Н. Н. Писарук

Введение в теорию игр

Минск
2015

Писарук, Н. Н.

Введение в теорию игр / Н. Н. Писарук. — Минск : БГУ, 2015. — 256 с.

В учебном пособии дается краткое и сравнительно элементарное введение в теорию игр, которая рассматривается как строго математизированный раздел современной экономической теории. Здесь изучаются бескоалиционные игры в стратегической и позиционной (расширенной) формах, игры с несовершенной информацией, байесовские игры, кооперативные игры, основы теории проектирования механизма. Все изучаемые игровые модели демонстрируются на разнообразных экономических приложениях. В частности, здесь рассматриваются почти все игровые концепции, за которые их авторы в разное время были удостоены Нобелевской премии в области экономики.

Для студентов экономических специальностей университетов. Будет также полезна и студентам математических специальностей, изучающих теорию игр как математическую дисциплину.

Введение

Теория игр как научная дисциплина изучает отношения между людьми, которые руководствуются несовпадающими (а иногда и противоположными) мотивами. Наряду с традиционными играми, такими как покер, шахматы, футбол и многие другие, теория игр изучает и такие серьезные отношения как рыночная конкуренция, гонка вооружений, загрязнение окружающей среды. В теории игр все эти серьезные отношения называют *играми*, поскольку в них, как и в играх, результат зависит от решений (стратегий) всех участников.

С одной стороны теория игр — это математическая дисциплина, которая применяется во многих областях человеческой деятельности (экономика, военное дело, биология и др.). С другой стороны теория игр — это раздел современной экономической теории, что подтверждается большим количеством Нобелевских премий в области экономики, присужденных самым выдающимся представителям данной науки. И именно как строго математизированный раздел микроэкономики и рассматривается теория игр в данном вводном курсе.

Ключевое понятие, которое связывает неоклассическую экономическую теорию и теорию игр — это *рациональность*: каждый субъект стремится максимизировать свою объективную или субъективную выгоду. Несмотря на критику в его адрес, этот постулат играет важную двойную роль в обеих теориях. Во первых, он существенно ограничивает возможные варианты принятия решений, поскольку абсолютно рациональное поведение более предсказуемо, чем иррациональное поведение. Во вторых, он дает четкий критерий оценки эффективности принятых решений: то решение более эффективо, которое приносит большую выгоду лицу, принимающему решение.

Неоклассическая экономическая теория обычно предполагает существование и функционирование «совершенного рынка». Каждый субъект принимает решения, основываясь на индикаторах состояния этого рынка. Данный подход логичен при исследовании экономических систем с огромным числом участников, когда отдельному субъекту невозможно предвидеть решения всех других субъектов. Такая децентрализованная экономическая система может устойчиво функционировать (находиться в равновесии), когда рынок находится в состоянии *совершенной конкуренции*.

В действительности «совершенного рынка» не существует, и мы имеем только взаимодействия между людьми, регулируемые некоторыми правилами. Теория игр предполагает, что субъекты при принятии своих решений должны просчитывать возможные решения других субъектов, поскольку результат зависит от решений всех участников. Поэтому в теории игр предполагается, что все субъекты не только рациональны, но и *разумны*, в том смысле, что они способны находить не только свои оптимальные решения но также и оптимальные решения других участников.

Применительно к экономике, *теория игр* изучает функционирование экономических систем в условиях «несовершенного рынка». Игровые модели олигополий и аукционов являются примерами успешного применения игрового подхода в экономике. Решение проблемы ассимметричной информированности участников экономической системы — также важное достижение теории игр.

Первое математически строгое определение игры было дано венгерским математиком Джоном фон Нейманом, которого по праву считают одним из величайших математиков 20-го века[1]. Удивительно, но в своей работе, опубликованной в далеком 1928 году[2], он сформулировал игру n лиц с нулевой суммой точно также, как она формулируется сегодня. В этой же работе Дж. фон Нейман доказал свою знаменитую теорему о существовании решения в смешанных стратегиях для матричных игр ($n = 2$). Пожалуй трудно вспомнить другой такой случай (в любой области знаний), когда новая теория была столь строго формализована с момента ее зарождения. Но все же принято считать, что теория игр как самостоятельный раздел экономической теории сформировалась после публикации в 1944 г. Дж. фон Нейманом в соавторстве с Оскаром Моргенштерном книги «Теория игр и экономическое поведение» [2].

Сегодня игровые модели столь разнообразны, что вряд ли возможно дать простое формальное определение игры, которое бы включало все модели. Неформально, *игра* — это модель конфликтной ситуации, в которой 1) участвует n лиц (игроков), 2) заданы правила игры (способ

[1] Стоит также напомнить, что Дж. фон Нейман разработал принципы работы современных компьютеров с хранимой в памяти программой.

[2] J. von Neumann. Zur Theorie der Gesellshaftsspiele. *Mathematische Annalen* **100** (1928) 295–320.

принятия решений каждым из игроков), 3) определены правила осуществления платежей между игроками. Обычно игры классифицируют следующим образом.

По количеству игроков: игры $1, 2, n$ игроков.

По количеству стратегий: конечные и бесконечные игры. Если у всех игроков конечное число стратеги, то такая игра *конечная*, иначе — игра *бесконечная*.

По характеру взаимоотношений между игроками: бескоалиционные и кооперативные игры. Игра называется *бескоалиционной*, если игроки не заключают между собой никаких соглашений. Конечная бескоалиционная игра двух игроков называется *биматричной игрой*. В *кооперативной* игре игроки могут заключать соглашения с целью увеличить свои выигрыши.

По свойствам функций выигрышей: непрерывные, выпуклые, сепарабельные и т. д. Если сумма выигрышей всех игроков в каждой партии равна нулю, то это — *игра с нулевой суммой*. Игра двух игроков с нулевой суммой называется *антагонистической*. В такой игре один игрок выигрывает за счет другого. Конечная антагонистическая игра называется *матричной игрой*. В играх *с ненулевой суммой* все игроки в сумме могут получить меньше их суммарного взноса. Например, в лотерее ее организаторы всегда в выигрыше, а участники в сумме получают меньше их суммарного взноса.

По количеству ходов: *одноходовые* и *многоходовые*. Среди многоходовых игр выделим *позиционные игры*, в которых несколько игроков паследовательно делают ходы; выигрыши игроков зависят от стратегии выбора ходов (пример — шашки, шахматы, карточные игры, игровые автоматы, динамические экономические системы и т. д.).

По информированности игроков: игры с совершенной и несовершенной информацией. В игре с *совершенной информацией* на каждом шаге игрокам известно, какие ходы были сделаны ранее (например, шашки и шахматы). В игре с *несовершенной информацией* игроки могут не знать, в какой позиции они находятся (некоторые стохастические игры, в частности, карточные игры).

К играм с несовершенной информацией сводятся игры *с неполной информацией* (также известные как *байесовские игры*). В отличие от игр с несовершенной информацией, где неполная информированность игроков возникает в процессе игры, в играх с неполной информацией неполная информированность некоторых игроков возникает еще до начала игры, как следствие ассимметричной информированности игроков (покупатель меньше знает о качестве товара, чем продавец, фирма точно не знает, какую технологию использует ее конкурент, и т. д.).

Эта книга — учебник для вводного односеместрового курса теории игр для студентов экономических специальностей университетов. Предполагается, что студенты владеют основами математического анализа, теории вероятностей и исследования операций (гладкая оптимизация с ограничениями и линейное программирование, основы теории графов). За исключением ряда важных частных примеров, здесь мы вынужденно ограничиваемся изучением конечных игр, поскольку для бесконечных игр поиск равновесия в смешанных стратегиях сводится к решению задач бесконечномерной оптимизации. Несмотря на это, данный курс не есть некий поверхностный пакет лекций, соответствующий типовой программе. В частности, здесь рассматриваются почти все игровые концепции, за которые их авторы в разное время были удостоены Нобелевской премии в области экономики.

Глава 1
Бескоалиционные игры

В этой главе мы будем изучать бескоалиционные одношаговые игры, в которых участвует конечное число игроков и правила игры очень просты: игроки одновременно и независимо друг от друга принимают свои решения (выбирают по одной из своих стратегий); после того как решения объявлены (или проявили себя каким-либо иным образом), по заранее оговоренным правилам игроки могут вычислить свои выигрыши или проигрыши. Набор стратегий игроков (ситуация) называется равновесным, если стратегия каждого отдельного игрока является его оптимальным ответом на стратегии остальных игроков. Целью анализа бескоалиционной игры является поиск ситуаций равновесия. Если таких ситуаций не существует, то иногда мы можем исправить положение, расширяя понятие «стратегия». Наиболее известным из таких расширений являются смешанные стратегии, которые по сути являются недетерминированными правилами применения игроками их исходных (чистых) стратегий.

Немаловажно заметить, что методы анализа безкоалиционных игр в стратегической форме лежат в основе анализа более сложных многошаговых бескоалиционных игр, которые будут изучаться в двух следующих главах.

1.1. Стратегическая форма игры

Бескоалиционной игрой (в стратегической форме) n игроков называется тройка

$$\gamma = (N, \{S_i\}_{i\in N}, \{\phi_i\}_{i\in N}),$$

где $N = \{1, \ldots, n\}$ есть множество игроков, S_i — множество стратегий, а ϕ_i — функция выигрышей i-го игрока.

Набор стратегий игроков $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, $s_i \in S_i$, $i = 1, \dots, n$, называется *ситуацией* или *партией*. Функции ϕ_i выигрышей игроков определены на множестве ситуаций $S = S_1 \times \dots \times S_n$.

Правила проведения бескоалиционной игры очень просты: игроки одновременно объявляют свои стратегии $s_1 \in S_1, \dots, s_n \in S_n$, и в сложившейся ситуации $s = (s_1, \dots, s_n)$ игрок i выиграет $\phi_i(s)$, $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим ситуацию $s = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n) \in S$. Набор $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ стратегий оппонентов игрока i обозначают через s_{-i}. Ситуация $(s_1, \dots, s_{i-1}, \bar{s}_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$, которая получается из ситуации s заменой стратегии s_i игрока i на стратегию $\bar{s}_i$, обозначается через $(\bar{s}_i, s_{-i})$.

Ситуация s называется *ситуацией равновесия* (*Нэша*)[3][4] в бескоалиционной игре γ, если выполняется следующее условие:

$$\phi_i(s) \ge \phi_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \quad \text{для всех } \bar{s}_i \in S_i,\ i \in N. \tag{1.1}$$

Содержательно, неравенства (1.1) означают, что

> в ситуации равновесия ни одному игроку *в отдельности* не выгодно менять свою стратегию.

Переписав условие (1.1) в следующем эквивалентном виде

$$s_i \in \arg\max_{\bar{s}_i \in S_i} \phi_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \quad \text{для всех } i \in N, \tag{1.2}$$

мы можем сказать, что

> в ситуации равновесия стратегия каждого игрока является его оптимальным ответом на стратегии других игроков.

В дальнейшем ситуацию равновесия мы также будем называть *равновесной ситуацией* или просто *равновесием*, а стратегии игроков, образующие ситуацию равновесия, — *равновесными стратегиями*.

Пример 1.1. *Нужно найти все ситуации равновесия в бескоалиционной игре трех лиц, если каждый из игроков имеет две стратегии, а платежи определяются по правилу:*

---

[3] J.F. Nash. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics* **54** (1951) 286–295.
[4] J.F. Nash — Нобелевский лауреат 1994 года в области экономики.

Если игрок 1 выбирает стратегию 1				*Если игрок 1 выбирает стратегию 2*			
		Игрок 3:				*Игрок 3:*	
		1	2			1	2
Игрок 2:	1	$(1,6,3)$	$(2,0,5)$	*Игрок 2:*	1	$(1,5,5)$	$(2,1,0)$
	2	$(1,8,1)$	$(3,6,2)$		2	$(2,0,1)$	$(4,1,1)$

Решение. Сначала покажем, как данная игра представляется в стратегической форме. Здесь $N = \{1,2,3\}$, $S_1 = S_2 = S_3 = \{1,2\}$. В ситуации $s = (s_1, s_2, s_3) \in S \stackrel{\text{def}}{=} \{1,2\}^3$, игрок 1 выбирает таблицу s_1, игрок 2 — строку s_2, а игрок 3 — столбец s_3. Выигрыши игроков в позиции s задаются тройкой чисел, записанных в таблице s_1, строке s_2 и столбце s_3. Для примера, в ситуации $s = (2,1,2)$ выигрыши игроков следующие: $\phi_1(2,1,2) = 2$, $\phi_2(2,1,2) = 1$ и $\phi_3(2,1,2) = 0$.

Поскольку наша игра конечная (у каждого игрока имеется конечное число стратегий), то число ситуаций в ней конечно. Поэтому мы можем выписать все ситуации и затем выделить те из них, которые являются равновесиями.

$(1,1,1)$: не равновесие, поскольку $\phi_3(1,1,1) = 3 < 5 = \phi_3(1,1,2)$ и игроку 3 выгодно поменять свою стратегию;

$(1,1,2)$: не равновесие, поскольку $\phi_2(1,1,2) = 0 < 6 = \phi_2(1,1,1)$ и игроку 2 выгодно поменять свою стратегию;

$(1,2,1)$: не равновесие, поскольку $\phi_1(1,2,1) = 1 < 2 = \phi_1(2,2,1)$ и игроку 1 выгодно поменять свою стратегию;

$(1,2,2)$: не равновесие, поскольку $\phi_1(1,2,2) = 3 < 4 = \phi_1(2,2,2)$ и игроку 1 выгодно поменять свою стратегию;

$(2,1,1)$: равновесие, поскольку меняя стратегию ни один из игроков не увеличит свой выигрыш;

$(2,1,2)$: не равновесие, поскольку $\phi_3(2,1,2) = 0 < 5 = \phi_3(2,1,1)$ и игроку 3 выгодно поменять свою стратегию;

$(2,2,1)$: не равновесие, поскольку $\phi_2(2,2,1) = 0 < 5 = \phi_2(2,1,1)$ и игроку 2 выгодно поменять свою стратегию;

$(2,2,2)$: равновесие, поскольку меняя стратегию ни один из игроков не увеличит свой выигрыш.

Заметим также, что в ситуации равновесия $(2,2,2)$, если игроки 2 и 3 договорятся одновременно поменять свои стратегии, то в новой ситуации $(2,1,1)$ они оба увеличат свои выигрыши. □

Пример 1.2 (азартная игра Нэша). *Два игрока делят сумму денег d. Игрок 1 хочет получить долю x $(0 \leq x \leq d)$, а игрок 2 — долю y $(0 \leq y \leq d)$. Если $x + y \leq d$, то игрок 1 получит x, а игрок 2 — y. В противном случае, когда $x + y > d$, оба игрока ничего не получат.*

Нужно записать стратегическую форму для данной бескоалиционной игры и найти все ситуации равновесия.

Решение. У нас здесь два игрока $N = \{1, 2\}$. Оба игрока имеют одно и то же множество стратегий $S_1 = S_2 = [0, d]$. В ситуации $(x, y) \in [0, d]^2$ выигрыши игроков определяются по формулам:

$$\phi_1(x, y) = \begin{cases} x, & \text{если } x + y \leq d, \\ 0, & \text{если } x + y > d, \end{cases} \qquad \phi_2(x, y) = \begin{cases} y, & \text{если } x + y \leq d, \\ 0, & \text{если } x + y > d. \end{cases}$$

В данной игре $\gamma = (\{1, 2\}, \{[0, d], [0, d]\}, \{\phi_1, \phi_2\})$ имеется много ситуаций равновесия.

1. Все ситуации (x, y), такие, что $x + y = d$. Если любой из игроков увеличит свою долю, то оба игрока ничего не получат. Если кто-то из игроков уменьшит свою долю, то его выигрыш уменьшится.

2. Ситуация (d, d), когда каждый из игроков хочет получить всю сумму денег. В этой ситуации выигрыши игроков равны нулю. Но это тоже ситуация равновесия, поскольку, если один из игроков требует всю сумму денег, то его оппонент ничего не получит.

3. В качестве упражнения докажите, что в данной игре нет других ситуаций равновесия. □

Как показывает следующий простой пример, не каждая бескоалиционная игра имеет ситуацию равновесия.

Пример 1.3 (игра цен). *Имеется два продавца одинакового продукта и три покупателя. Покупатель 1 знаком только с продавцом 1, покупатель 2 — только с продавцом 2, а покупатель 3 знает обоих продавцов. Каждому покупателю нужна только одна единица продукта, за которую он готов заплатить максимум 1. Продавец $i \in \{1, 2\}$ назначает цену $p_i \in [0, 1]$ единицы продукта. После этого покупатель 1 покупает единицу продукта у продавца 1, покупатель 2 — у продавца 2, а покупатель 3 покупает единицу продукта у того продавца, у которого цена наименьшая. В случае равенства цен, покупатель 3 покупает у продавца 1.*

Ради простоты предположим, что продавцы не несут никаких производственных издержек и их прибыль (выигрыш) равна сумме, полученной от продажи продукта.

Нужно доказать, что в бескоалиционной игре двух лиц (продавцов) нет ситуаций равновесия.

Решение. Здесь $N = \{1, 2\}$, $S_1 = S_2 = [0, 1]$. В ситуации $p = (p_1, p_2) \in [0, 1]^2$ выигрыши игроков определяются по правилу:

$$\phi_1(p_1, p_2) = \begin{cases} 2p_1, & \text{если } p_1 \le p_2, \\ p_1, & \text{если } p_1 > p_2, \end{cases}$$

$$\phi_2(p_1, p_2) = \begin{cases} 2p_2, & \text{если } p_1 > p_2, \\ p_2, & \text{если } p_1 \le p_2. \end{cases}$$

Если $p_1 \le 1/2$, то наилучшим ответом игрока 2 будет цена $p_2 = 1$. Но в таком случае, игроку 1 будут выгоднее также назначить цену 1, чтобы увеличить свой выигрыш с $2p_1 \le 1$ до 2.

Если же $p_1 > 1/2$, то игрок 2 должен назначит цену p_2, «чуть меньшую» p_1, т. е. $1/2 < p_2 < p_1$. Но тогда игрок 1, назначая цену $\bar{p}_1 = p_2$, увеличит свой выигрыш: $\phi_1(\bar{p}_1, p_2) = 2\bar{p}_1 = 2p_2 > 1 \ge p_1 = \phi_1(p_1, p_2)$. □

1.1.1. Доминирование

Говорят, что стратегия $\bar{s}_i \in S_i$ *доминирует* стратегию $\hat{s}_i \in S_i$ игрока i, если

$$\phi_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \ge \phi_i(\hat{s}_i, s_{-i}) \quad \text{для всех } s_{-i} \in S_{-i}, \tag{1.3}$$

Стратегия $\hat{s}_i \in S_i$ называется *доминируемой*, если существует другая стратегия $\bar{s}_i \in S_i$, которая доминирует $\hat{s}_i$.

Стратегия $\bar{s}_i \in S_i$ является *доминирующей стратегией* игрока i, если она доминирует все его стратегии:

$$\phi_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \ge \phi_i(\hat{s}_i, s_{-i}) \quad \text{для всех } \hat{s}_i \in S_i,\ s_{-i} \in S_{-i}. \tag{1.4}$$

Если в игре у каждого игрока есть доминирующая стратегия, то ситуация, составленная из этих доминирующих стратегий, называется *доминирующим равновесием*. По определению, доминирующее равновесие является ситуацией равновесия Нэша, но обратное в общем случае не верно.

Игры, в которых имеется доминирующее равновесие, встречаются не часто. Но концепцию доминирования можно также использовать для упрощения решаемой игры. В любой ситуации s игрок i ничего не потеряет (а может даже и выиграет), переходя от доминируемой стратегии s_i

к стратегии $\bar{s}_i$, доминирующей s_i. Поэтому если каждый игрок удалит из своего множества стратегий все доминируемые стратегие, то в результате получится эквивалентная *усеченная игра*. Для этой усеченной игры снова можно построить новую усеченную игру. И этот итерационный процесс можно продолжать до тех пор, пока ни у одного из игроков не будет доминируемых стратегий.

Применим описанный итерационный процесс к игре из примера 1.1. Сравнивая первую и вторую таблицы, мы видим, что в каждой тройке чисел первой таблицы первое число не превосходит первого числа в соответствующей тройке чисел второй таблицы. Это означает, что стратегия 2 игрока 1 доминирует его стратегию 1. После удаления стратегии 1 игрока 1 мы получим усеченную игру двух лиц, в которой выигрыши игроков 2 и 3 представлены в следующей таблице:

		Игрок 3: 1	2
Игрок 2:	1	$(5,5)$	$(1,0)$
	2	$(0,1)$	$(1,1)$

В усеченной игре, стратегия 1 у каждого из игроков доминирует его стратегию 2. Поэтому $(1,1)$ есть доминирующая ситуация равновесия для усеченной игры. Следовательно, $(2,1,1)$ есть ситуация равновесия в исходной игре. Следует также отметить, что ситуация $(2,1,1)$ не является доминирующим равновесием в исходной игре, поскольку стратегия 1 не является доминирующей для игрока 2.

1.2. Выпуклые игры

Бескоалиционная игра

$$\gamma = (N, \{S_i\}_{i\in N}, \{\phi_i\}_{i\in N})$$

называется *выпуклой игрой*, если для всех $i \in N = \{1,\dots,n\}$ выполняются условия:

а) S_i — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^{n_i}$;

б) $\phi_i(s)$ — непрерывная на $S = \prod_{i=1}^n S_i$ функция;

в) для всех фиксированных $s_{-i} \in S_{-i}$ функция $\phi_i(s_i, s_{-i})$ — квазивогнута по переменной s_i.

Теорема 1.1 (Деброу,Гликсберг,Фан). [5] *Любая выпуклая игра имеет хотя бы одну ситуацию равновесия.*

Доказательство. Пусть $\gamma = (N, \{S_i\}_{i\in N}, \{\phi_i\}_{i\in N})$ есть выпуклая игра. Определим многозначное отображение $Z: S \to S$ как декартово произведение

$$Z(s) = Z_1(s) \times Z_2(s) \times \cdots \times Z_n(s)$$

отображений $Z_i : S \to S_i$, которые определяются по правилу

$$Z_i(s) = \arg\max_{\bar{s}_i \in S_i} \phi(\bar{s}_i, s_{-i}), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Заметим, что любая стратегия $\bar{s}_i \in Z_i(s)$ игрока i является его оптимальным ответом в том случае, если бы он заранее предвидел, что остальные игроки применят свои стратегии $s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n$. Теперь условие равновесия (1.1) можно записать в виде $s^* \in Z(s^*)$, т. е. ситуации равновесия в игре γ являются неподвижными точками отображения Z. В силу следствия A.1 отображение Z является K-отображением и, следовательно, по теореме Какутани A.8 оно имеет неподвижную точку. □

Пример 1.4. *Предположим, что* n $(n > 4)$ *интернет провайдеров (в дальнейшем игроков) безконтрольно делят общий внешний канал выхода в интернет емкости* 1. *Игрок* $i \in N \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \ldots, n\}$ *выбирает свою стратегию* $x_i \in S_i \stackrel{\text{def}}{=} [0, 1]$, *и в ситуации* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *игрок* i *выигрывает*

$$\phi_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} x_i \left(1 - \sum_{j=1}^{n} x_j\right).$$

Нужно найти ситуацию равновесия и сравнить выигрыши игроков в ситуации равновесия с теми, которые игроки могут получить, если договорятся пропорционально разделить только половину емкости канала.

---

[5] D. Debreu. A social equilibrium theorem. *Proceedings of the National Acadamy of Science* **38** (1952) 886–893.

J.L. Glicksberg. A further generalization of the Kakutani fixed point theorem with applications to Nash equalibrium points. *Proceedings of the National Acadamy of Science* **38** (1952) 170–174.

K. Fan. Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces. *Proceedings of the National Acadamy of Science* **38** (1952) 121–126.

Решение. Мы видим, что выигрыш $\phi_i(x)$ игрока i увеличивается с ростом его доли x_i и убывает с ростом общей загрузки канала $\sum_{j=1}^{n} x_j$. Представив $\phi_i(x)$ в следующем виде

$$\phi_i(x) = -x_i^2 + x_i \left(1 - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j\right),$$

мы видим, что функция $\phi_i(x)$ вогнута по x_i при фиксированных значения x_j, $j \in N \setminus \{i\}$. Поэтому игра

$$\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$$

выпуклая, и по теореме 1.1 она имеет ситуацию равновесия. Найдем ее.

При известных стратегиях x_j, $j \in N \setminus \{i\}$, игрок $i \in N$ найдет свою стратегию x_i, решая задачу

$$\max\{\phi_i(x) : x_i \in [0, 1]\}. \tag{1.5}$$

При граничных значениях $x_i = 0$ или $x_i = 1$ выигрыш игрока i неположителен. Поэтому предположим, что все игроки не используют свои граничные стратегии. Тогда решение задачи (1.5) должно удовлетворять условию оптимальности первого порядка:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}(x) = -2x_i + 1 - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j = 0.$$

Решая систему линейных уравнений

$$2x_i + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j = 1, \quad i = 1, \dots, n, \tag{1.6}$$

найдем единственную (докажите, что система (1.6) имеет единственное решение) ситуацию равновесия

$$x^0 = (1/(n+1), \dots, 1/(n+1)),$$

в которой выигрыш каждого игрока равен

$$\phi_i(x^0) = \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

При этом, общая загрузка канала равна $n/(n+1)$ и при больших n близка к стопроцентной; с точки зрения клиентов «интернет работает медленно». Этим и объясняются столь мизерные выигрыши игроков.

Итак мы показали, что в данной игре существует единственное равновесие, которое не устраивает ни одного из игроков. И при этом, ни один из игроков в отдельности не может исправить ситуацию. Если бы игроки смогли договориться пропорционально разделить половину емкости канала, то в ситуации

$$x^1 = (1/2n, \dots, 1/2n)$$

выигрыш каждого игрока $i \in N$ составил бы $\phi_i(x^1) = 1/4n$, что более чем в $n/4$ раза превышает выигрыш в равновесной ситуации. □

Игра из примера 1.4 принадлежит к классу игр (не все из них выпуклые) под названием «проклятие общего». В этих играх доказывается, что бесплатные общие ресурсы всегда используются неэффективно. Еще один пример игры из этого класса представлен в упр. 1.8.

1.2.1. Итерационный алгоритм решения выпуклых игр

Теорема 1.1 гарантирует существование решения для выпуклых игр. Рассмотрим теперь итерационный алгоритм[6] решения выпуклой игры

$$\gamma = (N, \{S_i\}_{i\in N}, \{\phi_i\}_{i\in N}),$$

где $N\{1, \dots, n\}$. Итерации процесса естественно интерпретировать как последовательность партий, разыгрываемых игроками.

Игроки начинают с некоторой начальной ситуации $s^0 \in S$. На шаге $k = 1, 2, \dots$ разыгрывается партия $s^k \in S$ как результат одновременного предъявления всеми игроками своих стратегий s_i^k, т. е. $s^k = (s_1^k, \dots, s_n^k)$. Игроки анализируют сложившуюся после партии $k-1$ ситуацию s^{k-1} и находят свои оптимальные ответы (стратегии) $\bar{s}_i^{k-1}$, которые им нужно было применять, если бы они предвидели заранее ситуацию s^{k-1}, т. е.

$$\bar{s}_i^{k-1} \in \arg\max_{s_i\in S_i} \phi_i(s_i, s_{-i}^{k-1}), \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.7}$$

Так как функция $\phi_i(s_i, s_{-i}^{k-1})$ квазивогнута по s_i на S_i, то задача (1.7) решается методами выпуклого программирования. С этой новой информацией, игроки корректируют использованные в предыдушей партии

[6] Итерационные методы решения выпуклых игр подробно обсуждаются в книге: В. В. Беленький и др. Итеративные методы в теории игр и программировании. М.: Наука, 1974.

стратегии, вычисляя свои новые стратегии s_i^k для применения в k-й партии:

$$s_i^k = (1-\lambda_k)s_i^{k-1} + \lambda_k \bar{s}_i^{k-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Параметр λ_k, который входит в эту формулу, можно интерпретировать как меру осторожности игроков, или их степень доверия новой информации после опыта, накопленного в ранее сыгранных партиях.

Нас интересует вопрос: сходится ли последовательность

$$s^0, s^1, \ldots, s^k, \ldots$$

и, если сходится, то является ли ее предел $s^* = \lim_{k\to\infty} s^k$ ситуацией равновесия?

Если придерживаться слишком консервативной политики, когда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k < \infty,$$

то процес обязательно сойдется, но он может и не дойти до ситуации равновесия s^*. В этом случае факт сходимости можно объяснить утомленностью игроков, их нежеланием или неспособностью далее испытывать свои силы.

С другой стороны, если проявлять чрезмерную склонность к переменам, когда λ_k не стремится к нулю, то такая «прыть» может привести к тому, что устойчивое состояние так и не будет найдено.

Найболее простой и естественной политикой при выборе шагов λ_k является политика равного доверия ко всем возникающим в процессе игры оптимальных ответам:

$$\frac{\lambda_k}{1-\lambda_k} = \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \frac{1}{k+1}.$$

1.3. Олигополии

Одним из основных достижений теории бескоалиционных игр в экономике является формулировка и анализ моделей *олигополий*. В этих моделях ограниченное число фирм соперничают на некотором рынке. Поскольку на рынке фирм немного, то они могут сами влиять на цены, что невозможно на рынках с совершенной конкуренцией. Теория игр доказывает, что и в этом случае на рынке возможно устойчивое равновесие, если фирмы-олигополисты будут принимать свои решения, просчитывая возможные ответы конкурентов. В данном разделе мы рассмотрим две самые известные модели олигополий.

1.3.1. Однородные продукты: олигополии Курно

Предположим, что на однопродуктовом рынке соперничают n фирм (олигополистов). Технология фирмы i такова, что ее затраты на производство y_i единиц продукта равны $g_i(y_i)$. Кроме того, максимальный объем производства на фирме i равен $d_i > 0$.

Предположение 1.1. *Для всех $i = 1, \ldots, n$ функция g_i непрерывная и строго возрастающая на $[0, d_i]$, $g_i(0) = 0$.*

Предположим, что нам известна *функция потребления* $q = f(p)$; это означает, что при цене $p \geq 0$ продукт потребляют в объеме $f(p)$.

Предположение 1.2. *Функция потребления $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ непрерывная и строго убывающая. Функция продаж всех фирм $R(p) = pf(p)$ удовлетворяет следующим условиям:*

$$\lim_{p \to 0^+} R(p) = 0, \quad \lim_{p \to \infty} R(p) = 0,$$

т. е. никакой фирме невыгодна нулевая или очень большая цена.

Поскольку f строго убывающая непрерывная функция, то для нее существует обратная функция $p = f^{-1}(q)$, которая называется *обратной функцией потребления*. Эта функция также непрерывная и строго убывающая.

Чистая прибыль фирмы i равна $\pi_i(p, y_i) = py_i - g_i(y_i)$ при условии, что все произведенное ей удается продать. При выполнении предположений 1.1 и 1.2 выполняются следующие условия: $\pi_i(p, 0) = 0$ для всех p, а $\pi_i(0, y_i) \leq 0$ для всех y_i.

Набор неотрицательных значений

$$(\hat{p}, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_n)$$

называется *равновесием*, если $\hat{p} > 0$ и выполняется *условие освобождения рынка*

$$f(\hat{p}) = \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i \,. \tag{1.8}$$

Теорема 1.2. *При выполнении предположений 1.1, 1.2 и, если для $i = 1, \dots, n$ функции*

$$\begin{aligned}\phi_i(y) = \phi_i(y_i, y_{-i}) \stackrel{\text{def}}{=} \pi_i\left(f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right), y_i\right) = \\ = f^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)\cdot y_i - g_i(y_i).\end{aligned} \tag{1.9}$$

квази-вогнуты по y_i на $[0, d_i]$, в модели олигополии с однородными продуктами существует равновесие.

Доказательство. Мы можем доказать существование равновесия, представив сформулированную модель олигополии как бескоалиционную игру $\gamma = (\{1, \dots, n\}, \{[0, d_i]\}_{i=1}^{n}, \{\phi_i\}_{i=1}^{n})$. В силу сделанных в условии теоремы предположений игра γ есть выпуклая игра. По теореме 1.1 в такой игре существует ситуация равновесия $\hat{y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n)$. Определяя $\hat{p} = f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i\right)$, мы получим равновесие

$$(\hat{p}, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n)$$

для модели олигополии с однородными продуктами. □

Предполагая, что функции $g_i(y_i)$ и $f(p)$ непрерывно дифференцируемы, мы можем получить ряд дополнительных свойств ситуаций равновесия. Для простоты также предположим, что $d_i = +\infty$ для всех $i = 1, \dots, n$. При этом заметим, что в таком случае множество $S_i = \mathbb{R}_+$ стратегий игрока i не является компактом (оно не является ограниченным) и теорема 1.1 уже не гарантирует существования равновесия в бескоалиционной игре $\bar{\gamma} = (\{1, \dots, n\}, \{S_i = \mathbb{R}_+\}_{i=1}^{n}, \{\phi_i\}_{i=1}^{n})$.

В силу (1.2), равновесие $\hat{y} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)$ в игре $\bar{\gamma}$ является решением следующей системы включений:

$$\hat{y}_i \in \arg\max_{y_i \geq 0} \phi_i(y_i, \hat{y}_{-i}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Это значит, что фирма i найдет свой оптимальный объем производства $\hat{y}_i$, при условии что она знает выпуски $\hat{y}_{-i} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{i-1}, \hat{y}_{i+1}, \dots, \hat{y}_n)$ других фирм, решая следующую оптимизационную задачу:

$$\max_{y_i \geq 0} \phi_i(y_i, \hat{y}_{-i}). \tag{1.10}$$

По теореме Куна — Таккера A.6 в точке $\hat{y}_i$ оптимума задачи (1.10) выполняются условия:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial y_i}(\hat{y}_i, \hat{y}_{-i}) \le 0 \quad \text{и} \quad \hat{y}_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y_i}(\hat{y}_i, \hat{y}_{-i}) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.11}$$

Подставляя в (1.11) выражения (1.9) при $y = \hat{y}$ и определяя равновесную цену $\hat{p} = f^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \hat{y}_i\right)$, получим систему

$$\hat{p} + \frac{\hat{y}_i}{f'(\hat{p})} - g_i'(\hat{y}_i) \le 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.12}$$

$$\hat{y}_i \left(\hat{p} + \frac{\hat{y}_i}{f'(\hat{p})} - g_i'(\hat{y}_i)\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.13}$$

Если фирма i остается на рынке, т. е. ее выпуск $\hat{y}_i$ положителен, то из (1.12) и (1.13) следует, что

$$\hat{y}_i = f'(\hat{p})\,(g_i'(\hat{y}_i) - \hat{p}) > 0.$$

А поскольку f строго убывающая функция, то $f'(\hat{p}) < 0$ и $g_i'(\hat{y}_i) < \hat{p}$. Эти неравенства означают, что

> на рынке остаются только те фирмы, чьи предельные издержки не превосходят равновесной цены продукта.

Олигоополия Курно при линейной функции потребления и линейных функциях затрат

На однопродуктовом рынке конкурируют n фирм. Предположим, что функция спроса линейная: $q = f(p) = a - bp$, где a и b — положительные числа. Функции затрат всех фирм также линейны: $g_i(y_i) = c_i y_i$, где $c_i > 0$ есть стоимость производства единицы продукта на фирме $i = 1, \ldots, n$. Цена продукта определяется так, чтобы уравнять спрос и предложение. Тогда $q = \sum_{i=1}^n y_i$ и каждая из фирм продает все, что она производит. Следовательно чистая прибыль фирмы i равна $\pi_i(p, y_i) = p y_i - c_i y_i$. Обращая функцию спроса, получаем

$$p = \frac{a - q}{b} = \frac{a - \sum_{i=1}^n y_i}{b}.$$

Используя это выражение, мы можем выразить чистые прибыли всех фирм как функции выпусков:

$$\phi_i(y_1, \ldots, y_n) = \frac{a - \sum_{j=1}^n y_j}{b}\, y_i - c_i y_i\,, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Оптимальный выпуск $\hat{y}_i$ (при котором чистая прибыль максимальна) фирмы i должен удовлетворять равенству:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial y_i}(y_1, \ldots, y_n) = \frac{a - \sum_{j=1}^n y_j}{b} - \frac{y_i}{b} - c_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.14}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае все стационарные точки являются точками максимума, поскольку

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y_i^2}(y_1, \ldots, y_n) = -\frac{2}{b} < 0.$$

Чтобы решить систему (1.14), перепишем ее в виде:

$$y_i + \sum_{j=1}^n y_j = a - bc_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Складывая эти n уравнений, получим

$$(n+1)\sum_{i=1}^n y_i = na - b\sum_{i=1}^n c_i.$$

Откуда находим равновесные выпуски фирм

$$\begin{aligned} \hat{y}_i &= (a - bc_i) - \frac{na - b\sum_{j=1}^n c_j}{n+1} \\ &= \frac{a - b\left((n+1)c_i - \sum_{j=1}^n c_j\right)}{n+1}, \quad i = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{1.15}$$

и равновесную цену

$$\hat{p} = \frac{a/b + \sum_{i=1}^n c_i}{n+1}.$$

Чтобы все выпуски $\hat{y}_i$ были положительными, параметры олигополии должны удовлетворять неравенствам

$$\frac{a}{b} > (n+1)c_i - \sum_{j=1}^n c_j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Сложив эти n неравенств и разделив результат на n, получим неравенство

$$\frac{a}{b} > \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n c_i,$$

которое означает, что средние издержки $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i$ не могут превосходить максимальную цену a/b (при $p = a/b$ выпуск $q = 0$); в противном случае олигополия из n фирм не может существовать и на рынке останется меньше фирм, а менее эффективные фирмы (те, у которой стоимость производства единицы продукта большая) уйдут с рынка. Кроме того, в любом случае чистый доход более эффективной фирмы всегда больше, чем чистый доход менее эффективного конкурента.

1.3.2. Разнородные продукты: олигополии Бертрана

Как правило, покупатели рассматривают продукты одинакового назначения разных фирм как разные товары. Поэтому логично считать, что на рынок каждая из фирм выходит со своим товаром, причем все эти товары взаимозаменяемы.

Пусть имеется n фирм и пусть p_i есть цена единицы товара фирмы i ($i = 1, \dots, n$), а $p = (p_1, \dots, p_n)$ есть вектор (система) цен. Функция спроса $f_i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ системе цен p ставит в соответствие спрос $f_i(p)$ на товар фирмы i. Будем считать, что все функции f_i обладают следующими свойствами.

Предположение 1.3. *Функция f_i непрерывна, строго убывает по p_i и*

$$\lim_{p_i \to 0^+} f_i(p) = +\infty.$$

Существует такая цена p_i^*, что $f_i(p) = 0$ для всех таких p, что $p_i > p_i^*$.

Существование *предельной цены* p_i^* обосновывается тем, что при большой цене товара фирмы i, потребители перестанут его покупать, предпочитая более дешевые аналоги фирм-конкурентов.

Технология фирмы i такова, что ее затраты на производство y_i единиц продукта равны $g_i(y_i)$.

Предположение 1.4. *Для всех $i = 1, \dots, n$ функция $g_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ непрерывная и строго возрастающая, $g_i(0) = 0$.*

Набор неотрицательных значений

$$(\hat{p}_1, \hat{y}_1, \hat{p}_2, \hat{y}_2, \dots, \hat{p}_n, \hat{y}_n)$$

называется *равновесием*, если они образуют решение следующей системы уравнений:

$$y_i = f_i(p_1, \dots, p_n), \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.16}$$

Подставляя выражения (1.16) для значений y_i в функцию чистой прибыли $\pi_i(p, y_i) = py_i - g_i(y_i)$, получим функцию выигрышей фирмы i:

$$\phi_i(p) = p_i\, f_i(p) - g_i(f_i(p)). \tag{1.17}$$

Теперь мы можем сформулировать задачу поиска равновесия в модели олигополии с разнородными продуктами как задачу поиска ситуации равновесия в бескоалиционной игре

$$\gamma = \left(\{1, \dots, n\}, [0, p_i^*]_{i=1}^n, \{\phi_i\}_{i=1}^n\right).$$

Теорема 1.3. *При выполнении предположений 1.3, 1.4 и, если для $i = 1, \dots, n$ функция $\phi_i(p)$ квази-вогнута по p_i на $[0, p_i^*]$, в модели олигополии с разнородными продуктами существует равновесие.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.2. □

Далее, предполагая, что все функции $f_i(p)$ и $g_i(y_i)$ непрерывно дифференцируемы, мы установим дополнительные свойства ситуаций равновесия. Ради простоты представления, предположим, что все $p_i^* = +\infty$. Это допустимо в тех случаях, когда производственные возможности каждой из фирм превосходят спрос на ее продукцию.

Фирма i найдет оптимальную цену $\hat{p}_i$ своего продукта, при условии что она знает цены $\hat{p}_{-i} = (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_{i-1}, \hat{p}_{i+1}, \dots, \hat{p}_n)$ на продукты других фирм, решая следующую оптимизационную задачу:

$$\max_{p_i \ge 0} \phi_i(p_i, \hat{p}_{-i}). \tag{1.18}$$

По теореме Куна — Таккера A.6 в точке оптимума $\hat{p}_i$ задачи (1.18) выполняются условия:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial p_i}(\hat{p}_i, \hat{p}_{-i}) \le 0 \quad \text{и} \quad \hat{p}_i \frac{\partial \phi_i}{\partial p_i}(\hat{p}_i, \hat{p}_{-i}) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.19}$$

Подставляя в (1.19) выражения (1.17) при $p = \hat{p}$ и учитывая, что $\hat{y}_i = f_i(\hat{p})$, получим систему

$$\hat{y}_i + (\hat{p}_i - g_i'(\hat{y}_i))\, \frac{\partial f_i}{\partial p_i}(\hat{p}) \le 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{1.20}$$

$$\hat{p}_i \left(\hat{y}_i + (\hat{p}_i - g_i'(\hat{y}_i))\, \frac{\partial f_i}{\partial p_i}(\hat{p}) \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.21}$$

Если фирма i остается на рынке, т. е. $\hat{y}_i > 0$, то из (1.20) с учетом того, что $\frac{\partial f_i}{\partial p_i}(\hat{p}) < 0$, имеем $0 < g_i'(\hat{y}_i) < \hat{p}_i$, т. е.

> на рынке остаются только те фирмы, чьи предельные издержки не превосходят цены их продукта.

Поскольку $\hat{p}_i > 0$, то из (1.21) получаем равенство

$$\hat{p}_i = g_i'(\hat{y}_i) - \frac{\hat{y}_i}{\frac{\partial f_i}{\partial p_i}(\hat{p})},$$

которое означает, что равновесная цена продукта фирмы i превышает ее предельные издержки на абсолютную величину отношения спроса и предельного спроса на данный продукт.

Олигополия Бертрана при линейных функциях спроса и затрат

Пусть имеется n $(n \geq 2)$ фирм. Предположим, что функции спроса

$$f_i(p_1, \ldots, p_n) = a - e_1 p_i + e_2 \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} p_j$$

и функции затрат $g_i(y_i) = c_i y_i$, $i = 1, \ldots, n$, линейные. Здесь коэффициент e_1 — это эластичность спроса по отношению к цене фирмы производителя, а коэффициент e_2 — это эластичность спроса по отношению к ценам фирм конкурентов.

При фиксированных ценах $p_1, \ldots, p_{i-i}, p_{i+1}, \ldots, p_n$ фирма i назначает цену p_i, максимизируя свою функцию выигрышей

$$\phi_1(p_1, \ldots, p_n) \stackrel{\text{def}}{=} \left(a - e_1 p_i + e_2 \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} p_j\right) \cdot (p_i - c_i) \to \max_{p_i \geq 0}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Если все равновесные цены $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n$ положительны, то они удовлетворяют системе уравнений:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial p_i}(p_1, \ldots, p_n) = a + e_1 c_i - 2e_1 p_i + e_2 \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} p_j = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \quad (1.22)$$

Складывая эти n уравнений, после перегруппировки мы получим

$$(2e_1 - (n-1)e_2)\sum_{i=1}^{n} p_i = na + e_1 \sum_{i=1}^{n} c_i.$$

Поскольку правая часть этого равенства положительна, то множитель $(2e_1 - (n-1)e_2)$ также должен быть положительным. Это значит, что для существования олигополии n фирм необходимо, чтобы отношение эластичностей e_1/e_2 было больше $(n-1)/2$.

Теперь решим систему (1.22). Сначала представим ее в виде

$$(2e_1 + e_2)p_i = a + e_1 c_i + e_2 \sum_{j=1}^{n} p_j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Откуда, с учетом равенства

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{na + e_1 \sum_{i=1}^{n} c_i}{2e_1 - (n-1)e_2},$$

найдем равновесные цены

$$\hat{p}_i = \frac{a + e_1 c_i}{2e_1 + e_2} + \frac{na + e_1 \sum_{j=1}^{n} c_j}{(2e_1 + e_2)(2e_1/e2 - n + 1)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Поскольку при выполнении условия $e_1/e_2 > (n-1)/2$ все равновесные цены $\hat{p}_i$ положительны, то это условие не только необходимо для существования олигополии n фирм, но и достаточно.

1.4. Конечные бескоалиционные игры

Пусть в бескоалиционной игре n лиц

$$\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$$

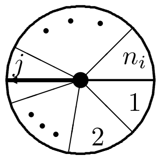
каждый игрок i имеет конечное число стратегий n_i. Для простоты представления будем считать, что $S_i = \{1, \ldots, n_i\}$, $i \in N = \{1, \ldots, n\}$. Решениями бескоалиционной игры являются ситуации равновесия. На жаль, многие бескоалиционные игры не имеют ситуаций равновесия. Чтобы это исправить, нам нужно некоторым образом расширить понятие стратегии с целью получить игру, которая имела бы решение. Существует несколько способов сделать это, но наиболее известный из этих способов базируется на следующих рассуждениях. Предполагается, что игра будет повторяться многократно. В силу допущения о разумности игроков, принятого в теории игр, нужно допустить, что если игрок использует свои стратегии с некоторой детерминированной закономерностью, то его оппоненты разгадают эту стратегию. Остается использовать свои стратегии случайным образом, но с определенной закономерностью, поскольку иначе игра превратится в случайный процесс.

В дальнейшем стратегии игроков будем называть *чистыми стратегиями*, чтобы отличать их от смешанных стратегий, к рассмотрению которых мы приступаем.

Смешанной стратегией p_i игрока i $(i = 1, \dots, n)$ в конечной бескоалиционной игре называется полный набор вероятностей применения его чистых стратегий, т. е.

$$p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{i,n_i}), \quad \sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} = 1, \quad p_{ij} \geq 0,\ j = 1, \dots, n_i. \tag{1.23}$$

Множество смешанных стратегий $\mathcal{S}_i$ игрока i есть симплекс Σ_{n_i}. Заметим, что смешанная стратегия $\mathrm{e}_j \in \mathcal{S}_i$ игрока i соответствует его j-й чистой стратегии.



Свою смешанную стратегию $p_i = (p_{i1}, \dots, p_{i,n_i})$ игрок i может реализовать, например, сделав рулетку, в которой n_i секторов, j-й сектор размера $p_{ij} \cdot 360^o$. Перед началом очередной партии игрок крутит колесо рулетки и, после того, как оно остановится, номер сектора j, на который указывает стрелка рулетки, опрелеляет стратегию, которую игрок применит в этой партии.

В бескоалиционной игре каждый игрок использует свои чистые стратегии независимо от всех остальных игроков, поэтому в смешанной ситуации $p = (p_1, \dots, p_n)$ вероятность $p(s)$ появления (чистой) ситуации $s = (s_1, \dots, s_n) \in S = \prod_{j=1}^{n} S_j$ равна произведению вероятностей использования игроками своих чистых стратегий, т. е.

$$p(s) = p(s_1, \dots, s_n) = p_{1,s_1} \cdot p_{2,s_2} \cdot \ \dots \ \cdot p_{n,s_n}.$$

Математическое ожидание выигрыша игрока i $(i = 1, \dots, n)$ в смешанной ситуации $p = (p_1, \dots, p_n)$ определяется по формуле

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_i(p) = \bar{\phi}_i(p_1, \dots, p_n) = \sum_{s \in S} \phi_i(s)\, p(s) = \\ = \sum_{s_1 \in S_1} \cdots \sum_{s_n \in S_n} \phi_i(s_1, s_2, \dots, s_n)\, p_{1,s_1} \dots p_{n,s_n}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Смешанным расширением конечной бескоалиционной игры γ называется бескоалиционная игра

$$\gamma^* = (N, \{\mathcal{S}_i\}_{i \in N}, \{\bar{\phi}_i\}_{i \in N}). \tag{1.25}$$

Ситуацией равновесия (Нэша) в смешанных стратегиях игры γ называется ситуация равновесия ее смешанного расширения γ^*.

Замечание. Мы определили выигрыши игроков в смешанной ситуации равными их ожидаемым выигрышам. Это неявным образом предполагает, что все игроки являются нейтральными к риску. Для примера рассмотрим две ситуации, в первой из которых игрок может выиграть с равной вероятностью 2 или 0, а во второй — 1 с вероятностью 1. В обоих ситуациях ожидаемый выигрыш игрока равен 1. Для *нейтрального к риску игрока* обе ситуации равноценны, а *неприемлющий риск игрок* предпочтет вторую ситуацию первой.

Так как $\mathcal{S}_i$ есть симплекс, то $\mathcal{S}_i$ — выпуклое множество. Каждая функция $\bar{\phi}_i$ линейна по p_i при фиксированых остальных аргументах p_{-i}. Поэтому γ^* — выпуклая игра, которая по теореме 1.1 имеет ситуацию равновесия.

Теорема 1.4 (Нэш). [7] *Каждая конечная бескоалиционная игра имеет хотя бы одну ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.*

Следующая теорема утверждает, что

> ситуация является равновесием в смешанных стратегиях, если ни одному игроку в отдельности не выгодно переходить от своей смешанной стратегии к какой-либо чистой стратегии.

Теорема 1.5. *Чтобы смешанная ситуация $p \in \mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \times \dots \mathcal{S}_n$ была ситуацией равновесия в смешанных стратегиях в конечной бескоалиционной игре $\gamma = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:*

$$\bar{\phi}_i(p) \geq \bar{\phi}_i(\mathrm{e}_j, p_{-i}), \quad \mathrm{e}_j \in \Sigma_{n_i},\ i = 1, \dots, n. \tag{1.26}$$

[7] J. Nash. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Acadamy of Science* **36** (1950) 48–49.

Доказательство. По определению p есть ситуация равновесия игры γ^* (смешанного расширения игры γ), если выполняются неравенства

$$\bar{\phi}_i(p) \geq \bar{\phi}_i(\bar{p}^i, p_{-i}), \quad \bar{p}^i \in \Sigma_{n_i}, \ i = 1, \ldots, n. \tag{1.27}$$

Поскольку

$$\bar{p}^i = \bar{p}^i_1 \mathrm{e}_1 + \bar{p}^i_2 \mathrm{e}_2 + \cdots + \bar{p}^i_{n_i} \mathrm{e}_{n_i},$$

то, сложив неравенства

$$\bar{p}^i_j \cdot \bar{\phi}_i(p)) \geq \bar{p}^i_j \cdot \bar{\phi}_i(\mathrm{e}_j, p_{-i}), \quad \mathrm{e}_j \in \Sigma_{n_i},$$

получим неравенство

$$\bar{\phi}_i(p) \geq \bar{\phi}_i(\bar{p}^i, p_{-i}).$$

Следовательно, система (1.27) есть следствие системы 1.26. □

Из теоремы 1.5 также следует, что

> каждый игрок в случае, когда ему известны смешанные стратегии всех остальных игроков, может искать оптимальный ответ среди своих чистых стратегий.

1.5. Матричныя игры

Матричная игра — это конечная антагонистическая игра. Напомним, что термин «антагонистическая» означает, что это есть игра двух лиц с нулевой суммой. Матричная игра задается матрицей A размера $m \times n$ выигрышей игрока 1. В этой игре игрок 1 выбирает строку $i \in S_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \ldots, m\}$, а игрок 2 — столбец $j \in S_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \ldots, n\}$. В сложившейся ситуации (i, j) игрок 1 выигрывает сумму $\phi_1(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} a_{ij}$, а игрок 2 проигрывает сумму a_{ij}, или, что то же самое, выигрывает $\phi_2(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} -a_{ij}$. Можно сказать, что A — это матрица выигрышей игрока 1 и одновременно матрица проигрышей игрока 2.

К матричной игре сводится любая конечная игра

$$(\{1, 2\}, \{S_1, S_2\}, \{\phi_1, \phi_2\})$$

двух лиц с постоянной суммой, в которой $\phi_1(i, j) + \phi_2(i, j) = a$ для всех ситуаций $(i, j) \in S_1 \times S_2$, где a — это некоторая константа. Если мы переопределим функции выигрышей игроков по правилу

$$\bar{\phi}_k(i, j) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_k(i, j) - a/2, \quad k = 1, 2,$$

то получим эквивалентную игру с нулевой суммой: $\bar{\phi}_1(i,j)+\bar{\phi}_2(i,j)=0$.

Следует отметить, что в экономике (в отличие от военного дела) антагонистические конфликты встречаются не часто. Пожалуй можно привести только два типичных примера.

1. Так называемые «игры с природой», в которых только один участник, стремящийся максимизировать свою прибыль, которая зависит от того, какой будет погода, или от того, каким будет состояние рынка. Если этот единственный участник принял решение оптимально спланировать свою хозяйственную деятельность при самых неблагоприятных погодных или рыночных условиях, то он может считать природу или рынок активным антагонистическим субъектом, целью которого является создание погодных или рыночных условий, при которых ожидаемый доход будет наименьшим.

2. Игры с постоянной суммой, в которых две фирмы-олигополисты конкурируют на одном рынке, и прибыль каждой из фирм пропорциональна ее доле на рынке.

Тем не менее, роль матричных игр в теории игр существенна, поскольку решение многих более сложных игровых моделей сводится к решению одной или нескольких матричных игр. В частности, для вычисления значения характеристической функции кооперативной игры часто требуется решить некоторую матричную игру.

1.5.1. Равновесие в чистых стратегиях

Решением матричной игры в чистых стратегиях называется пара чистых стратегий (i_0, j_0) первого и второго игроков, которые образуют *седловую точку* матрицы A:

$$a_{ij_0} \le a_{i_0j_0} \le a_{i_0j}, \quad i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n\,. \tag{1.28}$$

Стратегии i_0, j_0 в этом случае называются *оптимальными чистыми стратегиями*. Из (1.28) следует, что ни одному из игроков в отдельности не выгодно отходить от своей оптимальной стратегии. Поэтому ситуация (i_0, j_0) есть ситуация равновесия в бескоалиционной игре $\gamma = (\{1,2\},\{S_1,S_2\},\{\phi_1,\phi_2\})$, где $\phi_1(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} a_{ij}$ и $\phi_2(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} -a_{ij}$.

