§ 5. Дифференцирование сложных и неявных функций

§ 5.1. Теоретический материал

Случай одной независимой переменной

Предположим, что $z = f(x; y)$ — дифференцируемая функция двух переменных x и y в некоторой области D, а аргументы x и y являются дифференцируемыми функциями некоторой переменной t, т. е. $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда $z = f[x(t); y(t)] = \varphi(t)$ — функция одной переменной t.

Теорема 11.9. Имеет место равенство

$$z' = \frac{dz}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Если t совпадает с одним из аргументов, скажем, $t = x$, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

и $\frac{dz}{dx}$ называется полной производной функции z по x.

Случай нескольких независимых переменных

Если аргументы x и y функции $z = f(x; y)$ являются функциями двух переменных, скажем, $x = x(u; v)$, $y = y(u; v)$, то $z = f[x(u; v); y(u; v)]$ также является функцией двух переменных u и v.

Теорема 11.10. Пусть $z = f(x; y)$, $x = x(u; v)$, $y = y(u; v)$ — дифференцируемые функции своих агрументов. Имеют место формулы

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Структура этих формул сохраняется и при большем числе переменных.

Дифференциал сложной функции

Дифференциал сложной функции $z = z(x; y)$, где $x = x(u; v)$, $y = y(u; v)$, можно получить, если в формуле дифференциала

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

заменить $dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv$ и $dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv$.

В результате подстановки и перегруппировки членов при du и dv приходим к формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv,$$

показывающей, что форма (вид) дифференциала не зависит от того, являются ли x и y независимыми переменными или функциями других независимых переменных. Это свойство называется *инвариантностью* формы первого дифференциала.

Неявная функция одной переменной

Функция $y = y(x)$ называется неявной функцией, если она определяется уравнением $F(x; y) = 0$, неразрешенным относительно y.

Это значит, что при каждом значении x_0, при котором неявная функция определена, она принимает единственное значение y_0 так, что $F(x_0; y_0) = 0$.

Теорема 11.11. Если $F(x; y)$ — дифференцируемая функция переменных x и y в некоторой области D и $F'_y(x; y) \neq 0$, то уравнение $F(x; y) = 0$ определяет однозначно неявную функцию $y(x)$, также дифференцируемую, и ее производная находится по формуле

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x; y)}{F'_y(x; y)}.$$

В частности,

$$y'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0; y_0)}{F'_y(x_0; y_0)}.$$

Неявная функция двух переменных

Функция $z = z(x; y)$ называется неявной функцией переменных x и y, если она определяется уравнением $F(x; y; z) = 0$, неразрешенным относительно z.

Теорема 11.12. Если функция $F(x; y; z)$ дифференцируема по переменным x, y, z в некоторой пространственной области D и $F'_z(x; y; z) \neq 0$, то уравнение $F(x; y; z) = 0$ определяет однозначную неявную функцию $z(x; y)$, также дифференцируемую и

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x; y; z)}{F'_z(x; y; z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x; y; z)}{F'_z(x; y; z)}.$$