§ 7. Определённый интеграл. Несобственные интегралы

§ 7.1. Теоретический материал

<u>Примечание</u>: в приложении в конце документа можно прочитать по точки разрыва и про их род.

Интегралы с бесконечными пределами (I рода)

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a, b]$. Тогда несобственные интегралы с бесконечными пределами (или I рода) определяются следующим образом:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx, \qquad (2.1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,dx,$$

где c — произвольное число (обычно $c = 0$).

⇒ Несобственные интегралы I рода называются *сходящимися*, если существуют конечные пределы, стоящие в правых частях равенств (2.1). Если же указанные пределы не существуют или бесконечны, то несобственные интегралы называются *расходящимися*.

Вот некоторые *признаки сходимости и расходимости* несобственных интегралов I рода:

1. Если на промежутке $[a; +\infty)$ непрерывные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ («признак сравнения»).

2. Если при $x \in [a; +\infty)$, $f(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$ и существует конечный предел $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k \neq 0$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно, («предельный признак сравнения»).

3. Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, который в этом случае называется *абсолютно сходящимися*.

Интегралы от неограниченных функций (II рода)

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в промежутке $[a; b)$ и имеет *разрыв II-го рода* (см. Главу 6, § 5) при $x = b$, то несобственный интеграл от неограниченной функции (II рода) определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{2.2}$$

⇛ Если предел, стоящий в правой части равенства (2.2), существует, то несобственный интеграл II рода называется *сходящимся*; в противном случае — *расходящимся*.

Аналогично, если функция $y = \gamma(x)$ терпит *бесконечный разрыв в точке* $x = a$, то полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \tag{2.3}$$

Если функция $y = f(x)$ терпит *разрыв II-го рода во внутренней точке* $c \in [a; b]$, то несобственный интеграл второго рода определяется формулой

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{2.4}$$

В этом случае интеграл называется *сходящимся*, если оба несобственных интеграла, стоящих справа, сходятся.

Приведем некоторые *признаки сходимости и расходимости* для несобственных интегралов второго рода.

1. Если на промежутке $[a; b)$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны, при $x = b$ терпят разрыв II-го рода и удовлетворяют условию $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ («признак сравнения»).

2) Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на промежутке $[a; b)$ и в точке $x = b$ терпят разрыв II-го рода. Если существует предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, $0 < k < \infty$, то интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно («предельный признак сравнения»).

3) Если функция $f(x)$, знакопеременная на отрезке $[a;b]$, имеет разрыв в точке $x = b$, и несобственный интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Замечание. В качестве эталона для сравнения функций часто берут функцию $\varphi(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$. Можно показать, что несобственный интеграл

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0) \quad \begin{array}{l}\text{сходится при } \alpha < 1 \quad \text{и} \\ \text{расходится при } \alpha \geqslant 1.\end{array} \qquad (2.5)$$

Это же относится и к интегралам $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$.

Примеры

9.2.1. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ или установить его расходимость.

◐ По определению несобственного интеграла I рода (2.1) имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}\right) + \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{1}\right) = 1,$$

интеграл сходится и его величина равна 1.

Замечание. Можно показать, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. ●

9.2.6. Исследовать сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{0} x\cos x\,dx$.

❍ По определению несобственного интеграла I рода

$$\int\limits_{-\infty}^{0} x\cos x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} x\cos x\,dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = \cos x\,dx & v = \sin x \end{array}\right] = \lim_{a\to-\infty}\left(x\sin x\Big|_a^0 + \cos x\Big|_a^0\right) =$$

$$= 0 - \lim_{a\to-\infty} a\sin a + 1 - \lim_{a\to-\infty}\cos a,$$

интеграл расходится, т. к. $\lim\limits_{a\to-\infty} a\sin a$, $\lim\limits_{a\to-\infty}\cos a$ не существуют (задача 6.4.125). ●

6.4.125. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ не существует.

Комментарий к решению.

Предположить, противное. Пусть предел существует.

Далее учесть, что $\forall M > 0$ можно найти такие точки x_1 и x_2, что $x_1 > M$ и $x_2 > M$, и $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$.