Определим *нижнюю чистую цену* $\alpha(A)$ матричной игры равной выигрышу игрока 1 в двухшаговой игре, в которой первым объявляет свою стратегию игрок 1, а затем, зная стратегию игрока 1, принимает решение игрок 2:

$$\alpha(A) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \le i \le n} \min_{1 \le j \le n} a_{ij}.$$

Верхняя чистая цена $\beta(A)$ матричной игры есть выигрыш игрока 1 в двухшаговой игре, в которой первым объявляет свою стратегию игрок 2, а затем, зная стратегию игрока 2, принимает решение игрок 1:

$$\beta(A) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le n} a_{ij}.$$

Поскольку знание стратегии оппонента может помочь игроку увеличить свой выигрыш, то $\alpha(A) \le \beta(A)$. По теореме A.9 (если $X = \{1, \dots, m\}$, $Y = \{1, \dots, n\}$, $f(i,j) = a_{ij}$) матричная игра с матрицей игры A имеет решение в чистых стратегиях тогда и только тогда, когда $\alpha(A) = \beta(A)$. В таком случае число $\alpha(A) = \beta(A)$ называется *чистой ценой игры*.

Чтобы вычислить $\alpha(A)$ нужно в каждой строке матрицы A найти минимальный элемент, а затем среди этих минимальных элементов выбрать максимальный. Аналогично, чтобы вычислить $\beta(A)$ нужно в каждом столбце матрицы A найти максимальный элемент, а затем среди этих максимальных элементов выбрать минимальный. Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то отметьте те строки, в которых минимальный элемент равен $\alpha(A)$, и те столбцы, в которых максимальный элемент равен $\beta(A)$. Элементы, находящиеся на пересечении отмеченных строк и столбцов, — это все седловые точки матрицы A.

1.5.2. Равновесие в смешаных стратегиях

Напомним, что смешанной стратегией игрока в бескоалиционной игре называется полный набор вероятностей применения его чистых стратегий. В матричной игре с $m \times n$-матрицей A выигрышей игрока 1, множество смешанных стратегий игрока 1 — это симплекс Σ_m, а множество смешанных стратегий игрока 2 есть симплекс Σ_n. В матричной игре смешанную стратегию игрока 1 принято обозначать через $p = (p_1, \dots, p_m)^T$, а игрока 2 — через $q = (q_1, \dots, q_n)^T$. Заметим, что единичные векторы $\mathrm{e}_i \in \mathbb{R}^m$ и $\mathrm{e}_j \in \mathbb{R}^n$ соответствуют i-й чистой стратегии игрока 1 и j-й чистой стратегии игрока 2 соответстенно. Стоит также еще раз напомнить, что мы называем стратегии игроков чистыми, чтобы отличить их от смешанных стратегий, которые являются вероятностными правилами применения игроками их (чистых) стратегий.

В смешанной ситуации $(p, q) \in \Sigma_m \times \Sigma_n$ выигрыш игрока 1 определяется как математическое ожидание его выигрша:

$$E_A(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i \, q_j = p^T A q \, . \tag{1.29}$$

Понятно, что в ситуации (p, q) средний выигрыш игрока 2 равен $-E_A(p, q)$.

Решением матричной игры в смешанных стратегиях называют пару смешанных стратегий (p^0, q^0), которая образует седловую точку функции $E_A(p, q)$, т. е.

$$E_A(p, q^0) \le E_A(p^0, q^0) \le E_A(p^0, q), \quad p \in \Sigma_m, \; q \in \Sigma_n. \tag{1.30}$$

Левые неравенства в (1.30) означают, что игрок 1 не может увеличить свой выигрыш, переходя от стратегии p^0 к любой другой своей стратегии, а правые неравенства означают, что игрок 2 не может уменьшить свой проигрыш, переходя от стратегии q^0 к любой другой своей стратегии. Поэтому седловые точки функции $E_A(p, q)$ — это не что иное как ситуации равновесия в смешанных стратегиях. А поскольку матричная игра — это конечная бескоалиционная игра, то по теореме 1.4 она имеет решение в смешанных стратегиях.

Если ситуация (p_0, q_0) есть решение матричной игры в смешанных стратегиях, то стратегии p^0, q^0 называют *оптимальными смешанными стратегиями*, а число $v(A) \stackrel{\text{def}}{=} E_A(p^0, q^0)$ называется *ценой матричной игры*.

Следующая теорема является фундаментальной в теории матричных игр.

Теорема 1.6 (фон Неймана). *Пусть A есть $m \times n$ матрица. Имеет место равенство*

$$v(A) = \max_{p \in \Sigma_m} \min_{1 \le j \le n} p^T A \mathrm{e}_j = \min_{q \in \Sigma_n} \max_{1 \le i \le m} \mathrm{e}_i^T A q. \tag{1.31}$$

Для любых

$$p^0 \in \arg \max_{p \in \Sigma_m} \min_{1 \le j \le n} p^T A \mathrm{e}_j, \quad q^0 \in \arg \min_{q \in \Sigma_n} \max_{1 \le i \le m} \mathrm{e}_i^T A q,$$

пара (p^0, q^0) является решением в смешанных стратегиях матричной игры, заданной матрицей A.

Доказательство. Поскольку функция $E_A(p,q) = p^T A q$ имеет седловую точку (p^0, q^0), то по теореме A.9 имеет место равенство

$$v(A) = \max_{p\in\Sigma_m} \min_{q\in\Sigma_n} E_A(p,q) = \min_{q\in\Sigma_n} \max_{p\in\Sigma_m} E_A(p,q),$$

и

$$p^0 \in \arg\max_{p\in\Sigma_m} \min_{q\in\Sigma_n} E_A(p,q), \quad q^0 \in \arg\min_{q\in\Sigma_n} \max_{p\in\Sigma_m} E_A(p,q).$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно заметить, что справедливы следующие равенства:

$$\max_{p\in\Sigma_m} \min_{q\in\Sigma_n} p^T A q = \max_{p\in\Sigma_m} \min_{1\le j\le n} p^T A \mathrm{e}_j,$$
$$\min_{q\in\Sigma_n} \max_{p\in\Sigma_m} p^T A q = \min_{q\in\Sigma_n} \max_{1\le i\le m} \mathrm{e}_i^T A q.$$

Эти равенства следуют из того, что максимум и минимум линейной функции на многограннике достигается в вершине многогранника, а вершинами симплексов Σ_n и Σ_m являются единичные векторы. $\square$

Определим функцию $f : \Sigma_m \to \mathbb{R}$ *выигрышей игрока* 1 и функцию $g : \Sigma_n \to \mathbb{R}$ *проигрышей игрока* 2 по правилам:

$$f(p) = \min_{1\le j\le n} p^T A \mathrm{e}_j, \quad p \in \Sigma_m, \tag{1.32}$$

$$g(q) = \max_{1\le i\le m} \mathrm{e}_i^T A q, \quad q \in \Sigma_n. \tag{1.33}$$

Заметим, что f — это кусочно-линейная вогнутая функция, а g — кусочно-линейная выпуклая функция. Из теоремы 1.6 следует, что игрок 1 найдет свою оптимальную стратегию, решая задачу

$$\max\{f(p) : p \in \Sigma_m\}, \tag{1.34}$$

а игрок 2 найдет свою оптимальную стратегию, решая задачу

$$\min\{g(q) : q \in \Sigma_n\}. \tag{1.35}$$

Позже в разделе 1.5.4 мы покажем, что решение оптимизационных задач (1.34) и (1.35) сводится к решению пары двойственных задач линейного программирования (ЛП).

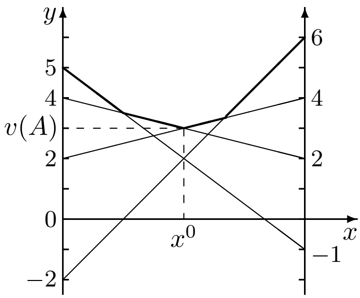


Рис. 1.1. Графическое решение игры размера $m \times 2$

1.5.3. Графический метод решения матричных игр

Графическим методом решают матричные игры размера $m\times 2$ и $2\times n$, т. е. когда у одного или обоих игроков имеется только две стратегии.

Пример 1.5. *Решить графически игру, заданную матрицей*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Предположим, что игрок 2 использует свою смешанную стратегию $q = (q_1, q_2)^T = (x, 1-x)^T$, а игрок 1 использует свою чистую стратегию i. Тогда средний проигрыш игрока 2 (выигрыш игрока 1) равен

$$g_i(x) = x\, a_{i1} + (1-x)\, a_{i2}.$$

Давайте нарисуем графики функций $y = g_i(x)$ (см. рис. 1.1). Для этого на координатной плоскости (x, y) удобно провести две вертикальных координатных оси, проходящие через точки $x = 0$ и $x = 1$. Для того, чтобы нарисовать график функцию $g_i(x)$, нужно соединить точку $(0, a_{i2})$ на первой оси с точкой $(1, a_{i1})$ на второй оси. Другими словами, на первой оси мы откладываем числа из второго столбца матрицы игры, а на второй оси — числа из первого столбца.

Когда все $m = 4$ линии нарисованы, мы можем построить график функции $g(x)$ проигрышей игрока 2 как *верхняю огибающую* всех m прямых (на рис. 1.1 она изображена жирной линией). Мы видим, что

$g(x)$ есть кусочно-линейная выпуклая функция. Стремясь минимизировать свой проигрыш, игрок 2 должен найти точку x^0 минимума функции $g(x)$. Тогда $(x^0, 1-x^0)$ есть оптимальная смешанная стратегия игрока 2, а $g(x^0)$ есть цена игры $v(A)$.

Чтобы точно вычислить точку минимума x^0, нужно выделить две *активных стратегии* игрока 1. Эти стратегии определяются по линиям, пересекающимся в точке x^0. В нашем примере активными являются стратегии 1 и 3. Следовательно, x^0 есть решение уравнения $g_1(x) = g_3(x)$:

$$2x + 4(1-x) = 4x + 2(1-x).$$

Откуда, $x^0 = 1/2$ и $q^0 = (1/2, 1/2)^T$ есть оптимальная смешанная стратегия игрока 2. Вычислим цену игры как значение $g_1(x^0)$ (или $g_3(x^0)$) в точке x^0: $v(A) = g_1(x^0) = 2(1/2) + 4(1/2) = 3$.

Использование неактивных стратегий не может увеличить выигрыш игрока 1 (проигрыш игрока 2). Если игрок 1 откажется от любой своей неактивной стратегии (или сразу от всех неактивных стратегий), то функция проигрышей игрока 2 может измениться, но минимум новой функции будет достигаться в той же самой точке x^0. Следовательно, можно считать, что игрок 1 применяет свои неактивные стратегии с нулевой вероятностью: $p_2^0 = p_4^0 = 0$. Тогда $p_3^0 = 1 - p_1^0$. Мы найдем p_1^0, решив игру с усеченной матрицей размера 2×2, которая получается из исходной матрицы A после удаления строк, соответствующих неактивным стратегиям:

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Теперь и игрок 1 имеет только две стратегии. Мы можем найти p_1^0 из уравнения (обоснуйте это!):

$$2p_1^0 + 4(1-p_1^0) = 3 = v(A).$$

Откуда, $p_1^0 = 1/2$ и $p^0 = (1/2, 0, 1/2, 0)^T$ есть оптимальная стратегия игрока 1. □

Рассмотрим теперь более содержательный пример.

Пример 1.6 (распределение поисковых усилий). *В одном из n лесных массивов потерялся человек. Для поиска этого человека выделено k вертолетов. Вероятность обнаружения человека в j-м лесном массиве одним вертолетом равна ω_j. Поэтому хотя бы один из r вертолетов обнаружит человека в j-м районе (при условии, что он там* *находится) с вероятностью*

$$u_j(r) = 1 - (1 - \omega_j)^r.$$

Каким образом нужно распределить вертолеты по лесным массивам, чтобы вероятность обнарудения человека была максимальной.

Решить пример при следующих значениях параметров $n = k = 2$, $\omega_1 = 0.6$, $\omega_2 = 0.4$.

Решение. Здесь у нас нет конфликтной ситуации. Но мы можем планировать поисковую операцию, расчитывая на худшее, когда «злой рок» направил потерявшегося человека в то место, где обнаружить его труднее всего. В таком случае мы можем рассматривать задачу планирования поисковых усилий как матричную игру, в которой игрок 1 — это лицо (или группа лиц), планирующее операцию, а игрок 2 — это «злой рок». Игрок 2 имеет n стратегий, где стратегия $j = 1, \ldots, n$ означает, что человек потерялся в районе j. Стратегии игрока 1 представим как разбиения $(s_1, \ldots, s_n)$ числа k, где $\sum_{j=1}^n s_j = k$ и s_j есть количество вертолетов, посланных в район j.

Для заданных параметров $n = k = 2$ у игрока 1 три стратегии:

(2,0) — направить оба вертолета в район 1;

(1,1) — направить один вертолет в район 1, а другой — в район 2;

(0,2) — направить оба вертолета в район 2.

У игрока 2 две стратегии: 1) направить человека в район 1, 2) направить человека в район 2.

Теперь составим матрицу игры для параметров $\omega_1 = 0.6$, $\omega_2 = 0.4$:

$$\text{A=}\quad \begin{array}{c|c|c|c} & \textit{Район 1} & \textit{Район 2} & \\ \hline (2,0) & 0.84 & 0 & 0 \\ \hline (1,1) & 0.6 & 0.4 & \underline{0.4} \\ \hline (0,2) & 0 & 0.64 & 0 \\ \hline & 0.84 & \underline{0.64} & \end{array}$$

Так как $\alpha(A) = 0.4 < 0.64 = \beta(A)$, то данная игра не имеет решения в чистых стратегиях. Решение в смешанных стратегиях будем искать графическим методом (см. рис. 1.2).

Поскольку в данной игре нас интересует только стратегия игрока 1, то мы не будем тратить время на поиск стратегии игрока 2. Так как активными у игрока 1 являются стратегии $(1, 1)$ и $(0, 2)$, то его оптимальная стратегия имеет вид $p^0 = (0, y^0, 1 - y^0)$. Найдем y^0 из уравнения

$$0.6y + 0(1 - y) = 0.4y + 0.64(1 - y).$$

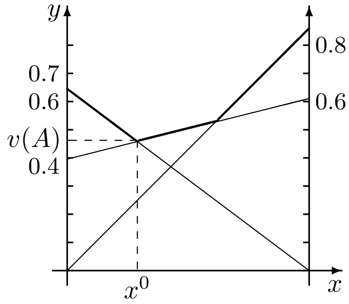


Рис. 1.2. Решение игры «распределение поисковых усилий»

Откуда $y^0 = 16/21$, $p^0 = (0, 16/21, 5/21)$ и $v(A) = 0.84 \cdot 0 + 0.6 \cdot (16/21) + 0 \cdot (5/21) = 16/35$.

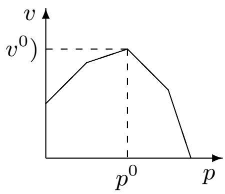
Стратегию p^0 можно реализовать следующим образом: каждый день 16/21 времени поиска в каждом из районов находится по одному вертолету, а в остальное время два вертолета должны находится во втором районе. □

В заключение данного раздела очертим схему решения матричных игр размера $2 \times n$. Решая такую игру, мы сначала ищем оптимальную стратегию $p^0 = (x^0, 1 - x^0)$ игрока 1. Для этого на координатной плоскости для каждого из n столбцов мы рисуем линию: на первой оси ($x = 0$) откладываем число из второй строки матрицы игры, а на второй оси ($x = 1$) — число из первой строки. Затем строим график функции $f(x)$ выигрышей игрока 1 как *нижнюю огибающую* построенного семейства прямых. Находим точку x^0 максимума функции $f(x)$ и вычисляем цену игры $v(A) = f(x^0)$. Активными стратегиями игрока 2 являются те стратегии, которые соответствуют линиям, пересекающимся в точке x^0. Выберем любые две активные стратегии и построим усеченную матрицу A, удаляя из исходной матрицы игры все столбцы кроме двух, которые соответствуют выбранным активным стратегиям. Решая усеченную игру размера 2×2, определим ненулевые компоненты оптимальной стратегии игрока 2.

1.5.4. Сведение матричной игры к задаче ЛП

В данном разделе будет получен алгоритмически самый важный результат в теории матричных игр: решение матричной игры в смешанных стратегиях сводится к решению пары двойственных задач линейного программирования (ЛП).

Рассмотрим матричную игру с $m \times n$-матрицей A выигрышей первого игрока. Игрок 1 найдет свою оптимальную стратегию p^0, решая задачу (1.34) максимизации кусочно-линейной вогнутой функции $f(p) = \min_{1\leq j\leq n} p^T A\mathrm{e}_j$ на симплексе Σ_m. Задача (1.34) эквивалентна задаче ЛП, в которой в подграфике функции $f(p)$ ищется точка (p^0, v^0) с максимальной координатой $v^0 = f(p^0)$:



$$\begin{aligned} &v \to \max, \\ &p^T A\mathrm{e}_j - v \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\ &p \in \Sigma_m, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &v \to \max, \\ &\sum_{i=1}^m a_{ij} p_i - v \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\ &\sum_{i=1}^m p_i = 1, \\ &p_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Аналогично, игрок 2 найдет свою оптимальную стратегию q^0, решая задачу (1.35) минимизации кусочно-линейной выпуклой функции $g(q) = \max_{1\leq i\leq m} \mathrm{e}_i^T Aq$ на симплексе Σ_n. Задача (1.35) эквивалентна ЛП, в которой в надграфике функции $g(q)$ ищется точка (v^0, q^0) с минимальной координатой $v^0 = g(q^0)$:

$$\begin{aligned} &v \to \min, \\ &\sum_{j=1}^n a_{ij}\, q_j - v \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ &\sum_{j=1}^n q_j = 1, \\ &q_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Следующая тривиальная лемма позволит нам несколько упростить задачи (1.36) и (1.37).

Лемма 1.1. *Пусть матрица A^a получена добавлением к каждому элементу матрицы A числа a. Тогда $E_{A^a}(p,q) = E_A(p,q) + a$ для любых смешанных стратегий $p \in \Sigma_m$ и $q \in \Sigma_n$.*

Из леммы 1.1 следует, что матричные игры с матрицами A и A^a эквивалентны в том смысле, что они имеют одинаковые оптимальные стратегии. Поэтому в дальнейшем, без ограничения общности, будем считать, что

$$\boxed{\text{нижняя чистая цена игры положительна, т. е. } \alpha(A) > 0.}$$

В таком случае переменная v в задачах (1.36) и (1.37) — также положительна. Сделаем следующую замену переменных:

$$y_i = \frac{p_i}{v}, \quad i = 1, \dots, m; \quad x_j = \frac{q_j}{v}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{1.38}$$

Так как

$$\frac{1}{v} = \sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j\,, \tag{1.39}$$

то задачи (1.36) и (1.37) эквивалентны соответственно задачам

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{m} y_i \to \min,\\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge 1, \quad j = 1, \dots, n,\\ y_i \ge 0, \quad i = 1, \dots, m,\end{gathered} \tag{1.40}$$

и

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n} x_j \to \max,\\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le 1, \quad i = 1, \dots, m,\\ x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n.\end{gathered} \tag{1.41}$$

Заметим, что задачи (1.40) и (1.41) двойственны друг другу. Итак мы доказали следующую теорему.

Теорема 1.7. *Решение матричной игры эквивалентно решению пары двойственных задач ЛП.*

Суммируя сказанное выше, мы формулируем

Алгоритм решения матричной игры:

1. Вычисляем нижнюю $\alpha(A)$ и верхнюю $\beta(A)$ чистую цену игры. Если $\alpha(A) = \beta(A)$, то записываем все ситуации равновесия в чистых стратегиях и заканчиваем. В противном случае ($\alpha(A) < \beta(A)$) переходим к поиску ситуации равновесия в смешанных стратегиях.
2. Если $\alpha(A) \leq 0$, то полагаем $a = -\alpha(A) + 1$, в противном случае полагаем $a = 0$. Прибавляем a ко всем элементам матрицы A. Решаем любую из задач ЛП (1.40) или (1.41) и находим их оптимальные решения x^* и y^*.
3. Вычисляем $\bar{v} = 1/\sum_{j=1}^{n} x_j^* = 1/\sum_{i=1}^{m} y_i^*$, а затем определяем цену исходной игры $v(A) = \bar{v} - a$ и оптимальные стратегии игроков $p^0 = \bar{v}y^*$ и $q^0 = \bar{v}x^*$.

Продемонстрируем работу данного алгоритма на примере.

Пример 1.7 (планирование посева). *Фермеру необходимо определить, в каких пропорциях засеять свое поле тремя культурами, если урожайность этих культур, а, значит, и прибыль, зависят от того, каким будет лето: прохладным и дождливым, нормальным, или жарким и сухим. Фермер подсчитал чистую прибыль с 1 га от разных культур в зависимости от погоды:*

	прохладное и дождливое	*нормальное*	*жаркое и сухое*	
Культура 1	0	2	5	0
Культура 2	2	3	1	$\underline{1}$
Культура 3	4	3	−1	−1
	4	$\underline{3}$	5	

Решение. Здесь у фермера нет реального противника. Но, если фермер планирует свою деятельность в расчете на наихудшие погодные условия, то можно считать Природу активным субъектом, который пытается создать наихудшую (с точки зрения фермера) погоду. В таком случае, мы можем смоделировать задачу фермера как матричную игру, в которой фермер является игроком 1, а Природа — игроком 2. Матрица A выигрышей в данной игре — это таблица доходов фермера.

Поскольку нижняя чистая цена данной игры $\alpha(A) = 1$ меньше верхней чистой цены $\beta(A) = 3$, то игра не имеет решения в чистых стратегиях. Решим игру в смешанных стратегиях. Поскольку $\alpha(A) = 1 > 0$, то матрицу A не нужно модифицировать. Запишем задачу ЛП (1.41):

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 &\to \max \\ 2x_2 + 5x_3 &\le 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 &\le 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 1x_3 &\le 1, \\ x_1\,,\ x_2\,,\ x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

Решим эту задачу симплекс-методом, все симплекс-таблицы в порядке следования приводятся ниже.

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отн.
z	0	1	1	1	0	0	0	
x_4	1	0	2	5	1	0	0	∞
x_5	1	2	3	1	0	1	0	$\frac{1}{2}$
x_6	1	4	3	-1	0	0	1	$\frac{1}{4}$

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отн.
z	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	
x_4	1	0	2	5	1	0	0	$\frac{1}{5}$
x_5	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
x_1	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	∞

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Отн.
z	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	
x_3	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	0	
x_5	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{9}{10}$	0	$-\frac{3}{10}$	1	$-\frac{1}{2}$	
x_1	$\frac{3}{10}$	1	$\frac{17}{20}$	0	$\frac{1}{20}$	0	$\frac{1}{4}$	

Двойственное оптимальное решение (теневые цены) этой задачи есть вектор $y^0 = (1/4, 0, 1/4)^T$. Найдем цену игры из условия (1.39):

$$v(A) = \frac{1}{y_1^0 + y_2^0 + y_3^0} = \frac{1}{1/4 + 1/4} = 2.$$

Значит, оптимальная стратегия игрока 1 (фермера) есть вектор $p^0 = (1/2, 0, 1/2)^T$.

Этот пример нам интересен тем, что здесь смешанная стратегия допускает иную, более естественную, интерпретацию. Она рекомендует фермеру засеять половину своего поля культурой 1, а другую половину — культурой 3. При этом, при любой погоде доход фермера не будет меньшим цены $v(A) = 2$ данной игры. □

1.6. Биматричные игры

Конечная бескоалиционная игра двух игроков называется *биматричной игрой*. Пусть первый игрок имеет m стратегий, а второй — n стратегий. Выигрыши первого и второго игроков задаются матрицами

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}\,, \quad B = [b_{ij}]_{m\times n}\,.$$

Если первый игрок применяет стратегию i, а второй — стратегию j, то первый игрок выигрывает a_{ij}, а второй — b_{ij}.

Пара стратегий (i_0, j_0) является *ситуацией равновесия* (*в чистых стратегиях*) в биматричной игре, если выполняются неравенства

$$\begin{aligned} a_{i_0,j_0} &\geq a_{i,j_0}, \quad i = 1,\ldots,m,\\ b_{i_0,j_0} &\geq b_{i_0,j}, \quad j = 1,\ldots,n. \end{aligned}$$

Все ситуации равновесия в чистых стратегиях можно найти способом, который аналогичен способу, которым мы определяли седловые точки матрицы. В каждом столбце матрицы A пометьте звездочкой максимальные элементы. Затем пометьте звездочкой максимальные элементы в каждой строке матрицы B. И наконец, запишите все пары стратегий (i, j), такие, что оба элемента a_{ij} и b_{ij} отмечены звездочкой. Все эти пары являются ситуациями равновесия.

1.6.1. Классификация бескоалиционных игр

В теории бескоалиционных игр исторически сложилась своеобразная классификация игр, основанная на сравнение исходов в заданной игре, с исходами в одной из «эталонных» биматричных игр размера 2×2. Так, например, если в какой-то бескоалиционной игре имеется несколько неравноценных для всех игроков ситуаций равновесия, то говорят что эта игра есть игра типа «конфликт полов». В этом разделе рассматриваются наиболее известные из таких «эталонных» биматричных игр.

Пример 1.8 (дилемма заключенного). *Два бандита в отдельных камерах ожидают суда по подозрению в тяжком преступлении. Прокурор, имея доказательства в совершении подозреваемыми незначительного проступка* (1 *год тюрьмы*), *предлагает каждому из бандитов признаться в совершении тяжкого преступления. За признание обещено освободить из тюрьмы, но напарник будет осужден к* 20 *годам тюрьмы. Если признаются оба бандита, то получат по* 5 *лет тюрьмы.*

Решение. В данной игре участвуют два игрока: игрок 1 — это бандит 1, игрок 2 — бандит 2. Их выигрыши представлены в следующей таблице:

	Призн.	*Не призн.*
Призн.	$-5^*, -5^*$	$0^*, -20$
Не призн.	$-20, 0^*$	$-1, -1$

Здесь и далее обе матрицы выигрышей игроков, A и B, объединены в одну таблицу, в ячейке (i, j) которой записана пара чисел a_{ij}, b_{ij}.

Ситуация равновесия в этой игре единственная — обоим бандитам признаться и получить по пять лет тюрьмы. Заметим, что данная ситуация является доминирующим равновесием, поскольку для обоих игроков стратегия «признаться» доминирует стратегию «не признаться». Но это не самый лучший исход для игроков: если оба бандита не признаются, то каждый получит только один год тюрьмы. Но такой исход не является ситуацией равновесия, поскольку у каждого из бандитов остается искушение признаться и избежать тюрьмы. □

Сходная ситуация возникает, когда две фирмы (игроки 1 и 2), конкурирующие на одном рынке, продают свои товары по одинаковой цене. Каждая фирма намеревается снизить цены с целью захвата большей доли рынка и увеличения своей прибыли. Возможные выигрыши фирм представлены в следующей таблице:

	Сохранение цен	*Снижение цен*
Сохранение цен	$3, 3$	$1, 4^*$
Снижение цен	$4^*, 1$	$2^*, 2^*$

Мы видим, что данная игра совершенно аналогична игре «дилемма заключенного»: в ней есть ситуация, которая для обоих игроков лучше ситуации равновесия.

Пример 1.9 (ястребы и голуби). *Если оба Шарон и Арафат*[8] *будут ястребами (проводить воинственную политику), то они ничего не добьются. Если они будут голубями (проводить миролюбивую политику), то выигрыш каждого оценивается в 2 единицы. В противостоянии ястреба и голубя ястреб выигрывает 3 единицы, а голубь только единицу.*

Решение. Пусть Шарон — это игрок 1, а Арафат — игрок 2. Выигрыши игроков представлены в следующей таблице:

	Ястреб	*Голубь*
Ястреб	$0, 0$	$3^*, 1^*$
Голубь	$1^*, 3^*$	$2, 2$

Здесь две неравноценные для игроков ситуации равновесия, в которых один из игроков *Ястреб*, а другой *Голубь*. В каждой из этих ситуаций *Голубь* может *угрожать* стать *Ястребом*. При этом инициатор угрозы (*Голубь*) потеряет меньше: одну единицу против двух у оппонента (*Ястреба*). Наличие такой угрозы может побудить игроков к кооперации, поскольку в игре имеется неравновесная ситуация (*Голубь*,*Голубь*), в которой сумма выигрышей игроков такая же, как и в обоих ситуациях равновесия. □

Пример 1.10 (конфликт полов). *Муж и жена планируют вместе провести выходной, муж хотел бы пойти на футбол, а жена — на балет. Кроме того, они предпочитают провести свободное время вместе. Выигрыши игроков (муж — игрок 1, а жена — игрок 2) представлены в следующей таблице:*

	Футбол	*Балет*
Футбол	$2^*, 1^*$	$0, 0$
Балет	$0, 0$	$1^*, 2^*$

Решение. В данной игре имеется две ситуации равновесия в чистых стратегиях, когда муж и жена идут вместе либо на футбол, либо на балет. Заметим, что эти ситуации неравноценны для игроков. Позже мы покажем, что в данной игре имеется еще одна ситуация равновесия, но уже в смешанных стратегиях.

[8] А. Шарон и Я. Арафат — это бывшие лидеры Израиля и Палестины.

Эта игра во многом схожа с игрой «ястребы и голуби», но в ней меньше возможностей для кооперации, поскольку здесь нет неравновесной ситуации, приемлемой для обоих игроков. Следует также отметить, что возможности договориться существуют и в игре «конфликт полов», но для этого данную игру нужно рассматривать как многораундовую. □

Пример 1.11 (координация по Паретто). *Если теноры и сопрано в хоре поют в одном ключе A, то хор поет прекрасно. Если все поют в ключе B, то хор поет удовлетворительно (в два раза хуже). Но если теноры и сопрано поют в разных ключах, то хор не поет совсем.*

Решение. Выигрыши игроков (теноры — игрок 1, а сопрано — игрок 2) представлены в следующей таблице:

	A	B
A	$2^*, 2^*$	$0, 0$
B	$0, 0$	$1^*, 1^*$

В данной игре имеется две ситуации равновесия в чистых стратегиях, когда теноры и сопрано поют в одном ключе. Причем здесь ситуация (A, A) предпочтительнее для обоих груп певцов и является *оптимальной по Парето*[9]. □

Пример 1.12 (координация). *Если два теннисиста тренируются по одному (из двух) плану, то они выиграют парный теннисный турнир. Но если они придерживаются разных тренировочных планов, то они проиграют турнир.*

Решение. Выигрыши игроков (теннисист 1 — игрок 1, теннисист 2 — игрок 2) представлены в следующей таблице:

	План 1	*План 2*
План 1	$1^*, 1^*$	$0, 0$
План 2	$0, 0$	$1^*, 1^*$

[9] В экономике оптимальным по Парето называется такое распределение доходов индивидуумов, когда не существует друго распределения, которое увеличивает доход хотя бы одного индивидуума, не уменьшая доходы остальных индивидуумов.

В данной игре имеется две равноценные ситуации равновесия, когда оба теннисиста придерживаются одного тренировочного плана. Но игрокам нужно согласовать друг с другом, по какому плану им тренироваться. Заметим, что в игре «координация по Паретто» теноры и сопрано без согласований могут решить, в каком ключе им лучше петь хором. □

1.6.2. Смешанные стратегии

Обычно смешанные стратегии применяют в двух случаях:

1) не существует равносия в чистых стратегиях;
2) смешанная стратегия доминирует чистые стратегии.

Пусть $p = (p_1, \ldots, p_m)^T$ и $q = (q_1, \ldots, q_n)^T$ — смешанные стратегии соответственно первого и второго игроков. Тогда средние выигрыши первого и второго игроков соответственно равны

$$\begin{aligned} \phi_1(A,p,q) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i\, q_j = p^T Aq, \\ \phi_2(B,p,q) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, p_i\, q_j = p^T Bq. \end{aligned} \tag{1.42}$$

В силу теоремы 1.5 пара смешанных стратегий (p, q) составляет ситуацию равновесия в биматричной игре тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j &\le \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l, \quad i = 1, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^{m} b_{ij} p_i &\le \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{kl}\, p_k\, q_l, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Значит для определения ситуации равновесия необходимо решить систему неравенств (1.43) с неизвестными p и q при условиях

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \\ &p_i \ge 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ &q_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Теорема 1.8 (условия дополняющей нежесткости). *Все решения (p, q) системы неравенств (1.43) и (1.44) удовлетворяют следующим условиям:*

$$p_i \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{1.45}$$

$$q_j \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} b_{kl}\, p_k\, q_l - \sum_{i=1}^{m} b_{ij} p_i \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{1.46}$$

Доказательство. Сложив m левых частей равенств (1.45), каждая из которых неотрицательна в силу (1.43), получим

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right) =$$

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l \right) \sum_{i=1}^{m} p_i - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j =$$

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_k\, q_l - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i\, q_j = 0.$$

Отсюда следует, что и каждое из слагаемых в первой сумме также равно нулю. Это доказывает (1.45). Условие (1.46) доказывается аналогично. □

1.6.3. Уровни безопасности

Независимо от действий второго игрока первый игрок может гарантировать себе средний выигрыш v_1 равный цене матричной игры с матрицей A. Аналогично, независимо от действий первого игрока второй игрок может гарантировать себе средний выигрыш v_2 равный цене матричной игры с матрицей B^T. Здесь мы транспонировали матрицу B^T, поскольку в матричной игре, игрок, который максимизирут свой выигрыш, в качестве своей стратегии выбирает строку матрицы выигрышей. Переходя к матрице B^T, мы меняем игроков местами: игрок 1 в биматричной игре будет игроком 2 в матричной игре, а игрок 2 в биматричной игре будет игроком 1 в матричной игре. Числа $v_1 = v(A)$ и $v_2 = v(B^T)$ называются *уровнями безопасности* игроков.

Пример 1.13. *Нужно определить уровни безопасности игроков в игре «конфликт полов».*

Решение. Цену игры и оптимальную стратегию $p^0 = (x, 1-x)^T$ игрока 1 в матричной игре, заданной матрицей $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, найдем из равенства

$$v_1 = 2x + 0(1-x) = 0x + 1(1-x).$$

Отсюда $x = 1/3$, $v_1 = 2/3$ и $p^0 = (1/3, 2/3)^T$.

Аналогично, цену игры и оптимальную стратегию $q^0 = (y, 1-y)^T$ игрока 1 в матричной игре (игрока 2 в биматричной игре), заданной матрицей $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, найдем из равенства

$$v_2 = 1y + 0(1-y) = 0y + 2(1-y).$$

Отсюда $y = 2/3$, $v_2 = 2/3$ и $q^0 = (2/3, 1/3)^T$.

Как мы видели ранее, в данной игре имеются две ситуации равновесия в чистых стратегиях, когда муж и жена проводят свободное время вместе, с выигрышем не меньшим единицы для каждого из игроков. Пара стратегий (q^0, p^0), когда муж применяет безопасную стратегию жены, а жена — безопасную стратегию мужа, также образует ситуацию равновесия (вы можете убедиться в этом, проверив выполнимость неравенств (1.43)) со средним выигрышем равным $2/3$ для для каждого из игроков. Попробуйте самостоятельно объяснить причину уменьшения выигрышей игроков в сравнении с их выигрышами в ситуациях равновесия в чистых стратегиях. $\square$

1.6.4. Сведение к линейноя задаче о дополнительности

Долгое время считалось, что решение системы (1.43)–(1.44) — это очень трудная задача, для которой вряд ли будет найден эффективный алгоритм решения. Ситуация изменилась в лучшую сторону, после того как К. Лемке изобрел свой алгоритм для решения линейной задачи о дополнительности и применил его к решению биматричных игр[10].

[10] За эти труды К. Лемке в 1978 г. получил премию фон-Неймана.

Линейная задача о дополнительности обобщает задачи линейного и квадратичного программирования, биматричные игры и еще много других задач.

Пусть M есть квадратная матрица размера n, а вектор $q \in \mathbb{R}^n$. В *линейной задаче о дополнительности* (*ЛЗД*) нужно найти векторы $w, z \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} w - Mz &= q, \\ w^T z &= 0, \\ w, z &\geq 0. \end{aligned} \tag{1.47}$$

В силу неотрицательноыти переменных $w_i, z_i \geq 0$, равенство

$$w^T z = \sum_{i=1}^{n} w_i z_i = 0$$

эквивалентно системе

$$w_i z_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

которая требует, чтобы из каждой *дополняющей пары* переменных (w_i, z_i) хотя бы одна из двух переменных была равна нулю.

Алгоритм Лемке

Задачу (1.47) можно решить симплекс-подобным алгоритмом, предложенным К. Лемке[11]. Допустимый базис для (1.47), в котором базисной является точно одна переменная из каждой дополняющей пары (w_j, z_j), называется *дополняюще-допустимым*. Алгоритм начинает работу с почти дополняюще-допустимого базиса (это понятие варьируется в зависимости от решаемой задачи) и заканчивает работу, как только будет получен дополняюще-допустимый базис. На каждой итерации, за исключением тех, на которых строится начальный почти дополняюще-допустимый базис, вычисления проводятся по следующим правилам:

а) (*правило о дополнительности*) в базис всегда вводится дополнение переменной, покинувшей базис на предыдущей итерации;

б) выбор переменной, покидающей базис, и пересчет таблицы осуществляются по тем же правилам, что и в симплекс-методе.

[11] Наиболее доступным источником, где детально изучается алгоритм Лемке, является следующая книга: R.G. Murty, Feng-Tien Yu. Linear complementarity, linear and nonlinear programming (Internet Edition) (1997) *http://ioe.engin.umich.edu/people/fac/books/murty/linear_complementarity_webbook*

Решение биматричных игр в смешанных стратегиях

Рассмотрим биматричную игру с матрицей A выигрышей первого игрока и матрицей B выигрышей второго игрока. Обе матрицы размера $m \times n$. Пара смешанных стратегий $p \in \Sigma_m$ и $q \in \Sigma_m$ образует ситуацию равновесия Нэша тогда и только тогда, когда выполняются неравенства (1.43), которые в векторной форме записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}_i^T A q &\le p^T A q, \quad i = 1, \dots, m, \\ p^T B \mathrm{e}_j &\le p^T B q, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Теперь представим эти неравенства в матричной форме:

$$\begin{aligned} Aq &\le (p^T A q) 1_m \,, \\ B^T p &\le (p^T B q) 1_n, \end{aligned}$$

где 1_k — это вектор размера k, все компоненты которого равны 1.

Вводя переменные недостатка $s \in \mathbb{R}_+^m$ и $t \in \mathbb{R}_+^n$, перепишем последнюю систему неравенств как систему уравнений

$$\begin{aligned} Aq + s &= (p^T A q) 1_m \,, \\ B^T p + t &= (p^T B q) 1_n. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Заметим, что в терминах переменных недостатка условия дополняющей нежесткости (1.45) и (1.46) записываются как равенства $p^T s = 0$ и $q^T t = 0$.

Предположив, что матрицы A и B отрицательны ($a_{ij} < 0$ и $b_{ij} < 0$ для $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$), разделим равенства (1.48) соответственно на положительные числа $-p^T A q$ и $-p^T B q$:

$$\begin{aligned} A \left(\frac{1}{-p^T A q}\, q \right) + \frac{s}{-p^T A q} &= -1_m, \\ B^T \left(\frac{1}{-p^T B q}\, p \right) + \frac{t}{-p^T B q} &= -1_n. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Вводя новые переменные

$$x = \frac{p}{-p^T B q}, \quad y = \frac{q}{-p^T A q}, \quad u = \frac{s}{-p^T A q}, \quad v = \frac{t}{-p^T B q},$$

перепишем равенства (1.49) в следующем виде

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1_m \\ -1_n \end{pmatrix}. \tag{1.50}$$

Условия дополняющей нежесткости $p^T s = 0$ и $q^T t = 0$ в переменных x, y, u, v переписываются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0. \tag{1.51}$$

Задача поиска неотрицательного решения u, v, x, y системы (1.50) и (1.51) является линейной задачей о дополнительности, которую можно решить алгоритмом Лемке. При этом, начальная симплекс-таблица имеет следующий вид:

Базис	q	u	v	x	y	Отношения
u	$-\mathbf{1}_m$	I_n	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	A	
v	$-\mathbf{1}_n$	$\mathbf{0}$	I_m	B^T	$\mathbf{0}$	

Продемонстрируем работу алгоритма Лемке на численном примере.

Пример 1.14. *Решить биматричную игру со следующими исходными данными:*

$$\begin{bmatrix} -1, 1^* & 0^*, -1 & 0^*, 0 \\ 0^*, 0 & -1, 1^* & -1, -1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Сначала заметим, что в рассматриваемой игре нет ситуаций равновесия в чистых стратегиях. Будем искать равновесие в смешанных стратегиях.

Отняв 1 от всех выигрышей игрока 1 и 2 от всех выигрышей игрока 2, получим эквивалентную игру со следующими матрицами выигрышей игроков:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Для нашего примера начальная сиплекс-таблица следующая.

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	-1	1	0	0	0	0	0	0	-2	-1	-1	
u_2	-1	0	1	0	0	0	0	0	-1	-2	-2	
v_1	-1	0	0	1	0	0	-1	-2	0	0	0	1 max
v_2	-1	0	0	0	1	0	-3	-1	0	0	0	$\frac{1}{3}$
v_3	-1	0	0	0	0	1	-2	-3	0	0	0	$\frac{1}{2}$

Начнем с построения начального почти дополняюще-допустимого базиса, который в данном случае должен удовлетворять следующим свойствам: обе переменные точно одной дополняющей пары принадлежат и точно одной пары не принадлежат базису, а для всех остальных пар ровно одна их переменная находится в базисе.

Сначала введем в базис переменную x_1, а из базиса выведем переменную v_1, поскольку максимальный ненулевой элемент стобца x_1 находится в третьей строке, которая соответствует базисной переменной v_1.

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	-1	1	0	0	0	0	0	0	-2	-1	-1	$\frac{1}{2}$
u_2	-1	0	1	0	0	0	0	0	-1	-2	-2	1 max
x_1	1	0	0	-1	0	0	1	2	0	0	0	
v_2	2	0	0	-3	1	0	0	5	0	0	0	
v_3	1	0	0	-2	0	1	0	1	0	0	0	

Далее, переменная y_1 (дополнение покинувшей базис переменной v_1) должна заменить в базисе переменную u_2.

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	1	1	-2	0	0	0	0	0	0	3	3	
y_1	1	0	-1	0	0	0	0	0	1	2	2	
x_1	1	0	0	-1	0	0	1	2	0	0	0	$\frac{1}{2}$
v_2	2	0	0	-3	1	0	0	5	0	0	0	$\frac{2}{5}$ min
v_3	1	0	0	-2	0	1	0	1	0	0	0	$\frac{1}{1}$

После начальных двух итераций мы построили почти дополняюще-допустимый базис. С этого момента выбор переменной, которая должна покинуть базис, выполняется по правилам симплекс-метода.

Продолжим решение нашего примера. Теперь вводим в базис переменную y_2 (дополнение u_2), а из базиса выводим v_2.

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
u_1	1	1	-2	0	0	0	0	0	0	3	3	$\frac{1}{3}$ min
y_1	1	0	-1	0	0	0	0	0	1	2	2	$\frac{1}{2}$
x_1	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	1	0	0	0	0	
x_2	$\frac{2}{5}$	0	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	1	0	0	0	
v_3	$\frac{3}{5}$	0	0	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	0	0	0	0	0	

Поскольку переменная v_2 покинула базис, то ее дополнение y_2 теперь нужно вводить в базис, а из базиса выводить u_1.

Базис	q	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Отношения
y_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	0	0	0	0	1	1	
y_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0	1	0	0	
x_1	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	1	0	0	0	0	
x_2	$\frac{2}{5}$	0	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	1	0	0	0	
v_3	$\frac{3}{5}$	0	0	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	0	0	0	0	0	

По правилу о дополнительности в базис нужно вводить переменную x_1 (дополнение u_1), но x_1 уже находится в базисе. Это означает, что текущий базис является дополняюще-допустимым. Поэтому вектор

$$(u_1, u_2; v_1, v_2, v_3; x_1, x_2; y_1, y_2, y_3)^T = (0, 0; 0, 0, 3/5; 1/5, 2/5; 1/3, 1/3, 0)^T$$

есть решение ЛЗД (**??**). Поскольку $x_1 + x_2 = 3/5$ и $y_1 + y_2 + y_3 = 2/3$, то

$$p^0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^m x_i} x = \frac{5}{3} \cdot (1/5, 2/5)^T = (1/3, 2/3)^T$$

и

$$q^0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^m y_i} y = \frac{3}{2} \cdot (1/3, 1/3, 0)^T = (1/2, 1/2, 0)^T$$

образуют пару равновесных стратегий для рассматриваемой игры.

1.6.5. Сведение к задаче целочисленного программирования

Задача поиска равновесия в биматричной игре является **PPAD**-полной. Хотя **PPAD**-полнота какой-либо вычислительной проблемы и не является столь же сильным свидетельством ее трудноразрешимости каким является **NP**-полнота, имеются причины полагать (см. [9]), что вряд ли когда-либо будет разработан эффективный (полиномиальный) алгоритм для поиска равновесия в биматричной игре. Поэтому неудивительно, что имеются примеры биматричных игр, при решении которых алгоритм Лемке выполняет экспоненциально большое (от $m+n$) число итераций. Кроме этого, компьютерные программы, которые решают линейную задачу о дополнительности, все еще являются экзотикой. В противоположность этому, программы для решения задач смешанно-целочисленного программирования широко распространены, и они постоянно совершенствуются. В этом разделе мы запишем задачу решения биматричной игры как задачу *смешанно-целочисленного программирования* (СЦП).

Рассмотрим *биматричную игру*, в которой выигрыши первого и второго игроков задаются соответственно матрицами $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m\times n}$. Пара векторов $(p,q) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ есть ситуация равновесия в смешанных стратегиях, если она удовлетворяет системе ограничений (1.43), (1.44).

Исходя из условий дополняющей нежесткости (1.45) и (1.46), нетрудно убедиться, что нелинейная система (1.43), (1.44) эквивалентна следующей смешанно-целочисленной системе неравенств:

$$p_i \le x_i, \quad i = 1,\dots,m, \tag{1.52a}$$

$$0 \le v_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le U_1(1 - x_i)\,, \quad i = 1,\dots,m, \tag{1.52b}$$

$$q_j \le y_j, \quad j = 1,\dots,n, \tag{1.52c}$$

$$0 \le v_2 - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \le U_2(1 - y_j)\,, \quad j = 1,\dots,n, \tag{1.52d}$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \tag{1.52e}$$

$$p_i \ge 0,\ x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,\dots,m, \tag{1.52f}$$

$$q_j \ge 0,\ y_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,\dots,n, \tag{1.52g}$$

$$v_1, v_2 \ge 0, \tag{1.52h}$$

где

$$U_1 = \max_{\substack{1\le i\le m,\\ 1\le j\le n}} a_{ij} - \min_{\substack{1\le i\le m,\\ 1\le j\le n}} a_{ij}, \qquad U_2 = \max_{\substack{1\le i\le m,\\ 1\le j\le n}} b_{ij} - \min_{\substack{1\le i\le m,\\ 1\le j\le n}} b_{ij},$$

а дополнительные переменные имеют следующий смысл:

- v_1, v_2 — выигрыши соответственно первого и второго игроков;
- $x_i = 1$, если стратегия i игрока 1 является активной (используется с положительной вероятностью $p_i > 0$), и $x_i = 0$ в противном случае;
- $y_j = 1$, если стратегия j игрока 2 является активной (используется с положительной вероятностью $q_j > 0$), и $y_j = 0$ в противном случае.

Самое важное преимущество СЦП-модели в том, что выбором целевой функции мы можем искать равновесие, удовлетворяющее дополнительным требованиям. Например, чтобы найти равновесие, для которого максимален минимальный из выигрышей игроков (эта задача является **NP**-трудной), нужно ввести еще одну переменную v и приписать к системе (1.52) следующие целевую функцию и два ограничения:

$$v \to \max,$$
$$v_1 \geq v,\ v_2 \geq v.$$

1.7. Упражнения

1.1. Найдите все ситуации равновесия в бескоалиционной игре трех лиц, если каждый из игроков имеет две стратегии, а платежи определяются по правилу:

Если игрок 1 выбирает стратегию 1				Если игрок 1 выбирает стратегию 2			
		Игрок 3:				Игрок 3:	
		1	2			1	2
Игрок 2:	1	(1,2,1)	(3,0,1)	Игрок 2:	1	(-1,2,4)	(1,0,3)
	2	(-1,6,-3)	(3,2,1)		2	(7,5,4)	(3,2,1)

1.2. Группа из $n = 2k$ студентов играет в следующую игру. Студент i (игрок i) выбирает неотрицательное число $x_i \in \mathbb{R}_+$ и подает преподавателю записку, в которой указан номер i игрока и число x_i. Преподаватель случайным образом тасует эти записки, а затем формирует k пар записок. Если в одну пару попали записки игроков i и j, то тот из них, чье число ближе к величине $(x_i + x_j)/3$ получает 100, а его оппонент по паре получает 25; если $x_i = x_j$, оба студента получают по 50.

Найдите ситуацию равновесия Нэша.

1.3. Фермеры (n человек) пасут своих коров на общем пастбище. Если на пастбище пасется X коров, то за сезон одна корова дает $a - bX$ ($a > 10b > 0$) литров молока. Стоимость литра молока равна 1. Расходы за сезон на содержание одной коровы равны c, $a > c$.

Сколько коров должен иметь каждый из фермеров, чтобы его прибыль была максимальной?

1.4. Две фирмы, производящие взаимозаменяемые продукты, конкурируют на одном рынке. Переменные издержки (стоимость производства единицы продукта) фирмы 1 равны c_1, а фирмы 2 — c_2. Если p_1, p_2 есть цены продуктов соответственно фирмы 1 и фирмы 2, то спрос на продукт фирмы 1 равен $a - bp_1/p_2$, а фирмы 2 — $a - bp_2/p_1$.

При каких соотношениях между параметрами a, b, c_1, c_2 существует равновесие в модели дуополии Бертрана.

1.5. На однопродуктовом рынке конкурируют две фирмы. Емкость рынка Q. Прибыль фирмы k от реализация единицы продукта равна p_k, $k = 1, 2$. Предположим, что доля каждой фирмы на рынке зависит от суммы, которую эта фирма тратит на рекламу. Так, если фирма k ($k = 1, 2$) тратит на рекламу x_k, то ее доля на рынке равна $Qx_k/(x_1 + x_2)$, а ее чистая прибыль определяется по формуле:

$$\phi_k(x_1, x_2) = p_k \, \frac{Qx_k}{x_1 + x_2} - x_k \, .$$

Если обе фирмы не рекламируют свою продукцию, то рынок делится пополам между фирмами.

Представьте данную ситуацию как бескоалиционную игру и найдите ситуацию равновесия.

1.6. Каждый из двух игроков владеет половиной некоторой фирмы. Игрок 1 считает, что фирма стоит v_1, а игрок 2 считает, что фирма стоит v_2, причем, $v_1 > v_2 > 0$. Игроки решили прекратить сотрудничать и согласовали следующую процедуру продажи одним игроком своей доли фирмы другому игроку. Сначала игрок 1 объявляет свою цену p за половину фирмы. Затем игрок 2 решает, следует ли ему за данную сумму p продать игроку 1 свою половину фирмы, или за эту же сумму p купить половину фирмы у игрока 1. Если игрок 2 решает продать свою долю, игрок 1 платит игроку 2 сумму p и становится владельцем фирмы. При этом, выигрыш игрока 1 равен $v_1/2 - p$, а игрок 2 выигрывает $p - v_2/2$. Если игрок 2 решает купить половину фирмы у игрока 1, то он платит игроку 1 сумму p и становится владельцем фирмы. При этом, выигрыш игрока 1 равен $p - v_1/2$, а игрок 2 выигрывает $v_2/2 - p$.

Найдите ситуацию равновесия Нэша.

1.7. Покупатель (игрок 3) может купить некий товар, который он оценивает в 7 единиц, у одного из двух продавцов (игроков 1 и 2). Каждый продавец может назначить за свой товар либо высокую цену, равную 6, либо низкую цену, равную 4. Чтобы узнать и сравнить цены, покупатель должен заплатить небольшую плату c, где $c < 1/2$. Зная цены, покупатель купит товар у того продавца, который назначил наименьшую цену; в случае равенства цен покупатель выбирает продавца, подбрасывая монету. Покупатель может также и не узнавать цен (не тратить сумму c), а сразу выбирать продавца, подбрасывая монету.

Найдите равновесие Нэша в смешанных стратегиях, когда

- покупатель применяет стратегию $(x, 1-x)$, где x — это вероятность с которой покупатель будет узнавать цены;
- оба продавца применяют одинаковую стратегию $(y, 1-y)$, где y — это вероятность назначить высокую цену.

1.8. **Загрязнение окружающей среды**. Каждая из n стран может осуществлять мероприятия стоимостью 3 единицы по сокращению вредных выбросов в атмосферу, или не осуществлять. Если k стран не борются с загрязнением, то каждая из n стран вынуждена тратить дополнительно k единиц на борьбу с последствиями загрязнения.

Сравните две ситуации, в первой из которых ни одна страна не борется с загрязнением, а во второй все страны борются с загрязнением. Какая из этих ситуаций является ситуацией равновесия? Какую биматричную игру напоминает данная игра?

1.9. Лиса спряталась в норе, из которой имеется пять выходов, расположенных в линию, как показано на следующем рисунке.

$$\boxed{1} \quad A \quad \boxed{2} \quad B \quad \boxed{3} \quad C \quad \boxed{4} \quad D \quad \boxed{5}$$

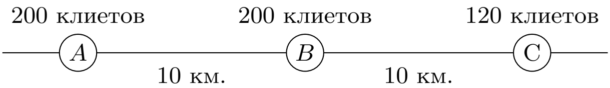
Охотник имеет всего один патрон и может занять одну из четырех позиций A, B, C, D. Охотник дождется, когда лиса вылезет из норы, и убьет ее, если та будет выбираться через смежный от позиции охотника выход. Например, если охотник находится в позиции B, то он убьет лису только тогда, когда та будет вылазить через выходы 2 или 3. Выигрыш охотника равен 1, если он убьет лису, и 0 в противном случае. Выигрыш лисы равен 0, если она спасется, и -1, если она погибнет.

Найдите ситуацию равновесия.

1.10. В одной из двух глубоководных впадин затонули обломки потерпевшего крушение самолета. Для поиска «черных ящиков» выделены три корабля, оснащенные глубоководными аппаратами. Вероятность обнаружения «черных ящиков» одним (любым) кораблем в первой впадине равна 1/2, а во второй — 1/3.

Как нужно распределить корабли по районам поиска, чтобы в наихудшем случае вероятность обнаружения «черных ящиков» была наибольшей.

1.11. Две конкурирующие фирмы решили открыть по одному магазину в деревнях A, B и C. Расстояния между деревнями и количесво жителей в них представлены на следующем рисунке.



