

Часть 2. Механические колебания. Пружинный маятник

Колебательному контуру, содержащему индуктивность и емкость, можно сопоставить пружинный маятник. При этом заряд конденсатора аналогичен смещению груза, а ток в контуре - скорости движения груза. Упругая пружина является аналогом конденсатора, а движущаяся масса - аналогом катушки индуктивности.

Кроме катушки индуктивности и конденсатора в рассмотренной цепи имеется источник питания. Благодаря ему в цепи могут возникать колебания даже в том случае, когда в начальный момент и заряд конденсатора, и ток в цепи равны нулю.

В механическом аналоге электрической схемы в начальный момент пружина не должна быть деформирована, а груз должен покоиться.

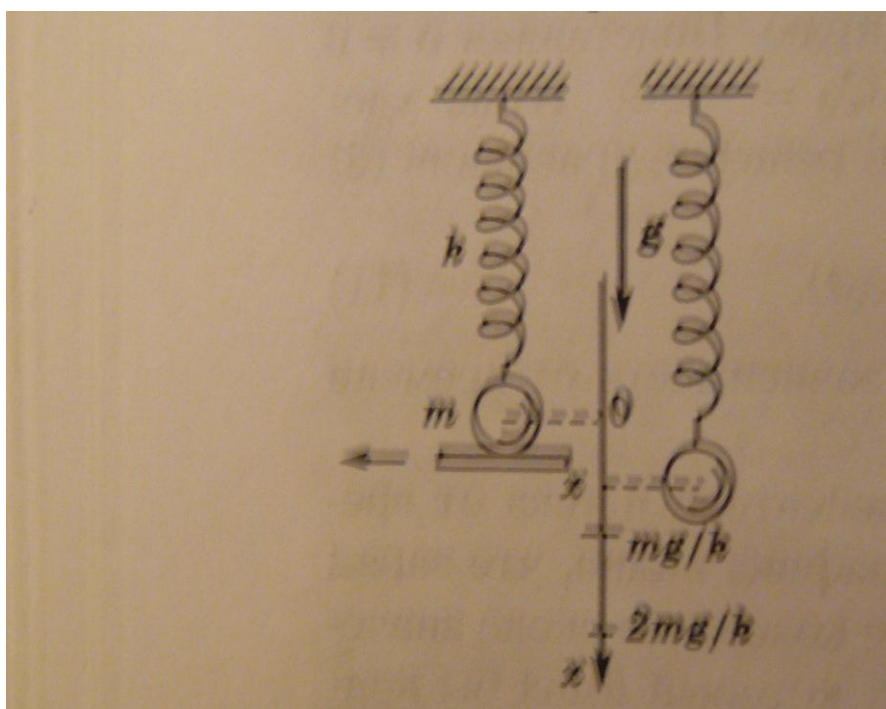


Рис. 2

Что может быть аналогом источника тока в механической системе? Механический аналог источника должен привести систему в движение без начального толчка и должен продолжать действовать и дальше в процессе колебаний.

Эту роль в механической системе может сыграть поле тяжести, если пружинный маятник расположить вертикально и подпереть груз подставкой так, чтобы пружина была недеформирована (рис. 2), а затем резко выдернуть подставку.

Разработаем математическую модель движения такого маятника.

Направим ось ОХ вертикально вниз и будем отсчитывать смещение груза x от начального положения, в котором пружина недеформирована.

Проекция силы, действующей на груз со стороны пружины, равна $-kx$.

На груз действует еще и сила тяжести.

Уравнение второго закона Ньютона имеет вид:

$$ma = mg - kx \quad (12)$$

Ускорение - это вторая производная смещения по времени по времени (x''). Введем обозначение $\omega_0^2 = k / m$ и перепишем уравнение (12) в виде:

$$x'' + \omega_0^2 x = g \quad (13)$$

Процессы в механической и электрической системе описываются одинаковыми уравнениями (13) и (3). Одинаковыми будут и начальные условия: отсутствию заряда конденсатора и тока в начальный момент времени в электрической цепи соответствуют равные нулю смещение груза и его скорость в момент выдергивания подставки:

$$x(0) = 0, v(0) = 0 \quad (14)$$

Таким образом, рассматриваемая механическая система действительно представляет собой аналог электрической цепи, и все сопоставляемые в них друг другу величины изменяются со временем по одинаковому закону. Поэтому смещение груза $x(t)$ дается формулой (11), в которую только вместо величины $C\mathcal{E}$ нужно подставить ее аналог в механической системе.

Из сопоставления уравнений (3) и (13) видно, что следует заменить:

- 1) величину \mathcal{E} / L на g ,
- 2) величину $C\mathcal{E} = \mathcal{E} / L\omega_0^2$ на $g / \omega_0^2 = mg / k$.

Получим уравнение для механической системы

$$x(t) = mg / k (1 - \cos(\omega_0 t)) \quad (15)$$

Задание

1. Построить график зависимости $x(t)$.
2. Ответить на вопросы:
 - 1) Около какого значения x происходят колебания груза?
3. Опишите энергетические превращения, которые происходят в электрической и механической системах при колебаниях.