Задание

6.4.14. Используя свойства пределов функций, найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2-1}{4x^2+5x+2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1+x-x^2}{2x^2+3x}$.

◔ 1) Применяя теорему о действиях над пределами функций, получим:

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2-1}{4x^2+5x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to -1}(3x^2-1)}{\lim\limits_{x\to -1}(4x^2+5x+2)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to -1} 3x^2 - \lim\limits_{x\to -1} 1}{\lim\limits_{x\to -1} 4x^2 + \lim\limits_{x\to -1} 5x + \lim\limits_{x\to -1} 2} =$$

$$= \frac{3\lim\limits_{x\to -1} x \cdot \lim\limits_{x\to -1} x - 1}{4\lim\limits_{x\to -1} x \cdot \lim\limits_{x\to -1} x + 5\lim\limits_{x\to -1} x + 2} =$$

$$= \frac{3\cdot(-1)(-1)-1}{4(-1)(-1)+5(-1)+2} = 2.$$

2) Так как пределы числителя и знаменателя при $x \to 2$ равны нулю, то мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. «Раскроем» эту неопределенность (т.е. избавимся от нее), разложив числитель и знаменатель на множители и сократив их далее на общий множитель $x-2$:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-3}.$$

В полученной дроби знаменатель уже не стремится к нулю при $x \to 2$, поэтому можно применять теорему о пределе частного:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-3} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)} = \frac{2+2}{2-3} = -4.$$

Окончательно $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} = -4.$

3) Здесь мы также имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное к числителю (избавляемся от иррациональности в числителе):

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+8})^2-3^2}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+8)-9}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x+8}+3} = \frac{1}{\sqrt{1+8}+3} = \frac{1}{6}.$$

4) Числитель и знаменатель дроби — бесконечно большие функции, поэтому здесь имеет место неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$. Раскрывая эту неопределенность, поделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень x, т. е. на x^2:

$$\frac{1+x-x^2}{2x^2+3x} = \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}{2+\frac{3}{x}}.$$

Осталось воспользоваться свойствами пределов, а также тем, что функции $\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{x^2}$ — бесконечно малые при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+x-x^2}{2x^2+3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}{2+\frac{3}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} + \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} - \lim\limits_{x\to\infty} 1}{\lim\limits_{x\to\infty} 2 + 3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = \frac{0+0-1}{2+0} = -\frac{1}{2}. \qquad \bullet$$

Найти пределы:

6.4.15. $\lim\limits_{x\to -2}(5x^2+2x-1)$.

6.4.16. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x+1}{x^3-2x+3}$.

6.4.17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2-x}$.

6.4.18. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2^x-8}{2^x+8}$.

6.4.19. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-6x+5}{x^2-25}$.

6.4.20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^3-3x^2+x}{2x}$.

6.4.21. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+x+2}{x^3+1}$.

6.4.22. $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-x-1}{-6x^2+5x+4}$.

6.4.23. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2+3x-3}{2x^3-2x^2+x-1}$.

6.4.24. $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{x^2+7x+6}{x^3+6x^2+3x+18}$.

6.4.25. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+2x}$.

6.4.26. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x^2+6x}-4}$.

6.4.27. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$.

6.4.28. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{5-x}-2}$.

6.4.29. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{8-x}-2}{x}$.

6.4.30. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt[3]{5-x}-\sqrt[3]{x-3}}$.

6.4.31. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+5x^2-x^3}{2x^3-x^2+7x}$.

6.4.32. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x^2}{x^2+7x-2}$.

6.4.33. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

6.4.34. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-2x}{2x^3+x^2+1}$.

6.4.35. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4}-x)$.

6.4.36. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-3}-x\right)$.

