{array}{c|c|c} x & 2 & 3 \\ \hline t & 1 & 0 \end{array}$.

$$\begin{aligned}\int_2^3 x(3-x)^7 dx &= \int_1^0 (3-t)t^7 (-dt) = \int_1^0 (t^8 - 3t^7) dt = \\ &= \left(\frac{t^9}{9} - \frac{3}{8}t^8 \right) \Big|_1^0 = -\frac{1}{9} + \frac{3}{8} = \frac{19}{72}. \bullet\end{aligned}$$

9.1.59. Вычислить при помощи подстановки интеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$$

○ Пусть $x = \frac{1}{t}$. Тогда $dx = -\frac{1}{t^2} dt$. $\begin{array}{c|c|c} x & 1 & 2 \\ \hline t & 1 & \frac{1}{2} \end{array}$. Получаем

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} &= \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t} \cdot \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} + 1}} = - \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} = \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{d(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}} = \ln \left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2+t+1} \right| \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \\ &= \ln \frac{3+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{7}}. \bullet\end{aligned}$$

9.1.61. Вычислить интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)^2}$ при помощи замены переменной.

○ Применим подстановку $x = 2 \operatorname{tg} t$. Тогда $dx = \frac{2}{\cos^2 t} dt$,

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{4} \end{array} :$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)^2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 dt}{\cos^2 t (4+4 \operatorname{tg}^2 t)^2} = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 dt}{16 \cos^2 t \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^2} = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = \\ &= \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{16} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi+2}{64}. \quad \bullet \end{aligned}$$

9.1.86. Вычислить интеграл $\int_1^e (x+1) \ln x dx$.

○ Применим формулу интегрирования по частям. Положим $u = \ln x$, $dv = (x+1)dx$. Тогда $du = \frac{1}{x} dx$, $v = \frac{x^2}{2} + x$. По формуле (1.6) имеем

$$\begin{aligned} \int_1^e (x+1) \ln x dx &= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{e^2}{2} + e - 0 - \left(\frac{x^2}{4} + x \right) \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} + e - \frac{e^2}{4} - e + \frac{1}{4} + 1 = \frac{e^2+5}{4}. \quad \bullet \end{aligned}$$

9.1.91. Вычислить $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$.

○ Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$. Тогда $du = \frac{1}{1+x^2} dx$, $v = x$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx &= x \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi - \ln 4}{4}. \quad \bullet \end{aligned}$$

9.1.95. Найти значение $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin 2x \, dx$.

○ Интегрируем по частям: $u = x^2$, $dv = \sin 2x \, dx$, $du = 2x \, dx$,
 $v = -\frac{1}{2} \cos 2x$.

$$J = -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \cos 2x \cdot 2x \, dx = 0 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x \, dx.$$

Снова интегрируем по частям: $u = x$, $dv = \cos 2x \, dx$, $du = dx$,
 $v = \frac{1}{2} \sin 2x$.

$$J = \frac{1}{2} x \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \sin 2x \, dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}. \bullet$$