§ 3. Неопределённый интеграл. Интегрирование рациональных дробей

§ 3.1. Теоретический материал

Правильные и неправильные дроби

⇛ *Рациональной дробью* называется выражение вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

⇛ Рациональная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ называется ***правильной***, если степень многочлена $P(x)$ в ее числителе меньше степени многочлена $Q(x)$ в знаменателе. В противном случае дробь называется ***неправильной***.

Всякая неправильная рациональная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ с помощью деления числителя на знаменатель приводится к виду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_0(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \text{ где}$$

$P_0(x)$ — многочлен (целая часть при делении), а $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ — правильная рациональная дробь (остаток).

Поэтому $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int P_0(x)\,dx + \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,dx.$

Так как интеграл $\displaystyle\int P_0(x)\,dx$ вычисляется элементарно (сводится к сумме табличных), то интегрирование неправильной дроби сводится к интегрированию правильной дроби. Интегрирование правильной рациональной дроби сводится, в свою очередь, к интегрированию простейших дробей.

Разложение правильной дроби на простейшие

⇛ Правильные дроби следующих четырех типов называются ***простейшими*** (или ***элементарными***) ***дробями***:

I. $\dfrac{A}{x-a}$;

II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $\quad (k = 2, 3, 4, \ldots)$;

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$;

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ $\quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$.

При этом предполагается, что A, B, p, q — действительные числа, а квадратный трехчлен x^2+px+q в дробях III и IV типов не имеет действительных корней (т. е. $p^2-4q<0$).

Каждая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей указанных четырех типов. А именно: если знаменатель данной правильной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ разложен на неповторяющиеся линейные и квадратные множители

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1} \cdot (x-a_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-a_n)^{k_n} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{r_1} \cdot \ldots \times \times (x^2+p_mx+q_m)^{r_m},$$

где $k_1, k_2, \ldots k_n, r_1, r_2, \ldots r_m$ — натуральные числа, то эту дробь можно представить в виде следующей суммы простейших:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-a_1)} + \ldots + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}} + + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1-1}} + \ldots + \frac{B_{r_1}x+C_{r_1}}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots . \quad (3.1)$$

Коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, B_1, C_1, \ldots, B_{r_1}, C_{r_1}, \ldots$ в разложении (3.1) находятся с помощью *метода неопределенных коэффициентов* или *метода частных значений* (см. решение задачи 8.3.12.). Отметим, что общее число этих коэффициентов равно степени многочлена $Q(x)$.

Таким образом, интегрируя правильную дробь, мы сначала раскладываем ее на сумму простейших, а затем интегрируем каждое слагаемое в этом разложении.

Вычисляя интегралы от простейших дробей, надо иметь в виду, что:

1) Простейшие дроби первых двух типов — почти табличные:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A \cdot \ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C, \quad k \neq 1;$$

2) При интегрировании простейшей дроби третьего типа $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где $p^2-4q<0$, сначала выделяют в числителе производную знаменателя, т. е. $2x+p$:

$$Ax+B = \frac{A}{2} \cdot (2x+p) + B - \frac{Ap}{2}.$$

Отсюда

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2} \cdot (2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx = = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

В первом из полученных интегралов делаем замену $t = x^2 + px + q$, откуда $dt = (2x + p)dx$ и

$$\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(x^2+px+q) + C.$$

Во втором интеграле сначала выделяем полный квадрат в знаменателе подытегральной дроби, а потом делаем подходящую линейную подстановку:

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \left[y = x + \frac{p}{2} \Rightarrow dy = dx\right] =$$

$$= \int \frac{dy}{y^2+a^2} = \left[a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\right] = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Окончательно

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \cdot \ln(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

3) Если требуется проинтегрировать простейшую дробь четвертого типа $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, где $n = 2, 3, 4, \ldots$ и $p^2 - 4q < 0$, то сначала, как и в пункте 2, в числителе дроби производная от квадратного трехчлена в знаменателе, откуда

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n} dx =$$

$$= \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \cdot \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} =$$

$$= \left[t = x^2+px+q\right] = \frac{A}{2} \int \frac{dt}{t^n} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \cdot \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right]^n} =$$

$$= \left[y = x + \frac{p}{2}\right] = \frac{A}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \cdot \int \frac{dy}{(y^2+a^2)^n},$$

где $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Последний интеграл считается с помощью рекуррентной формулы, позволяющей свести его к более простому интегралу $\int \frac{dy}{(y^2+a^2)^{n-1}}$:

$$\int \frac{dy}{(y^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2} \cdot \frac{y}{(y^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \int \frac{dy}{(y^2+a^2)^{n-1}}.$$

Далее к интегралу $\int \frac{dy}{(y^2+a^2)^{n-1}}$ снова применяется рекуррентная формула, понижающая степень знаменателя подынтегральной дроби, и так далее, пока не получится табличный интеграл $\int \frac{dy}{y^2+a^2}$.

Примеры

8.3.1. Найти интеграл $\int \frac{6x-7}{x^2+4x+13}$.