6.4.37. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\alpha x}{x}$, $\alpha\in\mathbb{R}$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{2x-\pi}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

◯ 1) Сделаем замену $y=\alpha x$; тогда $y\to0$ при $x\to0$ и $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\alpha x}{x}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\sin y}{\left(\frac{y}{\alpha}\right)}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\alpha\sin y}{y}=\alpha\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\sin y}{y}=\alpha$. В последнем равенстве мы воспользовались первым замечательным пределом.

Таким образом, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\alpha x}{x}=\alpha$.

2) Поделим числитель и знаменатель дроби под знаком предела на x, после чего воспользуемся предыдущим пунктом:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{\sin 5x}{x}\right)}{\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 5x}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)}=\frac{5}{3}.$$

3) Сводя предел к первому замечательному, сделаем замену $y = x - \frac{\pi}{2}$. Тогда $y \to 0$ при $x \to \frac{\pi}{2}$, а $x = y + \frac{\pi}{2}$, откуда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)-\pi} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{-\sin y}{2y} = -\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = -\frac{1}{2}.$$

Во втором равенстве в этой цепочке мы использовали формулу приведения, а в последнем — первый замечательный предел.

4) Сделаем замену $t = \arcsin x$, т. е. $x = \sin t$. Ясно, что $t \to 0$ при $x \to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\sin t}{t}\right)} = \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}} = 1. \qquad \bullet$$

Найти пределы:

6.4.38. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 2x}$.

6.4.39. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$.

6.4.40. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

6.4.41. $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\operatorname{ctg} x$.

6.4.42. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 2x}{x}$.

6.4.43. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}$.

6.4.44. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin 6\pi x}{\sin \pi x}$.

6.4.45. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 4x}$.

6.4.46. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$, $k\in\mathbb{R}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{7x}$.

○ 1) В данном случае мы имеем неопределенность вида 1^∞. Для ее раскрытия сделаем замену $y = \frac{x}{k}$. Тогда $y\to\infty$ при $x\to\infty$ и исходный предел сводится ко второму замечательному пределу:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x}{k}\right)}\right)^{k\cdot\frac{x}{k}} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{ky} =$$

$$= \left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^k = e^k.$$

2) Поскольку $\sqrt[x]{1+5x} = (1+5x)^{\frac{1}{x}}$, то здесь мы также имеем дело с неопределенностью 1^{∞}, для раскрытия которой нам снова понадобится одна из форм второго замечательного предела. Сделаем замену $y = 5x$. Тогда $y \to 0$ при $x \to 0$ и

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1+5x} = \lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5} =$$
$$= \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}\cdot 5} = \left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^5 = e^5.$$

3) Поделив числитель и знаменатель дроби на x, сведем данный предел к частному пределов из пункта 1):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^x} =$$
$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x} = \frac{e^3}{e^{-2}} = e^5.$$

4) Сделав замену $y = 2x$ и применяя одно из следствий из второго замечательного предела, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{7x} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{\frac{7}{2}y} = \frac{2}{7}\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = \frac{2}{7}.$$

●

Найти пределы:

6.4.48. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[2x]{1+3x}$.

6.4.49. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-5}{x+4}\right)^x$.

6.4.50. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3+5x}{3+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

6.4.51. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{x-2}$.

6.4.52. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5-x}{6-x}\right)^{x+2}$.

6.4.53. $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.

6.4.54. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

6.4.55. $\lim\limits_{x\to\infty} x[\ln(x+3)-\ln x]$.

6.4.59. Заменяя бесконечно малые эквивалентными, найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 3x}$,

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(e^x-1)}{1-\cos x}$.

○ 1) В силу следствия из первого замечательного предела $\sin\alpha x\sim\alpha x$, $x\to0$. Отсюда (при $x\to0$) $\sin 4x\sim4x$, а $\sin 3x\sim3x$, поэтому

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{\sin 3x}=\lim_{x\to0}\frac{4x}{3x}=\frac{4}{3}.$$

2) При $x\to0$ имеем $e^x-1\sim x$ и $1-\cos\sim\dfrac{x^2}{2}$, откуда

$$\lim_{x\to0}\frac{x\cdot(e^x-1)}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot x}{\left(\frac{x^2}{2}\right)}=2.$$ ●

Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые:

6.4.60. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{2x}$.