9.2.8. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

❍ Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ определена и непрерывна на всей числовой оси. Кроме того, она является четной. Следовательно,

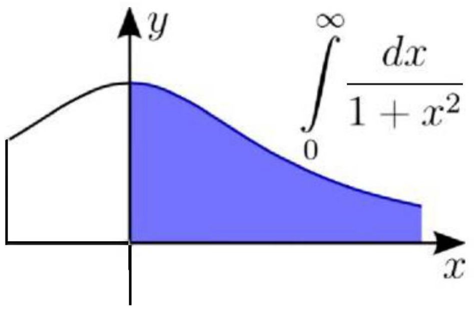
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Исходя из определения несобственного интеграла (2.1), имеем

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to+\infty}\int\limits_{0}^{a}\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{a\to+\infty}\operatorname{arctg} x\Big|_0^a = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

интеграл сходится. Следовательно, исходный интеграл также сходится и равен π. ●



Автор рисунка:
Goldencako из английский Википедия (Перенесено с en.wikipedia на Викисклад., Общественное достояние, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2216964)

9.2.10. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

❍ Здесь $f(x) = \frac{x+2}{x^{\frac{2}{3}}} > 0$ при $x \in [1;+\infty)$, при этом $\frac{x+2}{x^{\frac{2}{3}}} >$ $> \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \varphi(x)$. Но интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ расходится так как

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{b\to\infty} 3x^{\frac{1}{3}}\Big|_1^b = 3\lim_{b\to\infty} b^{\frac{1}{3}} - 3 = \infty.$$

Поэтому, согласно признаку сравнения, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ расходится. ●

9.2.12. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{2+x+3x^5}$.

❍ Здесь $f(x) = \frac{1}{2+x+3x^5} > 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{1}{x^5}$, интеграл от которой $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$ сходится (см. пример 9.2.1). А так как существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^5}{2+x+3x^5} = \frac{1}{3} \neq 0$, то исходный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{2+x+3x^5}$ также сходится («предельный признак сравнения»). ●

9.2.46. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ или установить его расходимость.

○ Подынтегральная функция терпит разрыв при $x = 3$ $\left(\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = +\infty\right)$. Согласно формуле (2.2) имеем

$$\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin \frac{x}{3}\Big|_0^{3-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin \frac{3-\varepsilon}{3} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

интеграл сходится и его величина составляет $\frac{\pi}{2}$. ●

9.2.47. Вычислить значение интеграла $\int\limits_0^1 \ln x\, dx$.

○ При $x \to 0$ функция $\ln x \to -\infty$. По формуле (2.3) имеем

$$\int\limits_0^1 \ln x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{0+\varepsilon}^1 \ln x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} (x\ln x - x)\Big|_\varepsilon^1 =$$

$$= -1 - \lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon\ln\varepsilon - \varepsilon) = -1 - 0 = -1,$$

т. к.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\ln\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}(-\varepsilon) = 0.$$

Интеграл сходится и равен -1. ●

9.2.51. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

○ Внутри отрезка интегрирования $[-1; 1]$ функция $\frac{1}{x^2}$, при $x \to 0$, неограниченно возрастает. Согласно формуле (2.4) имеем

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{0+\delta}^1 \frac{dx}{x^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_\delta^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon} - 1 + \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta} - 1 = \infty,$$

интеграл расходится. ●

9.2.55. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}\,dx$.

❍ Функция $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$ терпит бесконечный разрыв в точке $x = 1$. Перепишем ее в виде $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1+x)^2}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}$ и сравним ее с функцией $\varphi(x) = \frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}$. Как известно (см. (2.5)), интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}\,dx$ сходится $\left(\alpha = \frac{2}{3} < 1\right)$. Так как

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1+x)^2}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{(1-x)^{\frac{2}{3}}}{1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1+x)^2}} = \frac{\cos^2 1}{\sqrt[3]{4}} \quad (\neq 0, \neq \infty),$$

то, согласно предельному признаку сравнения, исходный интеграл также сходится. ●

9.2.58. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{3x^2 + \sqrt[3]{x}}$.

❍ Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{3x^2 + \sqrt[3]{x}}$ разрывна в точке $x = 0$. Сравним ее с функцией $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Так как $\frac{1}{3x^2 + \sqrt[3]{x}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Но несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ сходится (см. (2.5)). Следовательно, интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{3x^2 + \sqrt[3]{x}}$ по признаку сравнения также сходится. ●

Повторение

Функция *f(x)* называется *непрерывной в точке x = a* если:

1) она определена в этой точке;

2) существует предел функции в этой точке

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

3) значение предела равно значению функции в точке $x = a$, т.е.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Если одно из условий нарушается, то функция называется ***разрывной в точке* x = a**, а сама точка $x = a$ называется ***точкой разрыва.*** Все элементарные функции являются непрерывными на интервалах определенности.