Каждый клиент будет делать покупки в ближайшем магазине. При одиковом расстоянии до магазинов, клиент будет их посещать с равной частотой. Каждая из фирм стремится максимизировать число своих клиентов. Где фирмы должны строить магазины?

1.12. Две конкурирующих сети ресторанов хотят определить свой рекламный бюджет на следующий год. Их суммарный объем продаж равен \$240 млн. Каждая из них может выделить на рекламу от \$6 до \$10 млн. Если одна из сетей тратит на рекламу больше другой, то та, что тратит больше, продаст на \$190 млн. Если обе сети тратят на рекламу поровну, то они и продадут поровну. Продажи на \$1 дают доход \$0.1. Каждая сеть стремится максимизировать свой доход (доход с продаж минус расходы на рекламу). Имеется ли ситуация равновесия, приемлемая для обоих конкурентов?

1.13. В городе только два бара. Каждый бар может продавать кружку пива за 2, 3 или 4 доллара. 6000 туристов выбирают бар случайным образом и поэтому половина из них посетит бар 1, а другая — бар 2. 4000 местных жителей идут в бар, где дешевле. При одинаковой цене пива в обоих барах половина местных жителей посетит бар 1, а другая — бар 2. При цене 4 доллара за кружку пива только четверть местных жителей пойдет в бар.

Найдите ситуацию равновесия в биматричной игре, в которой игроками являются два бара.

1.14. Две компьютерные сети, схематично представленные на рис. 1.3, соединены между собой двумя мостами G_1 и G_2. Время пересылки информации между любыми двумя узлами (компьютерами) пропорционально количеству промежуточных узлов (компьютеров) на пути между узлом, посылающим информацию, и узлом, принимающим информа-

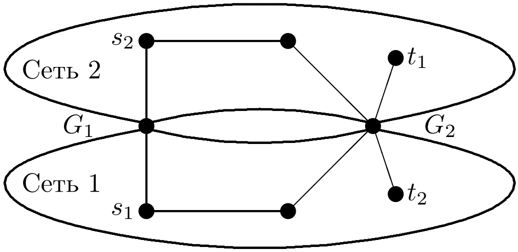


Рис. 1.3. Проблема маршрутизации

цию. Предположим, что узел s_1 сети 1 посылает сообщение узлу t_1 сети 2, а узел s_2 сети 2 — узлу t_2 сети 1. Каждое из этих сообщений можно направить по одному из двух путей. В обоих случаях длина кратчайшего пути равна 3, а длина другого возможного пути передачи сообщения равна 5. Как правило, маршрутизаторы сетей настроены работать по эгоистичному принципу с целью минимизировать трафик в своей сети, т. е. сообщения, идущие в другие сети, всегда направляются через ближайжий от источника мост. Поэтому, оба сообщения из s_1 в t_1 и из s_2 в t_2 будут доставлены через мост G_1 вдоль путей длины 5.

Рассмотрите эту ситуацию как биматричную игру, в которой игроками являются администаторы сетей 1 и 2, у каждого игрока по две стратегии: 1) направить сообщение через мост G_1, 2) направить сообщение через мост G_2. Целью игроков является минимизация суммарного трафика в своих сетях, который для каждого сообщения определяется равным длине пути, по которому передается это сообщение. Постройте матрицы выигрышей игроков. Классифицируйте полученную игру.

1.15. Каждая из двух фирм, Microscape (игрок 1) и Netsoft (игрок 2), теряет 2 млн. долларов за период, если они обе продают интернет-браузеры. Когда у фирмы нет соперника, то она, став монополистом, будет зарабатывать \$10 за период. Фирмы могут уйти с рынка в 1996 (с доходом 0) и в 1997 годах, или остаться до конца 1998 года.

Найдите все ситуации равновесия (в чистых и смешанных стратегиях), если выигрыши игроков (фирм) следующие:

	1996	*1997*	*1998*
1996	0, 0	0, 10	0, 20
1997	10, 0	-2, -2	-2, 8
1998	20, 0	8, -2	-4, -4

.

1.16. Две компании Pepsico (игрок 1) и Coca-Cola (игрок 2) имеют по автомату в некоторой столовой. Каждой из фирм нужно решить, каким напитком заполнить свой автомат: диетическим, классическим, или обоими. В зависимости от выбранных стратегий доходы фирм следующие:

	Диет.	*Оба*	*Классич.*
Диет.	25, 25	50, 30	50, 20
Оба	30, 50	15, 15	30, 20
Классич.	20, 50	20, 30	10, 10

Найдите все ситуации равновесия (в чистых и смешанных стратегиях). Как скоординировать стратегии фирм? Указание: сначала покажите, что для обеих фирм стратегия «классическая» является доминируемой.

1.17. В некоторой фирме сотрудники могут работать прилежно, или бездельничать. Зарплата одного сотрудника равна \$1000. Если сотрудник уличен в отлынивании от работы, то его зарплата уменьшается в четыре раза до \$250. Менеджеры могут контролировать сотрудников или не контролировать. Один хорошо работающий сотрудник производит продукции на \$2000, а лодырь — только на \$500. Стоимость проверки одного сотрудника равна \$100.

Найдите ситуации равновесия в биматричной игре, в которой игроками являются сотрудники и менеджеры.

1.18. Вдоль берега равномерно в пунктах A, B, C, D и E расположены пять спасательных станций. Дети могут отдыхать только в тех местах, где имеются спасательные станции. В каждом из пунктов A, B, C, D и E в течении дня отдыхают 100 детей, каждый из которых покупает по одному мороженому в день.

Два соперничающих продавца (игроки) каждое утро в 10 часов катят свои лотки с мороженым в один из пунктов A, B, C, D или E. Дети всегда идут за мороженым к ближайшему продавцу. При равном расстоянии половина детей покупает мороженое у оного продавца, а оставшаяся половина — у другого. Если в каком-то пункте имеется лоток с мороженым, то все 100 детей, отдыхающих в этом пункте, купят по одному мороженному. Если в пункте нет лотка, то только половина (50) детей пойдут за мороженным в соседний пункт, и лишь каждый пятый (20) ребенок пойдет за мороженным к лотку, расположенному через один пункт от того места, где он находится. Ни один ребенок не пойдет к лоткам, расположенным далее чем в двух переходах от его места отдыха.

Постройте матрицы выигрышей игроков. Имеются ли ситуации равновесия в чистых стратегиях?

1.19. Две фирмы арендуют смежные участки земли над резервуаром нефти объемом 100 млн. тонн. Стоимость одной тонны — \$200. Каждая из фирм должна решить бурить ли ей скважину и, если бурить, то какого размера? Пробурить и обслуживать более узкую скважину стоит \$100 млн., а широкую — \$300 млн. Но при этом в день через широкую скважину будет выкачиваться в три раза больше нефти.

Постройте матрицы выигрышей игроков (фирм). Имеются ли ситуации равновесия в чистых стратегиях?

1.20. Образует ли пара смешанных стратегий $p = (1/4, 1/4, 1/2)^T$ и $q = (1/3, 1/6, 1/2)^T$ ситуацию равновесия в биматричной игре со следующими исходными данными:

$$\begin{bmatrix} 3,1 & -2,0 & 0,6 \\ 2,0 & 0,4 & 8,-2 \\ 0,4 & 6,0 & 2,0 \end{bmatrix}.$$

Указание. Используйте теорему 1.5.

1.21. Найдите ситуации равновесия в биматричных играх со следующими исходными данными:

$$\text{а)} \begin{bmatrix} 1,1 & -1,0 \\ 0,2 & 1,-1 \\ 2,-1 & -2,0 \end{bmatrix}, \qquad \text{б)} \begin{bmatrix} 2,-1 & 1,1 \\ 1,1 & 0,2 \\ -1,1 & 2,0 \end{bmatrix}, \qquad \text{в)} \begin{bmatrix} 0,3 & 4,0 & 3,0 & 2,2 \\ 1,1 & 3,2 & 3,0 & 2,0 \\ 0,2 & 1,0 & 2,3 & 4,0 \\ 1,2 & 2,3 & 4,1 & 2,2 \end{bmatrix}.$$

1.22. **Рациональность и риск**. Рациональное поведение предполагает не только стремление максимизировать свой выигрыш, но оно также предполагает стремление ограничить свои потери, когда что-то пойдет не так, как предполагалось. Какая из двух ситуаций равновесия (в чистых стратегиях) в биматричной игре

$$\begin{bmatrix} 9,9 & -1,8 \\ 8,-1 & 7,7 \end{bmatrix}$$

более рискованна для игроков?

Глава 2
Позиционные игры

Основы теории позиционных игр заложены Х. Куном[12]. Позиционные игры — это многоходовые (или динамические) бескоалиционные игры. В позиционной игре ходы делаются в логической последовательности. Каждый ход делается либо одним из игроков (личный ход), либо выбирается случайным образом (случайный ход) в соответствии с заданным распределением вероятностей. В каждой конечной позиции игры задан вектор выигрышей игроков.

2.1. Дерево игры

Формально, *позиционная игра* (точнее, *конечная бескоалиционная игра в позиционной форме*) представляется *деревом*[13] *игры* $T = (V, E)$, вершины (узлы) $v \in V$ которого соответсвуют *позициям* в игре, а дуги $e \in E$ соответствуют *ходам* в игре. Корень дерева соответствует *начальной позиции* игры. Каждый узел, за исключением листьев, помечен одним из чисел $0, 1, \ldots, n$, указывающим номер игрока, который должен делать ход в данной позиции, 0 означает случайный ход. Дугам (v, w), выходящих из узла v с меткой 0, приписаны вероятности $\rho(v, w)$ применения соответствующих им случайных ходов, $\sum_{(v,w)\in E(v,V)} \rho(v, w) = 1$. Листья дерева T — это *конечные позиции* в игре. Каждому листу t приписан вектор $(\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))^T$ выигрышей игроков, в случае, когда игра заканчивается в данном узле.

Информация в игре задается с помощью информационных множеств.

---

[12] H.W. Kuhn. Extensive Games and the Problem of Information. In *Contributions to the Theory of Games*, eds. Harold W. Kuhn and A. Tucker, Vol. 2, Princeton University Press, 1953, pp. 193–216.

[13] Непонятные термины и обозначения, касающиеся графов, ищите в приложении C.

Две позиции принадлежат одному *информационному множеству*, если игрок, который должен делать ход в каждой из этих позиций, не может отличить одну позицию от другой. Из данного определения следует, что из всех узлов одного информационного множества выходит одинаковое число дуг. Как правило, при задании игры ходам приписываются некоторые имена, не обязательно уникальные. Нужно понимать, что одноименные ходы во всех позициях одного информационного множества — это один ход для игрока, который должен делать ход во всех этих позициях. Но одноименные ходы, которые делаются игроком в позициях разных информационных множеств, — это различные ходы этого игрока.

Пример 2.1. *Рассмотрим простую карточную игру, которую назовем «упрощенный покер». В начале игры каждый игрок делает единичную ставку. Колода карт, содержацая m красных и n черных карт, тасуется и одна из карт сдается игроку 1. Посмотрев на свою карту, игрок 1 может спасовать или поднять ставку, добавив на кон некоторую сумму денег a.*

Если игрок 1 пасует, игра на этом прекращается; игрок 1 выигрывает ставку (единицу), если у него красная карта, и проигрывает ставку, если у него черная карта. Если игрок 1 поднимает ставку, игрок 2, не зная карты игрока 1, должен решить: пасовать ему или объявить игру.

Если игрок 2 пасует, то игрок 1 выигрывает ставку (единицу). Если игрок 2 объявляет игру, добавляя на кон сумму a, то карты открываются и игрок 1 выигрывает $1 + a$, если у него красная карта, и проигрывает $1 + a$, если у него черная карта.

Решение. Дерево данной игры представлено на рис. 2.1. Позиции в игре обозначены буквами от A до K. Начальная позиция A является случайной позицией, в которой игрок 1 получает карту из перетасованной колоды. Дугам (A, B) и (B, C), выходящим из этой случайной позиции, приписаны вероятности $\frac{m}{m+n}$ и $\frac{n}{m+n}$. В позициях B и C делает ход игрок 1, а в позициях F и G — игрок 2. В конечных позициях игры H, I, J и K заданы векторы выигрышей игроков.

Игрок 1 меет два информационных множества $\{B\}$ и $\{C\}$, в каждом по одной позиции. Поскольку для игрока 2 позиции F и G неразличимы, то у него только одно информационное множество $\{F, G\}$. $\square$

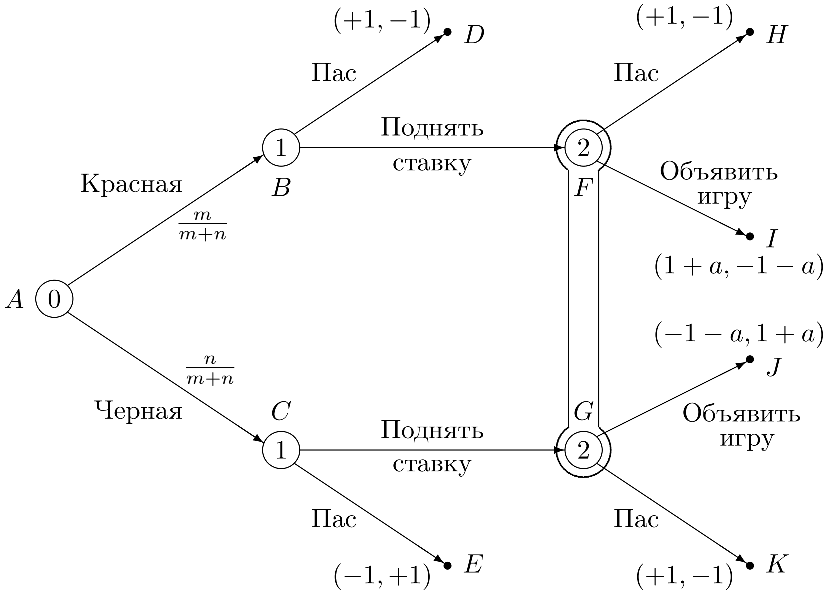


Рис. 2.1. Дерево игры «упрощенный покер»

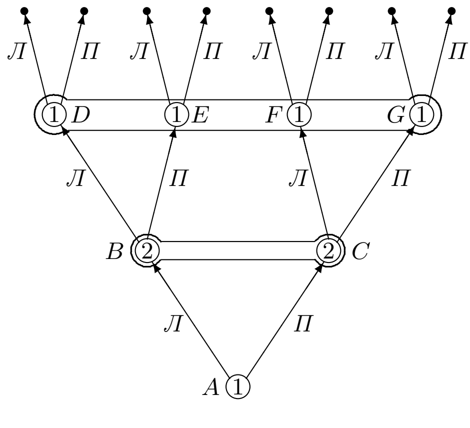


Рис. 2.2. Игра, в которой игрок 1 не обладает совершенной памятью

2.2. Игры с совершенной памятью

В игре на рис. 2.2 (на рисунке в конечных позициях игры не проставлены выигрыши игроков, которые для нашего рассмотрения несущественны) игрок 1 не может отличить позицию D от позиции E и позицию F от позиции G, если он не знает хода игрока 2. Но игрок 1 должен отличать позиции D и E от позиций F и G, если он помнит свой ход, сделанный в позиции A. То, что игрок 1 объединил все четыре позиции D, E, F и G в одно информационное множество, можно объяснить только тем, что он «забыл» ход, который он сделал в позиции A.

Говорят, что игрок обладает *совершенной памятью*, если любые две его позиции из одного информационного множества имеют одно и то же множество предшествующих ходов данного игрока.

Позиционная игра называется *игрой с совершенной памятью*, если все участвующие в ней игроки обладают совершенной памятью.

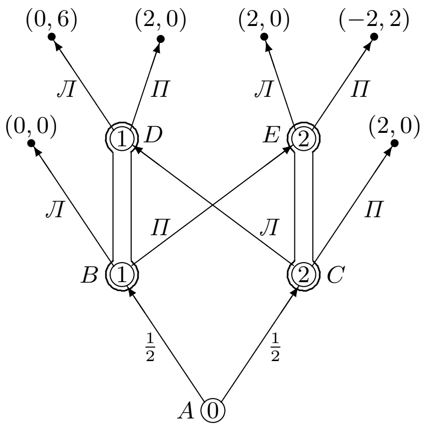


Рис. 2.3. Игра, в которой очередность ходов определяется подбрасыванием монеты

В игре на рис. 2.3 сначала подбрасывается монета, чтобы определить, какой из двух игроков должен делать ход первым. Затем игроки последовательно делают по ходу. У каждого из игроков две альтернативы: *Л* — пойти влево, *П* — пойти вправо. Несмотря на странную форму дерева игры с пересекающимися дугами (мы могли бы избежать пересечения дуг, но тогда пересекались бы границы информационных множеств, что выглядело бы еще хуже), данная игра есть игра с совершенной памятью, поскольку любой позиции каждого из игроков не предшествуют ходы данного игрока.

Несовершенная память игроков создает трудности при интерпретации игры и противоречит постулату о разумности игроков (разумный игрок должен найти способ запомнить ходы, сделанные им ранее). Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только игры с совершенной памятью.

В качестве упражнения докажите следующие свойства игр с совершенной памятью.

Свойство 2.1. *В позиционной игре с совершенной памятью*

а) любой позиции не может предшествовать другая позиция из того же самого информационного множества;

б) любые две позиции из одного информационного множества имеют одно и то же множество предшествующих ходов игрока, которому принадлежит данное информационное множество, причем, порядок следования этих ходов один и тот же.

2.3. Стратегическая форма игры

Стратегия игрока есть *план* его действий, следуя которому игрок делает ходы на протяжении всей игры. Каждая *стратегия* игрока должна однозначно определять его ход в каждом из принадлежащих ему информационных множеств. Если игрок i имеет k_i информационных множеств $I_1^{(i)}, \dots, I_{k_i}^{(i)}$, и $A_j^{(i)}$ есть множество ходов в позициях информационного множества $I_j^{(i)}$ $(1 \le j \le k_i)$, то мы можем определить его множество стратегий S_i как множество наборов $(a_1^{(i)}, \dots, a_{k_i}^{(i)}) \in \prod_{j=1}^{k_i} A_j^{(i)}$, где $a_j^{(i)} \in A_j^{(i)}$ — это ход игрока i, который он будет делать, если игра достигнет какой либо позиции информационного множества $I_j^{(i)}$. Заметим, что игрок i имеет $|S_i| = |A_1^{(i)}| \times \cdots \times |A_{k_i}^{(i)}|$ различных стратегий.

Набор стратегий игроков $s_i \in S_i$ $(i = 1, \dots, n)$ образует *ситуацию* $s = (s_1, \dots, s_n)$. Каждая ситуация приводит игру к окончанию в одной из позиций некоторого подмножества $V(s)$ конечных позиций (листьев дерева игры T). Для ситуации s мы можем подсчитать вероятноть $p_t(s)$ окончания игры в позиции (листе) $t \in V(s)$, перемножив все вероятности, приписанные дугам единственного пути из корня дерева в узел t.

Средний выигрыш игрока i в ситуации s определяется по формуле:

$$\bar{\phi}_i(s) = \sum_{t \in V(s)} \phi_i(t) p_t(s).$$

Таким образом, мы получаем бескоалиционную игру

$$\gamma = (\{1, \ldots, n\}, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\bar{\phi}_i\}_{i=1}^n),$$

которую называют *стратегической* или *нормальной формой позиционной игры*

В качестве *решения позиционной игры* мы можем принять решение ее стратегической формы, т. е. ситуацию равновесия игры γ. Напомним, что ситуация $s = (s_1, \ldots, s_n)$, $s_i \in S_i$, называется ситуацией равновесия в игре γ, если

$$\bar{\phi}_i(s) \geq \bar{\phi}_i(\bar{s}_i, s_{-i}) \quad \forall\, \bar{s}_i \in S_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

К сожалению, не все так просто. Позже мы узнаем, что не все ситуации равновесия для стратегической формы игры являются ситуациями равновесия для исходной игры в позиционной форме. Причина этого в том, что при переходе к стратегической форме теряется информация о последовательности ходов. В частности, две различные позиционные игры могут иметь одинаковые стратегические формы.

Пример 2.2 (продолжение примера 2.1). *Для игры на рис. 2.1 построить стратегическую форму и решить полученную игру.*

Решение. Поскольку игрок 1 имеет два информационных множества $I_1^{(1)} = \{B\}$, $I_1^{(2)} = \{C\}$, и по два хода (пасовать или сделать ставку) в позициях обоих множеств, то он имеет $2 \cdot 2 = 4$ стратегии, которые можно обозначить следующим образом:

СС — поднимать ставку в обеих своих позициях B и C;

СП — поднимать ставку в позиции B и пасовать в позиции C;

ПС — пасовать в позиции B и поднимать ставку в позиции C;

ПП — пасовать в обеих своих позициях B и C.

Игрок 2 имеет только одно информационное множество $I_{(1)}^2 = \{F, G\}$ и два хода в каждой позиции этого множества. Следовательно, у него две стратегии: *И* — объявить игру, *П* — пасовать.

Поскольку исходная игра антагонистическая, то ее стратегическая форма есть матричная игра. Для каждой пары стратегий игроков можно подсчитать ожидаемые платежи. Например, если игрок 1 применяет стратегию *СС*, а игрок 2 применяет стратегию *И*, то игрок 1 выиграет сумму $1+a$ с вероятностью $\rho \stackrel{\text{def}}{=} m/(m+n)$ и с вероятностью $1-\rho$ сумму $-1-a$. Таким образом, в данной ситуации математическое ожидание выигрыша игрока 1 равно $(2\rho-1)(1+a)$. Полная матрица выигрышей игрока 1 имеет следующий вид:

	И	*П*
СС	$(2\rho-1)(1+a)$	1
СП	$(2+a)\rho-1$	$2\rho-1$
ПС	$a(\rho-1)+2\rho-1$	1
ПП	$2\rho-1$	$2\rho-1$

Рассмотрим случай, когда $a=1$, $m=n$ и тогда $\rho=1/2$. Тогда матрица выигрышей игрока 1 следующая:

$$A = \begin{array}{c|c|c|c} & \text{И} & \text{П} & \\ \hline \text{СС} & 0 & 1 & \underline{0} \\ \hline \text{СП} & \frac{1}{2} & 0 & \underline{0} \\ \hline \text{ПС} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \hline \text{ПП} & 0 & 0 & \underline{0} \\ \hline & \underline{\frac{1}{2}} & 1 & \end{array}$$

Поскольку $\alpha(A)=0<1/2=\beta(A)$, то данная игра не имеет решения в чистых стратегиях. Оптимальными смешанными стратегиями соответственно первого и второго игроков являются следующие стратегии:

$$p^0 = (p^0_{CC}, p^0_{C\Pi}, p^0_{\Pi C}, p^0_{\Pi\Pi})^T = (1/3, 2/3, 0, 0)^T,$$
$$q^0 = (q^0_{И}, q^0_{\Pi})^T = (2/3, 1/3)^T.$$

(проверьте это самостоятельно, решив матричную игру графически). Цена игры $v(A)=1/3$. □

2.4. Поведенческие стратегии

В предыдущем разделе для значения параметра $\rho=1/2$, мы нашли равновесные стратегии $p^0=(1/3,2/3,0,0)^T$ и $q^0=(2/3,1/3)^T$ обоих игроков в игре «упрощенный покер». Но как проинтерпретировать эти стратегии применительно к позиционной форме игры.

Со стратегией игрока 2 все понятно: в позициях своего единственного информационного множества игрок 2 объявляет игру с вероятностью 2/3 и пасует с вероятностью 1/3. Такое поведение игрока 2 можно отразить приписав дугам (F, I) и (G, J) вероятности, равные 2/3, а дугам (F, H) и (G, K) — вероятности, равные 1/3.

Смешанную стратегию p^0 игрок 1 может реализовать стандартным для одноходовой игры образом: вначале игры из трех перетасованных карточек, на одной из которых написано *СС*, а на двух других —*СП*, выбирается одна. Если это карточка *СС*, то независимо от того, в какой позиции B или C окажется игра, игрок 1 будет поднимать ставку. Если же игрок 1 вытянет карточку *СП*, то в позиции B он будет подымать ставку, а в позиции C игрок 1 будет пасовать.

У игрока 1 имеется и другой способ реализовать свою смешанную стратегию p^0: в позиции B всегда (с вероятностью 1) подымать ставку, а в позиции C подымать ставку с вероятностью 1/3 и пасовать с вероятностью 2/3. Такое поведение игрока 1 можно отразить приписав дуге (B, D) вероятность 0, дуге (B, F) вероятность 1, дуге (C, G) вероятность 1/3, а дуге (C, E) вероятность 2/3. Такое представление смешанной стратегии игрока 1 называется его *поведенческой стратегией*. И когда игра достигнет, скажем, позиции C, игрок 1 перетасует три карты, на одной из которых написано *С*, а на двух других —*П*, и выберет одну из карт, которая и укажет его ход (*С* или *П*).

В чем разнятся эти два способа реализации смешанной стратегии p^0? В первом случае игрок 1 принимает решение, как действовать в обоих своих позициях (информационных множествах), еще до начала игры. Во втором случае игрок 1 в каждой позиции выбирает свой ход тогда, когда игра достигает этой позиции. Для такой малой игры может показаться, что разница незначительна. Но для игр с большим количеством ходов у каждого из игроков поведенческие стратегии интуитивно более понятны, и их гораздо более просто описывать.

Дадим теперь формальное определение. *Поведенческой стратегией* игрока называется набор вероятностей, приписанный всем его ходам (дугам), при этом, сумма вероятностей на дугах выходящих из заданной позиции равна 1, а вероятности на дугах, представляющих один ход в некотором информационном множестве, равны между собой.

В игре на рис. 2.4 числа на дугах дерева игры задают поведенческие стратегии обоих игроков. В начальной позиции A ($I_1^{(1)} = \{A\}$) игрок 1 выбирает один из своих двух ходов случайным образом: ход *Л* (пойти влево) — с вероятностью 1/6, а ход *П* (пойти в право) — с вероятностью 5/6. Когда игра достигнет любой позиции информационного множества

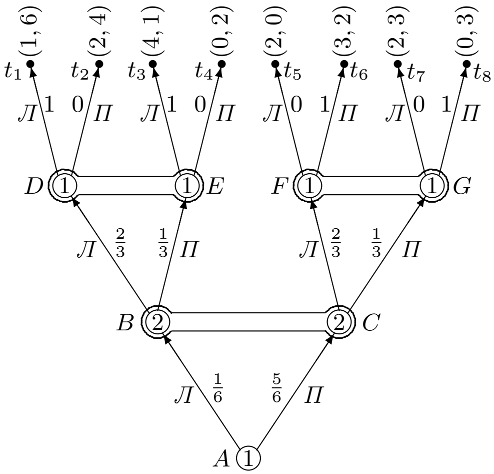


Рис. 2.4. Игра с заданными поведенческими стратегиями игроков

$I_1^{(2)} = \{B, C\}$, игрок 2 также выберет свой ход случайным образом: ход *Л* — с вероятностью 2/3, а ход *П* — с вероятностью 1/3. Если игра достигнет позиции информационного множества $I_2^{(1)} = \{D, E\}$, игрок 1 выберет ход *Л*, а если игра достигнет позиции информационного множества $I_3^{(1)} = \{F, G\}$, игрок 1 выберет ход *П*. В рассматриваемой игре у игрока 1 имеется восемь стратегий:

ЛЛЛ, *ЛЛП*, *ЛПЛ*, *ЛПП*, *ПЛЛ*, *ПЛП*, *ППЛ*, *ППП*,

где первая из трех букв указывет ход в позициях информационного множества $I_1^{(1)}$, вторая — в позициях множества $I_2^{(1)}$, а третья — в позициях множества $I_3^{(1)}$. У игрока 2 — всего две стратегии: *Л* и *П*.

Любая поведенческая стратегия — это всего лишь более удобное представление некоторой смешанной стратегии игрока. Так какую же смешанную стратегию игрока 1 определяет его поведенческая стратегия в игре на рис. 2.4? Чтобы задать эту смешанную стратегию, нужно указать вероятности применения игроком его восьми чистых стратегий. Эти вероятности вычисляются очень просто. Для примера, вероятность применения игроком чистой стратегии *ЛЛЛ* равна произведению трех вероятностей:

1) вероятности того, что в позициях информационного множества $I_1^{(1)}$ игрок 1 сделает ход *Л*, эта вероятность равна 1/6;

2) вероятности того, что в позициях информационного множества $I_2^{(1)}$ игрок 1 сделает ход *Л*, эта вероятность равна 1;

3) вероятности того, что в позициях информационного множества $I_3^{(1)}$ игрок 1 сделает ход *Л*, эта вероятность равна 0.

Следовательно, $p^0_{ЛЛЛ} = 0$. Аналогично вычисляются и все остальные вероятности, среди которых ненувые только две:

$$p^0_{ЛЛП} = 1/6 \quad \text{и} \quad p^0_{ПЛП} = 5/6.$$

Поскольку у игрока 2 всего одно информационное множество, то его поведенческая стратегия определяет его смешанную стратегию тривиальным образом: $q^0 = (q^0_Л, q^0_П)^T = (2/3, 1/3)^T$.

Стратегическая форма рассматриваемой позиционной игры есть следующая биматричная игра:

	Л	*П*
ЛЛЛ	$1, 6^*$	$4^*, 1$
ЛЛП	$1, 6^*$	$4^*, 1$
ЛПЛ	$2, 4^*$	$0, 2$
ЛПП	$2, 4^*$	$0, 2$
ПЛЛ	$2, 0$	$2, 3^*$
ПЛП	$3^*, 2$	$0, 3^*$
ППЛ	$2, 0$	$2, 3^*$
ППП	$3^*, 2$	$0, 3^*$

.

Вы можете легко проверить, что пара (p^0, q^0) образует ситуацию равновесия в данной биматричной игре. Но тогда и другая пара (p^1, q^0), где $p^1_{ЛЛЛ} = 1/6$ и $p^1_{ППП} = 5/6$ есть ненулевые компоненты вектора p^1, также является ситуацией равновесия. Но никакая поведенческая стратегия не может представлять смешанную стратегию p^1.

Действительно, пусть x, y и z обозначают вероятности пойти влево соответственно в позициях информационных множеств $I_1^{(1)}$, $I_2^{(1)}$ и $I_3^{(1)}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&p_{ЛЛЛ} = 1/6 = xyz \;\Rightarrow\; x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\\
&p_{ЛЛП} = 0 = xy(1-z) \;\Rightarrow\; z = 1,\\
&p_{ППП} = 5/6 = (1-x)(1-y)(1-z) = 0 \;\Rightarrow\; \text{противоречие.}
\end{aligned}$$

Полученное противоречие означает, что

не каждую смешанную стратегию можно представить как поведенческую стратегию.

Две стратегии $\bar{p}^i$ и $\hat{p}^i$ игрока i называются *эквивалентными* в некоторой позиционной игре, если для любой фиксированной комбинации стратегий других игроков в обоих ситуациях, в одной из которых игрок i использует стратегию $\bar{p}^i$, а в другой — стратегию $\hat{p}^i$, вероятность того, что игра достигнет любой конкретной позиции, одна и та же. Понятно, что и средние выигрыши всех игроков при переходе игрока i от стратегии $\bar{p}^i$ к стратегии $\hat{p}^i$ не изменятся. Отметим также, что в данном определении каждая из стратегий $\bar{p}^i$ и $\hat{p}^i$ может быть чистой, смешанной или поведенческой стратегией. Причем, обе стратегии не обязательно должны быть одного и того же типа.

В рассматриваемом нами примере стратегии p^0 и p^1 игрока 1 эквивалентные. Поэтому мы также можем утверждать, что стратегия p^1, хотя и не представляется как поведенческая стратегия, но эквивалентна поведенческой стратегии, представленной на рис. 2.4.

Теорема 2.1 (Куна). *В позиционной игре с совершенной памятью любая смешанная стратегия игрока эквивалентна некоторой его поведенческой стратегии.*

Результат, сформулированный в этой теореме, интуитивно не очевиден по следующей причине. Когда какой-то игрок применяет свою смешанную стратегию, то его ходы в позициях всех его информационных множеств в общем случае являются коррелированными (зависимыми) случайными величинами. Но когда этот же игрок применяет любую свою поведенческую стратегию, то его ходы в позициях всех его информационных множеств являются некоррелированными случайными величинами.

Мы не будем доказывать теорему 2.1, а лишь приведем алгоритм, который по заданной смешанной стратегии p^i заданного игрока i строит эквивалентную поведенческую стратегию.

1. *Вычисляем веса конечных позиций.* Вначале полагаем $w(t) = 0$ для всех конечных позиций t. Затем для каждой чистой стратегии σ игрока i, которая применяется с ненулевой вероятностью $p^i_\sigma > 0$, увеличиваем на p^i_σ веса $w(t)$ тех конечных позиций t, в которых может закончиться игра при использовании игроком i стратегии σ.
2. *Вычисляем веса всех остальных (не конечных) позиций дерева игры и определяем вероятности для ходов игрока i.* Выбираем пози-

цию v, из которой все дуги ведут в позиции, для которых веса уже определены.

а) Если v есть позиция игрока i, то вычиляем $w(v)$ как сумму весов тех позиций, в которые входят дуги из вершины v. Всем дугам (v,x) приписываем вероятности $\bar{p}^i(v,x) = w(x)/w(v)$.

б) Если v не есть позиция игрока i, то веса всех позиций, в которые входят дуги из вершины v, должны быть одинаковыми, скажем, равными a. Полагаем $w(v) = a$.

Пример 2.3. *Для позиционной игры на рис. 2.4 нужно вычислить поведенческую стратегию, эквивалентную смешанной стратегии p^1 с двумя ненулевыми компонентами $p^1_{ЛЛЛ} = 1/6$ и $p^1_{ППП} = 5/6$.*

Решение. Сначала определяем веса конечных позиций:

$$w(t_1) = \frac{1}{6},\quad w(t_2) = 0,\quad w(t_3) = \frac{1}{6},\quad w(t_4) = 0,$$
$$w(t_5) = 0,\quad w(t_6) = \frac{5}{6},\quad w(t_7) = \frac{1}{6},\quad w(t_8) = \frac{5}{6}.$$

Теперь вычислим веса остальных позиций:

$$w(D) = \frac{1}{6},\quad w(E) = \frac{1}{6},\quad w(F) = \frac{1}{6},\quad w(G) = \frac{5}{6}$$
$$w(B) = \frac{1}{6},\quad w(C) = \frac{5}{6},\quad w(A) = 1.$$

Зная веса, можно определить вероятности ходов для эквивалентной поведенческой стратегии:

$$\bar{p}^1(A,B) = \frac{w(B)}{w(A)} = \frac{1}{6},\quad \bar{p}^1(A,C) = \frac{w(C)}{w(A)} = \frac{5}{6},$$
$$\bar{p}^1(D,t_1) = \frac{w(t_1)}{w(D)} = 1,\quad \bar{p}^1(D,t_2) = \frac{w(t_2)}{w(D)} = 0,$$
$$\bar{p}^1(E,t_3) = \frac{w(t_3)}{w(E)} = 1,\quad \bar{p}^1(E,t_4) = \frac{w(t_4)}{w(E)} = 0,$$
$$\bar{p}^1(F,t_5) = \frac{w(t_5)}{w(F)} = 0,\quad \bar{p}^1(F,t_6) = \frac{w(t_6)}{w(F)} = 1,$$
$$\bar{p}^1(G,t_7) = \frac{w(t_7)}{w(G)} = 0,\quad \bar{p}^1(G,t_8) = \frac{w(t_8)}{w(G)} = 1.$$

$\square$

Поскольку поведенческие стратегии интуитивно более понятны и их легче использовать на практике, мы определяем *ситуацию* в позиционной игре как набор поведенческих стратегий всех игроков. В *ситуации рановесия* ни одному игроку в отдельности не выгодно менять свою стратегию.

Тем не менее, ради простоты изложения мы часто будем отождествлять стратегии игроков (как чистые так смешанные) в стратегической форме позиционной игры с эквивалентными им поведенческими стратегиями. Мы также часто будем называть ситуацию s для стратегической формы игры ситуацией в позиционной игре, при этом понимая ситуацию, которая получается заменой в s всех ее стратегий на эквивалентные поведенческие стратегии.

2.5. Игры с совершенной информацией: обратная индукция

Позиционная игра называется *игрой с совершенной информацией*, если все ее информационные множества состоят только их одной позиции. Примерами игр с совершенной информацией являются шахматы, шашки и многие другие спортивные игры. Далеко не все позиционные игры имеют ситуацию равновесия в чистых стратегиях. Но игры с совершенной информацией всегда имеют ситуацию равновесия в чистых стратегиях.

Теорема 2.2 (Куна). [14] *Каждая позиционная игра с совершенной информацией имеет ситуацию равновесия в чистых стратегиях.*

Доказательство существования ситуации равновесия, как и поиск такой ситуации, осуществляется способом, который называют *методом обратной индукции*. Пусть $\bar{V}$ обоначает множество позиций, для которых векторы выигрышей игроков $\phi(v) = (\phi_1(v), \ldots, \phi_n(v))$ уже определены. Вначале включаем в $\bar{V}$ все конечные позиции в игре (листья дерева игры). Затем на каждом шаге выбираем такую позицию $v \notin \bar{V}$,

[14] Эта теорема также приписывается Цермело:
E. Zermelo. Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematics*, Cambridge Vol. 2: 501, 1912.

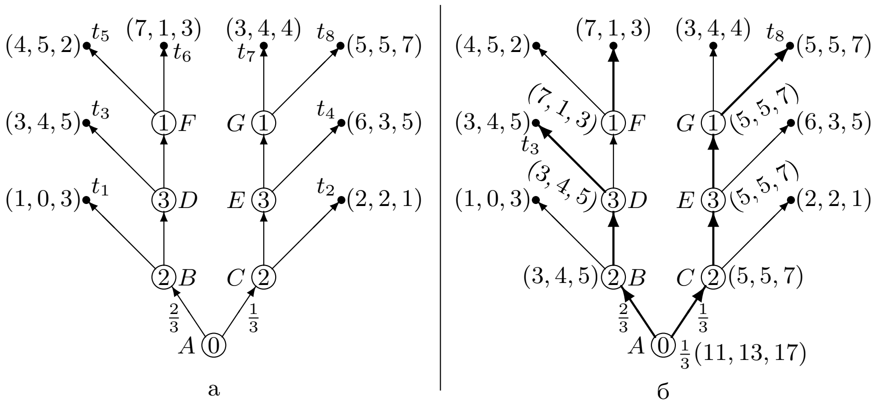


Рис. 2.5. Игра с совершенной информацией

что все дуги, выходящие из v, ведут в позиции из множества $\bar{V}$. Если v — это позиция игрока i, то этот игрок выбирает свой оптимальный ход (v, w) стремясь максимизировать свой выигрыш в позиции w: $w \in \arg\max_{(v,u)\in E(v,\bar{V})} \phi_i(u)$. Поэтому полагаем $\phi(v) = \phi(w)$ и добавляем v к $\bar{V}$. Если в позиции v делается случайный ход, то полагаем $\phi(v) = \sum_{(v,w)\in E(v,\bar{V})} \rho(v, w)\phi(w)$ и добавляем v к $\bar{V}$. Так продолжаем до тех пор, пока не будет вычислен вектор выигрышей для начальной позиции игры, который и будет вектором выигрышей игроков в данной игре. $\square$

Продемонстрируем работу метода обратной индукции на примере.

Пример 2.4. *Решить позиционную игру на рис. 2.5, а.*

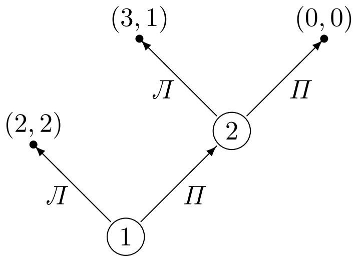
Решение. Результат работы метода обратной индукции представлен на рис. 2.5, б. Здесь жирными линиями изображены дуги, представляющие оптимальные ходы игроков. Следуя из корня A вдоль жирных линий, мы видим, что игра закончится с вероятностью $2/3$ в конечной позиции t_3, или с вероятностью $1/3$ в конечной позиции t_8.

Вычисления проводились в следующей последовательности. В позиции F игрок 1 выбирает свой оптимальный ход (F, t_6) и поэтому позиции F приписывается вектор выигрышей $(7, 1, 3)$. Аналогично, в позиции G игрок 1 выбирает ход (G, t_8), и позиции G приписывается вектор выигрышей $(5, 5, 7)$. Затем, в позициях D и E игрок 3 делает ходы (D, t_3) и (E, G), а позиции D и E получают соответственно метки $(3, 4, 5)$ и

$(3,4,5)$. В позициях B и C игрок 2 делает ходы (B,D) и (C,E), а позиции B и C получают метки $(3,4,5)$ и $(5.5.7)$. И наконец, мы можем вычислить вектор выигрышей $\frac{2}{3}(3,4,5)+\frac{1}{3}(5,5,7)=\frac{1}{3}(11,13,17)$ в начальной позиции A. □

2.6. Подигры и совершенное равновесие

Рассмотрим позиционную игру, дерево и стратегическая форма которой представлены на рис. 2.6. Применим метод обратной индукции и найдем, что оптимальной стратегией игрока 1 будет выбор в своей единственной позиции правого ребра (стратегия *П*), а оптимальной стратегией игрока 2 — выбор левого ребра (стратегия *Л*). При этом выигрыш игрока 1 равен 3, а игрока 2 — 1.



	Л	П
Л	$2, 2^*$	$2^*, 2^*$
П	$3^*, 1^*$	$0, 0$

Рис. 2.6. Дерево игры и ее стратегическая форма

Стратегическая форма этой позиционной игры имеет две ситуации равновесия: (*Л*,*П*) и (*П*,*Л*). Ситуация (*П*,*Л*) — это ситуация, полученная методом обратной индукции, и в том, что она является равновесием в исходной позиционной игре у нас нет сомнений. Является ли равновесием в исходной игре ситуация (*Л*,*П*)? Ответ — нет, поскольку, если игрок 1, который делает ход первым, перейдет от стратегии *Л* к стратегии *П*, то рационально мыслящий игрок 2 применит свою стратегию *Л* и в сложившейся ситуации (*П*,*Л*), выигрыш игрока 1 равен 3, что больше его выигрыша, равного 2, в ситуации (*Л*,*П*).

Так почему же ситуация (*Л*,*П*) оказалась равновесной ситуацией в стратегической форме данной игры? Ответ прост: при переходе к стратегической форме теряется информация об очередности ходов. Так, в нашем примере мы смогли доказать, что ситуация (*Л*,*П*) не является равновесием, используя то, что игрок 1 делает ход первым.

Итак, мы пришли к пониманию того, что

> не все ситуации равновесия для стратегической формы игры являются ситуациями равновесия в исходной позиционной игре.

Следовательно, нам нужно некоторое правило для отсева таких «ложных» ситуаций равновесия.

Рассмотрим позиционную игру Γ, заданную деревом игры T. Любое поддерево дерева T, которое не пересекает информационные множества (все вершины одного информационного множества либо принадлежат поддереву либо не принадлежат) и содержит не менее двух узлов, задает некоторую новую позиционную игру, которую называют *подигрой* исходной игры Γ. Ситуация (в общем случае в смешанных стратегиях) равновесия для позиционной игры Γ называется *совершенной*[15], если ее сужение на любую из подигр также будет ситуацией равновесия для этой подигры. Под *сужением ситуации* $s = (s_1, \dots, s_n)$ в игре Γ на ее подигру Γ' мы понимаем ситуацию $s' = (s'_1, \dots, s'_n)$, когда каждая из стратегий s'_i есть *сужение* соответствующей стратегии s_i, т. е. во всех позициях подигры Γ' обе стратегии s_i и s'_i предписывают игроку i делать одни и те же ходы с одинаковой вероятностью.

Вернемся к игре на рис. 2.6. Здесь имеется всего одна подигра (не считая всей игры), которая задается поддеревом с корнем в узле с меткой 2. Сужением ситуаций (*Л*,*П*) и (*П*,*Л*) на эту подигру являются ситуации (*П*) и (*Л*) (в данной подигре участвует только один игрок 2). Ясно, что оптимальной для второго игрока является стратегия *Л*, которая дает ему выигрыш 1, в то время как стратегия *П* дает ему нулевой выигрыш. Следовательно, из двух расматриваемых ситуаций, (*Л*,*П*) и (*П*,*Л*), совершенной является только ситуация (*П*,*Л*).

Нетрудно убедиться в том, что в игре с совершенной информацией метод обратной индукции всегда находит совершенное равновесие. Следующая простая процедура является *обобщением* метода обратной индукции для поиска только *одного* совершенного равновесия в играх с несовершенной информацией. Процедура рекурсивно повторяет следую-

---

[15] Концепцию совершенного равновесия разработал Нобелевский лауреат в области экономики 1994 г. Р. Селтен.

R. Selten. Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetraägheit. *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft* **121** (1965) 301–324, 667–689.

R. Selten. Reexamination of the perfectness concept for equiiilibrium points in extensive games. *International Journal of Game Theory* **41** (1975) 25–55.

щие вычисления до тех пор, пока не получит вектор выигрышей игроков в корне дерева игры:

1) выбрать подигру с наименьшим числом позиций, найти одну ситуацию равновесия и запомнить равновесные стратегии игроков;
2) построить усеченную игру, удалив из дерева исходной игры все узлы решенной подигры кроме корня, которому приписывается вектор выигрышей игроков в найденной ситуации равновесия.

После завершения работы описанной процедуры нужно из равновесных стратегий игроков для всех решенных подигр составить равновесные стратегии игроков для исходной игры.

Недостаток описанной процедуры в том, что она находит только одно равновесие. Когда в подигре имеется несколько ситуаций равновесия с разными выигрышами игроков, то иногда невозможно выбрать одну ситуацию, которая устраивала бы всех игроков. Такой проблемы не возникает для антагонистических игр (игр двух лиц с нулевой суммой), для которых выигрыши игроков во всех ситуациях равновесия одни и те же. Для неантагонистических игр можно организовать ветвящийся вычислительный процесс, в котором каждая ветвь обрабатывает одну комбинацию подигровых равновесий. Такой способ поиска совершенных равновесий мы применим при решении примера 2.5 в следующем разделе.

2.7. Источники несовершенной информации

В примере 2.1 причиной несовершенной информированности игрока 2 (или того, что у него появилось информационное множество размера 2) было наличие в игре случайного хода. Но случайные ходы — не единственный источник несовершенной информации. Другой причиной несовершенной информированности игрока является его неполная информированность о стратегиях и функциях выигрышей других игроков. Таким играм с неполной информацией посвящена отдельная глава 3. Еще одной причиной несовершенной информированности игрока является невозможность наблюдать действия других игроков. В частности, это происходит тогда, когда игроки должны принимать решения одновременно. При моделировании такой ситуации, мы произвольно устанавливаем порядок принятия решений игроками, а затем уменьшаем степень информированности тех игроков, которые при установленном порядке ходов получают дополнительную информацию, объединяя некоторые из их позиций в одно информационное множество. Продемонстрируем сказанное на примере.

Пример 2.5 (PlayBox против X-Station). *В начале года производители игровых приставок PlayBox и X-Station должны решить, с какой продукцией выходить на рынок в новом году. У них две альтернативы: разработать принципиально новую модель (P), что стоит 20 млн. долларов; модернизировать существующую (M), что стоит 5 млн. долларов. Модель должна быть готова к показу на ежегодной выставке электронной продукции. После выставки производители должны определить цену своей продукции: высокую ($300) или низкую ($200). Производственные издержки по выпуску одной приставки (как новой так и модернизированной) равны $100. Прогнозируемая суммарная емкость рынка игровых приставок —* 1 200 000 *штук. Рынок делится в следующих пропорциях:*

- 1/1, *если оба продукта одинаковы по качеству (оба новые, или оба модернизированные) и цене, или один продукт модернизированный и дешевый, а второй — новый и дорогой;*
- 1/3, *если цены равны и первый продукт модернизированный, а второй новый, или оба продукта одинаковы, но первый дорогой, а второй дешевый;*
- 1/11, *если первый продукт модернизированый и дорогой, а второй новый и дешевый.*

Нужно построить дерево игры и найти несколько (не менее двух) совершенных равновесий.

Решение. Дерево данной игры представлено на рис. 2.7. Вначале фирмы одновременно должны принять решение: разрабатывать новый продукт или модернизировать старый. Поскольку в позиционной игре решения должны приниматься последовательно, то мы установили произвольный порядок: сначала принимает решение игрок 1 (фирма PlayBox), а затем — игрок 2 (фирма X-Station). Чтобы уравнять информированность игроков, мы объединяем в одно информационное множество две позиции B и C, в которых принимает решение игрок 2.

Аналогично, после выставки обе фирмы одновременно назначают цену на свой продукт. В нашей модели первым принимает решение игрок 1, а затем — игрок 2. Мы «прячем» решение игрока 1 от игрока 2, объединяя каждую пару позиций (H, I), (J, K), (L, M) и (N, O) в отдельное информационное множество.

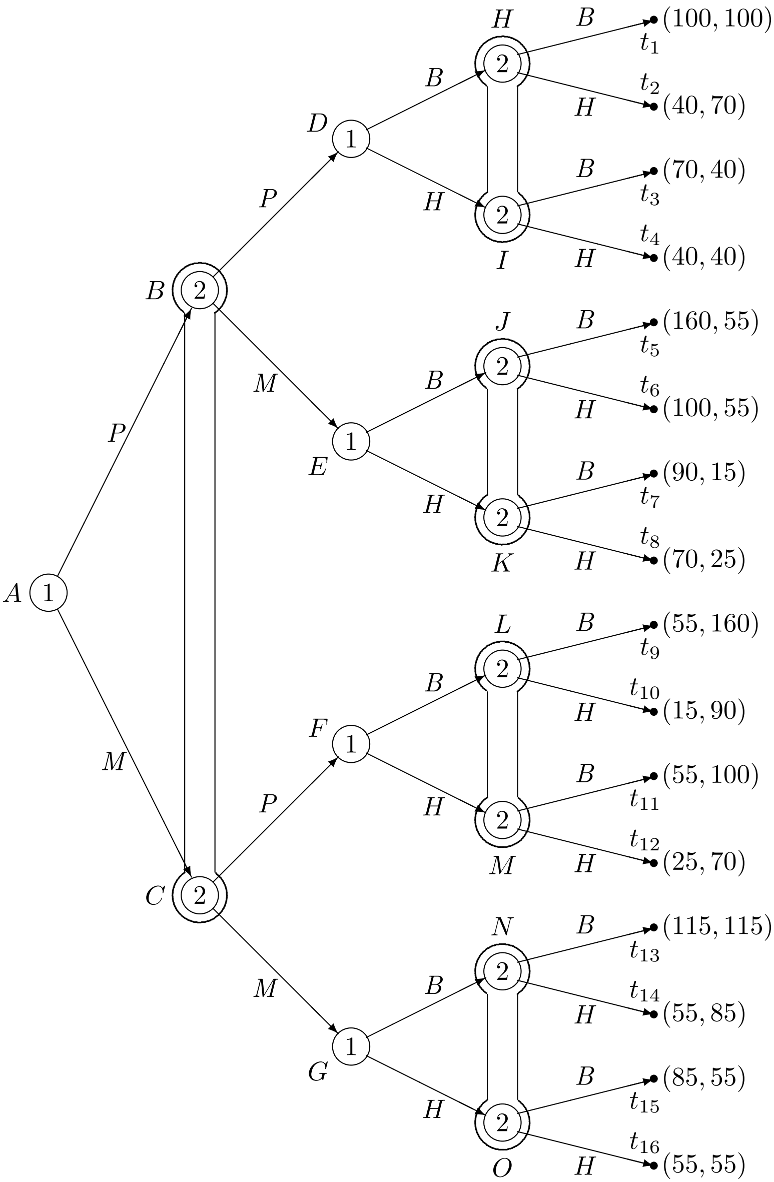


Рис. 2.7. Дерево игры «PlayBox против X-Station»

Выигрыши игроков в конечных позициях игры расчитаны с учетом пропорций, в которых делится рынок. Для примера, выигрыши игроков в конечной позиции t_1 расчитываются следующим образом. Поскольку обе фирмы предлагают новые продукты по одинаковой цене, то рынок делится пополам, каждая из фирм продает по 600 000 приставок и их чистая прибыль равна:

$$(300 - 100) \cdot 600\,000 - 20\,000\,000 = 100\,000\,000 = 100 \text{ млн. долларов}$$

Стратегическая форма позиционной игры на рис. 2.7 есть биматричная игра, в которой у каждого игрока по $2^5 = 32$ стратегии. Мы здесь не рискнем анализировать игру такого большого размера. Вместо этого мы применим обобщенный метод обратной индукции, описанный в разделе 2.6.

Проведем анализ 4-х подигр, начинающихся в позициях D, E, F и G. Это биматричные игры со следующими матрицами выигрышей игроков:

$$\text{D:}\quad \begin{array}{c|c|c|} & B & H \\ \hline B & 100^*, 100^* & 40^*, 70 \\ \hline H & 70, 40^* & 40^*, 40^* \\ \hline \end{array}\,, \qquad \text{E:}\quad \begin{array}{c|c|c|} & B & H \\ \hline B & 160^*, 55^* & 100^*, 55^* \\ \hline H & 90, 15 & 70, 25^* \\ \hline \end{array}\,,$$

$$\text{F:}\quad \begin{array}{c|c|c|} & B & H \\ \hline B & 55^*, 160^* & 15, 90 \\ \hline H & 55^*, 100^* & 25^*, 70 \\ \hline \end{array}\,, \qquad \text{G:}\quad \begin{array}{c|c|c|} & B & H \\ \hline B & 115^*, 115^* & 55^*, 85 \\ \hline H & 85, 55^* & 55^*, 55^* \\ \hline \end{array}\,.$$

В каждой игре имеется по две ситуации равновесия в чистых стратегиях, одна из которых (B,B) — общая для всех четырех подигр. В этой ситуации обеим фирмам нужно назначать высокие цены.

Сначала выбирая ситуацию (B,B) в качестве решения каждой из четырех подигр. Это означает, что после выставки каждая из фирм всегда назначает высокую цену на свой продукт. Строим усеченную подигру, которая вместе с ее стратегической формой представлена на рис. 2.8. В данном конкретном случае стратегической форма — это биматричная игра, которая имеет ситуацию равновесия в чистых стратегиях (P,P).

Итак, мы нашли *первое* совершенное равновесие, в котором каждая из фирм разрабатывает новую приставку и назначает на нее высокую цену независимо от действий конкурента. При этом обе фирмы заработают по 100 млн. долларов.

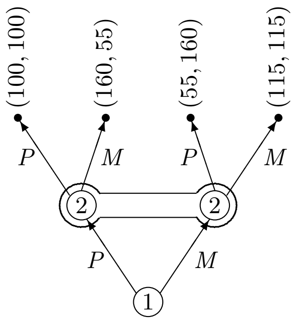
Чтобы найти второе совершенное равновесие, в качестве решения подигр с корнями в узлах D и G возьмем ситуацию (B,B), а в качестве решений подигр с корнями в узлах E и F — соответственно ситуации (B,H) и (H,B). Это означает, что после выставки каждая из фирм придерживается стратегии

> s^0: назначить высокую цену, когда у конкурента такой же или менее совершенный продукт, и низкую цену, когда у конкурента более совершенный продукт.

