Задание 7. Синтаксис языка бескванторных формул первого порядка

Для получения языка бескванторных формул язык атомарных формул обогащается новыми символами, так называемыми *пропозициональными* символами[1]. Они позволяют строить более сложные формулы.

Учебные задачи

1. Выучить термины и их значения: *пропозициональные символы: конъюнкция, дизъюнкция, импликация, отрицание*, *бескванторная формула сигнатуры* S.

2. Научиться выполнять: *строить доказательство бескванторной формулы*, *узнавать бескванторные формулы среди других символьных цепочек*.

Теоретические сведения

Алфавит языка бескванторных формул первого порядка. Рассмотрим два новых множества символов:

$$\mathrm{Pro} := \{\neg,\ \&,\ \vee,\ \to\}$$
$$\mathrm{Bra} := \{\ (\ ,\ )\ \}$$

Символы из Pro называются *пропозициональными связками*. Пропозициональные связки называются соответственно *отрицанием, конъюнкцией, дизъюнкцией* и *импликацией.*

Символы из Bra называются *скобками*: (— *левая*, или *открывающая*, скобка,) — *правая*, или *закрывающая*, скобка.

> Определение. *Алфавитом стандартного языка бескванторных формул первого порядка* будем называть объединение множеств Con, Fun, Rel, Var, Pro, Bra.

Определения *сигнатуры*, *терма* и определение *атомарной формулы* языка бескванторных формул первого порядка такие же, как определения терма языка термов и определение атомарной формулы языка атомарных формул соответственно.

Бескванторные формулы языка первого порядка. Введем понятие *формул* языка бескванторных формул первого порядка, которые будем называть также *бескванторными формулами первого порядка*, или

[1] от латинского *propozitio* — суждение, предложение.

бескванторными формулами. Будем использовать буквы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, ... в качестве переменных языка иссследователя для обозначения *формул*.

> Определение.
> (Ф1) Всякая атомарная формула есть *бескванторная формула.*
> (Ф2–Ф5) Если $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ есть бескванторные формулы, а $\boldsymbol{x}$ — предметная переменная, то слова
> $$\neg\boldsymbol{A}\ \ (\boldsymbol{A}\&\boldsymbol{B}),\ (\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}),\ (\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B})$$
> также есть *бескванторные формулы.*

С помощью введенных символьные переменных языка исследователя, мы можем записать это определение в виде правил *исчисления формул* следующим образом:

$$\frac{}{\boldsymbol{P^n t_1 \dots t_n}}\ (\Phi1) \qquad \frac{\boldsymbol{A}}{\neg\boldsymbol{A}}\ (\Phi2);$$

$$\frac{\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B}}{(\boldsymbol{A}\&\boldsymbol{B})}\ (\Phi3); \qquad \frac{\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B}}{(\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B})}\ (\Phi4); \qquad \frac{\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B}}{(\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B})}\ (\Phi5)\,.$$

Определение. Всякую формулу и всякий терм языка бескванторных формул будем называть *правильным выражением* этого языка.

Определение. *Логическим рангом* правильного выражения языка называется общее число вхождений в это выражение символов из Pro. Логический ранг формулы $\boldsymbol{A}$ обозначается $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$.

Определение. *Подформулой* формулы $\boldsymbol{A}$ называется подслово формулы $\boldsymbol{A}$, которое само является формулой.

Упражнения для самостоятельного решения

1. Составьте формулу стандартного языка бескванторных формул, в которую имеет вхождения каждый из следующих символов (но, возможно, еще и другие символы):

(а) $\vee$, $\doteq$, f_1^1, c_0; (б) $\neg$, (, P_1^2, f_2^2.

2. Какова наименьшая из длин формул стандартного языка, содержащих вхождения каждого из символов $\vee$, $\neg$?

3. Докажите, что следующее слово есть формула некоторого стандартного языка бескванторных формул первого порядка:

(а) $(P_1^2 f_2^2 x_0 c_0 x_1 \to\bumpeq f_2^2 f_1^1 x_0 c_0 x_1)$; (б) $((P_1^1 x_0 \& P_1^1 x_1) \to\bumpeq x_0 x_1)$;
(в) $((\neg \bumpeq f_1^1 x_0 c_0 \vee \neg P_1^1 x_0) \to P_1^1 f_1^1 x_1)$.

4. Какие из следующих слов являются формулами стандартного языка бескванторных формул первого порядка:
(а) $\neg \bumpeq f_1^2 x_1 c_1 x_2$; (б) $\bumpeq \neg f_1^1 x_1 x_2$;
(в) $(\neg P_1^1 x_1 \& \bumpeq x_1 f_1^2 x_2 x_1)$; (г) $\neg(P_1^2 f_1^1 \bumpeq x_1 x_2 \to P_1^1 x_0)$.