Классификация точек разрыва

Точка *x0* называется точкой разрыва первого рода функции $y = f(x)$ если существуют конечные односторонние пределы справа

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = C_1 = const$$

и слева

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = C_2 = const$$

Если, кроме этого (существуют односторонние пределы слева и справа), выполняется хотя бы одно из условий

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a+0} f(x) \neq f(a); \\ \lim\limits_{x \to a-0} f(x) \neq f(a); \\ \lim\limits_{x \to a+0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a-0} f(x). \end{cases}$$

то функция в точке $x = a$ имеет неустранимый разрыв первого рода.

Если пределы равны, однако функция не существует

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) \neq f(a)$$

то имеем устранимый разрыв первого рода.

Точка *x0* называется точкой разрыва второго рода функции $y = f(x)$ если граница справа $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или слева $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ не существует или бесконечна.

Скачком функции в точке разрыва $x = x0$ называется разность ее односторонних границ

$$\lim_{x \to a+0} f(x) - \lim_{x \to a-0} f(x)$$

если они разные и не равны бесконечности.

При нахождении точек разрыва функции можно руководствоваться следующими правилами:

1) элементарная функция может иметь разрыв только в отдельных точках, но не может быть разрывной на определенном интервале.

2) элементарная функция может иметь разрыв в точке, где она не определена при условии, что она будет определена хотя бы с одной стороны от этой точки.

3) Неэлементарные функция может иметь разрывы как в точках, где она определена, так и в тех, где она определена.

Например, если функция задана несколькими различными аналитическими выражениями (формулами) для различных интервалов, то на границе стыка может быть разрывной.

Дополнительно (по учебнику Лунгу)

⇛ Пусть точка x_0 принадлежит области определения функции $f(x)$ или является граничной точкой этой области. Точка x_0 называется *точкой разрыва функции* $f(x)$, если $f(x)$ не является непрерывной в этой точке.

Точки разрыва подразделяются на точки разрыва 1-го рода и 2-го рода.

⇛ Если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, но они не равны между собой, или же односторонние пределы равны между собой, а значение функции в этой точке не совпадает с односторонними пределами, то x_0 называется *точкой разрыва* 1-го рода.

Если в точке x_0 существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)$, а $f(x_0)$ не определено или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то эта точка называется *точкой устранимого разрыва*.

Точки разрыва 1-го рода функции $f(x)$, не являющиеся точками устранимого разрыва, называются *точками скачка* этой функции.

Если x_0 — точка скачка функции $f(x)$, то разность $\Delta f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ не равна нулю и называется *скачком функции* $f(x)$ в точке x_0.

⇛ Если в точке x_0 не существует хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то x_0 называется *точкой разрыва 2-го рода.*

Например

Задача 1

Найти точки разрыва функции

а) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$.

Решение:

Функция определена во всех точках кроме тех, где знаменатель обращается в нуль $x = 1$, $x = 1$. Область определения функции следующая

$x \in (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;\infty)$.

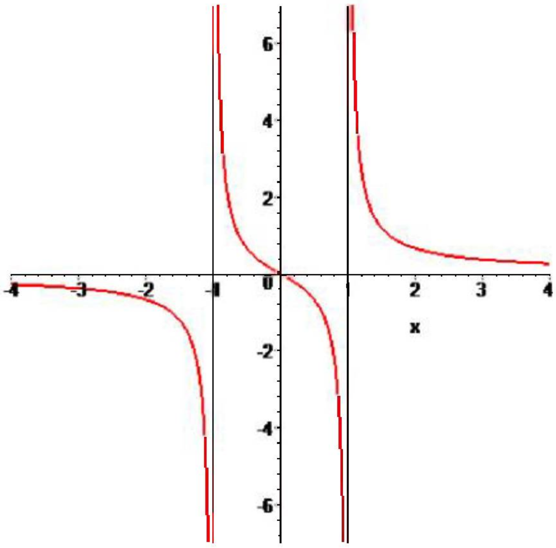
Найдем односторонние пределы в точках разрыва

$\lim\limits_{x\to -1+0} \dfrac{x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -1+0} \dfrac{x}{(x-1)(x+1)} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -1-0} \dfrac{x}{x^2-1} = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -1+0} \dfrac{x}{(x-1)(x+1)} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{x}{x^2-1} = -\infty$

При нахождении односторонних границ подобного вида достаточно убедиться в знаке функции и в том, что знаменатель стремится к нулю. В результате получим границу равную бесконечности или минус бесконечности.

