Интегрирование. Часть 7

Определённый интеграл. Несобственные интегралы

9.2.12. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2+x+3x^5}$

1 сп. $0 \le f(x) \le \phi(x)$ $[a; +\infty)$

$$\int_a^{+\infty} \phi(x)dx - \text{сход.} \to f(x)dx - \text{сход.}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx - \text{расх.} \to \phi(x)dx - \text{расх.}$$

$\mathrm{f}(x) = \dfrac{1}{x^5}$ $\quad \phi(x) = \dfrac{1}{2+x+3x^5}$ – по условию

$0 \le \frac{1}{x^5} \le \frac{1}{2+x+3x^5}$ $\quad (0 \le f(x) \le \phi(x))$, т. к. $[1; +\infty)$

1) $\int_1^{+\infty} f(x) = \frac{1}{x^5}$ – расх.? $\to \int_1^{+\infty} \phi(x) = \frac{1}{2+x+3x^5}$ – расх.

2) $\int_1^{+\infty} f(x) = \frac{1}{x^5}$ – сход.? расх.?

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ — сходиться при $\alpha > 1$; расходиться при $\alpha \le 1$

$$\int_1^{+\infty} f(x) = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5} = \lim_{b\to+\infty} \left(\int_a^b \frac{dx}{x^5}\right) = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{x^{-5+1}}{-5+1}\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{-4x^4}\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{-4}\left(\frac{1}{b^4} - \frac{1}{1^4}\right)\right) =$
$-\frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b^4} - 1\right) = -\frac{1}{4}(0-1) = \frac{1}{4}$, т. е. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$ — сход.

Т. к. $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ – сходится → не можем применить признак сходимости в 1 сп.

2 сп.

$$\phi(x) = \frac{1}{x}, f(x) = \frac{1}{2+x+3x^5}$$

$0 \le f(x) \le \phi(x)$ — надо проверить

$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2+x+3x^5}$ $\quad \frac{1}{2+x+3x^5} < \frac{1}{x}$, т. к. $2 + x + 3x^5 > x$ на $[1; +\infty)$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \left[\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \to \alpha = 1, \text{то } \int \text{расх.}\right]$ → не можем применить признак сходимости

3 сп.

$f(x) > 0, \phi(x) > 0, x \in [a; +\infty)$

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\phi(x)} = k \ne 0$$

↑ предельный признак сравнения

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\phi(x)dx$ – оба сходятся или оба расходятся

$$f(x) = \frac{1}{2 + x + 3x^5} = [\text{на } [1; +\infty)] > 0$$

$$\phi(x) = \frac{1}{x^5} = \left[[1; +\infty)\right] > 0$$

Проверим: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2+x+3x^5}}{\frac{1}{x^5}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^5}{2+x+3x^5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^5 * 1}{x^5(\frac{2}{x^5}+\frac{1}{x^4}+3)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{2}{x^5}+\frac{1}{x^4}+3} =$
$\frac{1}{0+0+3} = \frac{1}{3} \to 1.\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\phi(x)} - \exists\ \ 2.\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\phi(x)} \neq 0$

Тогда $f(x) > 0, \phi(x) > 0, \exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\phi(x)} \neq 0$

Тогда проверим: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5} = [\text{см. сп. } 1] = \frac{1}{4} \to \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5} - \text{сход.}$

Тогда $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2+ч+3x^5} - \text{сход.}$

9.2.46. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = [\text{при } x = 3\text{: } \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} - \text{имеет разрыв в т. } x = 3]$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to3-0} \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}} \\ \lim\limits_{x\to3+0} \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}} \end{array}\right. = [x \to 3 + 0 <=> x \to 3, \text{т. е. } 9 - x^2 < 0 \to !?] - \text{не сущ.}$$

Определяем род разрыва → разрыв 2-го рода

$x = b$ — разрыв 2 рода $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0}\left(\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx\right)$

$\exists; \lim \to \int - \text{сход.}; \nexists \lim \to \int - \text{расх.}$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_0^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}\right) = \lim_{\varepsilon\to0}\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)\Big|_0^{3-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to0}\left(\arcsin\frac{3-\varepsilon}{3} - \arcsin\frac{0}{3}\right) = \lim_{\varepsilon\to0}\arcsin\frac{3-\varepsilon}{3}$$
$$= \arcsin\frac{3-0}{3} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$