

§ 6.3. Домашнее задание (письменное)

Письменно решить номера 9.1.27 – 9.1.35, 9.1.66 – 9.1.70, 9.1.100 – 9.1.108.

Вычислить следующие интегралы:

$$9.1.27. \int_1^{e^2} \frac{\ln^3 x}{3x} dx.$$

$$9.1.28. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx.$$

$$9.1.29. \int_0^1 \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2} dx.$$

$$9.1.30. \int_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx.$$

$$9.1.31. \int_{-1}^0 \frac{3^x - 2^x}{6^x} dx.$$

$$9.1.32. \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$$

$$9.1.33. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x dx.$$

$$9.1.34. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x \cdot \ln \cos x dx.$$

$$9.1.35. \int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x+2}}.$$

Вычислить интегралы:

$$9.1.66. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5 dx}{1 + \cos x}.$$

$$9.1.67. \int_0^{\ln 4} \sqrt{e^x - 1} dx.$$

$$9.1.68. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos x + \sin x}.$$

$$9.1.69. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{6 - 5 \sin x + \sin^2 x}.$$

$$9.1.70. \int_1^2 3x(1-x)^{17} dx.$$

Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

9.1.100. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{\sin^2 x}.$

9.1.101. $\int_0^{0,2} x e^{5x} dx.$

9.1.102. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 4x \operatorname{tg}^2 x dx.$

9.1.103. $\int_1^{e^2} \ln^2 x dx.$

9.1.104. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx.$

9.1.105. $\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

9.1.106. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx.$

9.1.107. $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin \sqrt{x} dx.$

9.1.108. $\int_0^9 e^{\sqrt{x}} dx.$

Необязательное письменное домашнее задание

Задание для больших «любителей» 😊 математики. Выполнять при желании.

Правила сдачи:

- Сдавать только в сроки, указанные преподавателем.
- Обязательно перед выполнением делать запись, что номера из дополнительного домашнего задания.
- Выполнять задания в строгом порядке. Если какой-то пример не решаете, то написать номер примера и фразу «пример не решаю».
- Если есть номера на «устное решение» или «доказательство», то подробно описать ход рассуждений.
- Обязательно выложить фотографию в moodle.

Вычислить интегралы:

$$9.1.36*. \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}} d\varphi.$$

$$9.1.37*. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx.$$

$$9.1.38*. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^4 x dx.$$

$$9.1.39*. \int_2^4 |3 - x| dx.$$

$$9.1.40*. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx, \text{ если } f(x) = \begin{cases} \sin^2 x, & \text{при } x \in [-\frac{\pi}{4}; 0], \\ \operatorname{tg} x, & \text{при } x \in (0; \frac{\pi}{4}]. \end{cases}$$

$$9.1.41. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^1 x^{-2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -1 - 1 = -2. \text{ Ответ неверен.}$$

Почему?

$$9.1.42. \text{ Вычислить устно интеграл } \int_{-2}^2 \frac{3x}{(x^2 + 1)^3} dx.$$

9.1.43. Выяснить, не вычисляя, какой из интегралов меньше:

$$\text{а) } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx \text{ или } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx;$$

$$\text{б) } \int_1^{15} x^5 dx \text{ или } \int_1^{15} x^6 dx;$$

$$\text{в) } \int_0^1 4^{-x} dx \text{ или } \int_0^1 5^{-x} dx;$$

$$\text{г) } \int_{-1}^0 4^{-x} dx \text{ или } \int_{-1}^0 5^{-x} dx.$$

9.1.44. Определить, не вычисляя, знак интеграла:

а) $\int_1^2 (x^2 - 4x + 3) dx$;

б) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x dx$.

9.1.45. Известно, что $\int_a^b f(x) dx = 0$. Следует ли отсюда, что $f(x) \equiv 0$ на $[a; b]$?

Вычислить интегралы:

9.1.71. $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{4-x}} dx$.

9.1.72. $\int_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$.

9.1.73. $\int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{15\sqrt{x+3}}{(x+3)^2\sqrt{x}} dx$.

9.1.74. $\int_0^{\arcsin \sqrt{\frac{7}{8}}} \frac{6 \sin^2 x}{4+3 \cos 2x} dx$.

9.1.75. $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx$.

9.1.76. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^9 x dx$.

9.1.77. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{6+\sin^2 x}$.

9.1.78. $\int_1^{64} \frac{2+\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})\sqrt{x}} dx$.

9.1.79. $\int_1^4 \frac{(x-1) dx}{\sqrt[3]{(3x-4)^2} - \sqrt[3]{3x-4} + 1}$.

9.1.81. Вычислить $J = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$, сделав подстановку $x = \pi - t$.

9.1.82. а) Можно ли интеграл $\int_0^3 2x \sqrt[3]{4-x^2} dx$ вычислить с помощью подстановки $x = 2 \cos t$?

б) Можно ли интеграл $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{x^2+1} dx$ вычислить с помощью подстановки $x = \frac{1}{\sin t}$?

9.1.83. Вычислить $\int_0^{50} f(z) dz : \int_0^1 f(50z) dz$.

9.1.84. Вычисляя интеграл $J = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$ с помощью подстановки $x = \frac{1}{t}$, получим $J = - \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = - \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = -J$. Отсюда: $J + J = 0$, т.е. $J = 0$. Ответ неверен. В чем ошибка?

9.1.85. При вычислении интеграла $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ применим подстановку $x = \sin t$. Новые пределы интегрирования находим из равенств $0 = \sin t$ и $1 = \sin t$. Получаем $t_1 = 0$ и $t_2 = \frac{\pi}{2}$. Можно ли в качестве пределов для t взять числа $t_1 = \pi$ и $t_2 = \frac{\pi}{2}$?

Вычислить интегралы:

9.1.109. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx.$

9.1.110. $\int_0^a \sqrt{a^2 + x^2} dx, a > 0.$

9.1.111. $\int_0^3 \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx.$

9.1.112. $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx.$

9.1.113. Как проще всего вычислить интеграл $\int_{-2,7}^{2,7} \frac{x^2 \sin 2,7x}{x^2 + 3} dx$?

9.1.114. Доказать, что $\int_{-1}^1 2^{\cos x} dx = 2 \int_0^1 2^{\cos x} dx.$

9.1.115. Чему равен интеграл $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \ln \frac{2+x}{2-x} dx$?

9.1.116. Показать, что $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{dx}{\arcsin x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x} dx.$