Задание

6.3.10. Найти пределы последовательностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - n + 2}{5n^2 + 2}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n+1}}$.

◑ 1) Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, поделив числитель и знаменатель на старшую степень n, т. е. на n^2:

$$\frac{3n^2 - n + 2}{5n^2 + 2} = \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{5 + \frac{2}{n^2}}.$$

Отсюда, используя теорему о действиях над пределами, получим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - n + 2}{5n^2 + 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{5 + \frac{2}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5 + \frac{2}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 5 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}} = \frac{3 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 2\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{5 + 2\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} =$$

$$= \frac{3 - 0 + 0}{5 + 0} = \frac{3}{5}.$$

В последних равенствах мы воспользовались тем, что предел константы — константа, а также тем, что последовательности $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ и $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$ — бесконечно малые.

Окончательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - n + 2}{5n^2 + 2} = \dfrac{3}{5}$.

2) Домножим и разделим выражение под знаком предела на сопряженное к нему, после чего воспользуемся формулой разности квадратов:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n-1})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{(n+1) - (n-1)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}.$$

Поскольку последовательность $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}$ — бесконечно большая, то последовательность $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$ — бесконечно малая. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = 0$, а значит, и $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) = 0$.

3) Поделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень n (выбираем из двух вариантов $\sqrt{n^3}$ и $\sqrt{n}$), т.е. на $\sqrt{n^3} = n^{3/2}$. Тогда

$$\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n}+1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}}.$$

Оба слагаемых в знаменателе последней дроби, т.е. $\dfrac{1}{n}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$, — бесконечно малые последовательности, следовательно, вся эта дробь — бесконечно большая последовательность. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \infty. \quad \bullet$$

Найти пределы:

6.3.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-5}{n}$.

6.3.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4-n^2}{3-n^2}$.

6.3.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+5n^2-1}{10n^3-3n+2}$.

6.3.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^2-1}{5n^3+4n^2-2n+1}$.

6.3.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3-5n^2+10n}{21n^3+7n-8}$.

6.3.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{n^2+1}$.

6.3.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n}}{n+2}$.

6.3.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{\sqrt[3]{n^2+n+4}}$.

6.3.19. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$.

6.3.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{9n^2+2n}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{8n^3+2}}$.

Ответы

6.3.11. 2. **6.3.12.** 1.
6.3.13. ∞. **6.3.14.** 0. **6.3.15.** $\frac{4}{21}$. **6.3.16.** 6. **6.3.17.** 1. **6.3.18.** ∞. **6.3.19.** $\frac{1}{2}$.
6.3.20. 2.