Поскольку в точках $x = 1$, $x = -1$ функция имеет бесконечные односторонние пределы, то аргументы $x = 1, x = -1$ являются точками разрыва второго рода. График функции приведен на рисунке ниже



б) $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 3}$.

Решение:

Задача достаточно простая. В первую очередь находим нули знаменателя

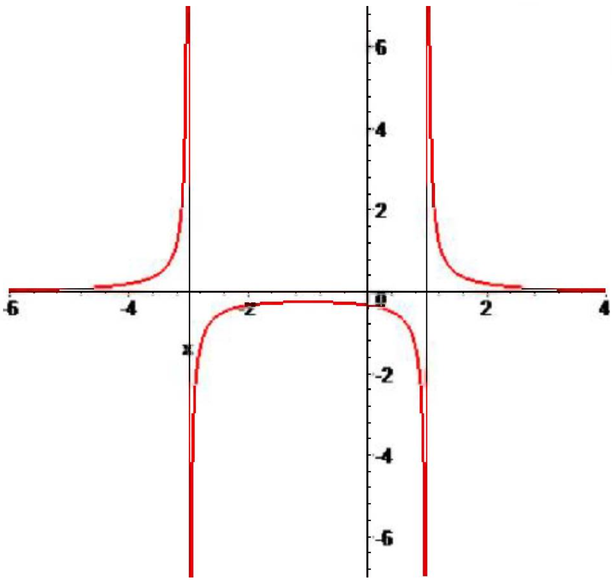
$x^2 + 2x - 3 = 0 \qquad D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16; \qquad x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 4}{2} \to x_1 = 1; x_2 = -3.$

Таким образом, функция определена на всей действительной оси за исключением точек $x = -3; x_2 = 1$, которые являются точками разрыва. Вычислим односторонние пределы справа и слева

$$\lim_{x \to -3+0} \frac{1}{(x+3)(x-1)} = -\infty; \qquad \lim_{x \to -3-0} \frac{1}{(x+3)(x-1)} = +\infty;$$

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{1}{(x+3)(x-1)} = +\infty; \qquad \lim_{x \to 1-0} \frac{1}{(x+3)(x-1)} = -\infty.$$

Пределы бесконечны поэтому, по определению, имеем точки разрыва $x = -3; x_2 = 1$ второго рода.



Из графиков приведенных функций видим, что для ряда из них отыскания точек разрыва сводится до нахождения вертикальных асимптот. Но бывают функции, которые и без вертикальных асимптот имеют разрывы первого или второго рода.

в) $y = 2\frac{|x+3|}{x+3}x + 6.$

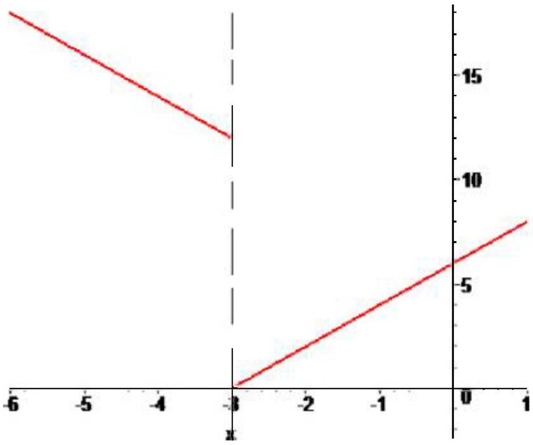
Решение:

Заданная функция непрерывна на всей числовой оси кроме точки $x = -3$. Вычислим односторонние границы в этой точке

$$\lim_{x\to-3+0} y = \lim_{x\to-3+0}\left(2\frac{\cancel{x+3}}{\cancel{x+3}}x+6\right) = \lim_{x\to-3+0}(2x+6) = 0;$$

$$\lim_{x\to-3+0} y = \lim_{x\to-3+0}\left(2\frac{-\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}}x+6\right) = \lim_{x\to-3+0}(-2x+6) = 12.$$

Они различаются по значениям, однако есть конечными. Итак, точка $x = -3$ является неустранимой точкой разрыва I рода.



