§ 4. Неопределённый интеграл. Интегрирование иррациональных функций

§ 4.1. Теоретический материал

Если в рациональной дроби некоторые из слагаемых в числителе или знаменателе заменить корнями от рациональных дробей (в том числе от многочленов), то полученная функция будет называться *иррациональной*[1].

В некоторых случаях интегралы от иррациональных функций удается *рационализировать*, т. е. с помощью подходящей подстановки свести к интегралам от рациональных дробей. Рассмотрим наиболее типичные случаи (везде далее подразумевается, что подынтегральная функция — иррациональная).

1. Если корни в подынтегральном выражении имеют вид:

$$\sqrt[n]{x^m}, \quad \sqrt[q]{x^p}, \quad \sqrt[s]{x^q}$$

и т. д., то оно преобразуется в рациональную дробь с помощью подстановки $x = t^k$, где k — наименьшее общее кратное показателей корней, т. е. чисел n, q, $s, \ldots$

2. Если выражение под знаком интеграла содержит только корни $\sqrt[n]{(ax+b)^m}$, $\sqrt[q]{(ax+b)^p}$, $\sqrt[s]{(ax+b)^r}$ и т. д. (в частности, при $b = 0$, $a = 1$ получаем случай 1), то оно приводится к рациональной дроби с помощью подстановки $ax + b = t^k$, где k — наименьшее общее кратное показателей корней, т. е. чисел n, q, $s, \ldots$

[1]Это определение иррациональной функции не совсем строгое, но оно вполне подходит для наших целей.

3. Если выражение под знаком интеграла содержит только корни $\sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}$, $\sqrt[q]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^p}$, $\sqrt[s]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^r}$ и т. д. (в частности, при $c = 0$, $d = 1$ получаем случай 2, а при $c = b = 0$, $d = a = 1$ — случай 1), то оно приводится к рациональной дроби с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k — наименьшее общее кратное показателей корней, т. е. чисел n, q, $s, \ldots$

4. Если подынтегральное выражение представляет собой *дифференциальный бином*, то есть равно $x^m \cdot (a+bx^n)^p\,dx$, где m, n, p — рациональные числа, то данный интеграл сводится к интегралу от рациональной дроби в следующих трех случаях:

1) p — целое число; тогда интеграл можно рационализировать при помощи подстановки $x = t^k$, где k — общий знаменатель дробей m и n;

2) $\dfrac{m+1}{n}$ — целое число; тогда рационализация достигается подстановкой $a + bx^n = t^k$, где k — знаменатель числа p;

3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ — целое число; в этом случае интеграл рационализируется с помощью подстановки $a \cdot x^{-n} + b = t^k$, где k — знаменатель числа p.

Примеры

8.4.1. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

❍ В подынтегральном выражении есть корни второй и третьей степеней от x, поэтому делаем подстановку $x = t^6$ (6 — наименьшее общее кратное чисел 2 и 3). Отсюда $dx = 6t^5\,dt$ и, значит,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5\,dt}{t^3 + t^2} = 6\int \frac{t^3\,dt}{t+1} =$$

$$= 6\int \frac{(t^3+1)-1}{t+1}\,dt = 6\left[\int \frac{t^3+1}{t+1}\,dt - \int \frac{dt}{t+1}\right] =$$

$$= 6\left[\int \frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}\,dt - \ln|t+1|\right] =$$

$$= 6\left[\int (t^2-t+1)\,dt - \ln|t+1|\right] =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) + C = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x} + 1\right| + C. \quad \bullet$$

8.4.4. Найти интеграл $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$.

○ Наименьшее общее кратное показателей корней в подынтегральном выражении равно 6, поэтому делаем подстановку (случай 2) $1+x=t^6$, откуда $x=t^6-1$, $dx=6t^5\,dt$, то есть

$$\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx = \int \frac{(t^6-1)+t^3}{t^2}\cdot 6t^5\,dt = 6\int (t^9+t^6-t^3)\,dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C = 6t^4\left(\frac{t^6}{10}+\frac{t^3}{7}-\frac{1}{4}\right)+C =$$

$$= 6\sqrt[3]{(1+x)^2}\cdot\left(\frac{1+x}{10}+\frac{\sqrt{1+x}}{7}-\frac{1}{4}\right)+C.$$ ●

8.4.7. Найти интеграл $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$.

○ В соответствии с указанной выше рекомендацией (случай 3) сделаем подстановку $\frac{1-x}{1+x}=t^2$. Отсюда $1-x=(1+x)t^2$, т. е. $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, и значит,

$$dx = \frac{(1-t^2)'(1+t^2)-(1+t^2)'(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\,dt = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

Таким образом,

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x} = \int t\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{(-4t)dt}{(1+t^2)^2} =$$

$$= 4\int \frac{t^2}{(t^2-1)(t^2+1)}\,dt = 4\int \frac{(t^2-1)+1}{(t^2-1)(t^2+1)}\,dt =$$

$$= 4\left[\int \frac{t^2-1}{(t^2-1)(t^2+1)}\,dt + \int \frac{dt}{(t^2-1)(t^2+1)}\right] =$$

$$= 4\left[\int \frac{dt}{t^2+1} + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt\right] =$$

$$= 4\int \frac{dt}{t^2+1} + 2\int \frac{dt}{t^2-1} - 2\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 2\left(\int \frac{dt}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2-1}\right) = 2\left(\operatorname{arctg} t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right) + C =$$

$$= 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right| + C =$$

$$= 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right| + C. \quad ●$$

8.4.9. Найти интеграл $\int \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{1+3\cdot\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

○ Представим данный интеграл в следующем виде:

$$\int x^{\frac{1}{3}}\cdot\left(1+3\cdot x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\,dx.$$

Отсюда видно, что под знаком интеграла стоит дифференциальный бином (случай 4), при этом $m = \frac{1}{3}$, $n = \frac{2}{3}$, $p = \frac{1}{3}$. Так как в данном случае $\frac{m+1}{n} = \frac{\frac{1}{3}+1}{\frac{2}{3}} = 2$ — целое число, то следует применить подстановку 2), т.е. $1 + 3x^{\frac{2}{3}} = t^3$. Следовательно, $x = \frac{1}{3\sqrt{3}}(t^3-1)^{\frac{3}{2}}$, и значит, $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}(t^3-1)^{\frac{1}{2}}\cdot t^2\,dt$. Таким образом,

$$\int \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int \frac{\sqrt{t^3-1}}{\sqrt{3}}\cdot t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{t^3-1}\cdot t^2\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int (t^3-1)t^3\,dt = \frac{1}{2}\int (t^6-t^3)\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right) + C =$$

$$= \frac{t^7}{14} - \frac{t^4}{8} + C = \frac{1}{14}\sqrt[3]{(1+3\sqrt[3]{x^2})^7} - \frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+3\sqrt[3]{x^2})^4} + C. \quad ●$$