Соответствующая усеченная игра и ее стратегическая форма представлены на рис. 2.9. В данном случае стратегической форма — это биматричная игра, которая имеет две ситуации равновесия в чистых стратегиях: (P,P) и (M,M).

Поэтому *вторым* совершенным равновесием будет ситуация, когда каждая из фирм разрабатывает новую приставку, а затем после выставки применяет стратегию s^0. Заметим, что как в первой так и во второй ситуациях равновесия игра закончится в одной и той же конечной позиции t_1 с выигрышем 100 млн. долларов у каждого игрока. Но все же эти две ситуации различны, поскольку они образованы из разных стратегий. Стоит одной фирме сменить свою стратегию и последстия для нее и для фирмы-конкурента в обеих ситуациях будут различны.

Третьим совершенным равновесием является ситуация, когда каждая из фирм модернизирует старую приставку, а затем после выставки применяет стратегию s^0. При этом игра закончится в позиции t_{13} с выигрышем 115 млн. долларов у каждого игрока. □



	P	M
P	$100^*, 100^*$	$160^*, 55$
M	$55, 160^*$	$115, 115$

Рис. 2.8. Первая усеченная игра для игры «PlayBox против X-Station»

2.8. Совершенное байесовское равновесие

Для игр с несовершенной информацией понятия подигры и совершенного равновесия требуют дальнейшего обобщения. Поскольку подигра не может пересекать информационные множества, то в играх с несовершенной информацией часто мы будем иметь только одну подигру, совпадающую с исходной игрой, и тогда все равновесия будут совершенными. Но часто не все из этих равновесий являются равновесиями в исходной позиционной игре.

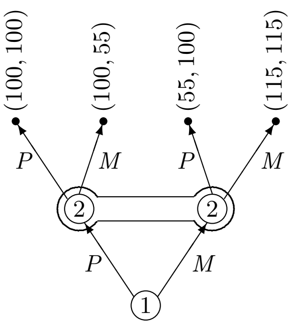
Рассмотрим игру, представленную на рис. 2.10. Стратегическая форма данной игры есть следующая биматричная игра:

	Л	*П*
ЛЛ	$0, 3^*$	$0^*, 3^*$
ЛП	$\frac{4}{3}, \frac{5}{3}^*$	$-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$
ПЛ	$\frac{1}{3}, \frac{7}{3}^*$	$-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}$
ПП	$\frac{5}{3}^*, 1^*$	$-\frac{4}{3}, -1$

.

Эта игра имеет две ситуации равновесия в чистых стратегиях: (*ЛЛ*,*П*) и (*ПП*,*Л*). Здесь первая буква в обозначении стратегии игрока 1 указывает ход в позиции B, а вторая — в позиции C,

Но действительно ли ситуация (*ЛЛ*,*П*) является равновесием? Нет, не является, поскольку в обеих позициях своего информационного множества игрок 2 имеет доминирующий ход *Л*. Но если игрок 1 знает, что игрок 2 будет применять ход *Л*, то он применит стратегию *ПП*, чтобы увеличить свой средний выигрыш с 0 до 5/3. В результате сложится ситуация (*ПП*,*Л*).



	P	M
P	$100^*, 100^*$	$100, 55$
M	$55, 100$	$115^*, 115^*$

Рис. 2.9. Вторая усеченная игра для игры «PlayBox против X-Station»

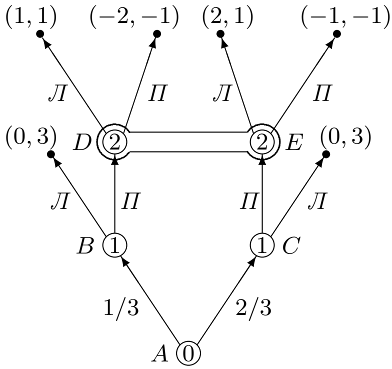


Рис. 2.10. Игра с небайесовским равновесием

Так почему ситуация (*ЛЛ*,*П*) оказалась рановесной для стратегической формы игры? Дело в том, что если игрок 1 применяет стратегию *ЛЛ*, то игра никогда не достигнет позиций D и E, а раз так, то игроку 2 совершенно не важно, какую из двух своих стратегий применять. Но если игрок 2 применяет стратегию *П*, то игроку 1 невыгодно менять стратегию *ЛЛ* на стратегию *ПП*. Мы снова доказали, что игроку 1 все же выгодно поменять *ЛЛ* на *ПП*, используя то, что рациональный игрок 2, которой выбирает свой ход, уже зная ход *Л* игрока 1, тоже сделает ход *Л*. В одношаговой стратегической игре (в нашем случае биматричной игре) игрок 2 принимает решение, не зная решения игрока 1, и поэтому у него нет причин менять свою стратегию.

Чтобы все же исключить нежелательные равновесия в играх с несовершенной информацией была разработана концепция совершенного байесовского равновесия. Рассмотрим позиционнуцю игру Γ с несовершенной информацией, заданную деревом игры $T = (V, E)$. Пусть в этой игре участвуют n игроков, и пусть V_i есть множество позиций игрока i, а $I(v)$ обозначает информационное множество, которому принадлежит позиция $v \in V$. *Система представлений игроков* задается функцией $\mu : \cup_{i=1}^{n} V_i \to [0, 1]$, значения которой интерпретируются как вероятности, приписанные позициям игры, причем, сумма вероятностей, приписанных позициям одного информационного множества, должна быть равна 1. Сужение функции μ на подмножество позиций V_i задает *представление* игрока i: если игра достигла некоторого его информационного множества, то игрок полагает, что вероятность того, что он находится в позиции v этого информационного множества, равна $\mu(v)$.

Для заданной системы представлений игроков μ мы можем расширить понятие подигры следующим образом. *Подигра* $\Gamma(I)$, порожденная информационным множеством I, получается добавлением к лесу поддеревьев с корнями в узлах $v \in I$ новой начальной позиции s (корня нового дерева), из которой делается случайный ход, который с вероятностью $\mu(v)$ переведет игру в позицию $v \in I$. Как и ранее, подигра *не должна* пересекать информационные множества.

Ситуация (набор поведенческих стратегий игроков) $(p^1, \dots, p^n)$ в позиционной игре Γ называется *совершенным байесовским равновесием*, если для системы представлений игроков μ, вычисленной по правилу

$$\mu(v) = \frac{\mathbb{P}(v)}{\sum_{w \in I(v)} \mathbb{P}(w)}, \tag{2.1}$$

сужение ситуации $(p^1, \dots, p^n)$ на любую из подигр $\Gamma(I)$ также является ситуацией равновесия для этой подигры. Здесь $\mathbb{P}(v)$ обозначает вероятность того, что в ситуации $(p^1, \dots, p^n)$ игра достигнет позиции v. Мы можем вычислить $\mathbb{P}(v)$ перемножив вероятности, приписанные дугам единственного пути из корня дерева игры в узел v.

Замечание 2.1. *В случае, когда в игре имеются информационные множества, которые в ситуации $(p^1, \dots, p^n)$ не достижимы из корня, мы не можем применить формулу (2.1) (поскольку на ноль делить нельзя). Позициям таких информационных множеств можно произвольно приписать любые вероятности $\mu(v)$.*

Вернемся к игре на рис. 2.10 и проверим, какая из двух ситуаций (*ЛЛ*,*П*) и (*ПП*,*Л*) является совершенным байесовским равновесием. Поскольку при любом представлении $(\mu(D), \mu(E))$ игрока 2, в подигре порожденной информационным множеством $\{D, E\}$ оптимальной для игрока 2 является стратегия *Л*, то ситуация (*ЛЛ*,*П*) не может быть совершенным байесовским равновесием. В ситуации (*ПП*,*Л*) игра достигнет позиции D с вероятностью $1/3$, а позиции E — с вероятностью $2/3$. Определяя представление игрока 2 по правилу: $\mu(D) = 1/3$ и $\mu(E) = 2/3$, мы легко можем проверить, что ситуация (*ПП*,*Л*) является совершенным байесовским равновесием.

В качестве еще одного примера, рассмотрим игру «упрощенный покер» из примера 2.1 при $\rho = 1/2$ и $a = 1$. В данной игре единственная подигра определяется по информационному множеству $\{F, G\}$ игрока 2.

Для пары равновесных стратегий

$$p^0 = (p^0_{CC}, p^0_{C\Pi}, p^0_{\Pi C}, p^0_{\Pi\Pi})^T = (1/3, 2/3, 0, 0)^T,$$
$$q^0 = (q^0_{И}, q^0_{\Pi})^T = (2/3, 1/3)^T$$

мы определили эквивалентные поведенческие стратегии игроков в разделе 2.4. Перемножая вероятности на путях от корня A до узлов F и G, вычисляем

$$\mathbb{P}(F) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(G) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Поэтому

$$\mu(F) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = \frac{3}{4}, \quad \mu(G) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{4}.$$

Информационное множество $\{F, G\}$ порождает подигру, дерево которой представлено на рис. 2.11. В этой подигре любая из стратегий «Пас» или «Объявить игру» дает игроку 2 одинаковый средний выигрыш -1. Поэтому и любая комбинация этих чистых стратегий, в частности смешанная стратегия $q^0 = (2/3, 1/3)^T$ будет оптимальной для игрока 2.

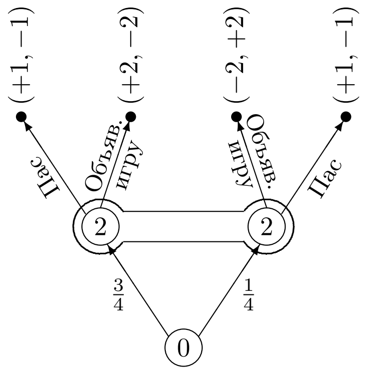


Рис. 2.11. Подигра для информационного множества $\{F, G\}$

2.9. Упражнения

2.1. Рассмотрим следующую антагонистическую игру. Колода из трех карт (король, дама и валет) тасуется и затем по одной карте сдается игроку 1 и игроку 2 (третья карта игрокам не показывается). Игроки также не знают карты оппонента. Игрок 1 может объявить игру ($И$) или спасовать. Если игрок 1 пасует, то он платит единицу игроку 2. Если игрок 1 объявляет игру, то игрок 2 может поднять ставку ($П$) или спасовать (C). Если игрок 2 пасует, он платит единицу игроку 1. Если игрок 2 поднимает ставку, то карты открываются, и побеждает игрок с более сильной картой, а игрок с более слабой картой платит победителю две единицы.

Постройте дерево игры с учетом того, что рациональные игроки не делают заведомо проигрышных ходов. Перейдите к стратегической форме игры и найдите оптимальные поведенческие стратегии игроков.

2.2. В каждом из двух карманов игрока 1 лежит по монете. Одна из них правильная (при подбрасывании с равной вероятностью выпадают орел или решка), а вторая неправильная (при подбрасывании с вероятностью 1/3 выпадает орел и с вероятностью 2/3 выпадает решка). Игрок 1 знает, в каком кармане лежит правильная монета, а в каком неправильная. Игрок 2 знает только описанные выше свойства монет, но не может по виду отличить одну монету от другой. Правила игры следующие. Игрок 1 достает из кармана одну из монет и подбрасывает ее. Игрок 2, видя исход, должен сказать, какую монету он видит, правильную или неправильную. Если игрок 2 дает правильный ответ, то игрок 1 платит единицу игроку 2, иначе игрок 2 платит единицу игроку 1.

Постройте дерево игры, перейдите к стратегической форме игры и найдите оптимальные поведенческие стратегии игроков.

2.3. Игрок 2 выбирает одну из двух комнат и прячет в ней золотую монету. Затем игрок 1, не зная, в какой комнате находится монета, идет в одну из комнат и ищет монету в течении 5 минут. Если монета находится в комнате 1 и игрок 1 ищет ее там, то он найдет монету с вероятностью 1/2. А если игрок 1 ищет монету в комнате 2 и она там находится, то игрок 1 найдет монету с вероятностью 1/3. Понятно, что игрок 1 не найдет монету, если он ищет в той комнате, где монеты нет. Если игрок 1 находит монету, то он забирает ее; в противном случае монету получает игрок 2.

Постройте дерево игры, перейдите к стратегической форме игры и найдите оптимальные поведенческие стратегии игроков.

2.4. Покер Куна[16] — это антагонистическая игра, которая является упрощенным вариантом покера. Правила игры следующие:

[16] H.W. Kuhn. Simplified two-person poker. In H.W. Kuhn and A.W. Tucker (editors), Contributions to the Theory of Games, v. 1, pp. 97-103, Princeton University Press, 1950.

- Оба игрока делают ставку, равную 1.
- Колода карт, которая содержит только три карты, скажем, короля, даму и валета, тасуется и по одной карте сдается обоим игрокам (третья карта игрокам не показывается).
- Игрок 1 может воздержаться или поднять ставку на 1.
    - Если игрок 1 воздержался, игрок 2 может воздержаться или поднять ставку на 1.
        - Если игрок 2 воздержался, игроки открывают карты и 2 единицы на кону получает тот игрок, у которого более сильная карта.
        - Если игрок 2 поднимает ставку (на кону уже 3 единицы), игрок 1 может спасовать или объявить игру, добавляя на кон еще одну единицу.
            - Если игрок 1 пасует, 3 единицы на кону получает игрок 2.
            - Если игрок 1 объявляет игру, карты открываются и все 4 единицы на кону получает тот игрок, у которого более сильная карта.
    - Если игрок 1 поднял ставку, игрок 2 может спасовать или объявить игру, добавляя на кон еще одну единицу.
        - Если игрок 2 пасует, 3 единицы на кону получает игрок 1.
        - Если игрок 1 объявляет игру, карты открываются и все 4 единицы на кону получает тот игрок, у которого более сильная карта.

Постройте дерево игры и найдите оптимальные поведенческие стратегии игроков.

2.5. Рассмотрим вариант биматричной игры, в которой игроки делают ходы не одновременно, а последовательно. Чтобы определить очередность ходов, бросается монета: если выпадает орел, то первым выбирает свою стратегию игрок 1; если выпадает решка, первым выбирает стратегию игрок 2; игрок, который выбирает стратегию вторым, знает решение, принятое оппонентом. Матрица выигрышей игроков следующая:

$$\begin{bmatrix} 6,-2 & 0,0 \\ 4,3 & 2,1 \end{bmatrix}.$$

Найдите совершенное равновесие.

2.6. Следующая игра спроектирована для демонстрации того, что оптимальное локальное поведение игроков может привести к самому худшему исходу. Дерево игры «сороконожка» представлено на рис. 2.12. Методом обратной индукции найдите равновесные поведенческие стратегии игроков. Выгодно ли найденное равновесие игрокам? Как им следует поступить при наличии доверия друг другу?

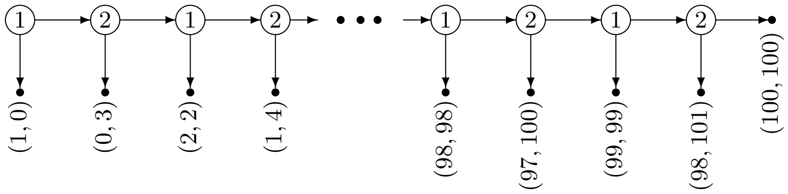


Рис. 2.12. Дерево игры «сороконожка»

2.7. Рассмотрим игру, представленную на рис. 2.7. Занумеруем информационные множества игрока 1 следующим образом: $I_1^1 = \{A\}$, $I_2^1 = \{D\}$, $I_3^1 = \{E\}$, $I_4^1 = \{F\}$, $I_5^1 = \{G\}$. Определите эквивалентные поведенческие стратегии для следующих смешанных стратегий (перечисляются только ненулевые вероятности):

1) $p_{PBBBB} = 1/2$, $p_{PBHHB} = 1/4$, $p_{MBBHH} = 1/4$;
2) $p_{PHBHB} = 1/6$, $p_{PBBBH} = 1/6$, $p_{MBHBB} = 1/3$;
3) $p_{PBBHB} = 1/8$, $p_{PBHBH} = 1/4$, $p_{MBHHB} = 3/8$, $p_{MBHBB} = 1/4$.

2.8. Найдите совершенное байесовское равновесие в игре на рис. 2.3.

2.9. Обобщенным методом обратной индукции найдите совершенное равновесие в позиционных играх, представленных на рис. 2.13 и 2.14, при следующих значениях параметров:

1) $\alpha = 1/3$, $\beta = 1/4$, $a = 1$;
2) $\alpha = 1/4$, $\beta = 1/3$, $a = 2$;
3) $\alpha = 1/3$, $\beta = 3/4$, $a = 3$.

2.10 **(Microscape против Netsoft)**. Дерево данной игры представлено на рис. 2.15. Фирма Netsoft (игрок 1) разработала новый браузер. Фирма Microscape (игрок 2) может либо оставить вызов без ответа либо попробовать разработать аналогичный продукт. Они могут разработать свой дорогой и медленный браузер, или нанять инженеров Netsoft, чтобы они сделали это. Netsoft может предотвратить это, заключив (дорогие)

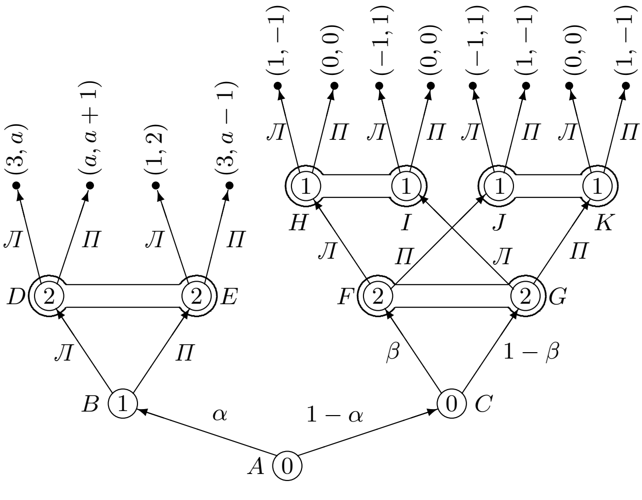


Рис. 2.13. Игра с двумя подиграми

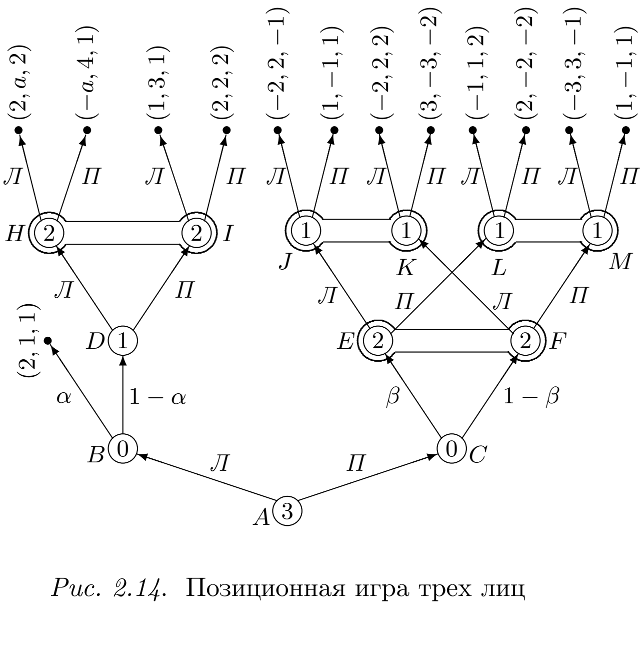


Рис. 2.14. Позиционная игра трех лиц

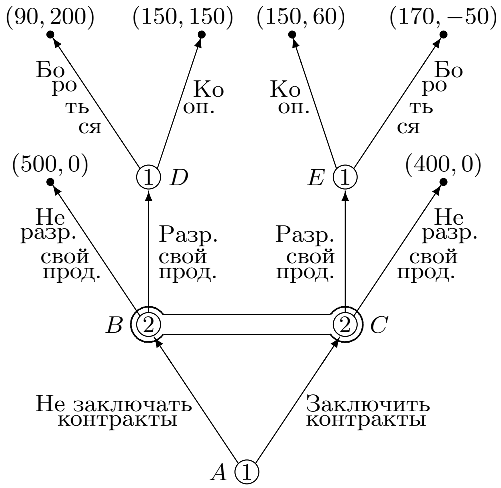


Рис. 2.15. Дерево игры «Microscape против Netsoft»

контракты со своими инженерами, или может ничего не предпринимать. Если Microscape решит разработать свой продукт, Netsoft может бороться с Microscape или разделить с ней рынок.

Найдите совершенное байесовское равновесие.

2.11. Два игрока (победители лотереи) разыгрывают главный приз следующим образом. Сначала подбрасывается монета для определения размеров призовых. Если выпадает орел, то полагаем $k = 4$, а если выпадает решка, то $k = 5$. Результат бросания монеты игрокам не раскрывается. В два одинаковых конверта кладутся 10^k и 10^{k+1} долларов. Затем предлагается игроку 1 выбрать один из конвертов, а второй конверт вручают игроку 2. После того, как игроки откроют конверты и увидят свои выигрыши, им предлагают обменяться конвертами. Обмен состоится только тогда, когда оба игрока дают согласие на это.

Постройте дерево игры, учитывая, что рациональные игроки не будут делать заведомо невыгодных ходов. Найдите совершенное байесовское равновесие.

2.12. На некотором рынке присутствует только одна фирма 1. Фирма 2 решает, входить ли ей на этот рынок. Фирма 2 может войти на рынок самостоятельно, или, чтобы увеличить конкурентосбособность, создать совместное предприятие с маркетинговой фирмой 3, разделив будущую прибыль. Итак, вначале фирма 2 принимает одно из трех решений: войти на рынок самостоятельно, предложить фирме 3 создать совместное предприятие, или не входить на рынок. Получив предложение от фирмы 2, фирма 3 может принять его или отклонить. Если фирма 3 принимает предложение, то фирмы создают совместное предприятие и входят на рынок. Если фирма 3 отклоняет предложение фирмы 2, то фирма 2 решает входить ли ей на рынок или не входить.

Фирма 1 не может незаметить нового конкурента на рынке, но она не знает вошла ли на рынок фирма 2 самостоятельно, или в кооперации с фирмой 3. Обнаружив на рынке конкурента, фирма 1 может уступить ему некоторую долю рынка, или начать ценовую войну, чтобы вытеснить конкурента с рынка. При этом, ценовая война есть наилучший ответ фирмы 1 против одинокой фирмы 2, но она неоптимальна против скооперировашихся фирм 2 и 3.

Выигрыши (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) фирм вычисляются следующим образом.

1) $(3, 0, 0)$, если фирма 2 не входит на рынок.
2) Если фирма 2 входит на рынок самостоятельно:
   а) $(2, -1, 0)$, если фирма 1 начинает ценовую войну;
   б) $(1, 2, 0)$, если фирма 1 уступает долю рынка.
3) Если фирма 2 входит на рынок вместе с фирмой 3:
   а) $(-2, 1, 1)$, если фирма 1 начинает ценовую войну;
   б) $(1, 2, 1)$, если фирма 1 уступает долю рынка.

Найдите совершенное байесовское равновесие.

2.13 **(Как поделить пирог)**. Три игрока хотят поделить пирог. Они согласовали следующую процедуру дележа. На шаге $i = 1, 2, 3$ игрок i предлагает дележ $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})$, где $x_j^{(i)}$ $(0 \le x_j^{(i)} \le 1)$ есть доля игрока j $(j = 1, 2, 3)$, $x_1^{(i)} + x_2^{(i)} + x_3^{(i)} = 1$. Если два других игрока принимают предложенный дележ, то игра заканчивается. Если хотя бы один из других игроков отвергает предложенный дележ и если $i < 3$, то игра продолжится на следующем шаге, где свой дележ будет предлагать игрок $i + 1$. Если в течении трех шагов, ни один дележ не будет принят, пирог отдадут коту.

Игроки стремятся получить свою долю пирога как можно раньше и поэтому они используют один и тот же дисконтный множитель $\delta \in (0, 1)$ для оценки будущей стоимости своей доли пирога: если игра заканчивается на шаге i, то выигрыш игрока j будет равен $\delta^{i-1} x_j^{(i)}$, $j = 1, 2, 3$. Если пирог получит кот, то выигрыши всех трех игроков равны нулю.

Для упрощения анализа данной игры можно считать, что все три игрока не только рациональны, но и благородны (при выборе из двух равноценных для себя исходов, игрок выберет тот, где суммарный выигрыш оппонентов наибольший).

Методом обратной индукции найдите ситуацию равновесия в данной игре.

2.14 **(Как поделить приз)**. Двое победителей лотереи (игроки 1 и 2) должны разделить приз в S долларов согласно следующему игровому сценарию. В раунде $t = 2k + i$, $k = 0, \ldots, n-1$, $i \in \{1, 2\}$, игрок i делает предложение своему оппоненту разделить приз в пропорции $(x_t, 1 - x_t)$, где $x_t \in [0, 1]$. Если оппонент принимает предложение, то игрок 1 получает $x_t \delta^{t-1} S$, а игрок 2 получает $(1 - x_t)\delta^{t-1} S$ долларов, где δ — это дисконтный множитель, установленный организаторами лотереи и известный игрокам. Если оппонент отвергает предложение и $t < 2n$, то дележ приза продолжится в следующем раунде. Если после $2n$ раундов, игроки не придут к соглашению, то игра прекращается с нулевыми выигрышами у обоих игроков.

Найдите оптимальные стратегии игроков методом обратной индукции, предполагая, что оба игрока не только рациональны, но и благородны (при выборе из двух равноценных для себя исходов, игрок выберет тот, где выигрыш оппонента наибольший).

2.15. Модели *конкуренции по Штакельбергу* являются альтернативой моделям несовершенной конкуренции Курно и Бертрана. В моделях олигополий Штакельберга одна из фирм является лидером рынка и всегда принимает решения раньше конкурентов. Все остальные фирмы (последователи) принимают свои решения после того, как они узнают решения лидера. Считая, что лидером является фирма 1, найдите равновесие в модели *дуополии Штакельберга*

1) с *однородными продуктами* при линейной функции спроса $f(p) = a - bp$ $(a > 0,\ b > 0)$ и линейных функциях затрат $g_i(y_i) = c_i y_i$ $(c_i > 0)$, $i = 1, 2$;
2) с *разнородными продуктами* при линейных функциях спроса

$$f_1(p_1, p_2) = a - p_1 + bp_2, \quad f_2(p_1, p_2) = a - p_2 + bp_1 \quad (a > 0,\ b > 0)$$

и затрат $g_i(y_i) = c_i y_i$ $(c_i > 0)$, $i = 1, 2$.

Указание. Хотя эти дуополии Штакельберга и не являются конечными играми, для их решения можно применить метод обратной индукции. Сначала найдите оптимальный ответ $y_2(y_1)$ (соотв., $p_2(p_1)$) фирмы 2 на стратегию y_1 (соотв., p_1) фирмы 1. Затем, предполагая, что фирма 2 использует стратегию $y_2(y_1)$ (соотв., $p_2(p_1)$), найдите оптимальный ответ

y_1^* (соотв., p_1^*) фирмы 1. Вычисляя $y_2^* = y_2(y_1^*)$ (соотв., $p_2^* = p_2(p_1^*)$), вы найдете ситуацию равновесия (y_1^*, y_2^*) (соотв., (p_1^*, p_2^*)).

Глава 3
Байесовские игры

До сих пор мы изучали игры с *полной информацией*, когда перед началом игры каждый из игроков знал стратегии и функции выигрышей всех других игроков. Когда в начале игры некоторые игроки имеют ограниченную информацию о стратегиях и функциях выигрышей других игроков, то им нужно принимать решения, базируясь только на доступной информации. Такие игры называются *играми с неполной информацией* или *Байесовскими играми*. Эти игры не следует путать с играми с несовершенной информацией, в которых неполная информированность игроков появляется в процессе игры из-за невозможности наблюдать действия других игроков или результаты случайных ходов.

3.1. Дуополия Курно с неполной информацией

Во многих случаях неполная информированность игрока означает, что он не знает точного вида функций выигрышей других игроков. В качестве примера такой ситуации рассмотрим модель дуополии (*дуополия* — это олигополия, в которой конкурируют две фирмы, т. е $n = 2$) Курно из раздела 1.3.1, когда хотя бы одна из фирм точно не знает технологии, используемой фирмой-конкурентом.

Сначала кратко напомним постановку проблемы. На однопродуктовом рынке конкурируют две фирмы. Предположим, что функция спроса линейна: $q = f(p) = a - bp$, где a и b — положительные числа. Функции затрат фирм также линейны: $g_i(y_i) = c_i y_i$, где $c_i > 0$ и $y_i \geq 0$ есть соответственно стоимость производства единицы продукта и выпуск (количество производимых единиц продукта) на фирме $i = 1, 2$. Предположим, что цена определяется так, чтобы уравнять спрос и предложение.

Тогда $q = y_1 + y_2$ и каждая из фирм продает все, что она производит. Следовательно чистая прибыль фирмы i равна $\pi_i(p, y_i) = py_i - c_i y_i$. Обращая функцию спроса, получаем

$$p = \frac{a-q}{b} = \frac{a-y_1-y_2}{b}.$$

Используя это выражение, мы можем выразить чистые прибыли фирм как функции выпусков:

$$\phi_i(y_1, y_2) = \frac{a-y_1-y_2}{b}\, y_i - c_i y_i\,, \quad i = 1, 2.$$

Если в этой модели дуополии Курно существует равновесие, то из (1.15) следует, равновесные выпуски фирм опрелеляются по формулам:

$$\hat{y}_1 = \frac{a+(c_2-2c_1)b}{3}, \quad \hat{y}_2 = \frac{a+(c_1-2c_2)b}{3}.$$

3.1.1. Неполная информированность одной фирмы

Предположим, что фирма 1 точно не знает технологии фирмы 2. Фирма 1 полагает, что с вероятностью θ фирма 2 использует старую технологию, для которой стоимость выпуска единицы продукции высокая и равна c_H, и с вероятностью $1-\theta$ фирма 2 использует новую технологию, для которой стоимость выпуска единицы продукции низкая и равна c_L. Другими словами, функция затрат фирмы 1 равна $g_1(y_1) = c_1 y_1$ и фирма 1 полагает, что $g_2(y_2) = c_H y_2$ с вероятностью θ и $g_2(y_2) = c_L y_2$ с вероятностью $1-\theta$. Заметим, что фирма 2 точно знает свою технологию, т. е. она точно знает свою функцию затрат.

При заданном значении выпуска y_1 фирмы 1, фирма 2 определяет свой выпуск, максимизируя свою функцию чистой прибыли.

Если $g_2(y_2) = c_H y_2$, фирма 2 решает задачу:

$$\phi_2(y_1, y_2; c_H) = \frac{a-y_1-y_2}{b}\, y_2 - c_H y_2 \to \max_{y_2 \ge 0}.$$

Из условия оптимальности первого порядка

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} = \frac{a-y_1-2y_2}{b} - c_H = 0$$

находим оптимальный выпуск

$$y_2(H) = \frac{a-y_1-c_H b}{2} \tag{3.1}$$

фирмы 2.

Аналогично, если $g_2(y_2) = c_L y_2$, фирма 2 решает задачу:

$$\phi_2(y_1, y_2; L) = \frac{a - y_1 - y_2}{b}\, y_2 - c_L y_2 \to \max_{y_2 \geq 0}.$$

и находит свой оптимальный выпуск

$$y_2(L) = \frac{a - y_1 - c_L b}{2}. \tag{3.2}$$

Эти же вычисления может произвести и фирма 1, чтобы определить свою среднюю чистую прибыль

$$\begin{aligned} &\phi_1(y_1, \theta y_2(H) + (1-\theta) y_2(L)) = \\ &= \frac{a - y_1 - \theta y_2(H) - (1-\theta) y_2(L)}{b} y_1 - c_1 y_1, \end{aligned}$$

которую ей нужно максимизировать. Оптимальный выпуск y_1 фирмы 1 должен удовлетворять условию оптимальности первого порядка

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \phi_1(y_1, \theta y_2(H) + (1-\theta) y_2(L))}{\partial y_1} = \\ &= \frac{a - \theta y_2(H) - (1-\theta) y_2(L)}{b} - \frac{2}{b} y_1 - c_1 = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Решая систему уравнений (3.1), (3.2) и (3.3), находим

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{a + (\theta c_H + (1-\theta) c_L - 2c_1) b}{3}, \\ y_2(H) &= \frac{a + (c_1 - 2c_H) b}{3} + \frac{1-\theta}{6}(c_H - c_L) b, \\ y_2(L) &= \frac{a + (c_1 - 2c_L) b}{3} - \frac{\theta}{6}(c_H - c_L) b. \end{aligned}$$

Сравнивая две модели дуополий Курно, в первой из которых обе фирмы знают производственные издержки фирм конкурентов, а во второй модели фирма 1 точно не знает производственных издержек на фирме 2, мы видим, что неполная информированность фирмы 1 приводит к тому, что равновесный выпуск на фирме 2 с высокими издержками увеличивается на $(1-\theta)(c_H - c_L)b/6$, а выпуск на фирме 2 с низкими издержками уменьшается на $\theta(c_H - c_L)b/6$.

3.1.2. Неполная информированность обеих фирм

Теперь предположим, что производственные издержки обеих фирм могут быть высокими или низкими. В зависимости от этого их функции затрат и функции чистой прибыли (выигрыши) следующие:

- издержки высокие

$$g_i(y_i; H) = c_H y_i,$$
$$\phi_i(y_1, y_2; H) = \frac{a - y_1 - y_2}{b}\, y_i - c_H y_i;$$

- издержки низкие

$$g_i(y_i; L) = c_L y_i,$$
$$\phi_i(y_1, y_2; L) = \frac{a - y_1 - y_2}{b}\, y_i - c_L y_i\,.$$

Перед началом производства каждая из фирм точно знает свои издержки на единицу выпуска: c_H или c_L. Но обе фирмы точно не знают издержек конкурента. Представления фирмы об издержках конкурента заданы условными вероятностями:

- $\mu_1(H|H) = \mu_1(c_2 = c_H|c_1 = c_H)$ — вероятность того, что издержки фирмы 2 равны c_H, при условии что издержки фирмы 1 равны c_H;
- $\mu_1(L|H) = \mu_1(c_2 = c_L|c_1 = c_H)$ — вероятность того, что издержки фирмы 2 равны c_L, при условии что издержки фирмы 1 равны c_H;
- $\mu_1(H|L) = \mu_1(c_2 = c_H|c_1 = c_L)$ — вероятность того, что издержки фирмы 2 равны c_H, при условии что издержки фирмы 1 равны c_L;
- $\mu_1(L|L) = \mu_1(c_2 = c_L|c_1 = c_L)$ — вероятность того, что издержки фирмы 2 равны c_L, при условии что издержки фирмы 1 равны c_L;
- $\mu_2(H|H) = \mu_2(c_1 = c_H|c_2 = c_H)$ — вероятность того, что издержки фирмы 1 равны c_H, при условии что издержки фирмы 2 равны c_H;
- $\mu_2(L|H) = \mu_2(c_1 = c_L|c_2 = c_H)$ — вероятность того, что издержки фирмы 1 равны c_L, при условии что издержки фирмы 2 равны c_H;
- $\mu_2(H|L) = \mu_2(c_1 = c_H|c_2 = c_L)$ — вероятность того, что издержки фирмы 1 равны c_H, при условии что издержки фирмы 2 равны c_L;
- $\mu_2(L|L) = \mu_2(c_1 = c_L|c_2 = c_L)$ — вероятность того, что издержки фирмы 1 равны c_L, при условии что издержки фирмы 2 равны c_L.

Например,

$$\mu_1(c_2 = c_H | c_1 = c_H) = \mu_1(c_2 = c_H | c_1 = c_L) = \theta,$$
$$\mu_1(c_2 = c_L | c_2 = c_H) = \mu_1(c_2 = c_L | c_1 = c_L) = 1 - \theta.$$

Выпуск (стратегия) y_i фирмы i есть функция от уровня ее издержек, т. е. $y_i = y_i(H)$ или $y_i = y_i(L)$.

Если $c_1 = c_H$, фирма 1 определяет свою среднюю чистую прибыль $y_1(H)$ (выигрыш), как оптимальное решение следующей задачи

$$\begin{gathered}\phi_1(y_1, \mu_1(H|H)y_2(H) + \mu_1(L|H)y_2(L); H) = \\ = \frac{a - y_1 - \mu_1(H|H)y_2(H) - \mu_1(L|H)y_2(L)}{b} y_1 - c_H y_1 \to \max_{y_1 \geq 0}.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Если $c_1 = c_L$, то $y_1(L)$ есть оптимальное решение задачи

$$\begin{gathered}\phi_1(y_1, \mu_1(H|L)y_2(H) + \mu_1(L|L)y_2(L); L) = \\ = \frac{a - y_1 - \mu_1(H|L)y_2(H) - \mu_1(L|L)y_2(L)}{b} y_1 - c_L y_1 \to \max_{y_1 \geq 0}.\end{gathered} \tag{3.5}$$

Аналогично, если $c_2 = c_H$, то $y_2(H)$ есть решение задачи

$$\begin{gathered}\phi_2(\mu_2(H|H)y_1(H) + \mu_2(L|H)y_1(L), y_2; H) = \\ = \frac{a - \mu_2(H|H)y_1(H) - \mu_2(L|H)y_1(L) - y_2}{b} y_2 - c_H y_2 \to \max_{y_2 \geq 0},\end{gathered} \tag{3.6}$$

а если $c_2 = c_L$, то $y_2(L)$ есть решение задачи

$$\begin{gathered}\phi_2(\mu_2(H|L)y_1(H) + \mu_2(L|L)y_1(L), y_2; L) = \\ = \frac{a - \mu_2(H|L)y_1(H) - \mu_2(L|L)y_1(L) - y_2}{b} y_2 - c_L y_2 \to \max_{y_2 \geq 0}.\end{gathered} \tag{3.7}$$

Записывая условия оптимальности первого порядка для задач (3.4)–(3.7), получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} y_1(H) &= \frac{1}{2}(a - \mu_1(H|H)y_2(H) - \mu_1(L|H)y_2(L) - c_H b), \\ y_1(L) &= \frac{1}{2}(a - \mu_1(H|L)y_2(H) - \mu_1(L|L)y_2(L) - c_L b), \\ y_2(H) &= \frac{1}{2}(a - \mu_2(H|H)y_1(H) - \mu_2(L|H)y_1(L) - c_H b), \\ y_2(L) &= \frac{1}{2}(a - \mu_2(H|L)y_1(H) - \mu_2(L|L)y_1(L) - c_L b), \end{aligned}$$

решая которую мы найдем оптимальные выпуски (стратегии) $y_1(H)$, $y_1(L)$, $y_2(H)$ и $y_2(L)$ обеих фирм.

3.2. Байесовские игры в стратегической форме

Байесовская игра в стратегической форме задается пятеркой

$$G = (N, \{S_i\}_{i\in N}, \{T_i\}_{i\in N}, \{\phi_i\}_{i\in N}, \{\mu_i\}_{i\in N}),$$

где

- $N = \{1, \ldots, n\}$ — множество игроков;
- S_i — множество стратегий игрока i, $i = 1, \ldots, n$;
- T_i — множество типов игрока i, $i = 1, \ldots, n$;
- $\phi_i : \prod_{j=1}^{n} S_j \times T_i \to \mathbb{R}$ — функция выигрышей игрока i, $i = 1, \ldots, n$;
- $\mu_i : T_i \to \Delta(T_{-i})$[17] — представление игрока i (о типах других игроков), $i = 1, \ldots, n$.

Тип игрока представляет информацию, известную самому игроку, но неизвестную другим игрокам. Теперь выбор стратегии игрока зависит от его типа, т. е. игрок i типа $t_i \in T_i$ выбирает стратегию $s_i(t_i)$. Например, в рассмотренной нами модели дуополии Курно мы можем определить типы и стратегии игроков так:

$$T_1 = \{H, L\},\ T_2 = \{H, L\},\ (y_1(H), y_1(L)),\ (y_2(H), y_2(L)).$$

Выигрыш игрока i зависит от выбранных игроками стратегий, а также от типа игрока i. Если сложилась ситуация $s = (s_1, \ldots, s_n)$ и реальный тип игрока i равен t_i ($t_i \in T_i$), то игрок i выигрывает сумму $\phi_i(s_1, \ldots, s_n; t_i)$. Например, в модели дуополии Курно выигрыш игрока i (фирмы i) в ситуации (y_1, y_2) равен

$$\phi_i(y_1, y_2; H) = \frac{a - y_1 - y_2}{b}\, y_i - c_H y_i\,,$$
$$\phi_i(y_1, y_2; L) = \frac{a - y_1 - y_2}{b}\, y_i - c_L y_i\,.$$

Представление игрока i для любого его типа $t_i \in T_i$ задает вероятностную меру (распределение вероятностей) $\mu_i(\cdot|t_i)$ на множестве T_{-i} типов других игроков, где $T \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{n} T_i$. Если X есть измеримое (относительно $\mu_i(\cdot|t_i)$) подмножество в T_{-i}, то $\mu_i(t_{-1} \in X|t_i)$ есть условная

[17] Напомним, что $\Delta(\Omega)$ обозначает семейство всех вероятностных мер на множестве Ω.

вероятность, которую игрок i приписывает событию $t_{-i} \in X$, при условии, что его собственный тип есть t_i.

Если все множества T_i конечные, то мы можем рассматривать все μ_i как функции $\mu_i : T_{-i} \times T_i \to [0, 1]$. В таком случае

$$\mu_i(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n | t_i) = \mu_i(t_{-i}|t_i) \tag{3.8}$$

есть условная вероятность того, что типы других игроков соответственно равны $t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n$, если тип самого игрока i равен t_i.

Для примера, вспомним, что $\mu_1(c_2 = c_L | c_1 = c_H) = \mu_1(L|H)$ есть вероятность того, что издержки фирмы 2 равны c_L, при условии что издержки фирмы 1 равны c_H.

Замечание. С понятием «*представление игрока*» мы уже встречались в разделе 2.8 при изучении концепции *совершенного байесовского равновесия* в позиционной игре с несовершенной информацией. Позже мы увидим, что для конечных байесовских игр, которые обычно также представляются в позиционной форме, представление игрока позволяет ему судить о начальной позиции в игре, и после анализа игры это представление может быть расширено до его «полного» представления, которое позволяет игроку отличать (пусть и недерминированным образом) позиции внутри любого его информационного множества.

3.2.1. Согласующиеся представления

Представления $\{\mu_i\}_{i \in N}$ называются *согласующимися*, если на множестве T можно задать такое распределение вероятностей p, что все условные распределения вероятностей $\mu_i(\cdot|t_i)$ можно определить по правилу Байеса, исходя из распределения p. В случае, когда все множества T_i конечные, представления являются согласующимися, если существует распределение вероятностей $p : T \to [0, 1]$, $\sum_{t \in T} p(t) = 1$, что представления игроков вычисляются по правилу:

$$\mu_i(t_{-i}|t_i) = \frac{p(t)}{\displaystyle\sum_{\tau \in T : \tau_i = t_i} p(\tau)}, \quad t \in T,\ i = 1, \ldots, n. \tag{3.9}$$

Например, в модели дуополии Курно следующие представления игроков

$$\mu_1(L|L) = \frac{4}{7},\ \mu_1(H|L) = \frac{3}{7},\ \mu_1(L|H) = \frac{8}{17},\ \mu_1(H|H) = \frac{9}{17},$$
$$\mu_2(L|L) = \frac{1}{3},\ \mu_2(H|L) = \frac{2}{3},\ \mu_2(L|H) = \frac{1}{4},\ \mu_2(H|H) = \frac{3}{4}$$

являются согласующимися, поскольку они определяется по правилу Байеса для распределения вероятностей

$$p(L,L) = \frac{1}{6},\ p(L,H) = \frac{1}{8},\ p(H,L) = \frac{1}{3},\ p(H,H) = \frac{3}{8}.$$

Для примера,

$$\mu_1(L|H) = \frac{p(H,L)}{p(H,L)+p(H,H)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{3}{8}} = \frac{8}{17},$$
$$\mu_2(L|H) = \frac{p(L,H)}{p(L,H)+p(H,H)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}+\frac{3}{8}} = \frac{1}{4}.$$

В байесовской игре с согласующимися представлениями различия представлений игроков можно объяснить их различной информированностью. В игре с несогласующимися представлениями различия представлений игроков объясняются различием их мнений, которые не вытекают из различной информированности.

3.3. Байесовское равновесие

Рассмотрим байесовскую игру

$$G = \left(\{1,\dots,n\}, \{S_i\}_{i=1}^n, \{T_i\}_{i=1}^n, \{\phi_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i\}_{i=1}^n\right).$$

Байесовской стратегией игрока i называется функция $\tilde{s}_i : T_i \to S_i$[18]. Как и для обычных бескоолиционных игр, набор байесовских стратегий называем *ситуацией*. Ситуация $(\tilde{s}_1,\dots,\tilde{s}_n)$ называется *байесовским равновесием*, если для каждого игрока i и каждого его типа $t_i \in T_i$ выполняются неравенства:

$$E_{t_i}(\phi_i(\tilde{s}_i(t_i), \tilde{s}_{-i}(t_{-i}); t_i)) \geq E_{t_i}(\phi_i(s_i, \tilde{s}_{-i}(t_{-i}); t_i)), \quad s_i \in S_i,$$

[18] Здесь и далее для удобства байесовские стратегии помечаются знаком «$\sim$».

где матожидание $E_{t_i}(\phi_i(s_i, \tilde{s}_{-i}(t_{-i}); t_i)$ вычисляется по распределению вероятностей $\mu_i(\cdot|t_i)$[19], а

$$\tilde{s}_{-i}(t_{-i}) \stackrel{\text{def}}{=} (\tilde{s}_1(t_1), \ldots, \tilde{s}_{i-1}(t_{i-1}), \tilde{s}_{i+1}(t_{i+1}), \ldots, \tilde{s}_n(t_n)).$$

В случае, когда все множества T_i конечные, ситуация $(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n)$ является байесовским равновесием, если для каждого игрока i и каждого его типа $t_i \in T_i$ стратегия $\tilde{s}_i(t_i)$ является оптимальным ответом игрока i типа t_i на комбинацию $\tilde{s}_{-i}$ байесовских стратегий других игроков:

$$\tilde{s}_i(t_i) \in \arg\max_{s_i \in S_i} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} \phi_i(s_i, \tilde{s}_{-i}(t_{-i}); t_i) \cdot \mu_i(t_{-i}|t_i).$$

В частности, в байесовской игре двух лиц

$$G = (\{1, 2\}, \{S_1, S_2\}, \{T_1, T_2\}, \{\phi_1, \phi_2\}, \{\mu_1, \mu_2\})$$

с конечными множествами T_1 и T_2 пара байесовских стратегий $(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$ образует байесовское равновесие, если

- для каждого типа $t_1 \in T_1$ игрока 1

$$\tilde{s}_1(t_1) \in \arg\max_{s_1 \in S_1} \sum_{t_2 \in T_2} \phi_1(s_1, \tilde{s}_2(t_2); t_1) \cdot \mu_1(t_2|t_1)$$

- и для каждого типа $t_2 \in T_2$ игрока 2

$$\tilde{s}_2(t_2) \in \arg\max_{s_2 \in S_2} \sum_{t_1 \in T_1} \phi_2(\tilde{s}_1(t_1), s_2; t_2) \cdot \mu_2(t_1|t_2).$$

Поиск байесовского равновесия, как правило, — очень сложная вычислительная задача. Поэтому мы здесь также рассмотрим два более ограничительные равновесия, найти которые бывает значительно проще, если такие равновесия в игре существуют.

Байесовская ситуация $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n)$ называется *ex-post равновесием* в байесовской игре G, если

$$\phi_i(\tilde{s}_i(t_i), \tilde{s}_{-i}(t_{-i}); t_i) \geq \phi_i(s_i, \tilde{s}_{-i}(t_{-i}); t_i), \quad s_i \in S_i,\ t \in T,\ i = 1, \ldots, n.$$

[19] Здесь мы не можем привести формулу для вычисления матожидания $E_{t_i}(\cdot)$, поскольку это требует от читателя знания *теории интегрирования Лебега* (см. раздел B.2). Заметим также, что во всех примерах, которые будут рассматриваться в дальнейшем, матожидания $E_{t_i}(\cdot)$ вычисляются по распределениям вероятностей, которые изучаются в стандартных курсах теории вероятностей.

Содержательно, байесовская ситуация $\tilde{s}$ является ex-post равновесием, если для любой комбинации типов игроков $t = (t_1, \ldots, t_n) \in T$, ситуация $(\tilde{s}_1(t_1), \ldots, \tilde{s}_n(t_n))$ является равновесием в бескоалиционной игре с полной информацией, в которой участвуют только игрок 1 типа t_1, игрок 2 типа t_2, и т. д. игрок n типа t_n.

Байесовская стратегия $\tilde{s}_i : T \to S_i$ называется *доминирующей байесовской стратегией* игрока i в байесовской игре G, если

$$\phi_i(\tilde{s}_i(t_i), s_{-i}; t_i) \geq \phi_i(s_i, s_{-i}; t_i), \quad s_i \in S_i,\ s_{-i} \in S_{-i},\ t_i \in T_i\,,$$

где $S_{-i} = S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n$. Эти неравенства означают, что $\tilde{s}_i(t_i)$ есть оптимальный ответ игрока i типа t_i на любую комбинацию стратегий других игроков.

Байесовская ситуация $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n)$ называется *доминирующим байесовским равновесием* в байесовской игре G, если все составляющие байесовские стратегии $\tilde{s}_i$ являются доминирующими.

Важно отметить, что понятия ex-post равновесия и доминирующего байесовского равновесия не зависят от представлений игроков μ_i. В тех случаях, когда мы будем заинтересованы в поиске ex-post или доминирующего равновесия, пятый элемент $(\{\mu_i\}_{i \in N})$ в обозначении байесовской игры мы будем заменять знаком «$*$».

Соотношения между тремя введенными понятиями равновесия в байесовской игре следующие:

> доминирующее байесовское равновесие является ex-post равновесием, а ex-post равновесие является байесовским равновесием.

Байесовское равновесие в смешанных стратегиях

Если байесовская игра *конечная* (все множества T_i и S_i конечные), то *смешанная байесовская стратегия* игрока $i \in N$ определяется как векторная функция $\tilde{p}_i : T_i \to \Sigma^{k_i}$, где для $t_i \in T_i$ вектор

$$\tilde{p}_i(t_i) = (\tilde{p}_{i1}(t_i), \ldots, \tilde{p}_{i,k_i}(t_i))^T$$

задает распределение вероятностей на множестве $S_i = \{1, \ldots, k_i\}$ (чистых) стратегий игрока i.

Смешанная байесовская ситуация $(\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n)$ является *байесовским равновесием в смешанных стратегиях*, если для каждого игрока i и каждого его типа $t_i \in T_i$ смешанная байесовская стратегия $\tilde{p}_i(t_i)$ является оптимальным ответом игрока i типа t_i на сложившуюся ситуацию:

$$\tilde{p}_i(t_i) \in \arg\max_{p_i \in \Sigma^{k_i}} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} \sum_{s \in \prod_{j=1}^{n} S_j} \phi_i(s; t_i) \cdot \mu_i(t_{-i}|t_i) \times$$
$$\tilde{p}_{1,s_1}(t_1) \ldots \tilde{p}_{i-1,s_{i-1}}(t_{i-1})\, p_{i,s_i}\, \tilde{p}_{i+1,s_{i+1}}(t_{i+1}) \ldots \tilde{p}_{n,s_n}(t_n).$$

3.4. Аукционы

Первую формализацию аукционов предложил В. Викрей[20], которому за это в 1996 г. была присуждена Нобелевская премия в области экономики. В этом разделе мы рассмотрим два типа аукционов для демонстрации концепции байесовского равновесия.

На аукционе продается один объект, на который претендуют n покупателей (игроков). Покупатель i имеет свою оценку v_i стоимости продаваемого объекта, $i = 1, \ldots, n$. Будем предполагать, что другие покупатели знают лишь то, что v_i принадлежит некоторому множеству V_i. Покупатели одновременно объявляют суммы $b_1, b_2, \ldots, b_n$, которые они согласны заплатить за данный объект. Заметим, что покупатели не обязаны раскрывать свою оценку стоимости объекта, т. е. объявленная сумма b_i может быть не равна оценке v_i.

3.4.1. Аукционы первой цены

Аукционы первой цены — это один из наиболее распространенных типов аукциона, в котором выигрывает (покупает объект за объявленную цену) тот покупатель, который назначил более высокую цену. В случае равенства нескольких цен, победитель определяется подбрасыванием монеты. Ради простоты, здесь мы ограничимся рассмотрением случая, когда покутелей только два, т. е. $n = 2$.

Без ограничения общности будем считать, что $v_i \in V_i = [0, 1]$ для

[20] W. Vickrey. Counterspeculation, auctions and competitive sealed tenders. J. Finance (1968) 8–37.

$i = 1, 2$. Функции выигрышей покупателей (игроков) следующие:

$$\phi_1(b_1, b_2; v_1) = \begin{cases} v_1 - b_1, & \text{если } b_1 > b_2, \\ \frac{1}{2}(v_1 - b_1), & \text{если } b_1 = b_2, \\ 0, & \text{если } b_1 < b_2, \end{cases}$$

$$\phi_2(b_1, b_2; v_2) = \begin{cases} v_2 - b_2, & \text{если } b_2 > b_1, \\ \frac{1}{2}(v_2 - b_2), & \text{если } b_2 = b_1, \\ 0, & \text{если } b_2 < b_1. \end{cases}$$

Итак, мы имеем байесовскую игру двух лиц, в которой $S_1 = S_2 = [0,1]$ и $T_1 = T_2 = [0,1]$, причем, игрок 2 ничего не знает о v_1 и поэтому полагает, что v_1 есть равномерно распределенная на $[0,1]$ случайная величина, а игрок 1 также ничего не знает о v_2 и поэтому полагает, что v_2 есть равномерно распределенная на $[0,1]$ случайная величина. Поэтому представления игроков задаются следующим образом:

$$\mu_1(v_2 \in [\alpha, \beta] | v_1) = \beta - \alpha, \quad 0 \le \alpha \le \beta \le 1,$$
$$\mu_2(v_1 \in [\alpha, \beta] | v_2) = \beta - \alpha, \quad 0 \le \alpha \le \beta \le 1.$$

Байесовская стратегия игрока i есть функция $\tilde{b}_i : T_i \to S_i$: если покупатель i оценивает объект в $v_i \in T_i$, то на аукционе он объявляет цену $\tilde{b}_i(v_i)$.

Из определения функций выигрышей видно, что каждый из покупателей может выиграть положительную сумму только тогда, когда он назначает цену, которая меньше его оценки продаваемого объекта. Оказывается, что оптимальным поведением покупателя является объявить цену, равную половине своей оценки стоимости предмета.