○ Дискриминант квадратного трехчлена в знаменателе подынтегральной дроби отрицателен, поэтому данная дробь — простейшая третьего типа.

Сначала найдем производную знаменателя дроби:

$$(x^2+4x+13)' = 2x+4.$$

Затем выделим производную знаменателя в числителе дроби:

$$6x-7 = 3(2x+4)-19.$$

Отсюда, учитывая, что $x^2+4x+13 = (x+2)^2+9$, имеем:

$$\int \frac{6x-7}{x^2+4x+13}\,dx = \int \frac{3(2x+4)-19}{x^2+4x+13}\,dx =$$
$$= 3\int \frac{(2x+4)\,dx}{x^2+4x+13} - 19\int \frac{dx}{(x+2)^2+9} =$$
$$= \begin{bmatrix} t = x^2+4x+13, & y = x+2, \\ dt = (2x+4)\,dx & dy = dx \end{bmatrix} =$$
$$= 3\int \frac{dt}{t} - 19\int \frac{dy}{y^2+3^2} = 3\ln|t| - \frac{19}{3}\operatorname{arctg}\frac{y}{3} + C =$$
$$= 3\ln(x^2+4x+13) - \frac{19}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + C.$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем, что x^2+4x+ $+13 > 0$ $(\forall x)$ и, стало быть, $|x^2+4x+13| = x^2+4x+13$. ●

8.3.8. Найти интеграл $\int \frac{8x+5}{(x^2-2x+17)^2}\,dx$.

○ Поскольку дискриминант квадратного трехчлена в знаменателе подынтегральной дроби отрицателен, то эта дробь — простейшая четвертого типа. Выделим производную этого трехчлена в числителе дроби:

$$8x+5 = 4(2x-2)+13.$$

Отсюда

$$\int \frac{8x+5}{(x^2-2x+17)^2}\,dx =$$
$$= 4\int \frac{(2x-2)dx}{(x^2-2x+17)^2} + 13\int \frac{dx}{\left[(x-1)^2+16\right]^2} =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} t = x^2 - 2x + 17, & y = x - 1, \\ dt = (2x - 2)\,dx & dy = dx \end{array} \right] =$$

$$= 4\int \frac{dt}{t^2} + 13\int \frac{dy}{[y^2+16]^2} = -\frac{4}{x^2-2x+17} + 13\int \frac{dy}{(y^2+16)^2}.$$

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся рекуррентной формулой при $n = 2$, $a^2 = 16$. Тогда

$$\int \frac{dy}{(y^2+16)^2} = \frac{1}{2\cdot 1\cdot 16}\cdot\frac{y}{(y^2+16)} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dy}{y^2+4^2} =$$

$$= \frac{y}{32(y^2+16)} + \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{y}{4} + C =$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{x-1}{x^2-2x+17} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{4}\right) + C.$$

Отсюда окончательно

$$\int \frac{8x+5}{(x^2-2x+17)^2}dx =$$

$$= \frac{13}{32}\left(\frac{x-1}{x^2-2x+17} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{4}\right) - \frac{4}{x^2-2x+17} + C. \quad ●$$

8.3.12. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{7x+4}{(x-3)(x+2)}\,dx$;

б) $\displaystyle\int \frac{x^2+5x-2}{(x^2-1)(x+1)}\,dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{x^5-1}{x^3+x^2+x}\,dx$.

◐ а) Подынтегральная дробь — правильная. Разложим ее на сумму простейших дробей первого типа:

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}.$$

Для того, чтобы найти неизвестные коэффициенты A и B, приведем дроби в правой части равенства к общему знаменателю, откуда

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)},$$

т. е.

$$7x + 4 = A(x+2) + B(x-3). \tag{3.2}$$

Из полученного равенства можно найти коэффициенты A и B двумя способами: с помощью метода неопределенных коэффициентов или метода частных значений. Рассмотрим оба способа.

1. *Метод неопределенных коэффициентов.* Раскроем скобки в правой части равенства (3.2) и сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

$$7x + 4 = (A + B)x + (2A - 3B).$$

Так как многочлены в обоих частях полученного равенства тождественно равны, то у них должны быть равны и коэффициенты при соответствующих степенях переменной x. Сравнивая эти коэффициенты, получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} A + B = 7 \\ 2A - 3B = 4. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $A = 5$, $B = 2$.

2. *Метод частных значений.* Придадим неизвестной x в равенстве (3.2) частное значение $x = 3$. Тогда получим

$$7 \cdot 3 + 4 = A \cdot (3 + 2), \text{т. е. } 25 = 5A,$$

откуда $A = 5$. Подставляя теперь в уравнение (3.2) значение $x = -2$ (удобнее всего подставлять значения, обращающие одну или несколько скобок в правой части равенства в ноль; эти значения совпадают с действительными корнями знаменателя подынтегральной дроби), получим

$$7 \cdot (-2) + 4 = B \cdot (-2 - 3),$$

откуда $B = 2$.