6.4.61. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x}$.

6.4.62. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1-6x)}$.

6.4.63. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{7^x-1}{3^x-1}$.

6.4.64. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+7x}-1}{x}$.

6.4.65. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x^2-2x}$.

Ответы

6.4.2. -1. **6.4.3.** 4. **6.4.4.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.4.5.** 4. **6.4.8.** *Указание.* Поскольку $|f(x) - A| = |x-3| \cdot |x+3|$ и можно считать, что $|x+3| < 4+3 = 7$ для значений x, близких к 3, то при $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$ (где ε — произвольное положительное число) имеем $|x - x_0| = |x-3| < \delta = \frac{\varepsilon}{7} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. **6.4.13.** **1)** $\delta = \frac{1}{4}$ $\left(\text{вообще подходит любое положительное число, меньшее или равное } \frac{1}{4}\right)$; **2)** $\delta = 0{,}005$. **6.4.15.** 15. **6.4.16.** 3. **6.4.17.** -1. **6.4.18.** 0. **6.4.19.** 0,4. **6.4.20.** 0,5. **6.4.21.** $\frac{4}{3}$. **6.4.22.** $-\frac{3}{11}$. **6.4.23.** $\frac{4}{3}$. **6.4.24.** $-\frac{5}{39}$. **6.4.25.** 0,05. **6.4.26.** 1,6. **6.4.27.** $\frac{2}{3}$. **6.4.28.** 2. **6.4.29.** $-\frac{1}{12}$. *Указание.* Домножить числитель и знаменатель дроби на выражение, дополняющее $(\sqrt[3]{8-x} - 2)$ до разности кубов. **6.4.30.** -12. **6.4.31.** $-\frac{1}{2}$. **6.4.32.** -3. **6.4.33.** 0. **6.4.34.** ∞. **6.4.35.** 0. **6.4.36.** 0. **6.4.38.** 2,25. **6.4.39.** 0,4. *Указание.* Учесть, что $\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$ и $\lim\limits_{x\to 0} \cos 2x = 1$. **6.4.40.** 0,5. *Указание.* Воспользоваться тождеством $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ или домножить числитель и знаменатель дроби на $1 + \cos x$. **6.4.41.** 1. **6.4.42.** 2. **6.4.43.** -8. *Указание.* Использовать тождество $\cos 5x - \cos 3x = -2\sin 4x \sin x$. **6.4.44.** -6. **6.4.45.** $-0{,}5$. **6.4.48.** $e^{1{,}5}$. **6.4.49.** e^{-9}. **6.4.50.** e. **6.4.51.** e^2. **6.4.52.** e. *Указание.* Представить исходный предел в виде произведения пределов $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x-5}{x-6}\right)^x \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x-5}{x-6}\right)^2$. **6.4.53.** e^{-1}. **6.4.54.** e^{-1}. *Указание.* Сделать замену $y = \sin x$. **6.4.55.** 3. *Указание.* Воспользоваться формулой для разности логарифмов, после чего сделать замену $y = \frac{1}{x}$. **6.4.57.** $f(2-0) = 1$, $f(2+0) = 2$. **6.4.58.** **а)** $f(1-0) = -2$, $f(1+0) = \frac{1}{3}$ **б)** $f(11-0) = f(11+0) = \frac{11}{3}$. **6.4.60.** $\frac{5}{2}$. **6.4.61.** $\frac{2}{3}$. **6.4.62.** $-\frac{1}{3}$. **6.4.63.** $\log_3 7$. **6.4.64.** 3,5. **6.4.65.** 0,5. *Указание.* Представить данный предел в виде произведения $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 2} \frac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x-2}$.