Теорема 3.1. *В игре «аукцион первой цены» байесовским равновесием является ситуация* $(\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2, \tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2)$.

Доказательство. Игрок 1 типа $v_1 \in [0,1]$ определяет свой лучший ответ $\tilde{b}_1(v_1)$ на стратегию $\tilde{b}_2(v_2)$ игрока 2, решая следующую оптимизационную задачу:

$$\max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 > \tilde{b}_2(v_2)) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 = \tilde{b}_2(v_2)) \right). \qquad (3.10)$$

В свою очередь, игрок 2 типа $v_2 \in [0,1]$ определяет свой лучший ответ $\tilde{b}_2(v_2)$ на стратегию $\tilde{b}_1(v_1)$ игрока 1, решая следующую оптимизационную задачу:

$$\max_{b_2 \in [0,1]} \left((v_2 - b_2)\mathbb{P}(b_2 > \tilde{b}_1(v_1)) + \frac{1}{2}(v_2 - b_2)\mathbb{P}(b_2 = \tilde{b}_1(v_1)) \right). \qquad (3.11)$$

Мы найдем наилучший ответ игрока 1 на байесовскую стратегию $\tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2$ игрока 2, подставляя в (3.10) значение $\tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2$ и затем решая следующую оптимизационную задачу:

$$\max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 > v_2/2) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(b_1 = v_2/2) \right) =$$
$$\max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)\mathbb{P}(v_2 < 2b_1) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)\mathbb{P}(v_2 = 2b_1) \right) =$$
$$\max_{b_1 \in [0,1]} \left((v_1 - b_1)2b_1 \right).$$

Из условия оптимальности первого порядка

$$2v_1 - 4b_1 = 0$$

находим $\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2$.

Следовательно, байесовская стратегия $\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2$ является оптимальным ответом игрока 1 на байесовскую стратегию $\tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2$ игрока 2. По симметрии, байесовская стратегия $\tilde{b}_2^*(v_2) = v_2/2$ является оптимальным ответом игрока 2 на байесовскую стратегию $\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1/2$ игрока 1. $\square$

3.4.2. Аукционы второй цены

По правилам *аукциона второй цены* (или *аукциона Викрей*) победитель платит наибольшую из сум проигравших. Исходя из этого правила мы определяем функцию выигрышей игрока i следующим образом:

$$\phi_i(b_1, \dots, b_n; v_i) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{1}{|X(b)|}(v_i - \bar{b}_i), & i \in X(b), \\ 0, & i \notin X(b), \end{cases}$$

где $X(b) \stackrel{\text{def}}{=} \arg\max\{b_j : 1 \le j \le n\}$ есть множество игроков, объявивших наибольшую цену, а $\bar{b}_i \stackrel{\text{def}}{=} \max\{b_j : 1 \le j \le n,\ j \ne i\}$ есть наибольшая цена, объявленная конкурентами игрока i.

Отметим, важную особенность данного аукциона: объявленная покупателем цена не влияет на величину его выигрыша, она лишь влияет на то, будет ли он победителем или нет.

Здесь мы имеем байесовскую игру n лиц, в которой $S_i = T_i = V_i = [0, \infty)$ для всех $i = 1, \dots, n$. В данной игре мы не указываем представлений игроков, поскольку, как мы увидим позже, в этой игре у каждого игрока имеется доминирующая байесовская стратегия, которая не зависит от его представления о типах других игроков.

Байесовская стратегия игрока i есть функция $\tilde{b}_i : T_i \to S_i$: если покупатель i оценивает объект в $v_i \in T_i$, то на аукционе он объявляет цену $\tilde{b}_i(v_i)$. Следующая теорема утверждает, что в данной игре говорить правду является доминирующей стратегией для каждого из игроков.

Теорема 3.2. *В игре «аукцион второй цены» ситуация*

$$(\tilde{b}_1^*(v_1) = v_1, \ldots, \tilde{b}_n^*(v_n) = v_n),$$

в которой байесовской стратегией каждого из игроков является честно объявить свою оценку объекта, является доминирующим байесовским равновесием.

Доказательство. Если игрок i оказался победителем, то

$$v_i = \max_{1 \le j \le n} v_j \quad \text{и} \quad \phi_i(v_1, \ldots, v_n; v_i) = v_i - \bar{v}_i \ge 0,$$

где $\bar{v}_i \stackrel{\text{def}}{=} \max\{v_j : 1 \le j \le n, \; j \ne i\}$ есть наибольшая оценка среди оценок конкурентов игрока i. Если игрок i назначит цену $b_i > \bar{v}_i$, то он все равно выиграет, но его выигрыш не изменится. Если же он назначит цену $b_i = \bar{v}_i$, то, если он выиграет при подбрасывании монеты, его выигрыш не изменится, а если он проиграет, его выигрыш будет равен нулю. И наконец, если $b_i < \bar{v}_i$, игрок i проиграет и вместо $v_i - \bar{v}_i$ получит 0.

Если игрок i оказался среди проигравших, то его выигрыш равен 0. Пусть победителем оказался игрок j. Тогда $v_i \le v_j$. Если игрок i объявит цену $b_i < v_j$, то он все равно проиграет. А если игрок i объявит цену $b_i > v_j$, то он выиграет, но его выигрыш будет $v_i - v_j \le 0$. □

3.5. Парные торги

В *парных торгах* участвуют двое: продавец и покупатель некоторого товара. Продавец называет цену s, а покупатель — цену b. Если $b < s$, то товар не продается. Если же $b \ge s$, то товар продается по цене $(b+s)/2$.

Продавец оценивает свой товар суммой $v_s \in [0, 1]$, а покупатель — суммой $v_b \in [0, 1]$. Покупатель считает, что v_s есть случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$. Аналогично, продавец считает, что v_b — это случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$.

Здесь мы имеем байесовскую игру двух лиц, в которой $N = \{s, b\}$, где продавец — это игрок s, а покупатель — игрок b. Множества стратегий и типов игроков совпадают: $S_s = T_s = S_b = T_b = [0, 1]$. Представления игроков симметричны и задаются следующим образом:

$$\mu_s(v_b \in [\alpha, \beta]|v_s) = \beta - \alpha, \quad 0 \le \alpha \le \beta \le 1,$$
$$\mu_b(v_s \in [\alpha, \beta]|v_b) = \beta - \alpha, \quad 0 \le \alpha \le \beta \le 1.$$

Функции выигрышей продавца и покупателя следующие:

$$\phi_s(s, b; v_s) = \begin{cases} (b+s)/2 - v_s, & \text{если } b \ge s, \\ 0, & \text{если } b < s, \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\phi_b(s, b; v_b) = \begin{cases} v_b - (b+s)/2, & \text{если } b \ge s, \\ 0, & \text{если } b < s. \end{cases} \tag{3.13}$$

Байесовские стратегии продавца $\tilde{s}^*(v_s)$ и покупателя $\tilde{b}^*(v_b)$ образуют *байесовскую ситуацию равновесия* $(\tilde{s}^*, \tilde{b}^*)$, если они являются решениями включений:

$$\tilde{s}^*(v_s) \in \arg\max_{s\in[0,1]} \int_{\{v_b\in[0,1]:\, \tilde{b}(v_b)\ge s\}} \left(\frac{s + \tilde{b}(v_b)}{2} - v_s \right) dv_b\,, \tag{3.14}$$

$$\tilde{b}^*(v_b) \in \arg\max_{b\in[0,1]} \int_{\{v_s\in[0,1]:\, b\ge \tilde{s}(v_s)\}} \left(v_b - \frac{\tilde{s}(v_s) + b}{2} \right) dv_s\,. \tag{3.15}$$

Совместна ли система включений (3.14), (3.15)? Да, совместна. Причем, имеется бесконечно много решений. Опишем одно простое семейство таких решений. Для любого фиксированного $x \in (0, 1)$ определим *пороговые стратегии* игроков следующим образом:

$$\tilde{s}^x(v_s) = \begin{cases} x, & \text{если } v_s \le x, \\ 1, & \text{если } v_s > x, \end{cases}$$

$$\tilde{b}^x(v_b) = \begin{cases} x, & \text{если } v_b \ge x, \\ 0, & \text{если } v_b < x. \end{cases}$$

В том, что пара $(\tilde{s}^x(v_s), \tilde{b}^x(v_b))$ является байесовским равновесием, можно убедиться формально проверяя справедливость включений (3.14), (3.15). Но проще прибегнуть к логическим рассуждениям.

Если $v_s > x$, то продавец объявляет цену 1, которую покупатель не может превзойти. В этом случае любая стратегия покупателя (в том числе и $\tilde{b}^x(v_b)$) дает ему нулевой выигрыш. Если $v_s \le x$, то продавец объявляет цену x, и оптимальным ответом покупателя будет объявить минимальную цену x и купить товар, если $v_b \ge x$, или объявить цену 0 (отказаться от покупки), если $v_b < x$. Итак, мы доказали, что $\tilde{b}^x(v_b)$ есть оптимальный ответ покупателя на стратегию продавца $\tilde{s}^x(v_s)$. Аналогично можно обосновать то, что стратегия продавца $\tilde{s}^x(v_s)$ является оптимальным ответом на стратегию покупателя $\tilde{b}^x(v_b)$.

3.5.1. Равновесие в линейных стратегиях

Кроме пороговых равновесий в игре «парные торги» имеются и другие равновесия. Причем, задача поиска всех равновесий до сих пор не решена. В этом разделе мы будем искать байесовскую ситуацию равновесия $(\tilde{s}, \tilde{b})$, когда обе байесовские стратегии $\tilde{s}$ и $\tilde{b}$ являются линейными функциями оценок игроков:

$$\tilde{s}(v_s) = a_s + c_s v_s, \quad \tilde{b}(v_b) = a_b + c_b v_b, \tag{3.16}$$

где a_s, c_s, a_b и c_b неизвестные константы, которые мы собираемся определить. Логично предположить, что $c_s > 0$ и $c_b > 0$.

Найдем оптимальный ответ $\tilde{s}(v_s)$ продавца с оценкой v_s на байесовскую стратегию $\tilde{b}(v_b) = a_b + c_b v_b$ покупателя. Поскольку

$$\{v_b \in [0,1] : \tilde{b}(v_b) \ge s\} = \{v_b \in [0,1] : a_b + c_b v_b \ge s\} = [(s - a_b)/c_b, 1],$$

то

$$\begin{aligned}
u_s(s) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\{v_b \in [0,1]:\, \tilde{b}(v_b) \ge s\}} \left(\frac{s + \tilde{b}(v_b)}{2} - v_s \right) dv_b = \\
&= \int_{(s-a_b)/c_b}^{1} \left(\frac{s + a_b + c_b v_b}{2} - v_s \right) dv_b = \\
&= \left(v_b \, \frac{s + a_b - 2v_s}{2} + \frac{c_b v_b^2}{4} \right) \Bigg|_{(s-a_b)/c_b}^{1} = \\
&= \left(1 - \frac{s - a_b}{c_b} \right) \frac{s + a_b - 2v_s}{2} + \frac{c_b}{4} \left(1 - \frac{(s - a_b)^2}{c_b^2} \right) = \\
&= \left(1 - \frac{s - a_b}{c_b} \right) \left(\frac{3s + a_b + c_b}{4} - v_s \right).
\end{aligned}$$

Максимизируя $u(s)$ по $s \in [0,1]$, найдем $\tilde{s}(v_s)$. Запишем условие оптимальности первого порядка:

$$u_s'(s) = -\frac{1}{c_b}\left(\frac{3s + a_b + c_b}{4} - v_s\right) + \frac{3}{4}\left(1 - \frac{s - a_b}{c_b}\right) = 0.$$

Решая данное уравнение относительно s, найдем

$$\tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_s + \frac{a_b + c_b}{3}. \tag{3.17}$$

Теперь найдем оптимальный ответ $\tilde{b}(v_b)$ покупателя с оценкой v_b на байесовскую стратегию $\tilde{s}(v_s) = a_s + c_s v_s$ продавца. Поскольку

$$\{v_s \in [0,1] : b \geq \tilde{s}(v_s)\} = \{v_s \in [0,1] : b \geq a_s + c_s v_s\} = [0, (b - a_s)/c_s],$$

то

$$\begin{aligned}
u_b(b) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\{v_s \in [0,1]:\, b \geq \tilde{s}(v_s)\}} \left(v_b - \frac{\tilde{s}(v_s) + b}{2}\right) dv_s = \\
&= \int_0^{(b-a_s)/c_s} \left(v_b - \frac{a_s + c_s v_s + b}{2}\right) dv_s = \\
&= \left(v_s \frac{2v_b - a_s - b}{2} - \frac{c_s v_s^2}{4}\right)\Bigg|_0^{(b-a_s)/c_s} = \\
&= \frac{(b - a_s)(2v_b - a_s - b)}{2c_s} - \frac{c_s(b - a_s)^2}{4c_s^2} = \\
&= \frac{b - a_s}{c_s}\left(v_b - \frac{3b + a_s}{4}\right).
\end{aligned}$$

Максимизируя $u_b(b)$ по $b \in [0,1]$, найдем $\tilde{b}(v_b)$. Запишем условие оптимальности первого порядка:

$$u_b'(b) = \frac{1}{c_s}\left(v_b - \frac{3b + a_s}{4}\right) - \frac{3(b - a_s)}{4c_s} = 0.$$

Решая данное уравнение относительно b, найдем

$$\tilde{b}(v_b) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{3}a_s. \tag{3.18}$$

Подставляя в (3.17) и (3.18) выражения (3.16), получим систему:

$$\begin{aligned}
a_s + c_s v_s &= \frac{2}{3}v_s + \frac{a_b + c_b}{3}, \\
a_b + c_b v_b &= \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{3}a_s.
\end{aligned}$$

Откуда $c_s = 2/3$, $c_b = 2/3$, $a_s = (a_b + c_b)/3$, $a_b = a_s/3$ и, следовательно, $a_s = 1/4$, $a_b = 1/12$. Подставляя эти коэффициенты в выражения (3.16), получим

$$\tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_s + \frac{1}{4}, \quad \tilde{b}(v_b) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12}. \tag{3.19}$$

На основании проведенного анализ, мы формулируем следующую теорему.

Теорема 3.3. *В игре «парные торги» пара байесовских стратегий продавца и покупателя, определенная по формулам (3.19), образует байесовскую ситуацию равновесия.*

В ситуации равновесия $(\tilde{s}, \tilde{b})$ сделка состоится только тогда, когда

$$\tilde{b}(v_b) - \tilde{s}(v_s) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12} - \frac{2}{3}v_s - \frac{1}{4} \geq 0,$$

или

$$v_b - v_s \geq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{4}.$$

Это неравенство означает, что равновесие в линейных стратегиях *неэффективно*, поскольку сделка не состоится во многих случаях, когда обоим, продавцу и покупателю, выгодно заключить сделку.

3.6. Война до истощения

Как вы уже могли заметить, поиск байесовского равновесия, как правило, — очень сложная вычислительная задача. Часто эта задача существенно упрощается в случае симметричной информированности игроков. Так было, когда мы изучали аукцион первой цены. Так будет и в игре «*война до истощения*», симметричный случай которой мы рассматриваем в данном разделе. Но в этой игре представление игроков будет задаваться более общим, чем равномерное, распределением вероятностей.

Два игрока борются за приз. Каждый игрок имеет свою оценку стоимости данного приза, но оппонент данной оценки не знает. Игрок 1 полагает, что оценка игрока 2 есть случайная величина v_2 со значениями из $[0, 1]$ и плотностью f. Аналогично, игрок 2 считает, что оценка игрока 1 есть случайная величина v_1 со значениями из $[0, 1]$ и той же плотностью f. За одну минуту сражения каждый игрок тратит сумму c. Как долго игрок i с оценкой v_i должен сражаться, прежде чем уступить?

Эту игру можно также проинтерпретировать как торги на аукционе, в котором два участника хотят купить некоторый предмет. Торги начинаются по сигналу и продолжаются до момента t, когда один из участников не подаст сигнал, свидетельствующий о том, что он отказывается от дальнейшей борьбы; его оппонент покупает предмет, заплатив за него ct.

Представим данную ситуацию как байесовскую игру двух лиц, в которой стратегией игрока i является выбор момента t_i, когда нужно прекратить бороться. Поэтому $S_1 = S_2 = \mathbb{R}_+$. Тип игрока определяется его оценкой приза. Поэтому $T_1 = T_2 = [0,1]$. Представления игроков симметричны и задаются следующим образом:

$$\mu_1(v_2 \in [a,b] | v_1) = \mu_2(v_1 \in [a,b] | v_2) = F(b) - F(a),$$

где функция $F(x) = \int_0^x f(z)\,dz$ есть распределение случайной величины с плотностью f.

В ситуации (t_1, t_2), когда игрок 1 прекращает борьбу в момент t_1, а игрок 2 — в момент t_2, выигрыши игрока 1 типа v_1 и игрока 2 типа v_2 соответственно равны:

$$\phi_1(t_1, t_2; v_1) = \begin{cases} v_1 - ct_2, & \text{если } t_1 \geq t_2, \\ -ct_1, & \text{если } t_1 < t_2, \end{cases}$$

$$\phi_2(t_1, t_2; v_2) = \begin{cases} v_2 - ct_1, & \text{если } t_2 \geq t_1, \\ -ct_2, & \text{если } t_2 < t_1. \end{cases}$$

Байесовкая стратегия игрока i есть функция $\tilde{t}_i : [0,1] \to \mathbb{R}_+$, где $\tilde{t}_i(v)$ есть время прекращения борьбы игроком i типа v, $i = 1,2$. Мы будем предполагать, что каждая функция $\tilde{t}_i$ дифференцируема и является строго возрастающей: $\tilde{t}_i'(v) > 0$ для всех $v \in [0,1]$. Тогда для $\tilde{t}_i$ существует обратная функция $\tilde{t}_i^{-1}$, значение $x_i(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \tilde{t}_i^{-1}(t)$ которой определяет тип игрока i, прекращающего борьбу в момент t. Нетрудно обосновать, что игроку i типа $v = 0$ не стоит начинать борьбу. Поэтому $t_i(0) = x_i(0) = 0$, а $\tilde{t}_i(v) > 0$ для всех $v > 0$, и $x_i(t) > 0$ для всех $t > 0$.

Если игрок 1 прекращает борьбу в момент t_1, то он победит (получит приз) игрока 2 с типом $x_2(t_1)$ или меньшим, и проиграет игроку 2, чей тип больше $x_2(t_1)$. Игрок 1 типа v_1 находит свой оптимальный ответ на байесовскую стратегию $\tilde{t}_2(v_2)$ игрока 2, максимизируя свой ожидаемый выигрыш:

$$\max_{t_1 \in \mathbb{R}_+} \int_0^{x_2(t_1)} (v_1 - ct_2(v_2)) f(v_2)\,dv_2 - ct_1(1 - F(x_2(t_1))). \tag{3.20}$$

Для задачи (3.20) запишем условие оптимальности первого порядка[21]:

$$x_2'(t_1)v_1 f(x_2(t_1)) - c(1 - F(x_2(t_1)) = 0.$$

Откуда для $v_1 > 0$ (тогда и $t_1 > 0$) имеем равенство:

$$x_2'(t_1) = \frac{c(1 - F(x_2(t_1))}{v_1 f(x_2(t_1))}. \tag{3.21}$$

В данной симметричной игре мы будем искать симметричное равновесие, когда оба игрока используют одну и ту же стратегию: $\tilde{t}_1(v) = \tilde{t}_2(v) = \tilde{t}(v)$. В таком случае равенство (3.21) примет следующий вид:

$$x'(t) = \frac{c(1 - F(x(t))}{vf(x(t))},$$

где $x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{t}^{-1}(t)$. В точке равновесия $t = \tilde{t}(v)$ имеем $x(t) = v$ и $x'(t) = 1/\tilde{t}'(v)$. Поэтому

$$\tilde{t}'(v) = \frac{vf(v)}{c(1 - F(v))}$$

и равновесная байесовская стратегия каждого игрока определяется по формуле:

$$\tilde{t}(v) = \int_0^v \frac{zf(z)}{c(1 - F(z))}\, dz.$$

На основании проведенного анализа мы формулируем следующую теорему.

Теорема 3.4. *В симметричной игре «война до истощения» байесовским равновесием является ситуация, образованная следующими байесовскими стратегиями игроков:*

$$\tilde{t}_i(v_i) = \int_0^{v_i} \frac{zf(z)}{c(1 - F(z))}\, dz, \quad i = 1, 2.$$

[21] Здесь мы используем правило дифференцирования интеграла, зависящего от параметра, когда и пределы интегрирования зависят от параметра: если $I(y) = \int_0^{\alpha(y)} f(x, y)dx$, то $I'(y) = \int_0^{\alpha(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx + \alpha'(y)f(\alpha(y), y)$.

3.7. Конечные байесовские игры

Как и обычные бескоалиционные игры, байесовские игры можно задавать как в стратегической так и в позиционной (расширенной) форме. Но как заметил Нобелевский лауреат 1994 г. в области экономики Дж. Харсаний[22], *конечную* (когда у каждого игрока конечное число типов и стратегий) позиционную байесовскую игру с согласующимися представлениями игроков можно представить как обычную позиционную игру с несовершенной информацией, вводя *Природу* в качестве игрока, который назначает типы игрокам случайным образом в соответствии с распределением вероятностей, заданном на множестве всех комбинаций типов игроков. Ситуации равновесия в этой игре с несовершенной информацией соответствуют байесовским ситуациям равновесия в исходной байесовской игре. Продемонстрируем эту идею на примере.

Пример 3.1 (вход на рынок). *Рассмотрим ситуацию, с которой сталкивается большая фирма (игрок 1) после того, как начинающая малая фирма (игрок 2) объявила о развертывании новой «прорывной» технологии. Большая фирма имеет исследовательское подразделение, которое работает над многими инновациями. Но только сама большая фирма знает, достигли ли ее исследователи какого-либо существенного прогресса в разработке продукта, аналогичного тому, с каким малая фирма выходит на рынок. Малая фирма ничего не знает о положении дел на большой фирме и поэтому с вероятностью 1/2 полагает, что большая фирма близка к выходу на рынок с конкурентным продуктом.*

После объявления малой фирмы большая фирма может (У) уступить рынок данного продукта малой фирме или (О) остаться на рынке. Если большая фирма объявит, что она остается на рынке, малая фирма может (П) продать технологию большой фирме или (В) выйти на рынок со своим продуктом.

Доходы (выигрыши) фирм в зависимости от того, готова ли большая фирма выйти на рынок с новым продуктом, следующие:

Большая фирма готова

	П	*В*
У	$0,4$	$0,4$
О	$3,1$	$5,-1$

,

Большая фирма не готова

	П	*В*
У	$0,4$	$0,4$
О	$3,1$	$-1,5$

.

[22] J.C. Harsanyi. Games with incomplete information played by bayesian players. *Management Science* **14** (1967-68) 159–182, 320–334, and 486–502.

Решение. Поскольку игрок 2 не имеет секретной информации, то у него всего один тип $T_2 = \{1\}$ (единственный тип игрока 1 мы можем обозначить произвольным образом). Игрок 1 скрывает информацию о готовности своего продукта, поэтому у него два типа $T_1 = \{\text{Г}, \text{Н}\}$, где «Г» означает, что продукт готов, а «Н»— не готов. Представление игрока 2 о типах игрока 1 задаются вероятностями

$$\mu_2(\text{Г}|1) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_2(\text{Г}) = \frac{1}{2}, \quad \mu_2(\text{Н}|1) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_2(\text{Н}) = \frac{1}{2}.$$

Следуя идее Дж. Харсаний, данную байесовскую игру рассматриваем как игру двух лиц с несовершенной информацией, в которой первый случайный ход делает *Природа*. Дерево для данной игры представлено на рис. 3.1.

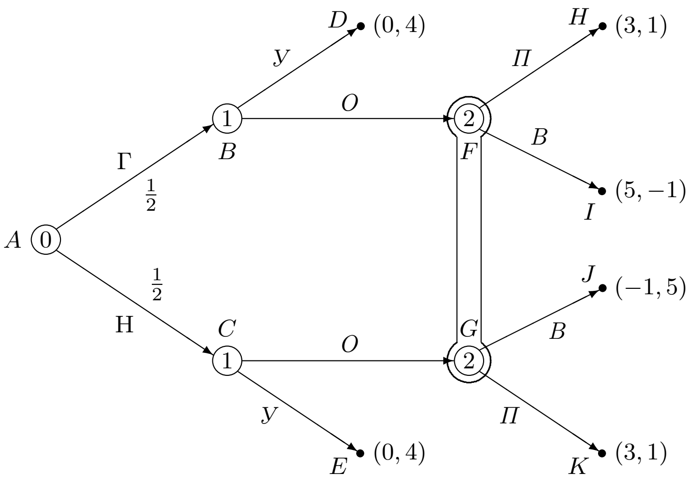


Рис. 3.1. Дерево игры «вход на рынок»

Стратегическая форма позиционной игры на рис. 3.1, а также усеченный вариант стратегической формы, полученный после удаления доминируемых стратегий *УУ* и *УО*, — это следующие биматричные игры:

	П	*В*
УУ	$0, 4$	$0, 4$
УО	$\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}$
ОУ	$\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}, \frac{3}{2}$
ОО	$3, 1$	$2, 2$

,

	П	*В*
ОУ	$\frac{3}{2}, \frac{5}{2}^*$	$\frac{5}{2}^*, \frac{3}{2}$
ОО	$3^*, 1$	$2, 2^*$

.

Здесь стратегии игрока 1 закодированы стандартным образом: первая из двух букв указывает ход в позиции B, а вторая — в позиции C.

Поскольку усеченная биматричная игра не имеет равновесия в чистых стратегиях, то будем искать равновесие в смешанных стратегиях. Предположив, что в ситуации равновесия обе недоминируемые стратегии *ОУ* и *ОО* игрока 1 активные, найдем его равновесную смешанную стратегию

$$p^* = (p^*_{УУ} = 0, p^*_{УО} = 0, p^*_{ОУ} = x, p^*_{ОО} = 1 - x)^T,$$

решая уравнение

$$\frac{5}{2}x + (1 - x) = \frac{3}{2}x + 2(1 - x).$$

Откуда $x = 1/2$, и равновесная смешанная стратегия игрока 1 есть

$$p^* = (p^*_{УУ} = 0, p^*_{УО} = 0, p^*_{ОУ} = 1/2, p^*_{ОО} = 1/2)^T,$$

Определим эквивалентную поведенческую стратегию для стратегии p^*:

$$\rho(B, D) = 0,\ \rho(B, F) = 1,\ \rho(C, E) = 1/2,\ \rho(C, G) = 1/2.$$

По данной поведенческой стратегии мы можем записать равновесную байесовскую стратегию игрока 1:

$$\tilde{p}^*(\text{Г}) = \begin{pmatrix} \tilde{p}^*_У(\text{Г}) \\ \tilde{p}^*_О(\text{Г}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\tilde{p}^*(\text{Н}) = \begin{pmatrix} \tilde{p}^*_У(\text{Н}) \\ \tilde{p}^*_О(\text{Н}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, предположив, что в ситуации равновесия обе стратегии *П* и *В* игрока 2 активные, найдем его равновесную смешанную стратегию $q^* = (q^*_П = y, q^*_В = 1 - y)^T$, решая уравнение

$$\frac{3}{2}y + \frac{5}{2}(1 - y) = 3y + 2(1 - y).$$

Откуда $y = 1/4$, и равновесная смешанная стратегия игрока 2 есть вектор

$$q^* = (q^*_П = 1/4, q^*_В = 3/4)^T.$$

Поскольку у игрока 2 всего один тип и одно информационное множество, то его равновесная байесовская стратегия следующая:

$$\tilde{q}^*(1) = \begin{pmatrix} \tilde{q}^*_П(1) \\ \tilde{q}^*_В(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}.$$

Нам осталось вычислить и проинтерпретировать представление игрока 2 в позициях его единственного информационного множества $\{F, G\}$:

$$\mu(F) = \frac{\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(G)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{2}{3},$$
$$\mu(G) = \frac{\mathbb{P}(G)}{\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(G)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

В начале игры, малая фирма (игрок 2) ничего не знала о положении дел на большой фирме. Поэтому в начале игры представление игрока 2 задавалось вероятностями: $\mu_2(\Gamma) = \mu_2(\mathrm{H}) = 1/2$. Когда малой фирме нужно принимать решение продавать технологию большой фирме или самой выйти на рынок (это решение соответствует выбору игроком 2 хода *П* или *В* в позициях информационного множества $\{F, G\}$), малая фирма знает, что большая фирма осталась на рынке. Эта новая информация позволяет малой фирме уточнить свое первоначальное представление и теперь она с вероятностью $\bar{\mu}_2(\Gamma) = \mu(F) = 2/3$ полагает, что большая фирма готова к выходу на рынок с конкурентным продуктом, и с вероятностью $\bar{\mu}_2(\mathrm{H}) = \mu(G) = 1/3$ полагает, что большая фирма не имеет конкурентного продукта. □

3.8. Сигнальные игры

Сигнальная игра — это мнонократно повторяющаяся игра двух лиц, называемых *отправитель* (**S**) и *получатель* (**R**). Отправитель имеет некоторый известный ему тип $t \in T$ (T — множество возможных типов), но неизвестный получателю. В каждом раунде игры, с учетом своего типа, отправитель посылает сообщение $m \in M$, где M обозначает множество всех допустимых сообщений. Получатель, имея сообщение m, выбирает *действие* $a \in A$ (A — множество возможных действий). При этом, отправитель выигрывает $\phi_{\mathbf{S}}(m, a; t)$, а получатель — $\phi_{\mathbf{R}}(m, a; t)$.

Примером сигнальных игр (хотя и не Байесовских) являются дуополии Штакельберга (см. упр. 2.15), в которых отправителем является фирма-лидер, а получателем — фирма-последователь.

Для простоты представления в дальнейшем будем считать, что множество T типов отправителя конечное. Тогда представление получателя о типах отправителя есть функция $\mu : T \to [0, 1]$, где $\mu(t)$ есть вероятность того, что отправитель имеет тип t.

Байесовская стратегия отправителя есть функция $\tilde{m} : T \to M$, т. е. отправитель типа t посылает сообщение $\tilde{m}(t)$[23]. *Стратегия* получателя есть функция $\tilde{a} : M \to A$, т. е. получатель, наблюдая сообщение m, выбирает действие $\tilde{a}(m)$.

Пара байесовских стратегий $(\tilde{m}^*, \tilde{a}^*)$ есть *совершенное байесовское равновесие в сигнальной игре*, если выполняются условия:

$$\tilde{m}^*(t) \in \arg\max_{m\in M} \phi_{\mathbf{S}}(m, \tilde{a}^*(m); t), \quad t \in T, \tag{3.22a}$$

$$\tilde{a}^*(m) \in \arg\max_{a\in A} \sum_{t:\, m=\tilde{m}^*(t)} \phi_{\mathbf{R}}(m, a; t)\, \mu_{\tilde{m}^*}(t|m), \quad m \in M, \tag{3.22b}$$

$$\sum_{t\in T} \mu_{\tilde{m}^*}(t|m) = 1, \quad m \in M, \tag{3.22c}$$

$$\mu_{\tilde{m}^*}(t|m) = \frac{\mu(t)}{\sum\limits_{\tau\in T:\, m=\tilde{m}^*(\tau)} \mu(\tau)}, \quad m \in \tilde{m}^*(T). \tag{3.22d}$$

Содержательно, $\mu_{\tilde{m}^*}(t|m)$ есть вероятность того, что отправитель имеет тип t, при условии, что он послал сообщение m, пользуясь байесовской стратегией $\tilde{m}^*$. Условие (3.22d) означает, что условные вероятности $\mu_{\tilde{m}^*}(t|m)$ для сообщений $m \in \tilde{m}^*(T)$, которые посылаются хотя бы одним из типов отправителей, вычисляются по правилу Байеса. Условные вероятности $\mu_{\tilde{m}^*}(t|m)$ для сообщений $m \in M \setminus \tilde{m}^*(T)$, которые не посылаются ни одним из типов отправителей, нельзя определить по формуле (3.22d), поскольку в этом случае знаменатель равен нулю. Такие условные вероятности можно определить произвольным образом.

Важно отметить, что сигнальная игра — это двухшаговая игра. И в ней, как и в позиционной игре с несовершенной информацией, игроки должны принимать решения с учетом всей информации, доступной в момент принятия решения. В данном случае получатель должен принимать решение, с учетом того, какое сообщение он получил. Поэтому в сигнальной игре нам нужно искать совершенные равновесия.

Теперь предположим, что множества сообщений M и действий A конечные. *Смешанная байесовская стратегия* отправителя есть векторная функция $\tilde{p} : T \to \mathbb{R}^M_+$, т. е. отправитель типа t посылает сообщение $m \in M$ с вероятностью $\tilde{p}_m(t)$ $(\sum_{m\in M} \tilde{p}_m(t) = 1)$. *Смешанная стратегия* получателя есть векторная функция $\tilde{q} : M \to \mathbb{R}^A_+$, т. е. получатель, наблюдая сообщение m, выбирает действие $a \in A$ с вероятностью $\tilde{q}_a(m)$ $(\sum_{a\in A} \tilde{q}_a(m) = 1)$.

[23] Напомним, что мы отмечаем знаком «∼» байесовские стратегии.

Если множество T типов отправителя конечное, то мы ищем *совершенное байесовское равновесие в смешанных стратегиях* $(\tilde{p}^*, \tilde{q}^*)$, решая систему:

$$\tilde{p}^*(t) \in \arg\max_{p \in \Sigma^M} \sum_{m \in M} \sum_{a \in A} \phi_{\mathbf{S}}(m, a; t)\, p_m \tilde{q}^*_a(m), \quad t \in T, \tag{3.23a}$$

$$\tilde{q}^*(m) \in \arg\max_{q \in \Sigma^A} \sum_{t \in T} \sum_{a \in A} \phi_{\mathbf{R}}(m, a; t)\, \mu_{\tilde{p}^*}(t|m)\, q_a, \quad m \in M, \tag{3.23b}$$

$$\sum_{t \in T} \mu_{\tilde{p}^*}(t|m) = 1, \quad m \in M, \tag{3.23c}$$

$$\mu_{\tilde{p}^*}(t|m) = \frac{\tilde{p}^*_m(t)\mu(t)}{\sum_{\tau \in T} \tilde{p}^*_m(\tau)\, \mu(\tau)}, \quad m \in M_{\tilde{p}^*}. \tag{3.23d}$$

где Σ^M и Σ^A есть симплексы соответственно в $\mathbb{R}^M_+$ и $\mathbb{R}^A_+$, а $M_{\tilde{p}^*} \stackrel{\text{def}}{=} \{m \in M : \sum_{t \in T} \tilde{p}^*_m(t) > 0\}$.

Содержательно, $\mu_{\tilde{p}^*}(t|m)$ есть вероятность того, что отправитель имеет тип $t \in T$, при условии, что он послал сообщение $m \in M$, пользуясь смешанной байесовской стратегией $\tilde{p}^*(t)$. Отметим, что $M_{\tilde{p}^*}$ есть множество сообщений, которые посылаются хотя бы одним из отправителей с ненулевой вероятностью, при условии, что отправитель типа $t \in T$ использует смешанную стратегию $\tilde{p}^*(t)$. Условие (3.23d) означает, чтобы вероятности $\tilde{q}^*(m)$ для сообщений $m \in M_{\tilde{p}^*}$ вычисляются по формуле Байеса.

В дальнейшем, в случае отсутствия двусмысленности, мы будем писать $\mu(t|m)$ вместо $\mu_{\tilde{p}^*}(t|m)$, опуская индекс $\tilde{p}^*$, который указывает на то, что вероятность $\mu_{\tilde{p}^*}(t|m)$ вычислена в предположении, что отправитель использует смешанную стратегию $\tilde{p}^*$.

Байесовское равновесие в сигнальной игре называется *пуловым равновесием*, если отправители разных типов могут посылать одинаковое сообщение. Если сообщения всех отправителей различны, то такое байесовское равновесие называется *отделяющим*.

Если сигнальная игра конечная, т. е. множества T, M и A конечные, то ее решаем, как и любую другую конечную байесовскую игру, путем сведения к позиционной игре с несовершенной информацией (см. раздел 3.7).

Пример 3.2. *Рассмотрим абстрактную сигнальную игру с* $T = \{t_1, t_2\}$, $M = \{m_1, m_2\}$, $A = \{a_1, a_2\}$, $\mu(t_1) = 2/3$, $\mu(t_2) = 1/3$, *когда платежи определяются следующим образом:*

Отправитель t_1

	a_1	a_2
m_1	$4, 0$	$1, 3$
m_2	$0, 0$	$2, 1$

Отправитель t_2

	a_1	a_2
m_1	$0, 1$	$2, 4$
m_2	$1, 2$	$1, 0$

Существуют ли в данной игре пулово и отделяющее равновесия?

Решение. Представим данную конечную байесовскую игру как позиционную игру с несовершенной информацией, изображенную на рис. 3.2.

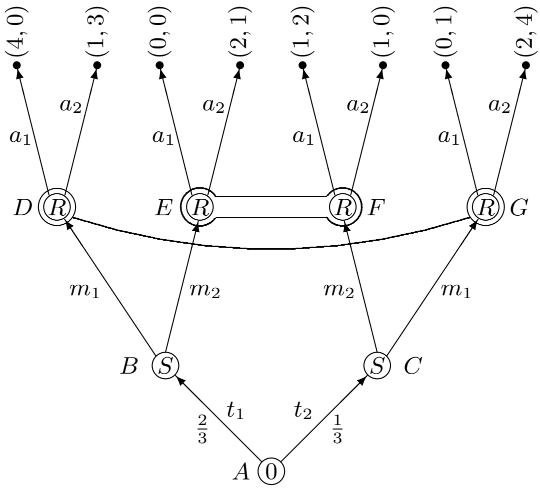


Рис. 3.2. Позиционная форма сигнальной игры из примера 3.2

В данной игре у каждого игрока по два информационных множества, в каждом из которых по два хода. Ее стратегическая форма есть следующая биматричная игра:

	(a_1, a_1)	(a_1, a_2)	(a_2, a_1)	(a_2, a_2)
(m_1, m_1)	$\frac{8}{3}, \frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}, \frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}^*, \frac{10}{3}^*$	$\frac{4}{3}, \frac{10}{3}^*$
(m_1, m_2)	$3^*, \frac{2}{3}$	$3^*, 0$	$1, \frac{8}{3}^*$	$1, 2$
(m_2, m_1)	$0, \frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}, 1$	$\frac{2}{3}, \frac{4}{3}$	$2^*, 2^*$
(m_2, m_2)	$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}^*$	$\frac{5}{3}, \frac{2}{3}^*$	$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}^*$	$\frac{5}{3}, \frac{2}{3}^*$

Здесь для $i, j \in \{1, 2\}$

- стратегия (m_i, m_j) соответствует байесовской стратегии отправителя с $\tilde{m}(t_1) = m_i$ и $\tilde{m}(t_2) = m_j$;
- стратегия (a_i, a_j) соответствует байесовской стратегии получателя с $\tilde{a}(m_1) = a_i$ и $\tilde{a}(m_2) = a_j$.

В рассматриваемой биматричной игре имеется два равновесия в чистых стратегиях.

1. Ситуация $((m_1, m_1), (a_2, a_1))$, которая также является совершенным байесовским равновесием в позиционной игре на рис. 3.2 с представлением получателя, заданным вероятностями:

$$\mu(D) = 2/3, \quad \mu(E) = 0, \quad \mu(F) = 1, \quad \mu(G) = 1/3.$$

Эта ситуация соответствует пуловому равновесию в сигнальной игре, которое определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\tilde{m}^{\text{п}}(t_1) = \tilde{m}^{\text{п}}(t_2) = m_1,\\
&\tilde{a}^{\text{п}}(m_1) = a_2, \quad \tilde{a}^{\text{п}}(m_2) = a_1,\\
&\mu_{\tilde{m}^{\text{п}}}(t_1|m_1) = \mu(D) = 2/3, \quad \mu_{\tilde{m}^{\text{п}}}(t_2|m_1) = \mu(G) = 1/3,\\
&\mu_{\tilde{m}^{\text{п}}}(t_1|m_2) = \mu(E) = 0, \quad \mu_{\tilde{m}^{\text{п}}}(t_2|m_2) = \mu(F) = 1.
\end{aligned}$$

2. Ситуация $((m_2, m_1), (a_2, a_2))$, которая также является совершенным байесовским равновесием в позиционной игре на рис. 3.2 с представлением получателя, заданным вероятностями:

$$\mu(D) = 0, \quad \mu(E) = 1, \quad \mu(F) = 0, \quad \mu(G) = 1.$$

Эта ситуация соответствует отделяющему равновесию в сигнальной игре, которое определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\tilde{m}^{\text{o}}(t_1) = m_2, \quad \tilde{m}^{\text{o}}(t_2) = m_1,\\
&\tilde{a}^{\text{o}}(m_1) = a_2, \quad \tilde{a}^{\text{o}}(m_2) = a_2,\\
&\mu_{\tilde{m}^{\text{o}}}(t_1|m_1) = \mu(D) = 0, \quad \mu_{\tilde{m}^{\text{o}}}(t_2|m_1) = \mu(G) = 1,\\
&\mu_{\tilde{m}^{\text{o}}}(t_1|m_2) = \mu(E) = 1, \quad \mu_{\tilde{m}^{\text{o}}}(t_2|m_2) = \mu(F) = 0.
\end{aligned}$$

$\square$

3.9. Рынок лимонов

«Рынок лимонов» — так называется статья Г. Акерлофа[24], за которую он получил в 2001 Нобелевскую премию в области экономики. В этой статье на примере рынка подержанных автомобилей (в США плохие автомобили называют «лимонами») дается анализ рынка с неполной и ассиметричной информацией. Проблема стара как стары сами рынки: «если он хочет продать лошадь, то хочу ли я ее купить?»

Покупатель приходит к продавцу подержанных автомобилей, в гараже у которого имеются автомобили только двух типов: хорошие (вишни), которые продаются за \$2500 при остаточной стоимости \$2000, и плохие (лимоны), которые продаются за \$1250 при остаточной стоимости \$1000.

Предположим, что количество хороших и плохих автомобилей в гараже одинаково. Если у покупателя нет никакой дополнительной информации (нет сигналов), то он вынужден выбирать автомобиль случайным образом: с вероятностью $1/2$ он выберет хороший автомобиль, и с вероятностью $1/2$ он выберет плохой автомобиль. Поэтому рациональный покупатель предложит за выбранный автомобиль среднюю цену $(2500 + 1250)/2 = \$1875$. Если выбранный автомобиль оказался плохим, то продавца устроит предложенная цена, и он продаст плохой автомобиль, заработав при этом $1875 - 1000 = \$875$. Если же выбранный автомобиль оказался хорошим, то продавец его не продаст за предложенную цену, поскольку его чистый доход $1875 - 2000 = -\$125$ окажется отрицательным.

Поскольку покупатель за среднюю цену может купить только плохой автомобиль, то ему незачем предлагать \$1875 за автомобиль, который можно купить за \$1250. Поэтому покупатель всегда будет предлагать цену \$1250. При таком поведении покупателей, средний доход продавца за один рауд торгов равен

$$\frac{1}{2}\,(1250 - 1000) + \frac{1}{2}\,0 = 125,$$

что меньше ожидаемого дохода

$$\frac{1}{2}\,(1250 - 1000) + \frac{1}{2}\,(2500 - 2000) = \frac{1}{2}\,250 + \frac{1}{2}\,500 = 375$$

при полной информированности покупателей и одинаковом спросе на оба типа автомобилей. Продавец будет вынужден уменьшить долю или

[24] G. Akerlof. The market for lemons: qolitative uncertainty and the market mechanism. *Quoterly Journal of Economics* **84** (1970) 488–500.

совсем перестать продавать дорогие хорошие автомобили. Покупатели, которым нужен хороший автомобиль будут вынуждены перейти на рынок новых автомобилей.

Итак, мы показали, что

> при отсутствии информации у покупателей некачественные дешевые товары вытесняют из ассортимента дорогие качественные товары.

На рынке страховых услуг подобный феномен часто называют «обратной проблемой отбора (adverse selection problem)», когда вытесняются дешевые страховые полисы. Подобное также происходит на рынках кредитования, где вытесняются дешевые кредиты.

Чтобы исправить ситуацию, продавцам нужно каким-то образом лучше информировать покупателей (посылать сигналы), чтобы изменить их представление о качестве товара или услуги.

3.9.1. Сигнальная игра «рынок лимонов»

По прежнему считаем, что в гараже у продавца одинаковое количество плохих и хороших автомобилей, и что покупатель не может отличить плохой автомобиль от хорошего. Чтобы изменить информированность покупателя, продавец решил давать на некоторые из продаваемых автомобилилей годовую гарантию, которая полностью покрывает расходы на ремонт. Известно, что в течении года ожидаемые расходы на ремонт плохого автомобиля составляют \$500, а хорошего — \$50 (большинство автомобилей в течении года не требуют ремонта).

Правила игры следующие. Вначале покупатель выбирает автомобиль. Это — случайный ход, так как покупатель не может отличить плохой автомобиль (лимон) от хорошего (вишни). После этого продавец говорит дает ли он гарантию на выбранный автомобиль или не дает. Затем покупатель предлагает свою цену: \$1250 или \$2500. Слелка состоится за исключением случая, когда за хороший автомобиль была предложена цена \$1250.

В результате мы получаем конечную сигнальную игру, в которой множество типов отправителя T=$\{\textit{П},X\}$, множество сообщений отправителя $M = \{\textit{Г}, \textit{Б}\}$, а множество действий получателя $A = \{1250, 2500\}$, где обозначения для типов, сообщений и действий следующие:

- *П* — автомобиль плохой, X — автомобиль хороший;

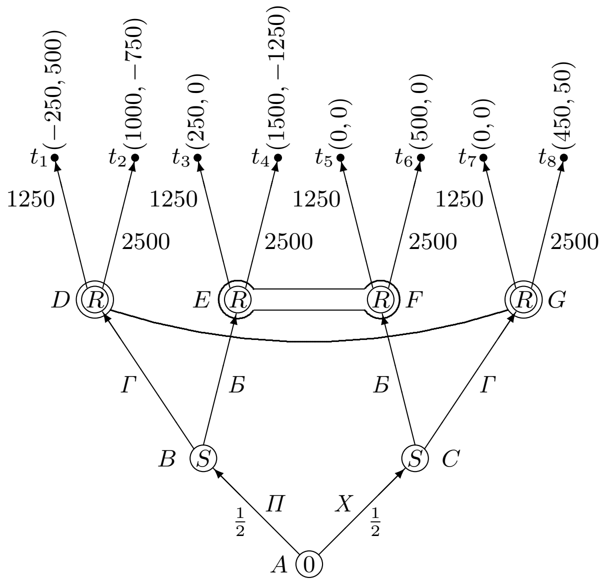


Рис. 3.3. Дерево игры «рынок лимонов»

- *Г* — автомобиль продается с гарантией, *Б* — без гарантии;
- 1250 — предложить цену \$1250, 2500 — предложить цену \$2500.

Представление получателя о типах отправителя следующее:

$$\mu(\textit{П}) = \mu(X) = 1/2.$$

Представим нашу сигнальную игру как позиционную игру с несовершенной информацией, дерево игры которой задано на рис. 3.3. Отметим, что при вычислении выигрышей игроков учитываются ожидаемые размеры компенсации продавцом издержек покупателя на ремонт автомобиля:

$$\begin{pmatrix}\phi_S(t_1)\\ \phi_R(t_1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1250-1000-500\\ 1250+500-1250\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-250\\ 500\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\phi_S(t_2)\\ \phi_R(t_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2500-1000-500\\ 1250+500-2500\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1000\\ -750\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\phi_S(t_3)\\ \phi_R(t_3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1250-1000\\ 1250-1250\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}250\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\phi_S(t_4)\\ \phi_R(t_4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2500-1000\\ 1250-2500\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1500\\ -1250\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\phi_S(t_5)\\ \phi_R(t_5)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}, \quad \text{(сделка не состоялась)}$$
$$\begin{pmatrix}\phi_S(t_6)\\ \phi_R(t_6)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2500-2000\\ 2500-2500\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}500\\ 0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\phi_S(t_7)\\ \phi_R(t_7)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}, \quad \text{(сделка не состоялась)}$$
$$\begin{pmatrix}\phi_S(t_8)\\ \phi_R(t_8)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2500-2000-50\\ 2500+50-2500\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}450\\ 50\end{pmatrix}.$$

В игре на рис. 3.3 нет подигр, отличных от всей игры. Поэтому строим стратегическую форму для всей игры. Это есть следующая биматричная игра:

	$[1250, 1250]$	$[1250, 2500]$	$[2500, 1250]$	$[2500, 2500]$
ГГ	$-125, 250^*$	$-125, 250^*$	$725^*, -350$	$725, -350$
ГБ	$-125, 250^*$	$125, 250^*$	$500, -375$	$750, -375$
БГ	$125^*, 0$	$750, -625$	$350, 25^*$	$975, -600$
ББ	$125^*, 0^*$	$1000^*, -625$	$125, 0^*$	$1000^*, -625$

В данной биматричной игре имеется единсвенное равновесие в чистых стратегиях (*ББ*, $[1250, 1250]$), которое, однако, не является равновесием в позиционной игре на рис. 3.3. Действительно, если игрок S, который делает ход первым, поменяет стратегию *ББ* на стратегию *БГ*, то рациональный игрок R ответит стратегией $[2500, 1250]$. В результате, выигрыш игрока S увеличиться со \$125 до \$350.

Будем искать равновесие в смешанных стратегиях. Стратегия $[1250, 1250]$ игрока R доминирует две другие его стратегии $[1250, 2500]$ и $[2500, 2500]$. После удаления из таблицы выигрышей столбцов $[1250, 2500]$ и $[2500, 2500]$ в полученной усеченной игре стратегии *ГГ* и *БГ* игрока S соответственно доминируют две другие его стратегии *ГБ* и *ББ*. После удаления строк *ГБ* и *ББ* получиться следующая усеченная биматричная игра:

	$[1250, 1250]$	$[2500, 1250]$	
ГГ	$-125, 250^*$	$725^*, -350$	x
БГ	$125^*, 0$	$350, 25^*$	$1-x$
	y	$1-y$	

Вероятности x и y найдем, решая уравнения:

$$\begin{aligned} 250x + 0(1-x) = -350x + 25(1-x) \quad &\Rightarrow \quad x = 1/25, \\ -125y + 725(1-y) = 125y + 350(1-y) \quad &\Rightarrow \quad y = 3/5. \end{aligned}$$

Поэтому следующие распределения вероятностей

$$\begin{array}{ll} p^*_{ГГ} = 1/25, & q^*_{[1250,1250]} = 3/5, \\ p^*_{ГБ} = 0, & q^*_{[1250,2500]} = 0, \\ p^*_{БГ} = 24/25, & q^*_{[2500,1250]} = 2/5, \\ p^*_{ББ} = 0, & q^*_{[2500,2500]} = 0 \end{array} \tag{3.24}$$

определяют ситуацию равновесия для стратегической формы игры «рынок лимонов». В этой ситуации ожидаемые выигрыш игрока S равен

$$-125 \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{3}{5} + 725 \cdot \frac{1}{25} + 125 \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{3}{5} + 350 \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{2}{5} = 158\frac{43}{90},$$

а ожидаемый выигрыш игрока R следуюший:

$$250 \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{3}{5} - 350 \cdot \frac{1}{25} + 0 \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{3}{5} + 25 \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{2}{5} = 10.$$

Отметим, что применение сигналов позволяет игроку S (продавцу) увеличить свой выигрыш со \$125 (выигрыш без применения сигналов) до $\$158\frac{43}{90}$.

Нам осталось определить совершенное байесовское равновесие для игры «рынок лимонов». Сначала преобразуем смешанные стратегии (3.24) в поведенческие. Результат записан на рис. 3.4. На этом рисунке вероятности, приписанные позициям D, E, F и G, — это представление игрока R.

Теперь мы можем записать совершенное байесовское равновесие:

$$\tilde{p}^*(П) = \begin{pmatrix} \tilde{p}^*_Г(П) \\ \tilde{p}^*_Б(П) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/25 \\ 24/25 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{p}^*(X) = \begin{pmatrix} \tilde{p}^*_Г(X) \\ \tilde{p}^*_Б(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{q}^*(Г) = \begin{pmatrix} \tilde{q}^*_{1250}(Г) \\ \tilde{q}^*_{2500}(Г) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{q}^*(Б) = \begin{pmatrix} \tilde{q}^*_{1250}(Б) \\ \tilde{q}^*_{2500}(Б) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

После получения сообщения преставление получателя о типах отправителя следующее:

$$\begin{aligned} \mu(П|Г) = \mu(D) = 1/26, \qquad & \mu(X|Г) = \mu(G) = 25/26, \\ \mu(П|Б) = \mu(E) = 1, \qquad & \mu(X|Б) = \mu(F) = 0. \end{aligned}$$

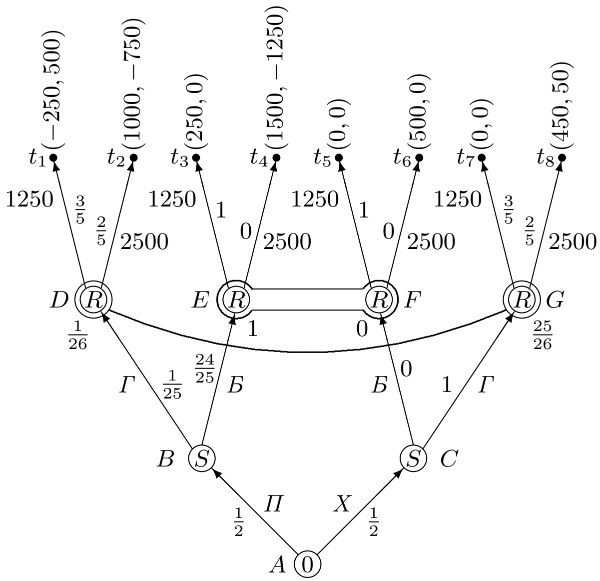


Рис. 3.4. Байесовское равновесие в игре «рынок лимонов»

Мы видим, что в равновесной ситуации продавец (отправитель) всегда дает гарантию на хороший автомобиль, а на плохой автомобиль дает гарантию случайным образом: в среднем одну гарантию на 25 автомобилей. Покупатель (получатель) всегда предлагает цену \$1250 за автомобиль без гарантии, а за автомобиль с гарантией назначает цену случайным образом: \$1250 с вероятностью 3/5 и \$2500 с вероятностью 2/5.

Теперь проинтерпретируем представление покупателя (получателя), после того как он выбрал автомобиль и продавец предложил или не предложил гарантию. Если продавец не предложил гарантии, то покупатель считает, что он выбрал плохой автомобиль. Если же продавец предложил гарантию, то покупатель полагает с вероятностью 1/26, что он выбрал плохой автомобиль, и с вероятностью 25/26, что он выбрал хороший автомобиль.

