§ 2. Дифференциал

§ 2.1. Теоретический материал

Понятие дифференциала

⇒ Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда если существует такое число A, что приращение Δy этой функции в точке x_0, соответствующее приращению Δx аргумента, представимо в виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \tag{2.1}$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, то функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0. При этом главная, линейная относительно Δx, часть этого приращения, т. е. $A \cdot \Delta x$, называется *дифференциалом функции* в точке x_0 и обозначается dy или $df(x_0)$.

Нетрудно показать (положив $y = x$ в формуле (2.1)), что $dx = \Delta x$.

Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существует конечная производная $f'(x_0)$; при этом $A = f'(x_0)$. Поэтому $df(x_0) = f'(x_0)\,dx$, или, если $f'(x)$ существует на данном интервале $(a; b)$, то

$$dy = f'(x)\,dx, \quad x \in (a; b).$$

Отсюда $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, т. е. производная функции $y = f(x)$ в точке x равна отношению дифференциала этой функции в данной точке к дифференциалу независимой переменной.

Если приращение Δx аргумента x близко к нулю (т. е. достаточно мало), то приращение Δy функции приближенно равно ее дифференциалу, т. е. $\Delta y \approx dy$, откуда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{df(x_0)}.$$

Последняя формула удобна для приближенного вычисления значения функции $f(x)$ в точке $x_0 + \Delta x$ по известному значению этой функции и ее производной в точке x_0.

Геометрический смысл и свойства дифференциала

Геометрически (рис. 82) приращение Δy функции $f(x)$ в точке x — есть приращение ординаты точки на кривой ($\Delta y = AC$), а дифференциал dy функции в этой точке — приращение ординаты соответствующей точки на касательной ($dy = AB$).

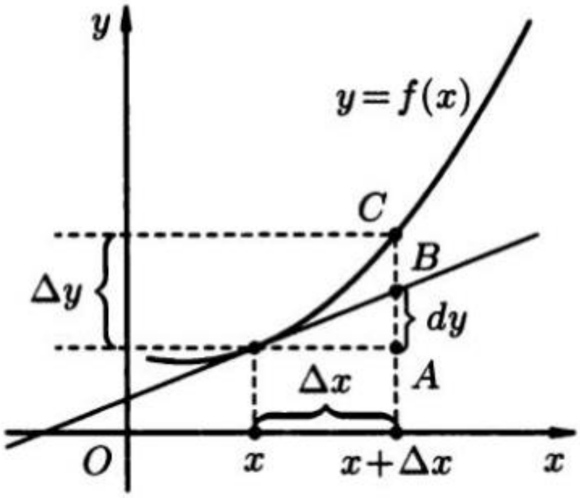

Рис. 82

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — некоторые функции, дифференцируемые в точке x. Тогда:

1. $dC = 0$, где C — константа.
2. $d(\alpha u) = \alpha \cdot du$, где α — константа.
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$.
4. $d(u \cdot v) = udv + vdu$.
5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$, где $v(x) \neq 0$.
6. *Инвариантность формы дифференциала.* Если $y = f(u(x))$ — сложная функция, то

$$df(u) = f'(u)\,du, \quad \text{или} \quad dy = y'_u \cdot du,$$

т. е. форма дифференциала не меняется (инвариантна) независимо от того, рассматривается y как функция независимой переменной x или зависимой переменной u.

Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Тогда, как известно, в каждой точке этого интервала определен дифференциал $dy = f'(x)\,dx$ функции $f(x)$, называемый также *дифференциалом первого порядка* (или первым дифференциалом).

⇛ *Дифференциалом второго порядка* (или вторым дифференциалом) от функции $y = f(x)$ в точке $x \in (a, b)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка функции $f(x)$ в этой точке.

Дифференциал второго порядка обозначается d^2y или $d^2f(x)$. Таким образом, $d^2y = d(dy)$. Учитывая, что $dy = f'(x)\,dx$, где dx — не зависящая от x константа, получим

$$d^2y = f''(x)(dx)^2, \text{ или, более кратко, } d^2y = f''(x)dx^2.$$

Аналогично определяются дифференциалы третьего и более высоких порядков: $d^3y = d(d^2y)$, $d^4y = d(d^3y), \ldots$ В общем случае, *дифференциалом n-го порядка* от функции $f(x)$ в точке x называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка функции $f(x)$ в этой точке:

$$d^ny = d(d^{n-1}y),$$

т. е. $d^ny = f^{(n)}(x)(dx)^n$, или, более кратко, $d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$. Отсюда следует, что

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}, \text{ в частности } f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Заметим, что для дифференциалов высших порядков свойство инвариантности (как для дифференциалов первого порядка) не имеет места.