§6. Определённый интеграл. Приёмы вычисления

- Основные понятия и св-ва

] $y = f(x) \in [a; b]$, на отрезке произв. выбр. точки $x_0, x_1, \ldots x_n$, так что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ — выбр. разб. этого отрезка на n частей. В кажд. интерв. $(x_{i-1}; x_i]$ произв. образом выбр. точка c_i, $i = 1, 2 \ldots n$.

Интегральн. сумма $f(x) \in [a; b]$: $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Опред. интеграл от $f(x) \in [a; b]$ — предел интегр. сумм S_n при условии, что длина наибольш. частичн. отрезка Δx_i стрем. к нулю: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$

Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то предел существ. и не зависит от способа разбиен. $[a; b]$ и от выбора точек c_i (теор. сущ. опред. инт-ла). $f(x)$ в этом случае назыв. интегрир. на $[a; b]$. Более того, если $f(x)$ ограничена на $[a; b]$ и непрерывна в нём, кроме конечн. числа точек разрыва первого рода, то она интегрируема на этом отрезке.

Св-ва опред. интегр.:

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$; 2. $\int_a^a f(x)dx = 0$; 3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$, т. е. перемен. интегр. можно обознач. любой буквой;
4. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$; 5. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$; 6. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $a < c < b$; 7. Если $f(x) \geq 0$ на $[a; b]$: $\int_a^b f(x)dx \geq 0$; если $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [a; b]$: $\int_a^b f(x)dx \leq 0$; 8. Если $f(x) \leq g(x)$ на $[a; b]$: $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$; 9. Если M — max, m — min на $[a; b]$: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$; 10. $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$, $c \in [a; b]$ (теор. о среднем); 11. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$; 12. $\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x)$

- Формула Ньютона-Лейбница

Если для непрерывн. на $[a; b]$ ф-ии $f(x)$ может быть найдена её первообразн. $F(x)$, то простым и удобн. метод. вычисл. опред. интегр. $\int_a^b f(x)dx$ явл. форм. Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

При интегрир. четн. и нечетн. ф-ий в симметр. предел. интегрир. полезно исп. формулу

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная ф-ия} \\ 0 & \text{если } f(x) \text{ — нечетная ф-ия} \end{cases}$$

- Интегрирование подстановкой

] для вычисл. $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывн. ф-ии сделана подстановка $x = \varphi(t)$. Если $\varphi(t)$ и её произв. $\varphi'(t)$ непрерывн. на $[a; b]$, причём $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$, то справедл. ф-ла

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ — ф-ла замены переменной интегр. в опред. интегр.

Отличия: 1) $x=\varphi(t)$ должна быть легко изучен.; 2) нов. предел. наход. из соотнош.;

3) Возвращ. к старой перемен. не требуется; 4) $x=\varphi(t) \Rightarrow t=\psi(x)$

• Интегрирование по частям

Если $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывн. произв. на $[a;b]$: $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$ — ф-ла интегрир. по частям для опред. интегр.

• Примеры

9.1.1. $\int_1^4 x^2 dx = [x^2;\ F(x)=x^3/3] = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{4^3}{3}-\frac{1^3}{3} = 21$

9.1.2. $\int_{-4}^{-2}\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int_{-4}^{-2}\frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \int_{-4}^{-2}\frac{d(x+2)}{\sqrt{3^2-(x+2)^2}} = \left[\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}\right] = \arcsin\frac{x+2}{3}\Big|_{-4}^{-2} =$
$= \arcsin 0 - \arcsin(-2/3) = \arcsin(2/3)$

9.1.12. $\int_0^{\pi/2}\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)dx = \int_0^{\pi/2}\frac12\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\right)dx = \int_0^{\pi/2}\frac12 dx + \frac12\int_0^{\pi/2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)dx =$
$= \frac12 x\Big|_0^{\pi/2} + \frac12\cdot\left(-\frac12\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac12\cdot\frac{\pi}{2} - 0 - \frac14\left(\sin\left(-\frac23\pi\right) - \sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac14\left(-\frac{\sqrt3}{2}-\frac12\right) = \frac14\left(\pi + \frac{\sqrt3+1}{2}\right)$

9.1.20. $\int_1^2 \frac{x^4+1}{x^3(x^2+1)}dx = \Big[\frac{x^4+1}{x^3(x^2+1)} = \frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{Dx+E}{x^2+1} \Rightarrow x^4+1 = A(x^2+1)+Bx(x^2+1)+Cx^2(x^2+1)+(Dx+E)x^3 \Rightarrow x^4+1 = (C+D)x^4+(B+E)x^3+(A+C)x^2+Bx+A \Rightarrow$

$\begin{cases} C+D=1\\ B+E=0\\ A+C=0\\ B=0\\ A=1\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A=1\\ B=0\\ C=-1\\ D=2\end{matrix}\quad E=0$: $\frac{x^4+1}{x^3(x^2+1)} = \frac{1}{x^3}-\frac1x+\frac{2x}{x^2+1}\Big] = \int_1^2\left(\frac1{x^3}-\frac1x+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx = \left(-\frac{1}{2x^2} - \ln x +\right.$
$\left. + \ln(x^2+1)\right)\Big|_1^2 = -\frac18+\frac12 - \ln 2 + \ln 1 + \ln 5 - \ln 2 = \ln\frac54 + \frac38$