3.10. Сигнальная модель рынка труда

Первым применением сигнальных игр в экономике была сигнальная модель рынка труда, предложенная Нобелевским лауреатом 2001 года в области экономики А. Спенсом[25].

Предположим, что имеются всего две группы служащих. Группа 1 состоит из людей с низкой продуктивностью, которая оценивается зарплатой равной 1, а в группу 2 входят люди с высокой продуктивностью, которая оценивается зарплатой равной 2. Если бы у нанимателей не было возможности отличать людей из разных групп, то они назначали бы зарплату случайным образом: 1 с вероятностью ρ и 2 с вероятностью $1-\rho$, где ρ есть доля людей в группе 1. Тогда средний уровень зарплаты был бы равен $1 \cdot \rho + 2 \cdot (1-\rho) = 2-\rho$. Заметим, что чем меньше размер группы 2 людей с высокой продуктивностью (чем больше ρ), тем больше их неудовлетворение средней зарплатой $2-\rho$.

Сигналами называют такие косвенные факторы, которые может наблюдать лицо принимающее решение и которые коррелированы (положительно или отрицательно) с тем ненаблюдаемым фактором, по значению которого можно принять правильное решение. В данном примере ненаблюдаемым фактором для нанимателя является продуктивность человека, претендующего получить работу. Ясно, что людям из группы 1 нет никакого резона объявлять нанимателю, что они обладают низкой продуктивностью. В качестве сигнала (наблюдаемого фактора) А. Спенс использовал *образование* (точнее, количество лет обучения) претендента на работу.

Предположим, что стоимость обучения в течении года для людей из группы 1 равна 1 (им нужно нанимать репетиторов, тратить больше времени на учебу и т. д.), а для людей из группы 2 равна $1/2$. Тогда m лет обучения для человека из группы 1 стоит m, а для человека из группы 2 стоит $m/2$. В оригинальной простой модели А. Спенса предполагается, что образование не влияет на продуктивность человека в той специальности, на которую он претендует. Заметим, что стоимость обучения обратно коррелирована с продуктивностью человека (ненаблюдаемым для нанимателя фактором).

Мы имеем сигнальную игру, где отправителем является служащий, а получателем — наниматель. Отправители бывают двух типов: $T = \{1,2\}$, где тип $t \in \{1,2\}$ означает, что человек принадлежит группе t. Множество сообщений $M = [0,\infty)$, и сообщение $m \in M$ означает, что человек обучался m лет (здесь мы не предполагаем, что m есть целое число). У получателя (нанимателя) всего два действия (решения): $A = \{1,2\}$, где действие 1 означает «назначить зарплату 1», а действие 2 означает «назначить зарплату 2». Наниматель хочет назначить такую

[25] A.M. Spence. Job market signaling. *Quaterly Journal of Economics* **87** (1973) 355–374.

зарплату своему работнику, которая наиболее точно соответствует его продуктивности. Здесь для любых $t \in T$, $m \in M$ и $a \in A$ выигрыши отправителя и получателя соответственно равны

$$\phi_S(m, a; t) = a - m/t, \quad \phi_R(m, a; t) = -(t - a)^2.$$

Представления получателя о типах отправителя следующие: $\mu(1) = \rho$, $\mu(2) = 1 - \rho$.

В данной простой сигральной игре имеется бесконечно много отделяющих равновесий, каждое из которых допускает следующую интерпретацию.

Предположим, что на основании предшествующего опыта наниматель определил такой уровень образования $m^* \in (1, 2)$, что продуктивность человека, обучавшегося $m < m^*$ лет, равна 1 с вероятностью 1, а продуктивность человека, обучавшегося $m \geq m^*$ лет, равна 2 с вероятностью 1. Сказанное означает, что наниматель применяет *пороговую стратегию*

$$\tilde{a}^*(m) = \begin{cases} 1, & m < m^*, \\ 2, & m \geq m^*, \end{cases} \tag{3.25}$$

а его представление о типе служащего (отправителя) после получения сообщения m определяется следующим образом:

$$\mu(1|m) = \begin{cases} 1, & m < m^*, \\ 0, & m \geq m^* \end{cases} \quad \text{и} \quad \mu(2|m) = \begin{cases} 0, & m < m^*, \\ 1, & m \geq m^*. \end{cases} \tag{3.26}$$

Давайте определим оптимальный ответ служащих обоих типов на пороговую стратегию нанимателя. При таком поведении нанимателя выигрыш служащего из группы t $(t = 1, 2)$ равен

$$\phi_S(m, \tilde{a}^*(m); t) \stackrel{\text{def}}{=} u_t(m) = \tilde{a}^*(m) - c_t(m) = \begin{cases} 1 - m/t, & m < m^*, \\ 2 - m/t, & m \geq m^*, \end{cases}$$

где $c_t(m) = m/t$ есть стоимость обучения для людей группы t. Функция $\tilde{a}^*(m)$, выражающая зависимость зарплаты человека от количества лет обучения m, изображена жирной линией на рис. 3.5. Там же представлены и функции затрат на обучение $c_1(m)$ и $c_2(m)$.

Максимизируя $u_1(m)$, группа 1 определяет свою оптимальную стратегию $m_1 = 0$, при которой ее выигрыш равен $u_1(m_1) = 1 - m_1 = 1$. Оптимальной стратегией группы 2 яляется $m_2 = m^*$, при которой ее выигрыш равен $u_2(m_2) = 2 - m^*/2 > 1$.

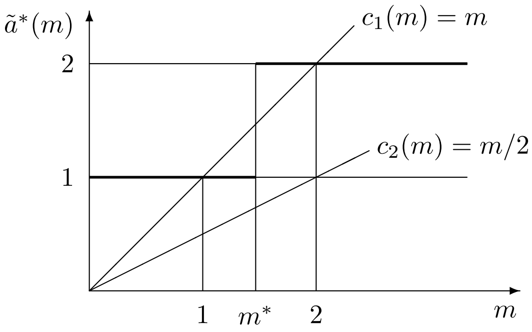


Рис. 3.5. Сигнальное равновесие

Следовательно, оптимальным ответом служащих (отправителя) на стратегию нанимателя (получателя) $\tilde{a}^*$ является байесовская стратегия $\tilde{m}^*$, которая определяется по правилу: $\tilde{m}^*(1) = 0$ и $\tilde{m}^*(2) = m^*$. То, что стратегия нанимателя (получателя) $\tilde{a}^*$ является оптимальным ответом на стратегию служащих (отправителя) $\tilde{m}^*$ следуе из того, что в ситуации $(\tilde{m}^*, \tilde{a}^*)$ выигрыш получателя равен нулю, что является максимально возможным выигрышем.

В заключение заметим, что членам группы 2 выгодно подавать сигналы о стоимости своего образования, при условии, что $m^* < 2\rho$, поскольку в этом случае их доход $2 - m^*/2$ будет больше среднего дохода $2 - \rho$, который получают наниматели не имеющие никакой информации о нанимаемых.

3.11. Равновесие в смешанных стратегиях как предел байесовского равновесия

Новую интерпрететацию понятия «смешанной стратегии» как предела байесовского равновесия предложил Дж. Харсаний (см. сноску на стр. 113). В этом разделе мы продемонстрируем эту интерпретацию на конкретном примере.

Рассмотрим игру «конфликт полов» (см. пример 1.10) со следующими выигрышами игроков (мужа и жены):

	Футбол	Балет
Футбол	$2^*, 1^*$	$0, 0$
Балет	$0, 0$	$1^*, 2^*$

.

Вспомним, что в этой игре имеется два равновесия $(1,1)$ и $(2,2)$ в чистых стратегиях и одно равновесие в смешанных стратегиях $p^* = (2/3, 1/3)$ и $q^* = (1/3, 2/3)$.

Теперь предположим, что супруги не вполне уверены в предпочтениях своих избранников. Более точно, предположим, что выигрыши супругов следующие:

	Футбол	Балет
Футбол	$2+t_h, 1$	$0, 0$
Балет	$0, 0$	$1, 2+t_w$

.

Здесь t_h и t_w равномерно распределенные на отрезке $[0, x]$ независимые случайные величины. Предполагается, что муж знает величину t_h, а жена — t_w.

Здесь мы имеем байесовскую игру двух лиц со следующими параметрами:

$$
\begin{aligned}
&T_1 = T_2 = [0, x],\\
&S_1 = \{1, 2\}, \quad S_2 = \{1, 2\},\\
&\mu_1(t_w \in [w, x] | t_h) = (x - w)/x,\\
&\mu_2(t_h \in [h, x] | t_w) = (x - h)/x.
\end{aligned}
$$

Мы будем искать байесовское равновесие в классе пороговых стратегий:

$$
\tilde{s}_1(t_h) = \begin{cases} 1, & \text{если } t_h \geq h,\\ 2, & \text{если } t_h < h, \end{cases} \qquad \tilde{s}_2(t_w) = \begin{cases} 1, & \text{если } t_w < w,\\ 2, & \text{если } t_w \geq w. \end{cases}
$$

Здесь муж (игрок 1) применяет стратегию 1, если t_h превосходит некоторое пороговое значение h, и стратегию 2 в противном случае. Аналогично, жена (игрок 2) применяет стратегию 2, если t_w превосходит некоторое пороговое значение w, и стратегию 1 в противном случае. Для данного x определим такие пороговые значения h и w, что пара стратегий $(\tilde{s}_1(t_h), \tilde{s}_2(t_w))$ образует байесовское равновесие.

Если жена применяет стратегию $\tilde{s}_2(t_w)$, то ожидаемый выигрыш мужа равен

$$
\frac{w}{x}\,(2 + t_h) + \frac{x - w}{x}\,0 = \frac{w}{x}\,(2 + t_h),
$$

если он применяет первую стратегию, и

$$\frac{w}{x}\,0 + \frac{x-w}{x}\,1 = \frac{x-w}{x},$$

если он применяет вторую стратегию. Мужу применять первую стратегию оптимально, если

$$\frac{w}{x}\,(2+t_h) \geq \frac{x-w}{x},$$

или $t_h \geq x/w - 3$. Следовательно, $h = x/w - 3$.

Аналогично, если муж применяет стратегию $\tilde{s}_1(t_h)$, то ожидаемый выигрыш жены равен

$$\frac{x-h}{x}\,1 + \frac{h}{x}\,0 = \frac{x-h}{x},$$

если она применяет первую стратегию, и

$$\frac{x-h}{x}\,0 + \frac{h}{x}\,(2+t_w) = \frac{h}{x}\,(2+t_w),$$

если она применяет вторую стратегию. Жене применять вторую стратегию оптимально, если

$$\frac{h}{x}(2+t_w) \geq \frac{x-h}{x},$$

или $t_w \geq \frac{x}{h} - 3$. Следовательно, $w = \frac{x}{h} - 3$.

Итак, мы имеем систему из двух уравнений

$$h = \frac{x}{w} - 3,$$
$$w = \frac{x}{h} - 3.$$

Отсюда $h = w$ и $w^2 + 3w - x = 0$. Решая это квадратное уравнение, находим

$$h = w = \frac{-3 + \sqrt{9+4x}}{2}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{h}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{w}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+4x}-3}{2x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{9+4x-9}{2x(\sqrt{9+4x}+3)} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, по мере сокращения неопределенности x, байесовская ситуация равновесия $(\tilde{s}_1(t_h), \tilde{s}_2(t_w))$, при которой

- жена полагает, что муж применяет стратегию 1 с вероятностью $1 - h/x$ и стратегию 2 с вероятностью h/x;
- муж полагает, что жена применяет стратегию 1 с вероятностью w/x и стратегию 2 с вероятностью $1 - w/x$

стремится к ситуации равновесия в смешанных стратегиях

$$(p^*, q^*) = ((2/3, 1/3)^T, (1/3, 2/3)^T)$$

для игры с полной информацией.

3.12. Упражнения

3.1. Два игрока не консультируясь друг с другом решают финансировать или не финансировать полезный для обоих проект. Каждый игрок оценивает свою пользу от реализации проекта равной 1. Проект будет реализован, если хотя бы один из игроков внесет свой взнос (недостающие средства будут выделены из местного бюджета). Взнос игрока i равен c_i $(i = 1, 2)$. Каждый игрок знает свой взнос, но не знает взноса другого игрока, и полагает, что взнос оппонента есть случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 2]$.

Найдите байесовское равновесие.

3.2. Рассмотрим аукцион первой цены, описанный в разделе 3.4.1. Но теперь предположим, что обе оценки v_1 и v_2 являются случайными величинами с одинаковой плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Найдите симметричное байесовское равновесие в линейных стратегиях, когда $\tilde{b}_i^*(v_i) = a + cv_i$ с $c > 0$.

3.3. На аукционе продается один предмет, купить который хотят два покупателя. Продавец и другой покупатель не знают оценки v_i стоимости предмета покупателем i и полагают, что v_i есть случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$, $i = 1, 2$. Предполагается, что оба покупателя рациональны и, в зависимости от правил проведения аукциона, используют оптимальные стратегии. Какой из двух аукционов, аукцион первой цены (см. раздел 3.4.1) или аукцион второй цены (см. раздел 3.4.2), следует организовать продавцу, чтобы максимизировать свою ожидаемую прибыль (матожидание суммы, полученной за предмет).

Указание. Решение данного упражнения сводится к вычислению матожиданий случайных величин $\min\{v_1, v_2\}$ и $\max\{v_1, v_2\}$.

3.4. *Аукцион второй цены с резервированием.* На аукционе продается один предмет, купить который хотят два покупателя. Продавец и другой покупатель не знают оценки v_i стоимости предмета покупателем i и полагают, что v_i есть случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$, $i = 1, 2$. Правила проведения аукциона теперь следующие. Оба покупателя одновременно объявляют свои предложения b_1 и b_2 (например, подают запечатанными в конвертах). Если $\max\{b_1, b_2\} < 1/2$, то предмет не продается. В противном случае предмет продается за $\max\{\min\{b_1, b_2\}, 1/2\}$ покупателю, предложившему наибольшую цену.

Найдите байесовское равновесие и вычислите ожидаемый выигрыш аукционера в равновесной ситуации.

3.5. Рассмотрим следующий аукцион по продаже одного предмета, цена которого для продавца равна 0. Два покупателя хотят купить данный предмет. Покупатель i считает, что предмет стоит v_i, и, если он покупает предмет, заплатив за него p, то его выигрыш равен $v_i - p$, а если он не покупает предмет, то его выигрыш равен 0, $i = 1, 2$. Будем считать, что v_1 и v_2 есть независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[\underline{v}, 1]$, где $0 \le \underline{v} \le 1$.

a) Найдите симметричное байесовское равновесие в линейных стратегиях $b_i = a + cv_i$, если торговля происходит по правилам аукциона первой цены, когда каждый покупатель i (игрок i) объявляет цену b_i, и побеждает (покупает предмет) тот, кто предложил наибольшую цену.

b) Пусть $\underline{v} = 0$, и предположим, что для участия в аукционе покупатель должен заплатить $\alpha \in (0, 1)$. До начала аукциона, каждый покупатель должен решить, стоит ли ему участвовать в нем. Если покупатель не покупает предмет, то его выигрыш равен 0. Если только один покупатель i прнинимает участие в аукционе, то он покупает предмет, если он назначает цену $b_i > 0$. Если оба покупателz решили принять участие в аукционе, то организуется аукцион первой цены, правила которого описаны в пункте a).

   Найдите симметричное байесовское равновесие, при условии, что при наличии конкуренции оба покупателя применяют линейные стратегии $b_i = a + cv_i$, $i = 1, 2$. Какой начальный взнос α может установить организатор аукциона, предполагая данное равновесие?

3.6. Рассмотрим биматричную игру со следующими выигрышами игроков:

$$\begin{bmatrix} x,1 & 1,0 \\ 1,0 & 0,1 \end{bmatrix},$$

где $x \in \{0,2\}$. Игрок 1 знает значение x, а игрок 2 полагает, что $x = 0$ с вероятностью $2/3$, или $x = 2$ с вероятностью $1/3$. Найдите байесовское равновесие.

3.7. Рассмотрим биматричную игру со следующими выигрышами игроков:

$$\begin{bmatrix} 1,2 & x,0 \\ x,y & -1,y \end{bmatrix},$$

где $x \in \{0,2\}$ и $y \in \{1,3\}$. Игрок 1 знает точное значение x, а игрок 2 — значение y. Независимо от значения x игрок 1 полагает, что оба значения y (1 и 3) равновероятны. Аналогично, независимо от значения y игрок 2 полагает, что оба значения x (0 и 2) равновероятны. Найдите байесовское равновесие.

3.8. В игре двух лиц игрок 1 имеет полную информацию об игроке 2, в то время как игрок 2 предполагает, что игрок 1 с равной вероятностью обладает одной из двух технологий. У каждого из игроков имеется по две стратегии. В зависимости от технологии игрока 1 матрицы выигрышей игроков следующие:

$$\text{Технология 1:} \quad \begin{pmatrix} 1,1 & 0,2 \\ 0,2 & 1,1 \end{pmatrix}, \qquad \text{Технология 2:} \quad \begin{pmatrix} 2,2 & 0,1 \\ 3,4 & 2,3 \end{pmatrix}.$$

Найдите все байесовские ситуации равновесия в чистых и смешанных стратегиях.

3.9. Каждый из двух игроков независимо решает, финансировать ли ему некоторый общественный проект, затраты на реализацию которого равны $c > 0$. Если оба игрока решают финансировать проект — они поровну делят издержки (каждый вносит $c/2$), если тольку один игрок решил финансировать проект, то он оплачивает все издержи по реализации проекта (платит c). Игрок i оценивает свою пользу от реализации проекта суммой $v_i \in \{v_L, v_H\}$, причем $0 < v_L < c/2 < v_H$. Значение v_1 неизвестно игроку 2, а значение v_2 — игроку 1.

Для заданных значений v_1, v_2 выигрыши игроков следующие:

	Ф	Н
Ф	$v_1 - c/2, v_2 - c/2$	$v_1 - c, v_2$
Н	$v_1, v_2 - 8$	$0, 0$

Здесь «Ф» означает финансировать, а «Н»— не финансировать.

Представления игроков симметричны и заданы следующими условными вероятностями:

$$\mu_1(v_L|v_L) = \mu_1(v_H|v_H) = 2/3, \quad \mu_1(v_H|v_L) = \mu_1(v_L|v_H) = 1/3,$$
$$\mu_2(v_L|v_L) = \mu_2(v_H|v_H) = 2/3, \quad \mu_2(v_H|v_L) = \mu_2(v_L|v_H) = 1/3.$$

Найдите совершенное байесовское равновесие, если $c = 8$, $v_L = 2$, $v_H = 10$.

3.10. В настоящий момент на некотором рынке работает только одна фирма 1, которая решает следует ли ей модернизировать свое предприятие. Фирма 2 решает входить ли ей на рынок и составить конкуренцию фирме 1, если последняя не модернизирует свое предприятие (если фирма 1 модернизирует свое предприятие, то фирма 2 не сможет с ней конкурировать и воздержится от выхода на рынок). Кроме этого, фирма 2 не знает реальных издержек фирмы 1 на модернизацию. Фирма 2 предполагает, что размер инвестиций на модернизацию должен быть высокий с вероятностью $\rho \in (0,1)$, а с вероятностью $(1-\rho)$ — низкий. Доходы (выигрыши) фирм в зависимости от размера инвестиций фирмы 1 следующие:

Высокие издержки

	B	H
M	$0,-2$	$4,0$
H	$4,2$	$6,0$

Низкие издержки

	B	H
M	$3,-2$	$7,0$
H	$4,2$	$6,0$

Здесь стратегии фирм обозначены следующим образом:

- фирма 1: M — модернизировать, H — не модернизировать;
- фирма 2: B — входить на рынок, H — не входить.

Найдите совершенные байесовские равновесия для всех значений параметра ρ.

3.11. Рабочий может быть одного из двух типов: квалифицированным (К) или неквалифицированным (Н). Фирма считает, что оба типа равновероятны. Квалифицированный рабочий за месяц может заработать 4 единицы, а неквалифицированный — только 2 единиц. В начале рабочий запрашивает зарплату, равную 2 или 3. Затем фирма либо нанимает рабочего, либо не нанимает. Если фирма отказывает в приеме на работу квалифицированному рабочему, то он, выполняя временные работы, сможет заработать в месяц 1 единицу. Неквалифицированный рабочий ничего не заработает.

Найдите совершенное байесовское равновесие.

3.12. Студент (отправитель) выпускного курса вуза претендует получить работу на фирме. Наниматель (получатель), судя по оценкам студента, считает, что вероятность того, что этот студент *умный*, равна ρ. Соответственно, по мнению нанимателя, вероятность того, что этот студент *глупый* равна $1-\rho$. Студент может проводить свободное время на пляже, или, чтобы лучше подготовиться к предстоящей работе, посещать платные курсы (и это наниматель может легко проверить). Наниматель должен решить нанять студента или не нанять. Выигрыши игроков в зависимости от типа студента (умный или глупый) следующие:

Студент умный

	Нанять	Не нанять
Пляж	$4, 2$	$1, 0$
Курсы	$2, 3$	$-1, 0$

Студент глупый

	Нанять	Не нанять
Пляж	$4, -2$	$1, 0$
Курсы	$2, 1$	$-1, 0$

Найдите совершенные байесовские равновесия для всех значений параметра ρ.

3.13. Фирма хочет реализовать новый проект стоимостью I за счет средств инвестора. В качестве единственной альтернативы инвестор может разместить эту сумму на депозите в банке по ставке $r \in (0, 1)$. Фирма планирует закрыть одно из своих подразделений, которое приносит доход P, а его сотрудников направить на реализацию проека. Доход от проекта будет равен R_q или R_n ($R_q > R_n > (1+r)I$), если его реализуют соответственно квалифицированные и неквалифицированные работники. Фирма знает квалификацию своих работников, а инвестор полагает, что вероятность того, что работники квалифицированы равна $\rho \in (0, 1)$.

Фирма предлагает инвестору разделить доход в пропорции $(s, 1-s)$ ($s \in (0, 1)$), т. е., если будет получен доход R, то инвестор получит sR, а фирма — $(1-s)R$.

При какой ставке s проект выгоден для реализации как для фирмы так и для инвестора?

3.14. В некоторой стране каждый рабочий обязан иметь медицинскую страховку. В стране имеется только одна страховая компания, которая предоставляет два вида годовых страховок: *полная*, которая полностью компенсирует все расходы на лечение, и *частичная*, которая компенсирует только половину расходов на лечение и поэтому стоит половину стоимости полной страховки. Страховая компания хотела бы предоставлять страховки рабочим с плохим здоровьем по большей цене. Но компания ничего не знает о состоянии здоровья конкретного рабочего, обратившегося за страховкой. Естественно, что рабочий знает состояние своего здоровья. Компания судит о состояниии здоровья рабочего по выбранному им типу страховки.

Известно, что рабочий с хорошим здоровьем в среднем тратит на лечение \$300, а рабочий с плохим здоровьем — \$1000. Государственные регулирующие органы постановили, что стоимость полной страховки не может превышать \$800, а частичной — \$400. При этом, государство обязуется компенсировать потери страховой компании в случае, если страховые взносы не покроют страховых выплат.

Представьте данную ситуацию как сигнальную игру, в которой отправителем является рабочий, а получателем — страховая компания. Выигрыш рабочего: стоимость лечения + страховая компенсация за лечение – стоимость страховки. Выигрыш страховой компании: стоимость страховки – страховые выплаты на лечение. Найдите байесовское равновесие.

Указание. Можно считать, что стоимость полной страховки равна 0 или 800, а частичной — 0 или 400. Если оптимальным окажется решение в смешанных стратегиях назначить цену полной страховки, скажем, 0 с вероятностью 1/4, и 800 с вероятностью 3/4, то это значит, что цена полной страховки должна быть равной $(1/4) \cdot 0 + (3/4) \cdot 800 = 600$.

3.15. Два игрока затеяли спор, который закончится дракой, если ни один из игроков не уступит в споре. В драке одержит верх физически сильнейший из игроков. Игрок 1 не знает насколько силен игрок 2, а игрок 2 с вероятностью δ полагает, что игрок 1 сильнее, и с вероятностью $(1 - \delta)$ — слабее. У каждого из игроков две стратегии: драться или уступить. В зависимости от того, какой из игроков сильнее, выигрыши игроков представлены в следующих таблицах:

Игрок 1 сильнее

	Драться	Уступить
Драться	$1, -1$	$1, 0$
Уступить	$0, 1$	$0, 0$

Игрок 2 сильнее

	Драться	Уступить
Драться	$-1, 1$	$1, 0$
Уступить	$0, 1$	$0, 0$

Найти совершенное байесовское равновесие.

3.16. Банк должен решить давать ли Ивану годовой заем в \$11 000 на покупку автомобиля, который стоит \$13 000. На данный момент Иван вполне удовлетворен своей легкой работой с годовым доходом \$8 000. Иван пообещал, что если он получит кредит, то перейдет на более тяжелую работу и за год сможет заработать \$15 000. Банк полагает, что с вероятностью $1/4$ Иван является лентяем и поэтому не выполнит обещание перейти на тяжелую работу. Если Иван не является лентяем, то выполнит свое обещание. В случае, когда Иван получит кредит и через год не вернет его, то банк заберет автомобиль, который после одного года эксплуатации стоит \$12 000, и продаст его за \$10 000.

Какой максимальный процент может назначить банк, чтобы рационально мыслящий Иван вернул кредит?

3.17. Каждое утро по одному представителю двух соперничающих семейств отправляются по делам в соседний город и затем приходят обедать в одно и то же кафе. Представителя миролюбивого семейства назовем игроком 1, а представителя семейства хулиганов — игроком 2. С вероятностью $3/4$ игрок 1 сильный, а с вероятностью $1/4$ — слабый.

Каждый раз первым в кафе приходит игрок 2. Когда приходит игрок 1, он заказывает (ко всему прочему) либо кружку пива, либо стакан молока. Увидев это, игрок 2, не зная типа игрока 1 (сильный или слабый), решает затевать драку или нет. Выигрыш игрока 2 определяется следующим образом:

- если он не дерется, то выигрыш равен 0 независимо от типа игрока 1;
- если дерется, то выигрывает
  - 1, если игрок 1 слабый;
  - -1, если игрок 1 сильный.

Слабый игрок 1 предпочитает молоко, а сильный игрок 1 предпочитает пиво. С учетом этого его выигрыши определяются по правилам:

- если он не дерется,
  - 3, если пьет любимый напиток;
  - 2, если пьет нелюбимый напиток;
- если он дерется,
  - 1, если пьет любимый напиток;
  - 0, если пьет нелюбимый напиток.

Найдите байесовское равновесие в данной сигнальной игре.

3.18. В беспроводных ad hoc сетях системы защиты от вторжений (IDS[26]) могут быть установлены в отдельных узлах сети, но это существенно повышает затраты энергии на таких узлах. Игрок 1 — это

[26] Intrusion Detection System

некоторый узел i, который подключается к сети. Этот узел может быть *нормальным*, который подключается для работы в сети, или *вредным*, который подключается, чтобы нанести ущерб всей сети или отдельным ее узлам. Игрок 2 — это некоторый узел сети j, который с вероятностью δ полагает, что подключающийся узел вредный.

Вредный узел может *атаковать* или *работать* в сети, а нормальный узел может только *работать*. Игрок 2 (узел j) может *мониторить* или *не мониторить*. Игрок 2 оценивает материальный вред (из-за нарушения целостности данных), который может принести успешная атака вредного узла, равным l. Будем также считать, что игрок 1 рассматривает потери игрока 2 как свой выигрыш. Стоимость атаки равна c_a, а стоимость мониторинга c_m.

IDS, установленная в узле j имеет следующие характеристики:

- *уровень обнаружения* $\alpha \in (0, 1]$, т. е. в случае атаки на узел, работающая IDS обнаружит атаку с вероятностью α;
- *уровень ложной тревоги* $\beta \in [0, 1)$, т. е. в случае отсутствия атаки, работающая IDS выдаст сигнал тревоги с вероятностью β; усилия игрока 2 по преодолению ложной атаки равны f.

Игрок 2 принимает решение, мониторить или не мониторить, когда он включает свой компьютер, т. е. до того, как игрок 1 (узел i) подсоединяется к сети.

1. Построить дерево игры и перейти к стратегической форме, если
   а) игрок 1 не может проверить, работает ли IDS на узле игрока 2;
   б) игрок 1 может проверить, работает ли IDS на узле игрока 2.
2. Для обоих случаев, а) и б), найти совершенное байесовское равновесие для следующих значений параметров:

$$\delta = 0.2,\ l = 2,\ c_a = 1,\ c_m = 1,\ \alpha = 0.9,\ \beta = 0.1,\ f = 1.$$

Глава 4
Кооперативные игры

Большинство неантагонистических конфликтов в экономике и смежных с ней областях характеризуются тем, что их участники могут объединять свои усилия. Как мы знаем, в бескоалиционной игре отклонение одного из игроков от ситуации равновесия не может дать ему какого-либо преимущества. Но при отклонении сразу нескольких игроков эти игроки могут получить больший выигрыш по сравнению с тем, что они имели в ситуации равновесия. При возможности кооперации возникает противоречие между устойчивостью ситуации, выраженной в виде равновесия, и ее целесообразностью, отражающей стремление игроков получить бо́льшие выигрыши.

Понятно, что в теории кооперативных игр очень важно понять как должны формироваться коалиции игроков. К сожалению, разработка модели формирования коалиций остается одной из важнейших нерешенных проблем в теории игр. Единственное, что удалось решить, это разработать методики дележа выигрыша членами сформировавшейся коалиции.

Но начнем мы эту главу с изучения коррелированного равновесия, которое определяет способ кооперирования игроков без образования коалиций и без перераспределения выигрышей между игроками.

4.1. Коррелированное равновесие

Коррелированное равновесие — это обобщение равновесия по Нэшу. Это понятие введено Нобелевским лауреатом 2006 года в области экономики Р. Оманом[27]. Предполагается, что игроки могут действовать согласованно, но их выигрыши не могут перераспределяться (игроки не могут

[27] R. Aumann. Subjectivity and correlation in randomized strategies. *Journal of Mathematical Economics* **1** (1974) 67–96.

передовать часть своих выигрышей других игрокам). Для заданной бескоалиционной игры *коррелированное равновесие* определяется как такое распределение вероятностей на множестве ситуаций, когда ни одному игроку в отдельности не выгодно отклоняться от генерируемой (в соответствии с этим распределением) стратегии.

Начнем с примера. Рассмотрим биматричную

игру цыплят» со следующими выигрышами игроков

	B	C
B	$0,0$	$7,2$
C	$2,7$	$6,6$

.

В этой игре, каждый из игроков может принять вызов (B) или «струсить» (C). Если один из игроков принимает вызов, то другому лучше струсить. Но если один из игроков решил струсить, то другому лучше принять вызов. Следовательно, каждый из игроков хотел бы принять вызов, но только при условии, что оппонент может струсить.

В «игре цыплят» имеется две ситуации равновесия в чистых стратегиях (B,C) и (C,B). Кроме этого, также имеется одна ситуация равновесия в смешанных стратегиях, когда каждый из участников принимает вызов с вероятностью $1/3$: $(p_B, p_C) = (1/3, 2/3)$ и $(q_B, q_C) = (1/3, 2/3)$. Выигрыши обоих игроков в данной смешанной ситуации равновесия равны $4\frac{2}{3}$.

Рассмотрим следующее распределение вероятностей на множестве ситуаций:

$$p(B,B) = 0 \quad \text{и} \quad p(C,C) = p(B,C) = p(C,B) = 1/3,$$

где $P(X,Y)$ обозначает вероятность выбора ситуации (X,Y). Мы можем представить, что имеются три карты соответственно с метками (C,C), (B,C) и (C,B). Перед началом очередной партии игры доверенное лицо обоих игроков (например, компьютер) случайно с равной вероятностью выбирает одну из карт. Пусть (X,Y) обозначает метку на выбранной карте. Доверенное лицо рекомендует игроку 1 использовать стратегию X, а игроку 2 — стратегию Y. Заметим, что игрок 1 не знает Y, а игрок 2 не знает X.

Убедимся, что указанное выше распределение вероятностей на множестве ситуаций является коррелированным равновесием. Если $X = B$, то игрок 1 знает, что второй игрок применит стратегию $Y = C$. В таком случае, выигрыш игрока 1 равен 7 и ему не выгодно переходить к стратегии C, поскольку тогда сложится ситуация (C, C), в которой выигрыш игрока 1 равен 6. Если $X = C$, то с вероятностью $1/2$ значение Y равно B или C. Поэтому средний выигрыш игрока 1 равен $1/2 \cdot 2 + 1/2 \cdot 6 = 4$. А если игрок 1 перейдет к стратегии B, то его средний выигрыш будет равен $1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot 7 = 7/2 < 4$. Поскольку данная игра симметрична, то и игроку 2 также не выгодно отклоняться от рекомендуемой стратегии. Значит данное распределение вероятностей является коррелированным равновесием. Заметим также, что в этой ситуации коррелированного равновесия ожидаемый выигрыш каждого из игроков равен $1/3 \cdot 7 + 1/3 \cdot 2 + 1/3 \cdot 6 = 5$, что больше ожидаемого выигрыша игроков, равного $4\frac{2}{3}$, в ситуации равновесия в смешанных стратегиях.

Теперь перейдем к общему случаю и рассмотрим конечную бескоалиционную игру $\gamma = (\{1, \dots, n\}, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\phi_i\}_{i=1}^n)$. Распределение вероятностей $p : S \to \mathbb{R}_+$ на множестве ситуаций $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ называется *коррелированным равновесием*, если выполняются следующие условия:

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \phi_i(\bar{s}_i, s_{-i}) p(\bar{s}_i, s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \phi_i(\hat{s}_i, s_{-i}) p(\bar{s}_i, s_{-i}),$$
$$\hat{s}_i \in S_i \setminus \bar{s}_i,\ \bar{s}_i \in S_i,\ i = 1, \dots, n, \tag{4.1a}$$

$$\sum_{s \in S} p(s) = 1, \tag{4.1b}$$

$$p(s) \geq 0, \quad s \in S. \tag{4.1c}$$

Здесь неравенства (4.1a) выражают тот факт, что ни одному из игроков не выгодно отходить от рекомендуемой стратегии. Равенство (4.1b) нужно для того, чтобы отображение $p : S \to \mathbb{R}_+$ задавало распределение вероятностей на S. Заметим также, что количество неизвестных в системе (4.1a)–(4.1c) равно $|S_1| \times \cdots \times |S_n|$.

Как правило, системы линейных неравенств решаются методами линейного программирования. Для этого к системе неравенств нужно добавить любую целевую функцию. Например, если мы хотим максимизировать суммарный ожидаемый выигрыш всех игроков, то нужно добавить к системе (4.1a)–(4.1c) следующую целевую функцию:

$$\sum_{s\in S}\left(\sum_{i=1}^{n}\phi_i(s)\right)p(s)\to\max\,. \tag{4.2}$$

А в случае, если мы хотим максимизировать минимальный из выигрышей игроков, к системе (4.1a)–(4.1c) нужно добавить следующую целевую функцию и n неравенств:

$$\begin{gathered} u\to\max,\\ \sum_{s\in S}\phi_i(s)p(s)\ge u,\quad i=1,\dots,n. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Пример 4.1. *Найдем коррелированное равновесие для игры цыплят, для которого суммарный выигрыш двух игроков максимален.*

Решение. Запишем задачу ЛП (4.1a)–(4.1c) и (4.2):

$$\begin{aligned} 0p(B,B)+9p(B,C)+9p(C,B)+12p(C,C)\to\max,\\ 0p(B,B)+7p(B,C)\ge 2p(B,B)+6p(B,C),\\ 2p(C,B)+6p(C,C)\ge 0p(C,B)+7p(C,C),\\ 0p(B,B)+7p(C,B)\ge 2p(B,B)+6p(C,B),\\ 2p(B,C)+6p(C,C)\ge 0p(B,C)+7p(C,C),\\ p(B,B)+p(B,C)+p(C,B)+p(C,C)=1,\\ p(B,B),p(B,C),p(C,B),p(C,C)\ge 0, \end{aligned}$$

или после преобразований

$$\begin{array}{rrrrl} & 9p(B,C)\;+ & 9p(C,B)\;+ & 12p(C,C) & \to\max,\\ 2p(B,B)\;- & p(B,C) & & & \le 0,\\ & & -\;2p(C,B)\;+ & p(C,C) & \le 0,\\ 2p(B,B) & & -\;\;p(C,B) & & \le 0,\\ & -\;2p(B,C) & + & p(C,C) & \le 0,\\ p(B,B)\;+ & p(B,C)\;+ & p(C,B)\;+ & p(C,C) & =1,\\ \multicolumn{4}{r}{p(B,B),p(B,C),p(C,B),p(C,C)} & \ge 0. \end{array}$$

Оптимальное решение этой задачи ЛП следующее:

$$p(B,B) = 0,\ p(B,C) = p(C,B) = \frac{1}{4},\ p(C,C) = \frac{1}{2}.$$

Для данного корреллированного равновесия ожидаемый выигрыш каждого из игроков равен $\frac{1}{4}(2+7) + \frac{1}{2}6 = 5\frac{1}{4}$, что на $1/4$ больше их ожидаемых выигрышей для корреллированного равновесия, которое рассматривалось ранее. □

Пример 4.2. *Две радиостанции АЛЬФА-радио и БЕТА-радио должны выбрать формат вещания из трех возможных: музыка, спорт, или новости. Аудитория этих форматов — соответственно* 50%, 30% *и* 20%. *Если радиостанции выберут одинаковый формат, то соответствующая аудитория разделится между станциями. Если будут выбраны разные форматы, каждая из станций получит всю аудиторию, выбранного ею формата. Выигрыши (доходы) станций пропорциональны их аудитории.*

Нужно найти коррелированое равновесие, для которого максимален минимальный из выигрышей (станций).

Решение. Составим матрицу выигрышей игроков (АЛЬФА-радио — игрок 1, БЕТА-радио — игрок 2):

	M	C	H
M	25,25	50,30	50,20
C	30,50	15,15	30,20
H	20,50	20,30	10,10

Для обоих игроков стратегия M (музыка) доминирует стратегию H (новости). Удалив стратегию H, мы получим усеченную игру со следуюшей матрицей выигрышей игроков:

	M	C
M	$25, 25$	$50^*, 30^*$
C	$30^*, 50^*$	$15, 15$

Усеченная игра имеет две неравноценные для игроков ситуации равновесия в чистых стратегиях: (M, C) и (C, M).

Найдем коррелированное равновесие, для которого максимален минимальный из ожидаемых выигрышей игроков. Запишем задачу ЛП с ограничениями (4.1a)–(4.1c), двумя дополнительными неравенствами (4.4) и (4.5), которые требуют, чтобы ожидаемые выигрыши соответственно первого и второго игроков были не мельше u. Максимизируя u, мы максимизируем минимальный из выигрышей игроков:

$$\begin{aligned}
u &\to \max,\\
25p(M,M)+50p(M,C) &\geq 30p(M,M)+15p(M,C),\\
30p(C,M)+15p(C,C) &\geq 25p(C,M)+50p(C,C),\\
25p(M,M)+50p(C,M) &\geq 30p(M,M)+15p(C,M),\\
30p(M,C)+15p(C,C) &\geq 25p(M,C)+50p(C,C),\\
p(M,M)+p(M,C)+p(C,M)+p(C,C) &= 1,\\
25p(M,M)+50p(M,C)+30p(C,M)+15p(C,C) &\geq u, \quad (4.4)\\
25p(M,M)+30p(M,C)+50p(C,M)+15p(C,C) &\geq u, \quad (4.5)\\
p(M,M),p(M,C),p(C,M),p(C,C) &\geq 0,
\end{aligned}$$

или после преобразований

$$\begin{array}{rrrrl}
 & u \to \max, & & & \\
5p(M,M) & -\,35p(M,C) & & & \leq 0,\\
 & & -\;\;5p(C,M) & +\,35p(C,C) & \leq 0,\\
5p(M,M) & & -\,35p(C,M) & & \leq 0,\\
 & -\;\;5p(M,C) & & +\,35p(C,C) & \leq 0,\\
p(M,M)\,+ & p(M,C)\,+ & p(C,M)\,+ & p(C,C) & = 1,\\
25p(M,M) & +\,50p(M,C) & +\,30p(C,M) & +\,15p(C,C) & \geq u,\\
25p(M,M) & +\,30p(M,C) & +\,50p(C,M) & +\,15p(C,C) & \geq u,\\
 & p(M,M), p(M,C), & p(C,M), & p(C,C) & \geq 0.
\end{array}$$

Оптимальное решение данной задачи ЛП следующее:

$$p(M,M)=p(C,C)=0,\, p(M,C)=p(C,M)=\frac{1}{2},\, u=40. \quad (4.6)$$

Мы можем легко убедиться в этом: в силу того, что минимальный из выигрышей игроков не может быть больше половины максимального суммарного их выигрыша, $u \leq (50 +$

$30)/2 = 40$, нам достаточно проверить, что ни одно из ограничений задачи ЛП не нарушается на данном решении.

Коррелированное равновесие (4.6) рекомендует радиостанциям чередовать вещание: один период музыку передает АЛЬФА-радио, а спорт — БЕТА-радио; в следущий период музыку передает БЕТА-радио, а спорт — АЛЬФА-радио. При этом, каждую станцию в среднем будут слушать 40 % радиослушателей.

В заключение, будет полезным сравнить коррелированное равновесие (4.6) со смешанной ситуацией (p, q), где $p = (1/2, 1/2)^T$ и $q = (1/2, 1/2)^T$, которая рекомендует обеим станциям половину времени вещания передавать музыку, а другую половину — спорт.

При этом *в худшем случае* каждую из станций в среднем будет слушать $\frac{1}{4}(50+30+25+15) = 30$ процентов радиослушателей. Где же потерялись 20 % радиослушателей (суммарно спорт и музыку слушают 80 % радиослушателей, а суммарная аудитория обоих станций 60 %)? Дело в том, что каждая из станций принимает решения не советуясь с конкурентом. Скажем, каждый день сотрудники станции подбрасывают монету, чтобы определить по какому формату они будут работать. Если выпал орел, то в первую половину суток они передают музыку, а во вторую — новости; если выпала решка, то они сначала передают спорт, а затем — музыку. Поскольку станции принимают решения независимо друг от друга, то с вероятностью 1/2 они целый день будут вещать по одному формату, деля пополам 40 % аудитории, и с вероятностью 1/2 будут вещать по разным форматам, когда аудитория каждой станции равна 40 %. В результате средняя аудитория одной станции равна $\frac{1}{2}(20 + 40) = 30$ %. □

4.2. Коалиции и дележи

Пусть условия неантагонистического конфликта n игроков таковы, что допускается заключение взаимообязывающих соглашений между игроками. Предположим, что выигрыши игроков измеряются в одной общей единице и имеется механизм перераспределения выигрышей между игроками. Тогда достаточно рассмотреть только выигрыши игроков, которые образуют коалиции.

Сила *коалиции* $S \subseteq N = \{1, \ldots, n\}$ характеризуется числом $v(S)$, которое определяется следующим образом. Игроки коалиции S рассматриваются как объединенный игрок 1, стратегиями которого являются всевозможные совместные действия игроков коалиции, а выигрыш равен сумме выйгрышей всех игроков из S. В худшем случае для этого коллективного игрока 1 остальные игроки из $N \setminus S$ могут также объединиться в некоторого коллективного игрока 2, интересы которого диаметрально противоположны интересам игрока 1. В результате коалиция S (как игрок 1) может гарантировать себе выигрыш $v(S)$, равный цене образовавшейся антагонистической игры. Иными словами, $v(S)$ есть математическое ожидание гарантированного выигрыша игроков коалиции S, которые действуют совместно против объединенных игроков коалиции $N \setminus S$. Заметим, что в тех случаях, когда игроки из $N \setminus S$ не могут повлиять на размер выигрыша коалиции S, вычисление $v(S)$ не требует решения антагонистической игры.

В дальнейшем мы будем считать, что значение $v(S)$ существует для каждой коалиции $S \subseteq N$, а $v(\emptyset) \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

Пример 4.3. *Определить выигрыши всех коалиций в игры трех лиц, если каждый из игроков имеет по две стратегии, а платежи определяются по правилу:*

Если игрок 1 *выбирает стратегию* 1

Игрок 3:

		1	2
Игрок 2:	1	$3, 0, 1$	$4, 2, 3$
	2	$0, 2, 5$	$3, 3, 1$

Если игрок 1 *выбирает стратегию* 2

Игрок 3:

		1	2
Игрок 2:	1	$4, 2, 1$	$1, 3, 4$
	2	$2, 3, 0$	$4, 2, 1$

Решение. По определению, $v(\emptyset) = 0$, а выигрыш большой коалиции всех трех игроков $v(1, 2, 3) = 9$, что является максимально возможным суммарным выигрышем трех игроков, который достигается в ситуации $(1, 1, 2)$.

Вычислим выигрыши всех остальных коалиций. По определению, выигрыш $v(1)$ коалиции $\{1\}$ есть цена матричной игры, в которой игрок 1 играет против игроков коалиции $\{2, 3\}$. Матрица $A^{\{1\}}$ данной игры следующая:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|} & (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) \\ \hline 1 & 3 & 4 & 0 & 3 \\ \hline 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array}.$$

Здесь и далее стратегия игрока, представляющего коалицию из двух игроков, представляется парой (i, j), где i — это стратения игрока коалиции с меньшим номером, а j — стратегия игрока с большим номером.

Итак, $v(1) = v\left(A^{\{1\}}\right) = 8/5$.

Далее, выигрыш $v(2)$ коалиции $\{2\}$ есть цена матричной игры, в которой игрок 2 играет против игроков коалиции $\{1, 3\}$. Матрица $A^{\{2\}}$ данной игры следующая:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|} & (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) \\ \hline 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ \hline \end{array}.$$

Поэтому $v(2) = v\left(A^{\{2\}}\right) = 2$.

Выигрыш $v(3)$ коалиции $\{3\}$ есть цена матричной игры, в которой игрок 3 играет против игроков коалиции $\{1, 2\}$. Матрица $A^{\{3\}}$ данной игры следующая:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|} & (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) \\ \hline 1 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ \hline \end{array}.$$

Поэтому $v(3) = v\left(A^{\{3\}}\right) = 1$.

Выигрыш $v(1, 2)$ коалиции $\{1, 2\}$ есть цена матричной игры, в которой игроки 1 и 2 играют против игрока 3. Матрица $A^{\{1,2\}}$ данной игры следующая:

$$\begin{array}{c|c|c|} & 1 & 2 \\ \cline{2-3} (1,1) & 3 & 6 \\ \cline{2-3} (1,2) & 2 & 6 \\ \cline{2-3} (2,1) & 6 & 4 \\ \cline{2-3} (2,2) & 5 & 6 \\ \cline{2-3} \end{array}.$$

Поэтому $v(1,2) = v\left(A^{\{1,2\}}\right) = 16/3$.

Выигрыш $v(1,3)$ коалиции $\{1,3\}$ есть цена матричной игры, в которой игроки 1 и 3 играют против игрока 2. Матрица $A^{\{1,3\}}$ данной игры следующая:

$$\begin{array}{c|c|c|} & 1 & 2 \\ \cline{2-3} (1,1) & 4 & 5 \\ \cline{2-3} (1,2) & 7 & 4 \\ \cline{2-3} (2,1) & 5 & 2 \\ \cline{2-3} (2,2) & 5 & 5 \\ \cline{2-3} \end{array}.$$

Поэтому $v(1,3) = v\left(A^{\{1,3\}}\right) = 5$.

И наконец, выигрыш $v(2,3)$ коалиции $\{2,3\}$ есть цена матричной игры, в которой игроки 2 и 3 играют против игрока 1. Матрица $A^{\{2,3\}}$ данной игры следующая:

$$\begin{array}{c|c|c|} & 1 & 2 \\ \cline{2-3} (1,1) & 1 & 3 \\ \cline{2-3} (1,2) & 5 & 7 \\ \cline{2-3} (2,1) & 7 & 3 \\ \cline{2-3} (2,2) & 4 & 3 \\ \cline{2-3} \end{array}.$$

Поэтому $v(2,3) = v\left(A^{\{1,3\}}\right) = 19/3$. $\square$

В тех случаях, когда у оппонентов каждой коалиции нет возможностей противодействовать игрокам этой коалиции, вычисление выигрышей всех коалиций существенно упрощается.

Пример 4.4. *Имеется три фирмы. Первая фирма может выпускать товары D_1 в количестве 900 единиц, вторая — товары D_1 в количестве 700 единиц, а третья —*

товары D_2 в количестве 1000 единиц. Товары D_1 и D_2 продаются только комплектами: одна единица товара D_1 и одна единица товара D_2. Единица обоих товаров стоит \$1. Прогнозируется спрос на 1000 комплектов.

Нужно определить выигрыши всех коалиций.

Решение. Общие возможности фирм превосходят прогнозируемый спрос. Поскольку каждая фирма стремится продать по-возможности большее количество продукции, налицо конфликтная ситуация, с множеством участников $N = \{1, 2, 3\}$, где игрок i — это фирма i. Так как ни один из игроков коалиции $S = \{1, 2\}$ не может производить комплекты, то их продукция не может быть реализована и поэтому $v(1) = v(2) = v(3) = v(1, 2) = 0$. Коалиции $S = \{1, 3\}$ и $S = \{2, 3\}$ выпустят соответственно 900 и 700 комплектов, т. е. будет получена прибыль $v(1, 3) = 1800$ и $v(2, 3) = 1400$. А коалиция из всех трех фирм получит доход $v(1, 2, 3) = 2000$. Таким образом выигрыши всех коалиций определяется по правилу:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & S \in \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}\{1, 2\}\}, \\ 1800, & S = \{1, 3\}, \\ 1400, & S = \{2, 3\}, \\ 2000, & S = \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

□

Кооперативной игрой n лиц называется пара (N, v), где функция v, определена на множестве 2^N всех подмножеств множества $N = \{1, \dots, n\}$ и обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &v(\emptyset) = 0, \\ &v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \quad S, T \subset N,\ S \cap T = \emptyset \qquad \text{(супераддитивность).} \end{aligned}$$

Подмножества множества N называются *коалициями*. Функция v называется *характеристической функцией кооперативной игры*, где $v(S)$ есть выигрыш коалиции S, а $v(i) \stackrel{\text{def}}{=} v(\{i\})$ — это выигрыш игрока i, при условии, что он действует самостоятельно. Супераддитивность характеристической функции означает, что члены двух коалиций, объединившись в одну коалицию, получат не меньше того, что они имели, действуя порознь.

Дележом в игре (N, v) называется вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, который удовлетворяет следующим условиям:

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N) \quad \text{(коллективной рациональности)}, \tag{4.7}$$

$$x_i \geq v(i), \quad i \in N \quad \text{(индивидуальной рациональности)}. \tag{4.8}$$

Условие *коллективной рациональности* (4.7) требует, чтобы вся полезность была распределена.

Условие *индивидуальной рациональности* (4.8) означает, что в любой коалиции каждый игрок должен получать не меньше того, что он может выиграть самостоятельно. Иначе, игрок откажется участвовать в такой коалиции.

Кооперативная игра (N, v) называется *существенной*, если

$$\sum_{i \in N} v(i) < v(N).$$

В несущественной игре имется только один дележ $x = (v(1), v(2), \ldots, v(n))^T$.

В игре из примера 4.4 дележами будут векторы $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, которые удовлетворяют условиям:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2000;$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

4.2.1. Ядро

Дележ x *нестабилен из-за коалиции* $S \subset N$, если $v(S) > \sum_{i \in S} x_i$. В таком случае суммарный выигрыш игроков коалиции S меньше того, что коалиция может получить действуя самостоятельно. Поэтому игроки коалиции S объединившись, смогут расстроить соглашение, приведшее к формированию дележа x.

Мы также говорим, что дележ *нестабилен*, если он нестабилен из-за какой-либо коалиции, иначе дележ называется *стабильным*. Множество $C(N, v)$ всех стабильных дележей составляет *ядро* кооперативной игры. По определению

$$C(N,v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i = v(N), \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall\, S \subset N \right\}. \tag{4.9}$$

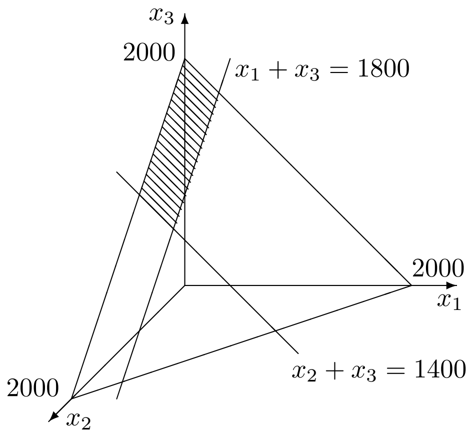
Поскольку ядро описывается экспоненциально большим (от n) числом неравенств, то проверка того, что заданный дележ стабилен, для больших n является сложной вычислительной задачей. Эта задача полиномиально разрешима лишь для ряда специальных характеристических функций.

Пример 4.5. *Нужно определить ядро для игры из примера 4.4.*

Решение. Ядро данной игры задается следующими неравенствами:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 = 2000, \\ x_1 + x_3 \geq 1800,\, x_2 + x_3 \geq 1400, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{gathered} \tag{4.10}$$

Решим эту систему графически:



Заштрихованная зона на этом рисунке и есть ядро. $\square$

Поскольку в игре трех лиц ядро лежит на гиперплоскости $x_1 + x_2 + x_3 = v(1, 2, 3)$, то нам будет удобнее изображать ядро не в трехмерном пространстве, а на этой гиперплоскости. Продемонстрируем это на следующем примере.

Пример 4.6. *Определить ядро для игры со следующей характеристической функцией:*

$$\begin{aligned}
&v(\emptyset) = v(2) = 0, \quad v(1) = v(3) = 1,\\
&v(1,2) = 4, \quad v(1,3) = 3, \quad v(2,3) = 5,\\
&v(1,2,3) = 8.
\end{aligned}$$

Решение. Дележами являются точки $(x_1, x_2, x_3)^T$, удовлетворяющие ограничениям

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8, \quad x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 1.$$

Множество решений этой системы есть треугольник в $\mathbb{R}^3$ с вершинами $(7, 0, 1)^T$, $(1, 6, 1)^T$ и $(1, 0, 7)^T$.

Представим, что мы рисуем на плоскости, заданной уравнением $x_1 + x_2 + x_3 = 8$. Тогда наше множество дележей будет представлять равносторонний треугольник (см. рис. 4.1). Пересечения плоскостей типа $x_1 = 1$ или $x_1 + x_3 = 3$ (что то же, что и $x_2 = 5$) с плоскостью $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ являются прямыми параллельными сторонам треугольника дележей.

Ядро игры есть множество решений системы неравенств:

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = 8,\\
&x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 1,\\
&x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 + x_3 \geq 3,\ x_2 + x_3 \geq 5.
\end{aligned}$$

Каждое из трех последних неравенств отсекает часть нестабильных дележей. Например, нестабильные дележи из-за коалиции $\{1, 2\}$ лежат ниже прямой $x_1 + x_2 = 4$. Ядро (пятиугольник на рис. 4.1) есть часть треугольника дележей за вычетом всех нестабильных дележей. □

Теперь рассмотрим пример «идеальной» кооперативной игры с единственным стабильным дележем.

