§ 3. Теоремы о среднем. Правила Лопиталя. Формулы Тейлора

§ 3.1. Теоретический материал

Теоремы о среднем

Теорема 7.1 (Ролля). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и принимает на концах отрезка равные значения (т. е. $f(a) = f(b)$). Тогда существует по крайней мере одна точка c на интервале $(a; b)$, для которой $f'(c) = 0$.

Теорема 7.2 (Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда на интервале $(a; b)$ найдется такая точка c, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Теорема 7.3 (Коши). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы на интервале $(a; b)$, причем $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a; b)$. Тогда найдется такая точка c на этом интервале, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Правила Лопиталя

Первое правило Лопиталя. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, кроме, быть может, самой этой точки, и $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$. Тогда если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ (в этом случае говорят, что в точке x_0 имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$) и существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Второе правило Лопиталя. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, кроме, быть может, самой этой точки, и $g'(x) \neq 0$ для $\forall x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$. Тогда если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = \infty$ (т. е. в точке x_0 имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$) и существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Если отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ в свою очередь представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то правило Лопиталя (при условии выполнения соответствующих ограничений на функции $f'(x)$ и $g'(x)$) можно применять второй раз и т. д.

Формула Тейлора

⇛ Пусть функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производные $f', f'', \ldots, f^{(n)}$. Тогда для любой точки x из этой окрестности имеет место равенство

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\big((x - x_0)^n\big) \text{ при } x \to x_0.$$

Эта формула называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.*

Последнее слагаемое (т. е. остаточный член) в формуле Тейлора иногда записывают в виде $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ (в этом случае надо дополнительно предполагать существование $f^{(n+1)}(x)$ в данной окрестности точки x_0). Соответствующая формула тогда называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.*

В случае $x_0 = 0$ формула Тейлора принимает вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n), \quad x \to 0$$

и называется *формулой Маклорена.*

Полезно помнить разложения по формуле Маклорена некоторых важнейших элементарных функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n} + o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\dots\cdot(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n).$$