Задача 2

Найти точки разрыва функции если они существуют. Вычислить скачок функции в точке разрыва. Построить график функции.

а) $y = 2x - \frac{x-2}{|x-2|}.$

Решение:

Для заданной функции точка x = 2 является точкой разрыва. Найдем пределы функции, чтобы определить характер разрыва

$$\lim_{x\to2+0} y = \lim_{x\to2+0}\left(2x-\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{x-2}}\right) = \lim_{x\to2+0}(2x-1) = 3;$$

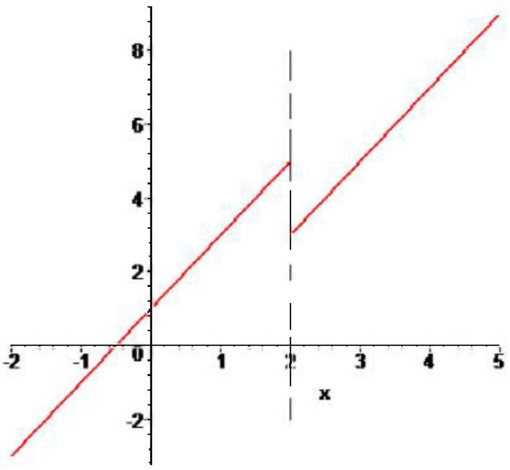
$$\lim_{x\to2-0} y = \lim_{x\to2-0}\left(2x-\frac{\cancel{x-2}}{-\cancel{(x-2)}}\right) = \lim_{x\to2+0}(2x+1) = 5.$$

По определению, точка $x = 2$ является неустранимой точкой разрыва первого рода.

Вычислим скачок функции при $x=2$

$$\lim_{x\to2+0} y - \lim_{x\to2-0} y = 3-5 = -2.$$

График функции на интервале, который нас интересует, приведен далее



б) $y = \begin{cases} 3\sqrt{x+2}, & 0 \le x \le 2 \\ 12-3x, & 2 < x \le 5; \\ 7x-6, & 5 < x < \infty \end{cases}$

Решение:

Неэлементарная функция $y(x)$ определена для всех положительных значений аргумента. Точки, которые разбивают функцию на интервалы, могут быть разрывами. Для проверки найдем соответствующие пределы

$$\lim_{x \to 2-0} y = \lim_{x \to 2+0} 3\sqrt{x+2} = 3 \cdot 2 = 6;$$

$$\lim_{x \to 2+0} y = \lim_{x \to 2+0} (12-3x) = 6;$$

$$y(2) = 3\sqrt{2+2} = 6.$$

Поскольку предел функции в точке $x = 2$ равен значению функции в этой точке, то **функция - непрерывная.**

Отсюда также следует, что для непрерывной функции скачок равен $6\text{-}6 = 0$.

Исследуем на непрерывность вторую точку

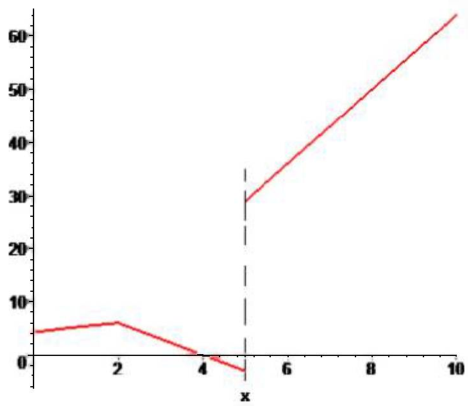
$$\lim_{x \to 5-0} y = \lim_{x \to 5-0} (12-3x) = 12 - 3 \cdot 5 = -3;$$

$$\lim_{x \to 5+0} y = \lim_{x \to 5-0} (7x-6) = 7 \cdot 5 - 6 = 29.$$

По определению функция в точке $x = 5$ имеет неустранимый разрыв I рода.

Прыжок функции равен $29 - (-3) = 31$.

По условию задания построим график функции.



Источники:

- https://yukhym.com/ru/issledovanie-funktsii/tochki-razryva-funktsii.html
- Сборник задач по высшей математике. 1 курс Лунгу К.Н., Письменный Д.Т. и др., 2008, 576с