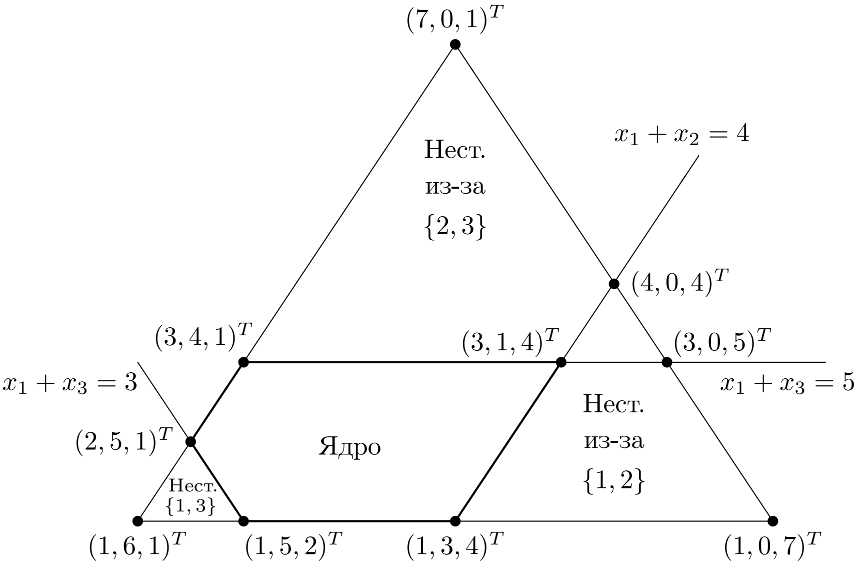


Рис. 4.1. Ядро игры из примера 4.6

Пример 4.7. *Ученый изобрел новое лекарство, но не может производить его самостоятельно. Ученый может продать формулу лекарства одной из двух фармацевтических компаний. Удачливая компания согласна разделить с ученым поровну ожидаемую прибыль в один миллион долларов. Составить характеристическую функцию для данной игры и определить ядро.*

Решение. У нас три игрока: 1) ученый; 2) компания 1; 3) компания 2. Характеристическая функция игры:

$$v(\emptyset)=v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{3\})=v(\{2,3\})=0,$$
$$v(\{1,2\})=v(\{1,3\})=v(\{1,2,3\})=1.$$

Ядро описывается ограничениями:

$$\begin{gathered} x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2\ge 1,\ x_1+x_3\ge 1,\ x_2+x_3\ge 0, \\ x_1,x_2,x_3\ge 0. \end{gathered} \tag{4.11}$$

Вычитая из первого равенства второе, третье и четвертое неравенства, получим неравенства

$$x_3 \le 0,\ x_2 \le 0,\ x_1 \le 1.$$

Но поскольку $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, то все эти три неравенства должны выполняться как равенства. Следовательно, система (4.11) имеет единственное решение $x^* = (1, 0, 0)^T$. Значит ядро содержит только один дележ x^*, что подчеркивает доминирующее положение игрока 1. □

4.2.2. Игры с пустым ядром

В рассмотренных ранее примерах кооперативных игр их ядра были непустыми, но имееются игры с пустым ядром. Мы можем доказать, что ядро непустое, указав стабильный дележ. Но как можно доказать, что ядро пустое? Прежде чем дать ответ на этот вопрос в общем случае, продемонстрируем идею на конкретном примере.

Пример 4.8. *В голосовании принимают участие пять человек. Игрок* 1 (*сильный игрок*) *имеет* 3 *голоса, а все остальные игроки имеют по одному голосу. Для принятия решения необходимо* 4 *голоса из имеющихся* 7.

Решение. Характеристическая функция игры принимает следующие значения:

$$\begin{aligned}
&v(1) = 0,\\
&v(S) = 0, \quad \text{если } |S| \le 3,\ 1 \notin S,\\
&v(S) = 1 \quad \text{для всех остальных } S.
\end{aligned}$$

Ядро в этой игре есть множество решений следующей системы неравенств:

$$\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &=& 1,\\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\ge& 1,\\
x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3+x_4+x_5} &\ge& 1,\\
x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 \phantom{{}+x_4+x_5} &\ge& 1,\\
x_1 \phantom{{}+x_2+x_3} + x_4 \phantom{{}+x_5} &\ge& 1,\\
x_1 \phantom{{}+x_2+x_3+x_4} + x_5 &\ge& 1,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge& 0.
\end{array} \tag{4.12}$$

Сложив второе неравенство, умноженное на $3/4$, с третьим, четвертым, пятым и шестым неравенствами, умноженными на $1/4$, и отнимем первое равенство, получим ложное неравенство $0 \geq 3/4$. Это доказывает, что исходная система неравенств (4.12) несовместна. $\square$

Для доказательства несовместности системы неравенств (4.12) мы использовали критерий совместности систем линейных неравенств, известный как лемма Фаркаша. Сформулируем этот критерий применительно к системе неравенств, описывающих ядро.

Сбалансированным семейством весов называется набор неотрицательных чисел $y_S \geq 0$, $S \subseteq N$, такой, что

$$\sum_{S \subseteq N:\, i \in S} y_S = 1, \quad i \in N.$$

Теорема 4.1 (Бондаревой — Шепли). *Кооперативная игра (N, v) имеет непустое ядро тогда и только тогда, когда для любого сбалансированного семейства весов $y_S \geq 0$, $S \subseteq N$, выполняется неравенство*

$$\sum_{S \subseteq N} v(S)\, y_S \leq v(N). \tag{4.13}$$

Доказательство. По определению, ядро в игре (N, v) непустое тогда и только тогда, когда оптимальное значение целевой функции в задаче ЛП

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in N} x_i \to \min, \\ &\sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \quad S \subseteq N, \end{aligned} \tag{4.14}$$

равно $v(N)$. По теореме двойственности в линейном программировании ядро в игре (N, v) непустое тогда и только тогда, когда оптимальное значение целевой функции в задаче ЛП

$$\begin{aligned} &\sum_{S\subseteq N} v(S)\, y_S \to \max, \\ &\sum_{S\subseteq N,\, i\in S} y_S = 1, \quad i \in N, \\ &y_S \geq 0, \quad S \subseteq N, \end{aligned} \tag{4.15}$$

которая является двойственной к задаче (4.14), также равно $v(N)$. Поскольку любое сбалансированное семейство весов y_S, $S \subseteq N$, является допустимым решением задачи (4.15), то $\sum_{S\subseteq N} v(S)\, y_S \leq v(N)$. □

В примере 4.8 мы доказали несовместность системы (4.12), описывающей ядро, определив сбалансированное семейство весов со следующими ненулевыми компонентами:

$$y_{\{1,2\}} = y_{\{1,3\}} = y_{\{1,4\}} = y_{\{1,5\}} = 1/4,\ y_{\{2,3,4,5\}} = 3/4.$$

Поскольку это семейство не удовлетворяет неравенству (4.13), то в игре «голосование пяти участников» из примера 4.8 ядро пустое.

4.2.3. Приближенное ядро

Наличие игр, в которых ядро пустое, мотивирует следующее определение. Для $\alpha \geq 1$ определим *α-ядро* по правилу

$$C_\alpha(N, v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i\in N} x_i \leq \alpha v(N),\ \sum_{i\in S} x_i \geq v(S) \quad \forall\, S \subseteq N \right\}. \tag{4.16}$$

Минимальное значение параметра α, для которого α-ядро непустое, равно оптимальному значению целевой функции в задаче ЛП (4.14). Это минимальное значение будем обозначать через $\alpha(N, v)$. Ядро $C(N, v) = C_1(N, v)$ не пусто тогда и только тогда, когда $\alpha(N, v) = 1$. Если x^* есть оптимальное решение задачи ЛП (4.14), то вектор $\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\alpha(N,v)} x^*$ является дележем, для которого доля $\bar{x}(S)$ любой коалиции S не меньше $100/\alpha(N, v)$ процентов от выигрыша $v(S)$, который себе могут обеспечить игроки коалиции S, если будут действовать самостоятельно.

Для игры «голосование пяти участников» из примера 4.8 мы найдем $\alpha(N,v)$, решив следующую задачу ЛП:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\to \min,\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\geq 1,\\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\geq 1,\\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\quad &\geq 1,\\
x_1 \qquad + x_3 \qquad\quad &\geq 1,\\
x_1 \qquad\qquad + x_4 \quad &\geq 1,\\
x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 &\geq 1,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Ее оптимальное решение есть вектор $x^* = (3/4, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^T$ (докажите это, используя теоремы двойственности в ЛП). Следовательно, $\alpha(N,v) = 7/4$.

4.3. Значение игры по Шепли

Концепция ядра полезна в качестве меры стабильности игры. Если ядро содержит много дележей, то все равно нужен механизм, чтобы выбрать наиболее предпочтительный дележ. Еще хуже, если ядро пустое. Поэтому было разработано несколько подходов определения самого справедливого дележа.

В этом разделе мы рассмотрим пожалуй самый известный из таких подходов. В рамках этого подхода, выделяется одно распределение выигрышей игроков, называемое значением игры, которое можно рассматривать как ее исход, определенный некоторым *справедливым* и непредвзятым арбитром. К сожалению это значение игры может и не удовлетворять условию индивидуальной рациональности и поэтому не является дележом. Но чтобы не осложнять изложение, вводя новые понятия, в этом разделе мы позволим себе нестрогость называть дележами и такие распределения выигрышей игроков.

Предположим, что i-й игрок получает выигрыш

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}(v(S) - v(S \setminus \{i\})), \qquad (4.17)$$

равный средней величине его вкладов во все коалиции. Число $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ есть вклад игрока i при присоединении к коалиции $S \setminus \{i\}$, а весовой множитель

$$\frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}$$

можно интерпретировать как вероятность образования коалиции $S \setminus \{i\}$.

Значением (*вектором*) *Шепли* [28] кооперативной игры (N, v) называется вектор

$$\phi(v) \stackrel{\text{def}}{=} (\phi_1(v), \ldots, \phi_n(v))^T.$$

Стоит сразу заметить, что так как формула (4.17) включает экспоненциально большое (от n) число слагаемых, то в общем случае для больших n вычисление значения Шепли является трудной вычислительной проблемой. Но в ряде частных случаев это все же возможно с использованием специфических свойств конкретных характеристических функций.

Нетрудно показать, что значение Шепли — это единственный дележ, который

а) *симметричен*: $\phi_i(v) = \phi_j(v)$ для симметричных игроков i и j (два игрока симметричны, если присоединение любого из этих игроков к любой коалиции $S \subset N \setminus \{i, j\}$, одинаково усиливает эту коалицию: $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$);

б) *аддитивен*: для любых двух игр (N, v), (N, w) и любого $i \in N$ справедиво равенство $\phi_i(v + w) = \phi_i(v) + \phi_i(w)$;

[28] Л.С. Шепли лауреат Нобелевской премии 2012 г. в области экономики за «теорию стабильных распределений и практику проектирования рынков».
L.S. Shapley. A value for n-person games. In H. Kuhn, A.W. Tucker, *Contributions in the Theory of Games II*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1953, pp. 307–317.

в) назначает нулевой выигрыш $\phi_i(v) = 0$ нулевым игрокам $i \in N$ (игрок i *нулевой*, если $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ для всех $S \in N \setminus \{i\}$).

Пример 4.9. *Нужно вычислить значение Шепли для игры из примера 4.4 с характеристической функцией*

$$v(S) = \begin{cases} 0, & S \in \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}\{1,2\}\}, \\ 1800, & S = \{1,3\}, \\ 1400, & S = \{2,3\}, \\ 2000, & S = \{1,2,3\}. \end{cases}$$

Решение. Для небольших значений n процесс вычисления значения Шепли удобно представить в табличной форме. Для рассматриваемого примера значение Шепли вычислено в следующей таблице.

Перестановка	Вклады игроков		
	1	2	3
(1,2,3)	0	0	2000
(1,3,2)	0	200	1800
(2,1,3)	0	0	2000
(2,3,1)	600	0	1400
(3,1,2)	1800	200	0
(3,2,1)	600	1400	0
Средний вклад	$3000/6$	$1800/6$	$7200/6$

Результат (вектор Шепли) записан в последней строке таблицы:

$$(3000/6, 1800/6, 7200/6)^T = (500, 300, 1200)^T.$$

Поскольку вектор Шепли удовлетворяет системе неравенств (4.10), определяющей ядро рассматриваемой игры, то значение Шепли является стабильным дележом. □

Примером кооперативной игры с непустым ядром, для которой значение Шепли не является стабильным дележом, является игра из примера 4.7, в которой имеется единственный стабильный дележ $x^* = (1, 0, 0)^T$, а вектор Шепли равен $(2/3, 1/6, 1/6)^T$ (проверьте это!).

4.3.1. Значение Шепли для простых игр

Значение Шепли можно рассматривать как силу индивидуальных членов политических и экономических организаций.

Кооперативная игра (N, v) называется *простой*, если $v(S)$ равно 0 или 1 для всех коалиций $S \subseteq N$.

Типичные примеры простых игр:

(*голосование простым большинством*) $v(S) = 1$, если $|S| > n/2$, иначе $v(S) = 0$;

(*голосование консенсусом*) $v(N) = 1$, $v(S) = 0$ для всех $S \subset N$;

(*взвешенное голосование*) для заданных весовых множителей w_i $(i \in N)$ и квоты q

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i \in S} w_i > q, \\ 0, & \text{если } \sum_{i \in S} w_i \le q; \end{cases}$$

(*диктаторская игра*) $v(S) = 1$, если $1 \in S$, иначе $v(S) = 0$.

Для простых игр формула (4.17) для вычисления значения Шепли упрощается, поскольку разность $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ всегда равна 0 или 1. Точнее, эта разность равна 0, если $v(S) = v(S \setminus \{i\})$, и 1, если $v(S) > v(S \setminus \{i\})$. Поэтому формулу (4.17) можно упростить следующим образом:

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{S \subseteq N, \\ v(S)=1,\ v(S \setminus i)=0}} \frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}. \tag{4.18}$$

Отметим, что в формуле (4.18) суммирование ведется по всем минимальным (по включению) «ненулевым» коалициям S ($v(S) = 1$), которым принадлежит игрок i.

Пример 4.10. *Нужно определить силу всех игроков в игре из примера 4.8.*

Решение. Сначала определим силу сильного игрока 1, вычислив значение $\phi_1(v)$. Поскольку игрок 1 может принять решение в коалиции с любым из игроков $j = 2, 3, 4, 5$, то суммирование в формуле (4.18) производится по всем двухэлементным множествам $S = \{j, 1\}$, где $j = 2, 3, 4, 5$. Поэтому

$$\phi_1(v) = 4 \cdot \frac{(2-1)!\,(5-2)!}{5!} = \frac{1}{5}.$$

В силу симметрии силы $\phi_j(v)$ всех слабых игроков $j = 2, 3, 4, 5$ должны быть равны и их можно вычислить по формуле:

$$\phi_j(v) = (1 - \phi_1(v))/4 = (1 - 1/5)/4 = 1/5.$$

Удивительно, но в данной игре, в которой игрок 1 занимает «почти» доминирующее положение, силы всех игроков оказались равными. Это объясняется тем, что коалиция $S = \{2, 3, 4, 5\}$ может принять решение без игрока 1. □

А теперь мы рассмотрим гораздо более сложный пример с большим количеством участников.

Пример 4.11. *Совет Безопасности ООН состоит из* 5 *постоянных членов (которые могут наложить вето на любую резолюцию) и* 10 *непостоянных. Чтобы провести любое решение, нужно, чтобы за него проголосовало не менее* 9 *членов, включая всех постоянных членов. Нужно определить силу постоянных и непостоянных членов Совета Безопасности, вычислив значение Шепли.*

Решение. Определим цену любой коалиции, которая может принять решение, равной 1, а цену любой другой коалиции — равной 0. В данной кооперативной игре $n = 15$ игроков, где игроки $1, 2, 3, 4, 5$ — это постоянные члены Совета Безопасности, а остальные игроки — непостоянные члены. Характеристичекая функция определяется следующим образом:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{1,2,3,4,5\} \subset S \quad \text{и} \quad |S| \geq 9, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Минимальную коалицию S, которая может принять решение, можно представить в виде

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup T, \quad \text{где } T \subseteq \{6, \ldots, 15\},\ |T| = 4.$$

Поскольку таких минимальных коалиций, которые включают игрока $i \in \{6, \dots, 15\}$, имеется $C_3^9 = \frac{9!}{3!\,6!}$, то сила любого непостоянного члена Совета Безопасности ($i = 6, \dots, 15$) равна

$$\phi_i(v) = \frac{9!}{3!\,6!} \cdot \frac{(9-1)!\,(15-9)!}{15!} = \frac{4}{15 \cdot 13 \cdot 11} \approx 0.001865.$$

Силу постоянных членов Совета Безопасности ($i = 1, \dots, 5$) найдем по формуле:

$$\phi_i(v) = \left(1 - \sum_{j=6}^{15} \phi_j(v)\right) /5 \approx (1 - 10 \cdot 0.001865)/5 = 0.19627.$$

$\square$

4.4. Сердцевина

Значение Шепли в общем случае не удовлетворяет условию индивидуальной рациональности и потому не является даже дележом. Кроме того, если это возможно, то хотелось бы, чтобы «справедливый» дележ был стабильным (принадлежал ядру). Иная интересная концепция для определения «справедливого» дележа предложена Д. Шмайдлером[29]. Основная идея здесь состоит в том, чтобы получить дележ, который вызывает наименьшую неудовлетворенность среди всех коалиций. Такой дележ называют *сердцевиной* (*nucleolus*).

Рассмотрим кооперативную игру (N, v) и дележ x. *Дефицит* коалиции $S \subset N$ определяется как разность

$$d(x, S) \stackrel{\text{def}}{=} v(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

между тем, что коалиция может получить действуя самостоятельно, и тем, что получат члены коалиции, если реализуется

[29] D. Schmeidler. The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM J. Appl. Math.* **17** (1969) 1163–1170.

дележ x. Если дележ x принадлежит ядру, то дефициты всех коалиций неположительны (являются излишками).

Сердцевина — это такой дележ, когда нельзя уменьшить дефицит ни одной коалиции, не сделав так, что дефицит какой-нибудь другой коалиции станет больше дефицита той коалиции, дефицит которой мы уменьшаем.

Согласно принципу, когда тот, кто кричит громче, обслуживается первым, мы сначала должны рассмотреть коалицию $S \subset N$ с наибольшим дефицитом $d(x, S)$ и, если это возможно, предложить новый дележ x' с меньшим дефицитом $d(x', S)$ для коалиции S. Затем рассматривается коалиция S' с максимальным дефицитом $d(x', S')$ с целью уменьшить ее дефицит. И так продолжается до тех пор, пока не будет получен такой дележ $\bar{x}$, для которого мы больше не можем уменьшить максимальный дефицит. Следующий пример поможет нам прояснить данную процедуру.

Пример 4.12. *Обанкротившаяся малая фирма должна свом трем кредиторам следующие суммы: кредитору* 1 — $c_1 = \$10\,000$, *кредитору* 2 — $c_2 = \$20\,000$, *кредитору* 3 — $c_3 = \$30\,000$. *Но фирма имеет только* $C = \$36\,000$ *для покрытия своих долгов. Как справедливо разделить эту сумму между кредиторами?*

Решение. Сначала построим характеристическую функцию игры по правилу:

$$v(S) \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{0, C - \sum_{i \in N \setminus S} c_i\right\}, \quad S \subseteq N = \{1, 2, 3\}.$$

Сами по себе кредиторы 1 и 2 не могут получить никакой суммы, поскольку два остальных кредитора могут забрать всю сумму в \$36 000. По этой причите кредитор 3 может гарантированно расчитывать на сумму в \$6 000 (остаток после того, как кредиторы 1 и 2 вернут свои деньги в полном объеме). Рассуждая подобным образом, мы можем вычислить все значения характеристической функции:

$$v(\emptyset) = 0,\ v(1) = v(2) = 0,\ v(3) = v(1, 2) = 6,$$
$$v(1, 3) = 16,\ v(2, 3) = 26,\ v(1, 2, 3) = 36.$$

Вычисление сердцевины представлено в следующей таблице.

S	$v(S)$	$d(x,S)$	Дележи		
			(6,12,18)	(5,12,19)	(5,10.5,20.5)
{1}	0	$-x_1$	-6	-5	-5
{2}	0	$-x_2$	-12	-12	-10.5
{3}	6	6-x_3	-12	-13	-14.5
{1,2}	6	6-x_1-x_2	-12	-11	-9.5
{1,3}	16	16-x_1-x_3	-8	-8	-9.5
{2,3}	26	26-x_2-x_3	-4	-5	-5

Мы начинаем с дележа $(6,12,18)$, построенного по пропорциональному принципу: доля каждого кредитора пропорциональна его заему. Данным дележом наиболее неудовлетворена коалиция $\{2,3\}$ с максимальным дефицитом -4. Мы можем уменьшить эту неудовлетворенность увеличивая x_2+x_3 и уменьшая x_1 (чтобы сохранить равенство $x_1+x_2+x_3=36$) на некоторую величину δ_1. Уменьшение x_1 означает рост дефицитов коалиций $\{1\}$, $\{1,2\}$ и $\{1,3\}$. При $\delta_1=1$ дефициты коалиций $\{2,3\}$ и $\{1\}$ сравняются. Поэтому в нашем следующем дележе $x_1=5$. Осталось определить x_2 и x_3. Мы это сделаем таким образом, чтобы для нового дележа второй по величине дефицит был минимальным при выполнении условия $x_2+x_3=36-5=31$. Этот второй по величине дефицит $d(x,\{1,3\})=16-x_1-x_3$ будет равен 8, если увеличить x_3 на 1 и не менять значение x_2. Отсюда получаем дележ $(5,12,19)^T$.

Из приведенных выше рассуждений должно быть ясно, что мы уже не сможем уменьшить неудовлетворенность коалиций $\{1\}$ и $\{2,3\}$. Попытаемся уменьшить неудовлетворенность коалиции $\{1,3\}$ со следующим по величине дефицитом $(=8)$. Мы можем уменьшить этот дефицит увеличивая x_3 и уменьшая x_2 на некоторую величину δ_2. При $\delta_2=1.5$ дефициты коалиций $\{1,3\}$ и $\{1,2\}$ сравняются. Следовательно наш следующий дележ есть $(5,10.5,20.5)^T$.

Из предыдущих рассуждений должно быть ясно, что дальнейшее уменьшение какого-либо дефицица приведет к увеличению дефицита не меньшего за тот, который мы будем стараться уменьшить. Следовательно, дележ $(5, 10.5, 20.5)^T$ есть сердцевина рассматриваемой игры.

Сравнивая сердцевину с пропорциональным дележом, мы видим, что сердцевина увеличивает выплаты кредитору с максимальными потерями. Значение Шепли для данной игры есть дележ $(6, 11, 19)^T$ (проверьте это!), который занимает промежуточное положение между пропорциональным дележом и сердцевиной. $\square$

Настало время дать строгое определения понятия «сердцевина». Для дележа x обозначим черех $D(x)$ вектор дефицитов, упорядоченных в порядке неубывания. В примере 4.12 для $x = (6, 12, 18)^T$ мы имели $D(x) = (-4, -6, -8, -12, -12, -12)^T$. Будем сравнивать векторы $D(x)$ лексикографически. Говорят, что вектор $y \in \mathbb{R}^n$ *лексикографически не больше* вектора $z \in \mathbb{R}^n$, записываем $y \preceq_{\text{lex}} z$, если $x = y$ или для некоторого k $(1 \le k < n)$ справедливы условия: $y_i = z_i$ для $i = 1, \dots, k-1$ и $y_k < z_k$.

Дележ x называют сердцевиной игры (N, v), если для всех других дележей $x' \neq x$ справедливо неравенство $D(x) \preceq_{\text{lex}} D(x')$.

Теорема 4.2. *Сердцевина игры существует и единственна. Если ядро не пустое, то сердцевина принадлежит ядру.*

Мы оставляем эту теорему без доказательства, а всех, кого оно интересует, отсылаем к книге [4].

Отметим, что эффективного алгоритма вычисления сердцевины для достаточно больших n не существует. Для небольших n сердцевину можно вычислить, решая последовательно несколько задач ЛП.

Сначала решаем следующую задачу ЛП:

$$\alpha \to \min,$$
$$\sum_{i \in S} x_i + \alpha \ge v(S), \quad S \subset N,$$
$$\sum_{i \in N} x_i = v(N), \quad x_i \ge v(i), \quad i \in N.$$

Пусть (α^1, x^1) оптимальное решение этой задачи и пусть

$$F_1 = \left\{S \subset N :\ d(x^1, S) = \alpha^1\right\}$$

есть множество коалиций с максимальным дефицитом. Затем, чтобы минимизировать второй максимальный дефицит, нужно решить следующую задачу ЛП:

$$\begin{aligned}
&\alpha \to \min,\\
&\sum_{i\in S} x_i = v(S) - \alpha^1, \quad S \in F_1,\\
&\sum_{i\in S} x_i + \alpha \geq v(S) - \alpha_1, \quad S \subset 2^N \setminus F_1\,,\\
&\sum_{i\in N} x_i = v(N), \quad x_i \geq v(i), \quad i \in N.
\end{aligned}$$

Пусть (α^2, x^2) оптимальное решение данной задачи и пусть

$$F_2 = \left\{S \subset 2^N \setminus F_1 : d(x^2, S) = \alpha^1 + \alpha^2\right\}.$$

В общем случае на шаге k решаем следующую задачу ЛП:

$$\begin{aligned}
&\alpha \to \min,\\
&\sum_{i\in S} x_i = v(S) - \sum_{j=1}^{s} \alpha^j, \quad S \in F_s,\ s = 1, \ldots, k-1,\\
&\sum_{i\in S} x_i + \alpha \geq v(S) - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha^j, \quad S \subset 2^N \setminus \cup_{j=1}^{k-1} F_j\,,\\
&\sum_{i\in N} x_i = v(N), \quad x_i \geq v(i), \quad i \in N.
\end{aligned}$$

По оптимальному решению (α^k, x^k) данной задачи определяем множество

$$F_k = \left\{S \subset N \setminus \cup_{j=1}^{k-1} F_j : d(x^k, S) = \sum_{j=1}^{k} \alpha^j\right\}.$$

Алгоритм останавливается на шаге q, когда $\alpha^q = 0$. Тогда x^q есть сердцевина игры.

4.5. Кооперация для минимизации издержек

До сих пор мы рассматривали кооперативные игры, в которых целью игроков была максимизация выигрыша (прибыли). На практике ничуть не реже встречаются ситуации, когда игроки образуют коалиции с целью минимизировать свои издержки. Такая кооперативная игра представляется парой (N, c), где N есть множество игроков, а *характеристическая функция* $c : 2^N \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим свойствам:

$$
\begin{aligned}
&c(\emptyset) = 0,\\
&c(S \cup T) \le c(S) + c(T), \quad S, T \subset N,\ S \cap T = \emptyset \qquad (\textit{субаддитивность}).
\end{aligned}
$$

Здесь значение $c(S)$ интерпретируется как издержки коалиции S. Субаддитивность характеристической функции означает, что члены двух коалиций, объединившись в одну коалицию, заплатят не больше того, что они платят, действуя порознь.

Мы можем преобразовать функцию издержек c в функцию выигрышей $v : 2^N \to \mathbb{R}$ по правилу:

$$
v(S) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in S} c(i) - c(S), \quad S \subseteq N. \tag{4.19}
$$

Значение $v(S)$ — это превышение суммарных издержек отдельных членов коалиции S над издержками самой коалиции. Поэтому $v(S)$ можно также назвать *выигрышем* коалиции S. Заметим, что функция v является супераддитивной и $v(i) = 0$ для всех $i \in N$. Таким образом, кооперативная игра (N, c) с характеристической функцией издержек преобразовалась в кооперативную игру (N, v) с характеристической функцией выигрышей.

4.5.1. Ядро и значение Шепли

Дележ выигрышей x в новой кооперативной игре (N, v) соответствует *распределению издержек* y в игре (N, c), если определить $y_i \stackrel{\text{def}}{=} c(i) - x_i$ для $i \in N$. Отображение $x \to y$ переводит ядро $C(N,v)$ в кооперативной игре (N,v) в *ядро*

$$C_{\le}(N,c) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i\in N} y_i = c(N),\ \sum_{i\in S} y_i \le c(S) \quad \forall\, S \subset N \right\} \tag{4.20}$$

для игры (N,c). Как и ранее, ядро $C_{\le}(N,c)$ можно было определить как множество всех стабильных распределений издержек. Но теперь распределение издержек y является нестабильным из-за коалиции $S \subset N$, если $\sum_{i\in S} y_i > u(S)$.

Значение Шепли $\phi(c) = (\phi_1(c), \ldots, \phi_n(c))^T$ для игры (N,c) определяется точно также, как и для игры (N,v): для вычисления $\phi_i(c)$ в формуле (4.17) нужно просто заменить v на c.

4.5.2. Размещение центров обслуживания

Заданы множество N *клиентов* и множество M мест для размещения *центров обслуживания*. Стоимость размещения (открытия) центра в пункте $j \in M$ равна f_j. Мы также знаем стоимость q_{ij} подключения клиента $i \in N$ к центру в пункте $j \in M$.

Определим стоимость обслуживания подмножества клиентов $S \in N$ как сумму стоимостей открытия центров обслуживания и стоимостей подключения клиентов к ближайшим из открытых центров:

$$c(S) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{T\subseteq M} \left\{ \sum_{j\in T} f_j + \sum_{i\in S} \min_{j\in T} q_{ij} \right\}.$$

Предположим, что все клиенты согласились действовать совместно (образовать большую коалицию N), чтобы минимизировать свои издержки (плату за размещение центров обслуживания и плату за подключение). В таком случае, мы можем определить справедливое распределение издержек между клиентами, проанализировав кооперативную игру (N,c).

Пример 4.13. *Нужно определить оптимальный план размещения центров обслуживания и распределить расходы кли-*

ентов на реализацию этого плана в игре «размещение центров обслуживания» со следующими параметрами: $N = \{1, 2, 3\}$, $M = \{1, 2\}$, $f_1 = f_2 = 2$ *и*

$$Q = [q_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Функция стоимостей в рассматриваемой игре принимает следующие значения:

$$c(\emptyset) = 0,\ c(1) = 3, c(2) = 4,\ c(3) = 3,$$
$$c(1, 2) = 5,\ c(1, 3) = 6,\ c(2, 3) = 5,$$
$$c(1, 2, 3) = 8.$$

Заметим, что значение $c(1, 2, 3) = 8$ достигается, если в обоих пунктах 1 и 2 разместить по одному центру обслуживания, клиента 1 присоедить к центру в пункте 1, а клиентов 2 и 3 — к центру в пункте 2.

Ядро $C_{\leq}(N, c)$ в игре (N, c) есть множество решений следующей системы неравенств:

$$y_1 \leq 3,\ y_2 \leq 4,\ y_3 \leq 3,$$
$$y_1 + y_2 \leq 5,\ y_1 + y_3 \leq 6,\ y_2 + y_3 \leq 5,$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 8.$$

Эта система имеет единственное решение $y^* = (3, 2, 3)^T$. Поэтому y^* — это единственное стабильное распределение издержек в рассматриваемой игре.

Теперь найдем значение Шепли. Как и ранее, вычисления представим в уже знакомой нам табличной форме.

Перестановка	Вклады игроков		
	1	2	3
(1,2,3)	3	2	3
(1,3,2)	3	2	3
(2,1,3)	1	4	3
(2,3,1)	3	4	1
(3,1,2)	3	2	3
(3,2,1)	3	2	3
Средний вклад	8/3	8/3	8/3

Отметим, что значение Шепли $\phi(c) = (8/3, 8/3, 8/3)^T$ не является стабильным распределением издержек, поскольку это распределение нестабильно из-за коалиции $\{2, 3\}$:

$$\phi_2(c) + \phi_3(c) = 8/3 + 8/3 = 16/3 > 5 = c(2, 3).$$

□

4.6. Предварительные переговоры

В ситуациях, моделируемых кооперативными играми, должен быть предусмотрен период переговоров, в течении которого игроки пытаются сформировать коалиции и затем согласовать размеры взаимных выплат. В ходе дискуссий игроки могут угрожать друг другу, с целью склонить оппонентов к принятию их предложений. Чтобы быть правдоподобными, угрозы должны приносить их инициаторам меньший вред, чем их оппонентам. Поясним это на примере.

Пример 4.14. *Рассмотрим кооперативнай вариант следуюшей биматричной игры*

$$\begin{bmatrix} 4^*, 3^* & 0, -3 \\ 0, 0 & 4^*, 6^* \end{bmatrix}.$$

Характеристическая функция данной кооперативной игры задается следующим образом:

$$v(\emptyset) = 0,\ v(1) = v(A) = 2,\ v(2) = v(B^T) = \frac{3}{2},\ v(1, 2) = 10.$$

Здесь $v(A)$ и $v(B^T)$ — это цены матричных игр, заданных матрицами A и B^T, а $v(1)$ и $v(2)$ — это уровни безопасности игроков[30]*. Заметим также, что значение $v(1, 2) = 10$ достигается для ситуации равновесия $(2, 2)$, в которой суммарный выигрыш игроков максимален.*

[30] Чтобы понять, почему мы определили значения $v(1)$ и $v(2)$ таким образом, вспомните обсуждение уровней безопасности в разделе 1.6.3.

Предположим, что игроки пришли к соглашению и образовали коалицию $\{1, 2\}$. *Игрок* 1, *знакомый с теорией кооперативных игр, предлагает использовать значение Шепли* $x^1 = (5.25, 4.75)$ *в качестве справедливого дележа, а игрок* 2, *не знакомый с теорией кооперативных игр, соглашается из своего выигрыша в* 6 *единиц заплатить игроку* 1 *только одну единицу, вместо запрошенных* 1.25 *единиц. Как игрок* 1 *может убедить игрока* 2 *в обоснованности своего предложения?*

Решение. Поскольку игрок 2 упорствует и не соглашается с предложением игрока 1, то игрок 1 может угрожать переходом к своей первой стратегии. Причем, эта угроза правдоподобна, поскольку при любых ответных действиях игрока 2 его потери будут большими. Будучи рациональным игроком, на стратегию 1 игрока 1 игрок 2 должен ответить своей стратегией 1. После этого сложится ситуация $(1, 1)$ с выигрышем 4 у игрока 1 и выигрышем 3 у игрока 2. Против ситуации $(1, 1)$ у игрока 2 нет контругрозы, поскольку его переход к стратегии 2 навредит ему больше, чем сопернику.

В силу вышеприведенного анализа угроз и контругроз игрок 2, будучи рациональным игроком, должен согласиться принять дележ x^1, чтобы получить выигрыш в 4.75 единиц вместо 3 единиц. □

Игроки используют угрозы и контругрозы для того, чтобы повлиять на выбор дележа. Но как игроки должны выбирать свои угрозы и как эти угрозы влияют на формирование окончательного дележа? Для кооперативных игр двух лиц мы можем ответить на эти вопросы вполне убедительно.

4.6.1. Кооперация двух игроков

Рассмотрим кооперативный вариант биматричной игры с $m \times n$-матрицами выигрышей игроков A и B. Характеристическая функция данной игры определяется по правилам:

$$v(\emptyset) = 0,\ v(1) = v(A),\ v(2) = v(B^T),\ v(1, 2) = \max_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} (a_{ij} + b_{ij}).$$

Если игроки пришли к соглашению, то значит они согласились использовать пару стратегий (i_0, j_0), такую, что $a_{i_0 j_0} + b_{i_0 j_0} = v(1,2) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma$. Кроме того, они должны были согласовать дележ $(x_1^*, x_2^*)^T$ выигрыша $\sigma = x_1^* + x_2^*$. Если $x_1^* < a_{i_0 j_0}$, то первый игрок должен выплатить второму сумму $a_{i_0 j_0} - x_1^*$, а если $x_2^* < b_{i_0 j_0}$, то тогда второй игрок должен выплатить первому сумму $b_{i_0 j_0} - x_2^*$.

Теперь предположим, что соглашение еще не достигнуто. Допустим, что в качестве своей угрозы игрок 1 выбрал стратегию p, а игрок 2 — стратегию q (в общем случае p и q есть смешанные стратегии). В ситуации (p, q) первый игрок получит $D_1 = p^T Aq$, а второй — $D_2 = p^T Bq$. Угроза игрока 1 будет наиболее сильной, когда величина $D_1 - D_2$ максимальна. Соответственно, угроза игрока 2 наиболее сильна, когда разность $D_2 - D_1$ максимальна, что равносильно тому, что разность $D_1 - D_2$ минимальна. Поскольку

$$D_1 - D_2 = p^T (A - B) q,$$

то в действительности мы иеем матричную игру с матрицей $A - B$. Обозначим оптимальные смешанные стратегии игроков игроков в этой игре через p^* и q^*, а цену $(p^*)^T (A - B) q^*$ этой игры — через δ.

Вектор платежей $D^* = (D_1^* = p^{*T} Aq^*, D_2^* = p^{*T} Bq^*)^T$ называют *точкой разногласия*. Первый игрок не согласится получить меньше D_1^*, а второй — меньше D_2^*, поскольку эти суммы они могут получить, если соглашение не будет достигнуто. Значит, дележ $D^1 = (D_1^*, \sigma - D_1^*)^T$ есть предельно допустивый дележ для игрока 1, а дележ $D^2 = (\sigma - D_2^*, D_2^*)^T$ — предельно допустивый дележ для игрока 2. Разумным компромисом представляется выбор в качестве *справедливого дележа* вектора x^*, лежащего на середине отрезка, соединяющего точки D^1 и D^2:

$$x^* = \frac{1}{2}(D^1 + D^2) = \frac{1}{2}(D_1^* + \sigma - D_2^*, \sigma - D_1^* + D_2^*)^T = \left(\frac{\sigma + \delta}{2}, \frac{\sigma - \delta}{2}\right)^T.$$

Заметим, что, отказавшись принять дележ x^* и действуя самостоятельно, игроки пострадают в равной мере.

Пример 4.15. *Нужно определить угрозы игроков и справедливый дележ в игре со следующими выигрышами игроков:*

$$\begin{bmatrix} 0,0 & 6,2 & -1,2 \\ 4,-1 & 3,6 & 5,5 \end{bmatrix}.$$

Решение. Максимальный выигрыш игроков в этой игре $\sigma = 10$ достигается при использовании игроками стратегий $i_0 = 2$ и $j_0 = 3$.

Чтобы определить наиболее сильные угрозы игроков, решим матричную игру с матрицей

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Цена данной матричной игры равна $\delta = -9/10$, а оптимальные стратегии (угрозы) игроков $p^* = (3/10, 7/10)^T$, $q^* = (0, 3/10, 7/10)^T$.

Справедливый дележ

$$x^* = \left(\frac{10 - 9/10}{2}, \frac{10 + 9/10}{2}\right)^T = (4.55, 5.45)^T$$

предполагает выплату первым игроком второму игроку суммы в 0.45 единиц. □

4.7. Упражнения

4.1. Рассмотрим биматричную игру

$$\begin{bmatrix} 3,2 & 4,1 & 0,2 \\ 2,1 & 3,0 & 2,3 \\ 0,1 & 5,3 & 1,1 \end{bmatrix}.$$

Какие из следующих распределений вероятностей (ради компактности задаются только ненулевые вероятности)

а) $p^1(1,1) = 1/6,\ p^1(3,2) = 2/3,$

б) $p^2(1,1) = 1/3,\ p^2(2,1) = 1/6,\ p^2(2,3) = 1/6,\ p^2(3,2) = 1/3,$

в) $p^3(1,1) = 1/4,\ p^3(2,3) = 1/2,\ p^3(3,2) = 1/4,$

являются коррелированными равновесиями?

4.2. Докажите, что равновесия Нэша в смешанных стратегиях и их выпуклые комбинации являются также и коррелированными равновесиями.

4.3. Найдите коррелированные равновесия с максимальным суммарным ожидаемым доходом для игры «конфликт полов» (см. упр. 1.10).

4.4. Три врача решили объединиться для совместной практики. Постоянные расходы (на аренду помещений, зарплату помощника, и т. д.) в год составляют \$75 000. Заметим, что эти расходы каждый из врачей будет нести и в случае, когда он будет практиковать самостоятельно. Врачи имеют следующие годовые доходы и переменные расходы:

доктор	доходы	расходы
1	\$155 000	\$40 000
2	\$160 000	\$35 000
3	\$140 000	\$38 000

Врачи решили использовать теорию игр, чтобы определить, сколько каждый из них должен зарабатывать. Определите характеристическую функцию игры и значение Шепли для этой кооперативной игры. Является ли вектор Шепли стабильным дележом?

4.5. Построить характеристическую функцию кооперативной игры трех лиц, если каждый из игроков имеет по две стратегии, а платежи определяются по правилу:

Если игрок 1 выбирает стратегию 1

Игрок 3:

		1	2
Игрок 2:	1	(5,6,5)	(7,4,5)
	2	(3,9,1)	(7,6,3)

Если игрок 1 выбирает стратегию 2

Игрок 3:

		1	2
Игрок 2:	1	(3,5,7)	(4,3,7)
	2	(7,5,4)	(6,5,4)

4.6. Акции некоторой компании разделены между тремя лицами (игроками) в следующей пропорции: игрок 1 имеет 1 % акций; игрок 2 — 49 %; игрок 3 — 50 %. Чтобы принять решение на годовом собрании акционеров необходимо, чтобы за это решение проголосолали не менее 51 % акций. Коалиция акционеров в случае принятия решения получает выигрыш 1, и 0, если решение не принимается.

Оцените силу каждого из держателей акций, вычислив значение Шепли. Является ли вектор Шепли стабильным дележом?

4.7. Продавец (игрок 1) владеет предметом, не представляющим никакой ценности для него. Первый покупатель (игрок 2) оценивает предмет в \$30, а второй покупатель (игрок 3) — в \$40.

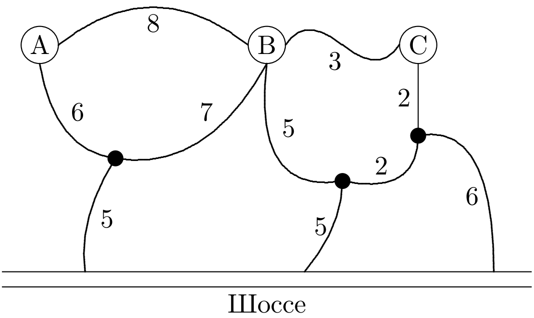
Составьте характеристическую функцию игры, определите ядро и вычислите вектор Шепли.

4.8. Трем фирмам нужны склады для хранения некоторого продукта. Фирмы могут строить склады самостоятельно, а также могут кооперироваться и строить совместно используемые склады. Первой фирме нужен склад площадью 100 м^2, второй — 200 м^2, третьей — 300 м^2. Стоимость строительства склада в зависимости от площади представлена в следующей таблице:

100 м^2	200 м^2	300 м^2	400 м^2	500 м^2	600 м^2
10	18	25	30	34	36

Для каждой из фирм определите ее затраты на строительство склада, вычислив: 1) значение Шепли, 2) сердцевину игры.

4.9. Три фермы соединены между собой и с шоссе сетью грунтовых дорог так, как показано на следующем рисунке.



Фермеры решили вместе заасфальтировать часть грунтовых дорог так, чтобы от каждой фермы можно было доехать до шоссе по асфальтированной дороге. Стомости асфальтирования всех грунтовых участков приведены на вышеприведенном рисунке.

Какие участки нужно заасфальтировать? Как справедливо разделить расходы на строительство между фермерами?

4.10 **(Сбалансированный однопродуктовый рынок)**. Рассмотрим рынок, на котором продается и покупается только один абсолютно делимый продукт. Множество покупателей обозначим через B, а продавцов — через C; $N = B \cup C$ есть множество игроков. Продавец $k \in C$ имеет y_k единиц продукта, а покупатель $j \in B$ собирается купить x_j единиц продукта. Предположим, что спрос и предложение уравновешены: $\sum_{k \in C} y_k = \sum_{j \in B} x_j$. Мы моделируем поведение участников такого рынка в виде кооперативной игры с характеристической функцией

$$v(S) \stackrel{\text{def}}{=} \min \left\{ \sum_{j \in S \cap B} x_j \, , \sum_{k \in S \cap C} y_k \right\}.$$

Здесь цена коалиции $S \subseteq N$ равна объему торговли между членами коалиции.

Найдите значение Шепли для данной игры.

4.11. Владелец (игрок 0) имеет некоторый предмет, который является произведением искуства. Покупатель i (игрок i) оценивает данный предмет в a_i долларов ($i = 1, \ldots, n$). Известно, что $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$.

Представьте данную ситуацию как кооперативную игру (N, v), где $N = \{0, 1, \ldots, n\}$. Кто из покупателей купит предмет и за какую сумму? Какова роль каждого из покупателей? Докажите, что компоненты значения Шепли вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\phi_0(v) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k\,(k+1)}, \\
\phi_i(v) &= \frac{a_i}{i(i+1)} - 2 \sum_{k=i+1}^{n} \frac{a_k}{(k-1)\,k\,(k+1)}, \quad i = 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

4.12 **(Брачный контракт (Вавилонский Талмуд 0-500AD))**. Мужчина имел три жены. Их брачный контракт предусматривает, что в случае смерти мужа, первая жена получит $c_1 = 100$, вторая — $c_2 = 200$, а третья — $c_3 = 300$. После смерти мужа осталась сумма денег $C = 300$. Для $S \subseteq N = \{1, 2, 3\}$ определим

$$v(S) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{0, C - \sum_{i \in N \setminus S} c_i\}.$$

Вычислите сердцевину кооперативной игры (N, v) и вы узнаете, как Талмуд рекомендует разделить сумму C между женами.

4.13. Длина посадочной полосы в аэророрту равна 1500 м. На поддержание полосы в хорошем состоянии тратится \$3150 000 в год. На эту полосу приземляются самолеты четырех типов. Число посадок в год и длина пробега при посадке для каждого типа самодетов приведены в следующей таблице.

Тип самолета	Число приземлений	Длина пробега
1	600	600 м
2	700	900 м
3	500	1200 м
4	200	1500 м

Предположим, что затраты делятся следующим образом: все самолеты, которые совместно используют долю полосы, делят расходы по эксплуатации этой доли в равной пропорции.

Какую долю затран нужно отнести на одну посадку каждого типа самолета?

4.14. Докажите, что ядро простой игры (N, v) непустое тогда и только тогда, когда имеется хотя бы один игрок с правом вето (игрок i имеет право вето, если $v(N \setminus \{i\}) = 0$).

4.15. Кооперативная игра (N, v) называется *выпуклой* если ее характеристическая функция *супермодулярная*:

$$v(I) + v(J) \leq v(I \cap J) + v(I \cup J), \quad I, J \subseteq N.$$

Докажите, что любая выпуклая кооперативная игра имеет непустое ядро, и укажите, как можно найти стабильный дележ.

4.16. Найдите справедливый дележ в кооперативном варианте следующей биматричной игры:

$$\begin{bmatrix} 2,1 & 3,4 & 1,0 & 1,4 & 3,1 \\ 3,0 & 2,3 & 8,7 & 1,3 & 6,2 \\ 2,4 & 6,3 & 3,5 & 5,1 & 1,2 \end{bmatrix}.$$

Сравните этот дележ с вектором Шепли.

Глава 5
Проектирование механизма

Проектирование механизма («mechanism design»)[31], несмотря на инженерное название, — это раздел теории игр, где изучаются конфликтные ситуации с выраженным стратегическим поведением всех участников, в которых нужно определить правила принятия решений и осуществления платежей, чтобы равновесным оказался такой исход, в котором достигает своего максимума некоторая функция социального выбора. Поэтому проектирование механизма иногда называют *обратной теорией игр*.

Такая постановка задачи поиска нужного механизма кажется слишком сложной. Мы начнем изучение основ теории проектирования механизма с рассмотрения принципа откровенности, который позволяет ограничиться поиском только такого механизма, который в байесовской игре, где множество стратегий каждого из игроков совпадает с множеством его типов, побуждает всех игроков честно сообщать свои типы.

Мы здесь не будем рассматривать задачу проектирования механизма в самой общей постановке, а лишь представим специальный класс механизмов, образующих так называемую *квази-линейную среду*. Это один из наиболее хорошо изученных классов механизмом. К тому же, механизмы данного класса наиболее широко используются на практике.

[31] В 2007 г. Леонид Гурвич (Leonid Hurwicz), Эрик Маскин (Eric Maskin), и Роджер Майерсон (Roger Myerson) получили Нобелевскую премию в области экономики «за разработку основ теории проектирования механизма».

5.1. Принцип откровенности

Рассмотрим байесовскую игру

$$G = (\{1,\dots,n\}, \{S_i\}_{i=1}^n, \{T_i\}_{i=1}^n, \{\phi_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i\}_{i=1}^n)\,,$$

и пусть $\tilde{s} = (\tilde{s}_1,\dots,\tilde{s}_n)$ есть байесовское равновесие в этой игре. Определим новую игру

$$\bar{G} = \left(\{1,\dots,n\}, \{\bar{S}_i = T_i\}_{i=1}^n, \{T_i\}_{i=1}^n, \{\bar{\phi}_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i\}_{i=1}^n\right)\,,$$

в которой все игроки объявляют (не обязательно честно) свои типы $\tau_i \in T_i$, $i = 1,\dots,n$, и в сложившейся ситуации $(\tau_1,\dots,\tau_n) \in \prod_{i=1}^n T_i$ выигрыши игроков определяются по правилу:

$$\bar{\phi}_i(\tau_1,\dots,\tau_n; t_i) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_i(\tilde{s}_1(\tau_1),\dots,\tilde{s}_n(\tau_n); t_i), \quad \tau \in T,\ t_i \in T_i,\ i = 1,\dots,n.$$

В новой игре байесовская стратегия игрока i есть функция $\tilde{t} : T_i \to T_i$. Если в игре $\bar{G}$ все игроки объявят свои истинные типы $\tilde{t}_i(t_i) = t_i$, то в сложившейся ситуации $\tilde{t} = (\tilde{t}_1,\dots,\tilde{t}_n)$ игрок i типа t_i выиграет столько же, сколько он выигрывает в ситуации $\tilde{s}$ в исходной игре G. Кроме того, нетрудно понять, что ни одному из игроков в отдельности не выгодно менять свою стратегию. Следовательно, $\tilde{t}$ есть байесовское равновесие в игре $\bar{G}$.

Итак, мы доказали справедливость следующего *принципа откровенности*:

> для любого байесовского равновесия в игре с неполной информацией существует эквивалентная байесовская игра с тем же самым равновесным исходом, но в котором игроки честно объявляют свои типы.

Принцип откровенности чрезвычайно полезен. Он позволяет нам ограничиться поиском только такого механизма, который побуждает всех игроков честно сообщать свои типы.

5.2. Побудительно совместимые механизмы

Предположим, что в игре участвует n игроков, A есть множество альтернатив (возможных исходов в игре[32]), а $v_i : A \to \mathbb{R}$ есть *функция предпочтений* игрока i, где для $a \in A$ значение $v_i(a)$ есть *оценка* альтернативы a игроком i. Как правило, функция v_i неизвестна другим игрокам, но они знают, что v_i принадлежит некоторому множеству $V_i \subset \mathbb{R}^A$, которое называют *областью предпочтений* игрока i. Пусть $V \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^n V_i$. В общем случае, могут быть также заданы представления $\mu_i : V_i \to \Delta(V_{-i})$ всех игроков $i = 1, \ldots, n$. Здесь как и ранее $\mu_i(v_{-i} \in Q | v_i)$ есть условная вероятность, которую игрок i с функцией предпочтений (типа) v_i приписывает событию $v_{-i} \in Q$, где Q измеримое подмножество множества V_{-i}.

Тройка $\mathcal{M} = (\{V_i\}_{i=1}^n; f; \{p_i\}_{i=1}^n)$ называется (*прямым открытым*) *механизмом*, где $V_1, \ldots, V_n$ есть области предпочтений игроков, $f : V \to A$ — *функция социального выбора*, а $p_i : V \to \mathbb{R}$ есть функция платежей игрока i, т. е., если игроки объявят (не обязательно честно) свои функции предпочтений $v_1, \ldots, v_n$, то исходом игры будет $a = f(v_1, \ldots, v_n) = f(v)$, и игрок i должен будет заплатить сумму $p_i(v_1, \ldots, v_n) = p_i(v)$, $i = 1, \ldots, n$.

По заданному механизму $\mathcal{M}$ определим байесовскую игру

$$G_{\mathcal{M}} = (\{1, \ldots, n\}, \{S_i = V_i\}_{i=1}^n, \{T_i = V_i\}_{i=1}^n, \{\phi_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i\}_{i=1}^n)$$

где функция выигрышей игрока i типа v_i $(i = 1, \ldots, n)$ определяется по правилу:

$$\phi_i(\bar{v}; v_i) \stackrel{\text{def}}{=} v_i(f(\bar{v})) - p_i(\bar{v}), \quad \bar{v} \in V.$$

Говорят, что механизм $\mathcal{M}$ *реализует* функцию социального выбора f, если в соответствующей ему байесовской игре $G_{\mathcal{M}}$ существует байесовское равновесие $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n)$, где $\tilde{s}_i : V_i \to V_i$, такое, что $f(\tilde{s}(v)) = f(v)$ для всех $v \in V$ и $i = 1, \ldots, n$. Здесь $\tilde{s}(v) = (\tilde{s}_1(v_1), \ldots, \tilde{s}_n(v_n))$.

[32] Например, мы могли бы определить A равным множеству всех ситуаций $\prod_{i=1}^n S_i$ в игре, но очень часто исход игры во многих ситуациях одинаков.

Задача *проектирования механизма* состоит в том, чтобы найти механизм $\mathcal{M}$, который реализует заданную функцию социального выбора f и при этом удовлетворяет ряду дополнительных условий. Среди таких дополнительных условий центральным является требование, чтобы механизм был *побудительно совместимым*, т. е. чтобы механизм «побуждал» игроков правдиво раскрывать свои типы[33].

Механизм $\mathcal{M}$ называется *побудительно совместимым в байесовском смысле*, если в игре $G_{\mathcal{M}}$ байесовским равновесием является ситуация $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n)$, когда равновесной байесовской стратегией каждого игрока i является правдиво объявить свою функцию предпочтений: $\tilde{s}_i(v_i) = v_i$, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому побудительно совместимый механизм еще называют *правдимым*.