5. Рассматривается стандартный язык бескванторных формул, алфавит которого содержит символы P_1^2, P_2^3, P_3^1, f_1^1, f_2^2, f_3^3, c_1, c_2, c_3. Определите, является ли слово $\boldsymbol{\alpha}$ правильным выражением языка или нет:
(а) $\boldsymbol{\alpha} \circeq (P_1^2 x_1 f_3^3 x_1 x_2 x_3 \vee P_2^3 x_1 x_2 x_3) \& \neg P_3^1 x_1)$;
(б) $\boldsymbol{\alpha} \circeq f_1^1 f_2^2 f_3^3 x_1 x_0 x_2 x_0$;
(в) $\boldsymbol{\alpha} \circeq (\neg x_1 P_1^2 f_1^1 x_1 x_2 \to P_2^3 x_1 x_2 c_2)$;
(г) $\boldsymbol{\alpha} \circeq (f_3^3 x_1 x_2 \,\&\, P_3^1 x_1)$;
(д) $\boldsymbol{\alpha} \circeq (P_1^2 x_1 x_2 \,\&\, \neg P_2^1 x_2 \vee \neg P_1^2 x_1 c_1)$;
(е) $\boldsymbol{\alpha} \circeq ((\neg P_1^2 x_1 x_2) \,\&\, (P_2^1 x_1 \to P_2^1 c_1))$.

6. Устраните опечатки (замените, вставьте или удалите минимальное число знаков) так, чтобы полученные слова стали формулами языка бескванторных формул первого порядка:
(а) $((\bumpeq x_1 x_2 \bumpeq x_2 x_3) \to\bumpeq x_1 x_3)$; (б) $((P_1^2 x_1 \,\&\, P_1^1 x_2 \to\bumpeq x_1 x_2)$;
(в) $P_1^2 x_0 x_1 \to (P_1^1 x_1 \vee P_1^1 x_0)$; (г) $((P_1^2 x_1 x_2 \to \neg x_1) \vee P_2^1 x_0)$.

7. Какой логический ранг имеет следующая формула:
(а) $(\neg P_1^2 x_1 x_2 \vee (\bumpeq x_1 f_1^1 x_2 \to\bumpeq f_1^1 x_1 x_2))$;
(б) $\neg(\neg(P_2^2 x_1 x_2 \vee \neg P_1^1 x_0) \to ((\neg P_1^1 x_1 \,\&\, \neg P_1^1 x_2) \to \neg \bumpeq x_1 x_2))$.

8. Какова наименьшая длина формулы, логический ранг которой равен 2?

9*. Установите, какие из значений может принимать $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$ — логический ранг формулы $\boldsymbol{A}$, если известно, что длина формулы $\boldsymbol{A}$ равна n ($n \in \mathbb{N}$).

10. Сколько подформул имеет формула:
(а) $\bumpeq f_1^2 f_2^1 x_0 f_3^2 x_1 x_2 f_4^1 x_2$;
(б) $(P_1^2 f_1^1 x_1 x_2 \vee \neg(P_1^2 x_1 f_1^1 x_2 \,\&\, \neg P_2^1 f_1^1 x_1))$;
(в) $((\neg P_1^2 f_1^1 x_0 x_1 \,\&\, P_2^1 x_1) \to (P_1^2 f_1^1 x_0 x_1 \vee \neg P_2^1 x_1))$;
(г) $((P_1^1 x_1 \to \neg P_1^1 x_1) \to \neg(P_1^1 x_1 \to \neg P_1^1 x_1))$.

11*. Для каких натуральных n существует формула, имеющая точно n подформул?

Задание 8. Семантика языка бескванторных формул первого порядка

Правила семантики языка бескванторных формул расшифровывают смысл каждой из пропозициональных связок.

Учебные задачи

1. Выучить термины и их значения: *значение бескванторной формулы в данной интерпретации при данных значениях переменных*.

2. Научиться выполнять: *находить значение бескванторной формулы; находить значения переменных, при которых данная бескванторная формула имеет данное значение*.

Теоретические сведения

Общая часть семантики языков атомарных формул и бескванторных формул. Заметим, что в синтаксисах языков атомарных формул и изучаемых нами сейчас языков бескванторных формул первого порядка имеется много общего:
– у этих языков одни и те же сигнатуры,
– у этих языков одни и те же термы,
– каждая атомарная формула является также и формулой языка первого порядка (обратное, конечно, неверно).

Много общего и в семантиках этих языков. А именно:
– *интерпретация сигнатуры языка в непустом множестве* M,
– *значение переменной в этом множестве*,
– *значение терма при данных значениях предметных переменных*,
– *значение атомарной формулы при данных значениях предметных переменных*

для языка первого порядка *определяются точно также*, как и для языка атомарных формул.

Значение неатомарной бескванторной формулы. Определим теперь *значение неатомарной формулы* $\boldsymbol{A}$ *в выбранной интерпретации и при заданных значениях свободных переменных этой формулы.* Как известно, всякая неатомарная формула строится из более коротких частей с помощью логических символов.