9.1.26. $\int_0^2 f(x)dx$, если $f(x)=\begin{cases}e^x, & 0\le x\le 1\\ 2, & 1\le x\le 2\end{cases}$; ф-ла имеет точку разрыва $x=1$: $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 e^x dx +$
$+ \int_1^2 2dx = e^x\Big|_0^1 + 2x\Big|_1^2 = e-1+4-2 = e+1$

9.1.46. $\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt x} = \left[\sqrt x = t,\ x=t^2,\ dx=2tdt \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & 1 & 9\\ t=\sqrt x & 1 & 3\end{array}\right] = \int_1^3\frac{2tdt}{5+2t} = \int_1^3 \frac{2t+5-5}{2t+5}dt = \int_1^3\Big(1-$
$-\frac{5}{2t+5}\Big)dt = t\Big|_1^3 - 5\cdot\frac12\ln|2t+5|\Big|_1^3 = 3-1-\frac52(\ln 11 - \ln 7) = 2-\frac52\ln\frac{11}{7}$

9.1.51. $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{3+2\cos x} = \left[tg\frac x2 = t,\ x=2arctg\,x,\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt,\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{\pi}{2}\\ t & 0 & 1\end{array}\right] = \int_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{3+2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$
$= \int_0^1\frac{2}{t^2+5}dt = \frac{2}{\sqrt5}arctg\frac{t}{\sqrt5}\Big|_0^1 = \frac2{\sqrt5}arctg\frac1{\sqrt5}$

9.1.52. $\int_2^3 x(3-x)^7dx = \left[\begin{array}{l} t=3-x\\ x=3-t,\ dx=-dt\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & 2 & 3\\ t & 1 & 0\end{array}\right] = \int_2^3 x(3-x)^7dx = \int_1^0(3-t)t^7(-dt) =$
$\int_1^0(t^8-3t^7)dt = \left(\frac{t^9}{9}-\frac38t^8\right)\Big|_1^0 = -\frac19+\frac38 = \frac{19}{72}$

9.1.59. $\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \left[x=\frac1t,\ dx=-\frac1{t^2}dt \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & 1 & 2\\ t & 1 & 1/2\end{array}\right] = \int_1^{1/2}\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac1t\sqrt{1/t^2+1/t+1}} = -\int_1^{1/2}\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} =$
$= \int_{1/2}^1\frac{d(t+1/2)}{\sqrt{(t+1/2)^2+(\sqrt3/2)^2}} = \ln\left|t+\frac12+\sqrt{t^2+t+1}\right|\Big|_{1/2}^1 = \ln\frac{3+2\sqrt3}{2+\sqrt7}$

9.1.61. $\int_0^2\frac{dx}{(4+x^2)^2} = \left[\begin{array}{l} x=2tg\,t,\\ dx=2/\cos^2t\cdot dt\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2\\ t & 0 & \pi/4\end{array}\right] = \int_0^{\pi/4}\frac{2dt}{\cos^2t(4+4tg^2t)^2} = \int_0^{\pi/4}\frac{2dt}{16\cos^2t\cdot(1/\cos^2t)^2} =$
$= \frac18\int_0^{\pi/4}\cos^2t\,dt = \frac1{16}\int_0^{\pi/4}(1+\cos2t)dt = \frac1{16}\left(t+\frac12\sin2t\right)\Big|_0^{\pi/4} = \frac1{16}\left(\frac\pi4+\frac12\right) = \frac{\pi+2}{64}$

9.1.86. $\int_1^e (x+1)\ln x\,dx = \left[\begin{matrix} u=\ln x \\ dv=(x+1)dx \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} du=\frac{1}{x}dx \\ v=\frac{x^2}{2}+x \end{matrix}\right] = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\frac{dx}{x} = \frac{e^2}{2}+e-0-$

$-\left(\frac{x^2}{4}+x\right)\Big|_1^e = \frac{e^2}{2}+e-\frac{e^2}{4}-e+\frac{1}{4}+1=\frac{e^2+5}{4}$

9.1.91. $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = \left[\begin{matrix} u=\operatorname{arctg} x \\ dv=dx \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} du=\frac{1}{1+x^2}dx \\ v=x \end{matrix}\right] = \int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}-$

$-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi-\ln 4}{4}$

9.1.95. $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\sin 2x\,dx = \left[\begin{matrix} u=x^2,\ dv=\sin 2x\,dx \\ du=2x\,dx,\ v=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{matrix}\right] = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\cos 2x\cdot 2x\cdot dx =$

$=0+\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx = \left[\begin{matrix} u=x,\ dv=\cos 2x\,dx \\ du=dx,\ v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix}\right] = \frac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\sin 2x\,dx = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$