Примечание: В двух способах получили одинаковые ответы

Таким образом,

$$\frac{7x + 4}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{5}{x - 3} + \frac{2}{x + 2}$$

и, стало быть,

$$\int \frac{7x + 4}{(x - 3)(x + 2)} dx = 5 \int \frac{dx}{x - 3} + 2 \int \frac{dx}{x + 2} =$$
$$= 5 \ln |x - 3| + 2 \ln |x + 2| + C.$$

б) Подынтегральная дробь — правильная, однако ее знаменатель не до конца разложен на множители. Поэтому сначала преобразуем знаменатель:

$$(x^2-1)(x+1) = (x-1)(x+1)(x+1) = (x-1)(x+1)^2.$$

Отсюда
$$\frac{x^2+5x-2}{(x^2-1)(x+1)} = \frac{x^2+5x-2}{(x-1)(x+1)^2}.$$

Разложим эту дробь на простейшие:

$$\frac{x^2+5x-2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Приводя к общему знаменателю и избавляясь от знаменателей, приходим к равенству

$$x^2+5x-2 = A(x+1)^2 + B(x-1) + C(x-1)(x+1).$$

Для вычисления неизвестных коэффициентов A, B и C воспользуемся методом частных значений.

Положим $x = 1$, тогда

$$1^2 + 5\cdot 1 - 2 = A\cdot(1+1)^2,$$

т. е. $4A = 4$, откуда $A = 1$. Аналогично, положим $x = -1$. Тогда

$$(-1)^2 + 5\cdot(-1) - 2 = B\cdot(-1-1),$$

откуда $B = 3$.

Осталось найти коэффициент C. Поскольку «удобных» частных значений уже не осталось, придадим x какое-нибудь значение, приводящее к не очень громоздким подстановкам. Проще всего положить $x = 0$. Тогда $-2 = A - B - C$, откуда, с учетом найденных значений A и B, получим $-2 = 1 - 3 - C$, т. е. $C = 0$.

Итак,
$$\frac{x^2+5x-2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x+1)^2},$$
т. е. окончательно

$$\int \frac{x^2+5x-2}{(x^2-1)(x+1)}dx = \int \frac{dx}{x-1} + 3\cdot\int \frac{dx}{(x+1)^2} =$$
$$= \ln|x-1| - \frac{3}{x+1} + C.$$

в) Данная подынтегральная дробь — неправильная, поэтому сначала выделим целую часть, поделив числитель на знаменатель «столбиком»:

$$
\begin{array}{r|l}
\begin{array}{rrrrr}
-\ x^5 + & 0\cdot x^4 + & 0\cdot x^3 + & 0\cdot x^2 & -1\\
x^5 + & x^4 + & x^3 & & \\ \hline
- & x^4 - & x^3 + & 0\cdot x^2 & -1\\
- & x^4 - & x^3 - & x^2 & \\ \hline
 & & & x^2 & -1
\end{array}
&
\begin{array}{l}
x^3 + x^2 + x\\ \hline
x^2 - x
\end{array}
\end{array}
$$

т. е.

$$\frac{x^5-1}{x^3+x^2+x} = x^2 - x + \frac{x^2-1}{x^3+x^2+x}.$$

Отсюда

$$\int \frac{x^5-1}{x^3+x^2+x}\,dx = \int (x^2-x)\,dx + \int \frac{x^2-1}{x^3+x^2+x}\,dx = $$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \int \frac{x^2-1}{x^3+x^2+x}\,dx.$$

Разложив на множители знаменатель полученной правильной дроби, представим ее в виде суммы простейших:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Избавляясь от знаменателей, получим

$$x^2-1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)x.$$

Сначала воспользуемся методом частных значений. Положив $x = 0$, найдем $A = -1$. Далее воспользуемся методом неопределенных коэффициентов (на практике часто приходится комбинировать оба метода). Раскроем скобки в правой части последнего равенства и приведем подобные:

$$x^2 - 1 = (A+B)x^2 + (A+C)x + A.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты при x^2 и x, в левой и правой частях последнего равенства получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} A+B=1,\\ A+C=0,\end{cases}$$

откуда, учитывая, что $A = -1$, найдем оставшиеся коэффициенты: $B = 2$, $C = 1$. Таким образом,

$$\frac{x^2-1}{x^3+x^2+x} = -\frac{1}{x} + \frac{2x+1}{x^2+x+1},$$

откуда

$$\int \frac{x^2-1}{x^3+x^2+x}\,dx = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \left[t = x^2+x+1 \Rightarrow dt = (2x+1)\,dx\right] =$$

$$= -\ln|x| + \int \frac{dt}{t} = -\ln|x| + \ln|t| + C =$$

$$= -\ln|x| + \ln(x^2+x+1) + C = \ln\left|\frac{x^2+x+1}{x}\right| + C.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получим окончательный ответ:

$$\int \frac{x^5-1}{x^3+x^2+x}\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \ln\left|\frac{x^2+x+1}{x}\right| + C. \qquad \bullet$$