Механизм $\mathcal{M}$ называется *побудительно совместимым*, если в игре $G_{\mathcal{M}}$ доминирующей байесовкой стратегией каждого игрока i является правдиво объявить свою функцию предпочтений: $\tilde{s}_i(v_i) = v_i$, $i = 1, \ldots, n$. Вспоминая определение доминирующей байесовской стратегии (см. стр. 102), мы можем определить механизм $\mathcal{M}$ как *побудительно совместимый*, если для $i = 1, \ldots, n$ и всех $v_{-i} \in V_{-i}$ справедливы неравенства:

$$v_i(f(v_i, v_{-i})) - p_i(v_i, v_{-i}) \geq v_i(f(\bar{v}_i, v_{-i})) - p_i(\bar{v}_i, v_{-i}), \quad v_i, \bar{v}_i \in V_i\,. \tag{5.1}$$

Поскольку доминирующая байесовская ситуация равновесия является байесовским равновесием при любых представлениях игроков, то побудительно совместимый механизм является побудительно совместимым в байесовском смысле при любой системе представлений $\{\mu_i\}_{i=1}^n$. Также понятно, что побудительно совместимый в байесовском смысле механизм $\mathcal{M}$ реализует функцию социального выбора f.

Для примера, в игре «аукцион первой цены», рассмотренной в разделе 3.4.1, механизм $\mathcal{M}_1 = (V_1, V_2; f; p_1, p_2)$ определяется следующим образом. В данной игре всего два исхода: 1 — предмет купит игрок 1, 2 — предмет купит игрок 2. Поэтому

[33] Понятие побудительно совместимого механизма, которое является центральным в теории проектирования механизма, введено в работе: L. Hurwicz. On informationally decentralized systems. In *Decision and Optimization. Radner and McGuire*. North-Holland, Amsterdam, 1972.

$A = \{1,2\}$. Множество V_i функций предпочтений игрока i состоит из функций $v_i : A \to \mathbb{R}_+$, таких, что $v_i(a) = 0$ для $a \neq i$, т. е. каждый игрок приписывает оценку 0 исходу, в котором побеждает его оппонент. При этом $v_i(i)$ есть оценка стоимости продаваего объекта игроком i типа v_i (с функцией предпочтений v_i). Если в качестве своей стратегии игрок i типа v_i выберет функцию $\bar{v}_i$, то $\bar{v}_i(i)$ — это цена, которую игрок i объявит на аукционе.

Функцию социального выбора и функции платежей обоих игроков определим по правилу:

$$f(v_1, v_2) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если } v_1(1) \geq v_2(2), \\ 2, & \text{если } v_1(1) < v_2(2), \end{cases}$$

$$p_1(v_1, v_2) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} v_1(1), & \text{если } v_1(1) \geq v_2(2), \\ 0, & \text{если } v_1(1) < v_2(2), \end{cases}$$

$$p_2(v_1, v_2) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & \text{если } v_1(1) \geq v_2(2), \\ v_2(2), & \text{если } v_1(1) < v_2(2). \end{cases}$$

Поскольку здесь рассматриваются только детерминированные функции социального выбора, то мы немного изменили правила игры так, что при равенстве объявленных сум $v_1(1) = v_2(2)$, объект покупает игрок 1. При этом, анализ игры, проведенный в разделе 3.4.1 не изменится, поскольку вероятность события, что игроки объявят одинаковую цену, равна нулю. Поэтому в игре $G_{\mathcal{M}_1}$ имеется байесовская ситуация равновесия $\tilde{s} = (\tilde{s}_1(v_1) = v_1/2, \tilde{s}_2(v_2) = v_2/2)$. Поскольку $f(\tilde{s}_1(v_1), \tilde{s}_2(v_2)) = f(v_1, v_2)$, то механизм $\mathcal{M}_1$ реализует функцию f. Но поскольку ситуация $(\tilde{s}_1(v_1) = v_1, \tilde{s}_1(v_2) = v_2)$ не является байесовским равновесием в игре $G_{\mathcal{M}_1}$ (проверьте это!), то механизм $\mathcal{M}_1$ не является побудительно совместимым в байесовском смысле.

В заключение этого раздела мы сформулируем еще несколько требований, которые часто встречаются в задачах проектирования механизма.

Логично допустить, что если у игроков есть опция в любой момент выйти из игры, то игроки должны платить механизму не больше своих выигрышей в игре. Это значит, что механизм

$\mathcal{M}$ должен быть (*ex-post*) *индивидуально рациональным*:

$$v_i(f(v)) - p_i(v) \geq 0, \quad v \in V,\ i = 1, \ldots, n. \tag{5.2}$$

Нужно все же заметить, что свойство индивидуальной рациональности, которое требует, чтобы никто из игроков не оказался в проигрыше, идеально подходит для игроков, неприемлющих риск. Для нейтральных к риску игроков это условие можно заменить менее ограничительным требованием. Если предположить, что игроки не могут выйти из игры после ее начала, а лишь могут отказаться от игры после того как получат информацию о типах других игроков, участвующих в игре, то каждый игрок может вычислить свой ожидаемый выигрыш при оптимальном поведении других игроков, и, если этот выигрыш окажется отрицательным, игрок может не участвовать в игре. Механизм, который гарантирует, что ожидаемый выигрыш каждого игрока является неотрицательным, называют *interim индивидуально рациональным*. Мы здесь не будем формализовать это условие, поскольку для этого нужно использовать понятие интеграла Лебега.

Если проектируется механизм для замкнутой системы, то часто требуется выполнение *условия баланса платежей*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(v) = 0, \quad v \in V.$$

Слабое условие баланса платежей

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(v) \geq 0, \quad v \in V,$$

— это требование к механизму для системы, в которую не поступают платежи из вне. Более ограничительное *условие неотрицательности платежей*

$$p_i(v) \geq 0, \quad v \in V,\ i = 1, \ldots, n,$$

не позволяет механизму выплачивать деньги игрокам.

В заключение без доказательства приведем одно важное свойство побудительно совместимых механизмов.

Теорема 5.1. *Пусть* $(\{V_i\}_{i=1}^n; f; \{p_i\}_{i=1}^n)$ *и* $(\{V_i\}_{i=1}^n; f; \{\bar{p}_i\}_{i=1}^n)$ *есть два побудительно совместимых механизма с одной и той же функцией социального выбора* $f : V \to A$, *и предположим, что все области предпочтений* $V_i \subseteq \mathbb{R}^A$ *являются связными множествами. Тогда для всех* $i = 1, \ldots, n$ *существуют такие функции* $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$, *что* $\bar{p}_i(v) = p_i(v) + h_i(v_{-i})$ *для всех* $v \in V = \prod_{j=1}^n V_j$.

Нетрудно понять, что в теореме 5.1 требование связности множеств V_i является существенным. Например, если все оценки $v_i(a)$ целочисленны, то замена функции $p_i(v)$ на $p_i(v) + \epsilon$, где $\epsilon < 1/2$, не нарушит свойство побудительной совместимости.

5.3. Механизм Викрея – Кларка – Гроуса

Одной из наиболее часто используемых функций социального выбора является *функция социального благополучия*, для которой наиболее желательным является такой исход $a \in A$, когда суммарное предпочтение всех участников $\sum_{i=1}^n v_i(a)$ максимально.

Механизм $(\{V_i\}_{i=1}^n; f; \{p_i\}_{i=1}^n)$ называется *механизмом Викрея – Кларка – Гроуса* (коротко *VCG-механизмом*), если составляющие его элементы определяются по правилам:

$$f(v) \in \arg\max_{a \in A} \sum_{i=1}^n v_i(a), \tag{5.3}$$

$$p_i(v) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{i\}} v_j(f(v)), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.4}$$

где функция $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ не зависит от v_i, $i = 1, \ldots, n$.

Влияние на поведение игроков двух членов в определениии функции платежей различно. Первый член $h_i(v_{-i})$ не влияет на выбор стратегии игроком i, поскольку он не зависит от его стратегии v_i; $h_i(v_{-i})$ — это константа с точки зрения игрока i. Но все же выбор h_i существенно меняет объемы и направления платежей в игре, что мы обсудим несколько позже.

Вычитаемое $\sum_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}} v_j(f(v))$ — это сумма, которую получает игрок i. Ее величина равна сумме величин предпочтений других игроков, и, если сложить эту величину с величиной предпочтения самого игрока i, то как раз мы и получим значение функции социального благополучия. Поэтому VCG-механизм стимулирует всех игроков максимизировать функцию социального благополучия.

Теорема 5.2. *Любой VCG-механизм является побудительно совместимым.*

Доказательство. Пусть $v_{-i} \in V_{-i}$. Нам нужно доказать, что для игрока i с функцией предпочтений $v_i \in V_i$ лучше (точнее не хуже) объявить истинное значение v_i, чем объявить в качестве своей стратегии любое другое значение $\bar{v}_i \in V_i \setminus \{v_i\}$. Пусть $a = f(v_i, v_{-i})$ и $\bar{a} = f(\bar{v}_i, v_{-i})$. Тогда

$$\begin{aligned} v_i(f(v_i, v_{-i})) - p_i(v_i, v_{-i}) &= v_i(a) + \sum_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}} v_j(a) - h_i(v_{-i}) \geq \\ &\geq v_i(\bar{a}) + \sum_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}} v_j(\bar{a}) - h_i(v_{-i}) = \\ &= v_i(f(\bar{v}_i, v_{-i})) - p_i(\bar{v}_i, v_{-i}). \end{aligned}$$

□

5.3.1. Правило замещения Кларка

В этом разделе мы рассмотрим вопрос о выборе «правильных» функций h_i в определении функции платежей p_i. Простейший способ — положить все $h_i \equiv 0$, но тогда механизм будет неоправдано платить большие суммы денег участникам. Определяя h_i, нужно также стремиться получить механизм, который удовлетворял бы как можно большему количеству дополнительных «полезных» свойств.

Условия индивидуальной рациональности и неотрицательности платежей будут выполняться при выборе функций h_i по *правило замещения Кларка*:

$$h_i(v_{-i}) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{b \in A} \sum_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i\}} v_j(b), \quad i = 1, \dots, n. \tag{5.5}$$

В таком случае функции платежей имеют следующий вид:

$$p_i(v) = \max_{b \in A} \sum_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i\}} v_j(b) - \sum_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i\}} v_j(f(v)), \quad i = 1, \dots, n. \tag{5.6}$$

Формулу (5.6) можно проинтерпретировать так: каждый игрок i оплачивает ущерб, который он причиняет другим игрокам. Этот ущерб равен сумме, которую другие игроки могут получить без участия игрока i, за вычетом суммы, которую другие игроки получают с участием игрока i.

Давайте все же проверим, что условие индивидуальной рациональности действительно выполняются для функций вида (5.6). Для $v \in V$ пусть

$$a \in \arg\max_{\alpha \in A} \sum_{j=1}^{n} v_j(\alpha), \quad b \in \arg\max_{\alpha \in A} \sum_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i\}} v_j(\alpha).$$

С учетом того, что $a = f(v)$, для всех $i = 1, \dots, n$ имеем

$$v_i(f(v)) - p_i(v) = v_i(a) - \sum_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i\}} v_j(b) + \sum_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i\}} v_j(a) \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{n} v_j(a) - \sum_{j=1}^{n} v_j(b) \geq 0.$$

5.4. Примеры VCG-механизмов

В этом разделе мы рассмотрим два конкретных примера реализации VCG-механизмов.

5.4.1. Аукцион второй цены

Описание этого типа аукциона приведено в разделе 3.4.2. Здесь мы покажем, что правила проведения такого аукциона являются реализацией VCG-механизма с правилом замещения

Кларка. Чтобы задать такой механизм, достаточно указать множество альтернатив и вид функций предпочтений игроков.

Определим множество альтернатив (исходов) $A \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \ldots, n\}$, где исход $i \in A$ означает, что объект купил покупатель i. Множество V_i функций предпочтений игрока i состоит из функций $v_i : A \to \mathbb{R}^n_+$, для которых $v_i(a) = 0$ для всех $a \in A \setminus \{i\}$. При этом значение $v_i(i)$ есть оценка стоимости продаваего объекта игроком i типа v_i (с функцией предпочтений v_i). Если в качестве своей стратегии игрок i типа v_i выберет функцию $\bar{v}_i$, то $\bar{v}_i(i)$ — это цена, которую игрок i объявляет на аукционе.

Вычислим результат работы механизма (кто купит объект и по какой цене). Победителя игры определим по формуле (5.3):

$$i^* = f(v) \in \arg\max_{i \in A} \sum_{j=1}^{n} v_j(i) = \arg\max_{1 \le i \le n} v_i(i).$$

Им оказывается игрок i^*, предложивший наибольшую цену $v_{i^*}(i^*)$. Платежи игроков вычислим по формуле (5.6):

$$p_i(v) = \max_{k \in A} \sum_{j \in A \setminus \{i\}} v_j(k) - \sum_{j \in A \setminus \{i\}} v_j(f(v)) =$$
$$= \begin{cases} \max\limits_{k \in A \setminus \{i\}} v_k(k), & i = i^*, \\ 0, & i \ne i^*. \end{cases}$$

Мы видим, что платит только победитель, и он платит наибольшую из сумм, предложенных проигравшими. А это есть правила проведения аукциона второй цены (или аукциона Викрей).

5.4.2. Как купить путь в сети?

Рассмотрим коммуникационную сеть, моделью которой является ориентированный граф (орграф) $G = (N, E)$. Все каналы связи (дуги) $e \in E$ принадлежат различным владельцам (игрокам). Владельцу канала $e = (i, j) \in E$ стоит $c_e \ge 0$, чтобы передать поток сообщений некоторого единичного объема из узла i в узел j. Нужно обеспечить коммуникационный путь $P = (s = i_0, i_1, \dots, i_k = t)$, где $e_j = (i_{j-1}, i_j) \in E$ для всех $j = 1, \dots, k$, для передачи сообщений между заданными узлами $s, t \in N$. Чтобы минимизировать стоимость передачи сообщений, желательно получить путь минимальной стоимости $\sum_{e \in E(P)} c_e$, где $E(P)$ есть множество дуг e_j пути P. Но поскольку игроки не обязаны честно сообщать свои издержки, то нужен механизм, который стимулировал бы их быть честными. Этой цели можно достичь, разработав VCR-механизм.

В данной задаче проектирования механизма множество альтернатив A состоит из всех s,t-путей (путей из s в t) в орграфе G. Каждая функция $v_e : A \to \mathbb{R}^E$ предпочтений игрока e имеет следующий вид:

$$v_e(P) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -w_e, & e \in E(P), \\ 0, & e \notin E(P), \end{cases}$$

где через $w_e \ge 0$ мы обозначили издержки, объявленные игроком e. Пусть V_e обозначает множество всех функций предпочтений игрока e, а $V \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{e \in E} V_e$.

Для $v \in \mathbb{R}^A$ по формуле (5.3) определим исход в игре

$$P^* = f(v) \in \arg\max_{P \in A} \sum_{e \in E} v_e(P) = \arg\min_{P \in A} \sum_{e \in E(P)} w_e,$$

которым является s,t-путь P^* минимальной стоимости $\sum_{e \in E(P^*)} w_e$.

Для $e \in E$ определим функцию $h_{-e} : V_{-e} \to \mathbb{R}$ по правилу:

$$h_e(v_{-e}) = \max_{P \in A^{-e}} \sum_{\bar{e} \in E} v_{\bar{e}}(P) = \begin{cases} -\min\limits_{P \in A^{-e}} \sum\limits_{\bar{e} \in E(P)} w_{\bar{e}}, & e \in E(P), \\ 0, & e \notin E(P), \end{cases}$$

где A^{-e} обозначает множество s,t-путей, не проходящих по дуге e. Для простоты изложения будем считать, что все множества A^{-e} непустые. Заметим, что мы здесь определили функции h_e не по правилу замещения Кларка.

Платежи игроков найдем по формуле (5.4):

$$p_e(v) = h_e(v_{-e}) - \sum_{\bar{e}\in E\setminus\{e\}} v_{\bar{e}}(P^*) =$$
$$= \begin{cases} \left(\sum\limits_{\bar{e}\in E(P^*)} w_{\bar{e}} - \min\limits_{P\in A^{-e}} \sum\limits_{\bar{e}\in E(P)} w_{\bar{e}}\right) - w_e, & e \in E(P^*) \\ 0, & e \notin E(P^*). \end{cases} \tag{5.7}$$

Поскольку все платежи неположительны, то в данном случае каждый игрок e не платит, а получает сумму $-p_e(v)$. Мы также видим, что механизм ничего не платит владельцам каналов, не лежащих на кратчайшем s,t-пути P^*, а владелец канала e на этом кратчайшем пути сверх обявленной стоимости w_e получает сумму, равную разности стоимости кратчайшего s,t-пути среди путей, не проходящих через e, и стоимости пути P^*.

Пример 5.1. *Нужно «купить» путь из узла $s = 1$ в узел $t = 4$ в сети на рис. 5.1.*

Решение. Поскольку мы разработали побудительно совместимый механизм, то игрокам лучше всего честно объявить свои издержки: $w_e = c_e$ для всех $e \in E$.

В данной сети кратчайшим $1,4$-путем является путь $P^* = (1,3,4)$ стоимости $1 + 3 = 4$. Платежи владельцам каналов $(1,3)$ и $(3,4)$ вычислим по формуле (5.7).

Поскольку кратчайший $1,4$-путь, который не проходит по дуге $(1,3)$, — это путь $P_{\overline{1,3}} = (1,2,4)$ стоимости $4 + 1 = 5$, то владельцу канала $(1,3)$ нужно заплатить сумму $\bar{p}_{(1,3)} = 1 + (5 - 4) = 2$.

Кратчайший $1,4$-путь среди путей, которые не проходят по дуге $(3,4)$, — это путь $P_{\overline{3,4}} = (1,3,2,4)$ стоимости $1+2+1 = 4$. Поэтому владельцу канала $(3,4)$ нужно заплатить сумму $\bar{p}_{(3,4)} = 3 + (4 - 4) = 3$.

Мы видим, что механизм платит владельцу канала $(1,3)$ больше его издержек. И это логично, поскольку маршрутизация сообщений в обход канала $(1,3)$ будет стоить минимум 5 единиц (на самом деле больше, поскольку некоторым владельцам каналов все равно придется платить больше их издержек). $\square$

5.5. Реализация общественного проекта

В этом разделе мы рассмотрим пример побудительно-совместимого механизма, который не является VCG-механизмом. Имеется n участников (игроков), которые хотят совместно реализовать некий проект (построить дорогу, мост, послать человека на Марс, и т. д.). Стомость работ равна c. В игре два исхода: $A = \{P, H\}$, где исход P означает, что проект будет реализован, а H — не реализован. Игрок i оценивает свою пользу от проекта равной $v_i(P) = u_i$ (величина u_i не известна другим игрокам). Если проект не реализуется, никто от этого не выигрывает: $v_i(H) = 0$ для $i \in N \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \ldots, n\}$. Все игроки одновременно объявляют свои взносы $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n \geq 0$, причем, $\bar{u}_i$ не обязательно совпадает с u_i. Проект реализуется, если $\sum_{i=1}^n \bar{u}_i \geq c$. Нужно разработать механизм, который побуждал бы игроков реализовать проект.

Множество V_i возможных функций предпочтений игрока i состоит из функций $v_i : A \to \mathbb{R}_+$, таких, что $v_i(H) = 0$. Пусть $V = \prod_{i=1}^n V_i$.

Определим побудительно совместимый механизм, задавая функцию социального выбора $f : V \to A$ и функции $p_i : V \to \mathbb{R}_+$ $(i \in N)$ платежей игроков по правилам:

$$f(v) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} P, & \text{если} \quad \sum_{i=1}^n v_i(P) \geq c, \\ H, & \text{если} \quad \sum_{i=1}^n v_i(P) < c, \end{cases} \tag{5.8}$$

$$p_i(v) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \max\left\{0, c - \sum\limits_{j \in N \setminus \{i\}} v_i(P)\right\}, & \text{если} \quad \sum_{i=1}^n v_i(P) \geq c, \\ 0, & \text{если} \quad \sum_{i=1}^n v_i(P) < c. \end{cases} \tag{5.9}$$

Теорема 5.3. *Механизм* $(\{V_i\}_{i=1}^n; f; \{p_i\}_{i=1}^n)$*, определенный по формулам* (5.8) *и* (5.9)*, является побудительно-совместимым.*

Доказательство. Для $i \in N$, $v_{-i} \in V_{-i}$ и $v_i, \bar{v}_i \in V_i$ нам нужно доказать справедливость неравенства

$$v_i(f(v_i, v_{-i})) - p_i(v_i, v_{-i}) \geq v_i(f(\bar{v}_i, v_{-i})) - p_i(\bar{v}_i, v_{-i}). \quad (5.10)$$

Пусть $x = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v_i(P)$. Если $x \geq c$, то $f(\bar{v}_i, v_{-i}) = f(v_i, v_{-i}) = P$, $p_i(\bar{v}_i, v_{-i}) = p_i(v_i, v_{-i}) = 0$ и неравенство (5.10) выполняется. Поэтому предположим, что $x < c$. Рассмотрим два случая.

1) $f(v_i, v_{-i}) = P$. Тогда $x + v_i(P) \geq c$ и $p_i(v) = c - x$. Если $x + \bar{v}_i(P) \geq c$, то неравенство (5.10) выполняется как равенство, поскольку $f(\bar{v}_i, v_{-i}) = P$ и функция p_i не зависит от v_i. Если же $x + \bar{v}_i(P) < c$, то $f(\bar{v}_i, v_{-i}) = H$, и

$$v_i(P) - p_i(v_i, v_{-i}) = x + v_i(P) - c \geq 0 = \bar{v}_i(H) - p_i(\bar{v}_i, v_{-i}).$$

2) $f(v_i, v_{-i}) = H$. Тогда $x + v_i(P) < c$ и $p_i(v) = 0$. Если $x + \bar{v}_i(P) < c$, то $f(\bar{v}_i, v_{-i}) = H$ и обе части (левая и правая) неравенства (5.10) равны нулю. Если же $x + \bar{v}_i(P) \geq c$, то $f(\bar{v}_i, v_{-i}) = P$, $p_i(\bar{v}_i, v_{-i}) = c - x$ и

$$v_i(H) - p_i(v_i, v_{-i}) = 0 = (c - x) - (c - x) > v_i(P) - p_i(\bar{v}_i, v_{-i}).$$

□

Итак, мы разработали следующий *механизм Кларка*. Игроки одновременно объявляют свои взносы $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n \geq 0$. Если $\sum_{i=1}^n \bar{u}_i < c$, то проект не реализуется и платежи всех игроков равны нулю. Если $\sum_{i=1}^n \bar{u}_i \geq c$, то проект реализуется и взнос игрока i равен

$$q_i(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n) = \max\left\{0, c - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \bar{u}_i)\right\}.$$

Из теоремы 5.3 следует, что оптимальной стратегией игрока i будет честно объявить свою выгоду от реализации проекта, т. е. объявить $\bar{u}_i = u_i = v_i(P)$.

Если $\sum_{i=1}^{n} u_i > c$, то

$$\sum_{i=1}^{n} q_i(u_1, \ldots, u_n) < c,$$

т. е. сумма платежей всех игроков меньше стоимости проекта. И кто же должен оплачивать недостающую сумму?

Пример 5.2. *Три соседа по даче решили построить летний бассейн. Стоимость строительства бассейна* \$300*. Соседи оценивают пользу от басейна равной* $u_1 = \$100$*,* $u_2 = \$100$*,* $u_3 = \$150$*. Определим взнос каждого из соседей используя механизм Кларка.*

Решение Поскольку $u_1 + u_2 + u_3 = 100 + 100 + 150 = 350 > 300 = c$, то бассейн будет построен. Вычислим взнос каждого из соседей:

$$\begin{aligned}
q_1 &= \max\{0, 300 - (100 + 150)\} = 50, \\
q_2 &= \max\{0, 300 - (100 + 150)\} = 50, \\
q_3 &= \max\{0, 300 - (100 + 100)\} = 100.
\end{aligned}$$

Мы видим, что суммарный взнос трех соседей составляет \$200, что меньше на \$100 требуемой суммы.

Итак, либо соседи должны уменьшить расходы на строительство (например, построить меньший бассейн), либо найти другой способ определить взнос каждого из них. □

К сожалению, при выполнении принципа индивидуальной рациональности игроков (5.2), мы не можем предложить другого VCG-механизма $(\{V_i\}_{i=1}^{n}; f; \{\bar{p}_i\}_{i=1}^{n})$ с пороговой функцией социального выбора, определенной по правилу (5.8), при котором платежи участников покрывали бы стоимость реализации проекта.

Действительно, по теореме 5.8 для $i = 1, \ldots, n$ существуют такие функции $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$, что

$$\bar{p}_i(v) = p_i(v) + h_i(v_{-i}), \quad v \in V.$$

Но в силу принципа индивидуальной рациональности (5.2) имеем

$$v_i(f(v)) - p_i(v) - h_i(v_{-i}) = v_i(f(v)) - \bar{p}_i(v) \geq 0, \quad v \in V,$$

или

$$h_i(v_{-i}) \leq v_i(f(v)) - p_i(v), \quad v \in V.$$

В частности, для $\hat{v}_i(P) = \hat{v}_i(H) = 0$ имеем

$$h_i(v_{-i}) \leq \hat{v}_i(f(\hat{v}_i, v_{-i})) - p_i(\hat{v}_i, v_{-i}) = 0 - p_i(\hat{v}_i, v_{-i}) \leq 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i(v_1, \ldots, v_n) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{i=1}^{n} q_i(u_1, \ldots, u_n) < c.$$

5.6. Рандомизированные механизмы

До сих пор мы рассматривали только детерминированные механизмы. Можно предположить, что в тех случаях, когда не удается найти детерминированный механизм с желаемыми свойствами, мы можем достичь большего, разработав недетеминированный механизм. Рандомизированный (недетерминированный) механизм выбирает исход в игре и назначает платежи игроков случайным образом согласно заданным распределениям вероятностей на множествах альтернатив и платежей.

5.6.1. Механизмы для однопараметрических областей

В этом разделе мы охарактеризуем рандомизированный побудительно совместимый механизм для однопараметрических областей предпочтений. Как обычно множество исходов в игре обозначаем через A. Пусть $W_i \in A$ есть множество исходов, выигрышных для игрока i, $i = 1, \ldots, n$. Всем своим выигрышным исходам $a \in W_i$ игрок i типа t приписывет одну и ту же оценку $t \in [t_i^0, t_i^1]$, где $t_0^i, t_1^i \in \mathbb{R}$ и $t_0^i \leq t_1^i$. Всем невыигрышным исходам $a \in A \setminus W_i$ игрок i приписывает оценку 0. Такое предпочтение игрока i описывается пороговой функцией $v_i^t : A \to \mathbb{R}$, где $v_i^t(a) = t$ для всех $a \in W_i$, и $v_i^t(a) = 0$ для всех $a \in A \setminus W_i$. Область V_i предпочтений игрока i состоит из пороговых функций v_i^t для всех $t \in [t_i^0, t_i^1]$. Поскольку каждая функция из V_i определяется по значению одного параметра t, то такую область называют *однопараметрической*.

Рандомизированный механизм (с однопараметрическими областями предпочтений) задается тройкой:

$$\mathcal{RM} = \left([t_i^0, t_i^1]_{i=1}^n, \{w_i\}_{i=1}^n, \{p_i\}_{i=1}^n\right),$$

где $[t_i^0, t_i^1]$ есть интервал предпочтений игрока i, а $w_i : T \to [0,1]$, $p_i : T \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Здесь $T \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^n T_i$, $T_i \stackrel{\text{def}}{=} [t_i^0, t_i^1]$ и для $t \in T$ значение $w_i(t)$ есть вероятность того, что в ситуации t игра закончиться в одном из исходов $a \in W_i$, выигрышных для игрока i, а $p_i(t)$ есть ожидаемый платеж игрока i (указанная вероятность и матожидание вычисляются относительно распределений вероятностей в рандомизированном механизме). Средний выигрыш игрока i в ситуации $t \in T$ равен

$$\phi_i(t) = w_i(t) t_i - p_i(t).$$

Заметим, что в определении рандомизированного механизма распределения вероятностей w_i, $i = 1, \ldots, n$, заменяют функцию социального выбора f в детерминированном механизме. Кроме того, класс рандомизированных механизмов включает в себя и детерминированные механизмы: если все $w_i(t) \in \{0, 1\}$, то рандомизированный механизм является детерминированным.

Рандомизированный механизм $\mathcal{RM}$ называется *побудительно совместимым в среднем*, если для $i = 1, \ldots, n$ и любого фиксированного набора $t_{-i} \in T_{-i}$ справедливы неравенства:

$$w_i(t_i, t_{-i})\, t_i - p_i(t_i, t_{-i}) \geq w_i(\bar{t}_i, t_{-i})\, t_i - p_i(\bar{t}_i, t_{-i}), \quad t_i, \bar{t}_i \in [t_i^0, t_i^1]. \tag{5.11}$$

Важно заметить, что побудительно совместимый в среднем детерминированный механизм (когда все $w_i(t) \in \{0, 1\}$) является побудительно совместимым.

Ради простоты обозначений в дальнейшем мы будем рассматривать только нормализованные механизмы, в которых наименьшая оценка t_i^0 не может быть выигрышной: $w_i(t_i^0, t_{-i}) = 0$ и $p_i(t_i^0, t_{-i}) = 0$.

Теорема 5.4. *Рандомизированный механизм $\mathcal{RM}$ является побудительно совместимым в среднем, если и только если для всех $i = 1, \ldots, n$ и всех $t_{-i} \in T_{-i}$ выполняются условия:*

(а) *$w_i(t_i, t_{-i})$ есть неубывающая функция аргумента t_i;*

(б) *для всех $t_i \in [t_i^0, t_i^1]$*

$$p_i(t_i, t_{-i}) = w_i(t_i, t_{-i})\, t_i - \int_{t_i^0}^{t_i} w_i(\tau, t_{-i})\, d\tau\,. \qquad (5.12)$$

Доказательство. Сначала докажем *достаточность* условий (а) и (б) для побудительной совместимости в среднем. Для заданных i, $t_{-i} \in T_{-i}$ и $t_i, \bar{t}_i \in [t_i^0, t_i^1]$ нам нужно доказать справедивость неравенства

$$w_i(t_i, t_{-i})t_i - p_i(t_i, t_{-i}) \geq w_i(\bar{t}_i, t_{-i})t_i - p_i(\bar{t}_i, t_{-i}).$$

Подставляя в это неравенство выражение (5.12) для p_i, получим неравенство

$$\int_{t_i^0}^{t_i} w_i(\tau, t_{-i})\, d\tau \geq \int_{t_i^0}^{\bar{t}_i} w_i(\tau, t_{-i})\, d\tau - (\bar{t}_i - t_i)\, w_i(\bar{t}_i, t_{-i}). \quad (5.13)$$

Для $\bar{t}_i > t_i$ неравенство (5.13) эквивалентно следующему:

$$(\bar{t}_i - t_i)\, w(\bar{t}_i, t_{-i}) \geq \int_{t_i}^{\bar{t}_i} w_i(\tau, t_{-i})\, d\tau,$$

которое выполняется в силу монотонности функции w_i по аргументу t_i.

Для $\bar{t}_i < t_i$ неравенство (5.13) эквивалентно следующему:

$$(t_i - \bar{t}_i)\, w_i(\bar{t}_i, t_{-i}) \leq \int_{\bar{t}_i}^{t_i} w_i(\tau, t_{-i})\, d\tau,$$

которое также выполняется в силу монотонности функции w_i по аргументу t_i.

Теперь докажем *необходимость* условий (а) и (б). Так как механизм является побудительно совместимым в среднем, то для $\tau, \bar\tau \in [t_i^0, t_i^1]$ и $t_{-i} \in T_{-i}$ справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} &w_i(\tau, t_{-i})\,\tau - p_i(\tau, t_{-i}) \ge w_i(\bar\tau, t_{-i})\,\tau - p_i(\bar\tau, t_{-i}),\\ &w_i(\bar\tau, t_{-i})\,\bar\tau - p_i(\bar\tau, t_{-i}) \ge w_i(\tau, t_{-i})\,\bar\tau - p_i(\tau, t_{-i}), \end{aligned} \tag{5.14}$$

сложив которые получим неравенство

$$(\bar\tau - \tau)\, w_i(\tau, t_{-i}) \le (\bar\tau - \tau)\, w_i(\bar\tau, t_{-i}),$$

из которого следует, что w_i есть неубывающая функция аргумента t_i.

Чтобы вывести формулу для $p_i(t)$, перегруппируем неравенства в (5.14) следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau\,(w_i(\bar\tau, t_{-i}) - w_i(\tau, t_{-i})) \le p_i(\bar\tau, t_{-i}) - p_i(\tau, t_{-i}) \le\\ \le \bar\tau\,(w_i(\bar\tau, t_{-i}) - w_i(\tau, t_{-i})). \end{aligned}$$

Подставим в это неравенство $\bar\tau = \tau + \Delta\tau$, затем разделим все три части на $\Delta\tau$ и перейдем к пределу при $\Delta\tau \to 0$. (Здесь может показаться, что переход к пределу предполагает дифференцируемость функции w_i по t_i. Но поскольку w_i ограничена и монотонна по t_i, то она дифференцируеиа почти всюду на отрезке $[t_i^0, t_i^1]$, что нам будет достаточно при последующем интегрировании.) В результате левая и правая части имеют один и тот же предел $\tau\, \frac{\partial w_i}{\partial t_i}(\tau, t_{-i})$, а предел средней части равен $\frac{\partial p_i}{\partial t_i}(\tau, t_{-i})$. Следовательно, мы доказали справедливость равенства

$$\frac{\partial p_i}{\partial t_i}(\tau, t_{-i}) = \tau\, \frac{\partial w_i}{\partial t_i}(\tau, t_{-i}),$$

проинтегрировав которое на отрезке $[t_i^0, t_i]$

$$\int_{t_i^0}^{t_i} \frac{\partial p_i}{\partial t_i}(\tau, t_{-i})\, d\tau = \int_{t_i^0}^{t_i} \tau\, \frac{\partial w_i}{\partial t_i}(\tau, t_{-i})\, d\tau,$$

с учетом начального условия $p_i(t_i^0, t_{-i}) = 0$ получим уравнение

$$p_i(t_i, t_{-1}) = \int_{t_i^0}^{t_i} \tau\, \frac{\partial w_i}{\partial t_i}(\tau, t_{-i})\, d\tau.$$

Интегрирование по частям дает требуемое равенство (5.12). □

В качестве приложения теоремы 5.4 мы покажем, что не существует ex-post эффективного побудительно совместимого сбалансированного механизма парных торгов (см. раздел 3.5).

Напомним, что в *парных торгах* участвуют двое: продавец и покупатель некоторого товара. Продавец оценивает свой товар суммой $v_s \in [0,1]$, а покупатель — суммой $v_b \in [0,1]$. Но на торгах продавец называет цену $s \in [0,1]$, а покупатель — цену $b \in [0,1]$. Механизм парных торгов должен для заданных s и b решить, состоятся ли торги, и, если состоятся, то какую сумму покупатель должен заплатить продавцу. Мы хотели бы разработать механизм парных торгов, который

- побудительно совместимый, и тогда оптимальным поведением продавца будет назначить цену $s = v_s$, а покупателя — предложить цену $b = v_b$;
- удовлетворяет *условию баланса платежей*, которое в данном случае означает, что продавец получит ровно столько, сколько заплатит покупатель;
- является *ex-post эффективным*, т. е. товар продается тогда и только тогда, когда оценка продавца не превосходит оценки покупателя: $v_s \le v_b$.

В игре «парные торги» всего два исхода, поэтому $A = \{Y, N\}$, где Y означает, что торги состоялись и товар продан, а N — товар не продан. Выигрышная альтернатива для обоих, продавца и покупателя, одна — это Y. Поэтому $W_s = W_b = \{Y\}$. При выигрышном исходе продавец теряет сумму v_s (стоимость товара) и получает сумму $p_b(s,b)$ (платеж покупателя). Перефразируя, можно сказать, что при выигрышном исходе продавец выигрывает $-v_s$ и платит $p_s(s,b) = -p_b(s,b)$. При выигрышном исходе покупатель получает товар стоимостью v_b, за что платит $p_b(s,b)$. Чтобы соотнести условия теоремы 5.4 с данной ситуацией, удобно ввести обозначения: $t_s = -v_s$ и $t_b = v_b$. Теперь понятно, что в данной игре интервалы предпочтений игроков (продавца и покупателя) следующие: $[t_s^0, t_s^1] = [-1, 0]$, а $[t_b^0, t_b^1] = [0, 1]$.

Поскольку мы ищем побудительно совместимый механизм, то можем считать, что $s = v_s = -t_s$ и $b = v_b = t_b$. Exp-post эффективность механизма означает, что мы должны определить вероятности победы продаца и покупателя по формуле:

$$w_s(s,b) = w_b(s,b) = w(s,b) = \begin{cases} 1, & s \le b, \\ 0, & s > b. \end{cases}$$

По формуле (5.12) вычислим платежи продавца

$$\begin{aligned} p_s(s,b) &= -w(s,b)s - \int_{-1}^{-s} w(\sigma,b)\,d\sigma = \\ &= \begin{cases} -s - \displaystyle\int_{-b}^{-s} 1\,d\sigma = -b, & s \le b, \\ 0 - \displaystyle\int_{-1}^{-s} 0\,d\sigma = 0, & s > b, \end{cases} \end{aligned}$$

и покупателя

$$\begin{aligned} p_b(s,b) &= w(s,b)b - \int_{0}^{b} w(s,\beta)\,d\beta = \\ &= \begin{cases} b - \displaystyle\int_{s}^{b} 1\,d\beta = s, & s \le b, \\ 0 - \displaystyle\int_{0}^{b} 0\,d\beta = 0, & s > b. \end{cases} \end{aligned}$$

Мы видим, что в ситуации, когда $s < b$, продавец получает больше, чем платит покупатель. Понятно, что такой механизм не может нормально функционировать.

5.7. Проектирование оптимального механизма

До сих пор мы рассматривали задачу проектирования механизма, целью которой была реализация некоторой функции социального выбора посредством механизма из заданного класса (с требуемыми свойствами). А теперь предположим, что проектировщик механизма (например, это аукционер) желает среди всех допустимых механизмов выбрать тот, который приносит ему наибольший ожидаемый доход.

Если вы решили упр. 3.3, то уже знаете, что как в аукционе первой цены так и в аукционе второй цены с двумя покупателями, чьи оценки продаваемого объекта есть случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[0,1]$, доход аукционера один и тот же и равен $1/3$. И этот результат не случаен, поскольку было замечено, что ожидаемый доход аукционера один и тот же в любом аукционе, в котором объект всегда продается покутелю, предложившему наибольшую цену. Означает ли это, что $1/3$ — это максимально возможный ожидаемый доход аукционера для данного типа покупателей. Если вы решили упр. 3.4, то уже знаете, что это не так. В аукционе второй цены с резервированием, в котором допускается возможность того, что объект не будет продан, если никто из двух покупателей не предложит за него цену, большую цены резервирования $r = 1/2$, ожидаемый доход аукционера равен $5/12$. В этом разделе мы узнаем, что данный тип аукциона является оптимальным для аукционера.

В общем случае искомый оптимальный механизм может быть рандомизированным. *Доход рандомизированного механизма*

$$\mathcal{RM} = \left(\{[t_i^0, t_i^1]\}_{i=1}^n, \{w_i\}_{i=1}^n, \{p_i\}_{i=1}^n\right)$$

в ситуации $t \in T$ определяется по формуле:

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) - c(w(t)),$$

где $\sum_{i=1}^n p_i(t)$ — это суммарный платеж игроков механизму, а $c(w(t))$ — это издержки механизма по реализации распределения

$$w(t) \stackrel{\text{def}}{=} (w_1(t), \ldots, w_n(t))^T.$$

Например, если на аукционе победил покупатель i, то $w_i(t) = 1$ и аукционер в свои издержки $c(w(t))$ включает стоимость доставки покупки победившему покупателю. Заметим, что во многих интересных приложениях $c(w(t)) = 0$ для всех $t \in T$. Как и ранее, здесь $T \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^n T_i$ и $T_i \stackrel{\text{def}}{=} [t_i^0, t_i^1]$, $i = 1, \ldots, n$.

5.7.1. Виртуальные предпочтения

Будем считать, что оценки $t_1, \dots, t_n$ всех игроков являются независимыми непрерывными случайными величинами. Также предположим, что нам известны функция распределения F_i и функция f_i плотности случайной величины t_i, $i = 1, \dots, n$. Напомним, что $F_i(\tau) = \mathbb{P}(t_i \le \tau)$ и $f_i(\tau) = \frac{d}{d\tau} F_i(\tau)$. Поскольку оценки игроков независимы, то распределение G случайного вектора $t = (t_1, \dots, t_n)^T$ есть произведение распределений $F_1 \times \dots \times F_n$, т. е. для $\tau \in \mathbb{R}^n$

$$G(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(t_1 \le \tau_1, \dots, t_n \le \tau_n) = F_1(\tau_1) \times \dots \times F_n(\tau_n).$$

Важно понимать, что теперь означенные выше предположения о типах игроков — это не представления самих игроков о типах своих оппонентов. Теперь это представление проектировщика механизма о типах всех игроков. Заметим также, что представления игроков о типах оппонентов могут отличаться от представления проектировщика механизма.

Следующие два понятия являются ключевыми при проектировании оптимального механизма. *Виртуальная оценка* оценки t_i игрока i определяется по формуле:

$$\nu_i(t_i) \stackrel{\text{def}}{=} t_i - \frac{1 - F_i(t_i)}{f_i(t_i)}.$$

Для заданных $t \in T$ и $w \in [0,1]^n$ *виртуальный излишек* определяется по формуле:

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i(t_i) w_i - c(w).$$

Теорема 5.5. *Рассмотрим рандомизированный побудительно совместимый в среднем механизм $\mathcal{RM}$. Для фиксированного $t_{-i} \in T_{-i}$ ожидаемый платеж игрока i равен*

$$E_{t_i}(p_i(t_i, t_{-i})) = E_{t_i}(\nu_i(t_i) w_i(t_i, t_{-i})),$$

где матожидание E_{t_i} вычисляется по распределению F_i случайной величины t_i, а $T_j = [t_j^0, t_j^1]$ для $j = 1, \dots, n$, $T = \prod_{j=1}^{n} T_j$.

Доказательство. По теореме 5.4 с последующим изменением порядка интегрирования имеем

$$
\begin{aligned}
E_{t_i}(p_i(t_i,t_{-i})) &= \int_{t_i^0}^{t_i^1} p_i(\tau,t_{-i}) f_i(\tau)\,d\tau = \\
&= \int_{t_i^0}^{t_i^1} \tau w_i(\tau,t_{-i}) f_i(\tau)\,d\tau - \int_{t_i^0}^{t_i^1}\int_{t_i^0}^{\tau} w_i(z,t_{-i}) f_i(\tau)\,dz\,d\tau = \\
&= \int_{t_i^0}^{t_i^1} \tau w_i(\tau,t_{-i}) f_i(\tau)\,d\tau - \int_{t_i^0}^{t_i^1} w_i(z,t_{-i}) \int_{z}^{t_i^1} f_i(\tau)\,d\tau\,dz = \\
&= \int_{t_i^0}^{t_i^1} \tau w_i(\tau,t_{-i}) f_i(\tau)\,d\tau - \int_{t_i^0}^{t_i^1} w_i(z,t_{-i})\,(1 - F_i(z))\,dz = \\
&= \int_{t_i^0}^{t_i^1} \left(\tau - \frac{1-F_i(\tau)}{f_i(\tau)}\right) w_i(\tau,t_{-i}) f_i(\tau)\,d\tau = \\
&= E_{t_i}(\nu_i(t_i) w_i(t_i,t_{-i})).
\end{aligned}
$$

□

В силу независимости предпочтений игроков непосредственно из теоремы 5.5 вытекает следующий результат.

Следствие 5.1. *Ожидаемый доход рандомизированного побудительно совместимого в среднем механизма* $\mathcal{RM}$ *равен ожидаемому виртуальному излишку*

$$E_t\left(\sum_{i=1}^{n} \nu_i(t_i)\, w_i(t) - c(w(t))\right),$$

где матожидание E_t *вычисляется по распределению* G *случайного вектора* t,

Таким образом, если для любой ситуации $t \in T$ механизм выбирает распределение $w : T \to [0,1]^n$, которое максимизирует сумму

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i(t_i)\, w_i(t) - c(w(t)),$$

то его доход будет максимальным. Важно отметить, что для вогнутых функций $c(x)$ значения $w_i(t)$ можно выбрать целочисленными, и тогда механизм будет детерминированным.

Понятно, что, максимизируя виртуальный излишек, мы можем получить распределения w_i и цены p_i, которые не образуют побудительно совместимый механизм $\mathcal{RM}$. По теореме 5.4 для того, чтобы данный механизм был побудительно совместимым в среднем, необходимо, чтобы функции $w_i(t_i, t_{-i})$ были неубывающими по аргументу t_i. Нетрудно показать, что это случиться только тогда, когда

все виртуальные предпочтения $\nu_i(t_i)$ — неубывающие функции.

5.7.2. Оптимальный механизм Майерсона

Исходя из обсуждения следствия 5.1 в предыдущем разделе, в предположении, что все функции виртуальных оценок $\nu_i(\tau)$ неубывающие, мы можем записать следующий механизм определения победителей и вычисления платежей игроков.

Оптимальный механизм Майерсона.

Вход: Множество исходов A, и для $i = 1, \dots, n$

- подмножество $W_i \in A$ выигрышных исходов для игрока i;
- интервал $T_i = [t_i^0, t_i^1]$ оценок (стратегий) игрока i;
- распределение вероятностей F_i оценки t_i игрока i;

ситуация $t = (t_1, \dots, t_n)^T \in T \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^n T_i$.

1. Вычислить вектор $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)^T = (\nu_1(t_1), \dots, \nu_n(t_n))^T$ виртуальных оценок.
2. По правилу (5.3) определить исход в $a^\tau = f(v^\tau)$[34], а по формулам (5.6) вычислить *виртуальные платежи* $q_i = p_i(v^\tau)$, $i = 1, \dots, n$.
3. Для $i = 1, \dots, n$ вычислить платеж $p_i(t) = \nu_i^{-1}(q_i)$ и

[34] Здесь f обозначает функцию социального благополучия и не имеет ничего общего с плотностями f_i.

вероятность

$$w_i(t) = \begin{cases} 1, & a^\tau \in W_i, \\ 0, & a^\tau \in A \setminus W_i \end{cases}$$

победы игрока i.

Прокомментируем действия оптимального механизма Майерсона по шагам:

на шаге 1 оценки (стратегии) t_i игроков заменяются на виртуальные оценки $\tau_i = \nu_i(t_i)$;

на шаге 2 применяется VCG-механизм с правилом замещения Кларка для вычисления виртуальных платежей q_i всех игроков;

на шаге 3 по виртуальным платежам q_i вычисляются платежи игроков $p_i(t)$ и вероятности их победы $w_i(t)$ в ситуации t.

Определяя вероятности $w_i(t)$, мы неявно предполагали, что на шаге 2 возможные неоднозначности при выборе исхода a^τ разрешались детерминированным образом (например, для конечных множеств A среди возможных кандидатов всегда выбирается исход с минимальным номером), то оптимальный механизм Майерсона будет детерминированным побудительно совместимым механизмом.

5.7.3. Оптимальный аукцион Майерсона

На аукционе продается один объект, на который претендуют n покупателей. Покупатели одновременно объявляют суммы $b_1, b_2, \ldots, b_n$, которые они согласны заплатить за данный объект. Перед началом аукциона продавец (аукционер) полагает, что цена b_i, которую на аукционе предложит покупатель i, есть случайная величина, принимающая значения из отрезка $[0, 1]$ и имеющая распределение F_i, $i = 1, \ldots, n$. Аукционер хочет разработать такие правила проведения торгов, чтобы максимизировать свой ожидаемых доход.

Чтобы решить эту задачу аукционера, нам нужно разработать оптимальный механизм Майерсона. Аукцион, проводимый по правилам данного механизма, назовем *оптимальным аукционом Майерсона*.

Определим множество исходов (альтернатив) $A = \{0, 1, \dots, n\}$, где исход 0 означает, что объект не продается, а исход i означает, что объект купит покупатель i, $i \in N \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}$. Множество выигрышей игрока i (покупателя i) содержит только один исход i: $W_i = \{i\}$, $i \in N$. Так как доход аукционера прямо не зависит от того, кто из покупателей победит, то $c(w) \equiv 0$.

Сначала заметим, что поскольку оптимальный механизм Майерсона является побудительно совместимым, то на торгах всем покупателям лучше всего честно объявить свои оценки стоимости объекта (см. раздел 3.4.2).

Так как на шаге 2 механизма Майерсона платежи игроков вычисляются по правилу замещения Кларка, то победитель определяется также как и в аукционе второй цены: победит тот покупатель, который предложил наибольшую *виртуальную цену* $\nu_i(b_i)$. А в случае, когда все распределения одинаковы, т. е. $F_i = F$ и $f_i = f$ для всех $i \in N$, то в силу предполагаемой монотонности функции

$$\nu(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \tau - \frac{1 - F(\tau)}{f(\tau)} \tag{5.15}$$

победит тот покупатель, который предложит наибольшую цену. Предположим, что в случае равенства цен у нескольких покупателей, побеждает тот из них, чей порядковый номер меньше. А в случае, когда $\max_{i \in N} \nu_i(b_i) \le 0$, исходом игры будет альтернатива 0, означающая, что объект не продается.

Теперь давайте проясним ситуацию с платежами. Понятно, что платит только победитель аукциона. Покупатель i победит, если

$$\nu_i(b_i) = \max_{j \in N} \nu_j(b_j) > 0 \quad \text{и} \quad \nu_i(b_i) > \nu_j(b_j), \quad j = 1, \dots, i-1.$$

При этом он заплатит цену

$$p_i(b) = \inf \left\{ \bar{b}_i : \nu_i(\bar{b}_i) \ge \max \left\{ 0, \max_{j \in N \setminus \{i\}} \nu_j(b_j) \right\} \right\}.$$

В случае, когда все распределения одинаковы, т. е. $F_i = F$ и $f_i = f$ для $i \in N$, покупатель i победит, если

$$b_i = \max_{j \in N} b_j > \nu^{-1}(0) \quad \text{и} \quad b_i > b_j, \quad j = 1, \dots, i-1.$$

При этом он заплатит цену

$$p_i(b) = \max\left\{\nu^{-1}(0), \max_{j \in N \setminus \{i\}} b_j\right\}. \tag{5.16}$$

Формула (5.16) означает, что при одинаковых распределениях F_i, оптимальный аукцион Майерсона — это *аукцион второй цены с резервированием*, в котором побеждает покупатель, предложивший наибольшую цену при условии, что эта цена больше заданной цены резервирования, при этом, победитель платит наибольшую из цен, предложенных проигравшими, но не меньше цены резервирования. Из формулы (5.16) также следует, что для аукционера наилучшей ценой резервирования является $\nu^{-1}(0)$, при которой его ожидаемых доход будет наибольшим.

Для примера, если F есть равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, то, подставляя в формулу (5.15) выражения $F(\tau) = \tau$ и $f(\tau) = 1$, получим $\nu(\tau) = 2\tau - 1$. Отметим, что $\nu(\tau)$ возрастающая функция, а все виртуальные цены $\nu(b_i)$ равномерно распределены на отрезке $[-1, 1]$. Поскольку $\nu^{-1}(0) = 1/2$, то при равномерном распределении цен b_i оптимальная цена резервирования равна $1/2$.

5.8. Упражнения

5.1. В *обратном аукционе* (или *аукционе поставки*) n поставщиков (игроков) предлагают потребителю один и тот же продукт. Каждый поставщик по защищенному каналу связи подает заявку, в которой он указывет свою цену поставки b_i.

Предложите VCG-механизм проведения аукциона, при котором победителем будет тот поставщик, который предлагает товар по наименьшей цене.

5.2. Разработайте VCG-механизм для игры «парные торги», представленной в разделе 3.5. Смог ли ваш механизм «приемлемо» решить проблему платежей, когда $v_b > v_s$?

5.3. Рассмотрим игру «конфликт полов», из примера 1.10 на стр. 42, в которой четыре исхода:

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{(\textit{Ф}, \textit{Ф}), (\textit{Ф}, \textit{Б}), (\textit{Б}, \textit{Ф}), (\textit{Б}, \textit{Б})\},$$

где, например, исход (*Ф*,*Б*) означает, что муж идет на футбол, а жена — на балет. Оценки игроками этих исходов такие же, как и в соответствующей биматричной игре.

Разработайте VCG-механизм с правилом замещения Кларка, который бы стимулировал семейную пару провести выходной вместе.

5.4. Имеется ли байесовское равновесие в чистых стратегиях в игре «реализация общественного проекта» из раздела 5.5, если используется *пропорциональные механизм* определения платежей, когда в случае осуществления проекта взнос каждого участника пропорционален объявленному им взносу:

$$q_i(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n) = \bar{u}_i / \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i \right).$$

5.5. Область предпочтений V_i игрока i называется *линейной однопараметрической*, если существует функция $q_i : A \to \mathbb{R}$ и множество $T_i \in \mathbb{R}$, что $V_i = \{v_i : v_i = tq_i,\ t \in T_i\}$. Покажите, что данное понятие обобщает понятие однопараметрической области, введенное в разделе 5.6.1.

5.6. Приведите пример оптимального аукциона Майерсона, в котором может победить покупатель, предложивший наименьшую цену.

5.7. Охарактеризуйте оптимальный аукцион Майерсона для продавца одного объекта при условии, что 1) всем n покупателям известно, что продавец оценивает объект суммой b_0, 2) продавец до начала аукциона полагает, что цены $b_1, \ldots, b_n$, которые предложат покупатели на аукционе, являются независимыми случайными величинами со значениями из отрезка $[0, 1]$ и общим распределением F.

5.8. Охарактеризуйте оптимальный аукцион Майерсона для продавца k объектов, при условии, что продавец до начала аукциона полагает, что цены $b_1, \dots, b_n$, которые предложат n ($n > k$) покупателей на аукционе, являются независимыми случайными величинами, равномерно распределенными на отрезке $[0, 1]$.

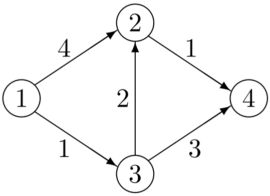


Рис. 5.1.

Приложение A
Элементы нелинейного анализа

Начиная с 50-х годов 20-го века в экономической теории методы «классического» математического анализа, основанные на дифференциальном исчислении, начали вытесняться более общими методами нелинейного негладкого анализа с широким использованием выпуклых структур. Пожалуй наиболее мощным из этих новых средств является теорема Какутани о неподвижной точке многозначных отображений. С ее использованием становятся почти тривиальными доказательства существования равновесий во многих игровых моделях. В этом приложении представлены, хотя и не в систематическом виде, те понятия и результаты современного нелинейного анализа, которые используются в данной книге.

A.1. Декартово произведение множеств

Декартовым произведением множеств X и Y называется множество

$$X \times Y \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) : \; x \in X, \; y \in Y\}$$

всевозможных пар элементов (x, y), где первый элемент x принадлежит X, а второй y принадлежит Y. По индукции мы можем определить декартово произведение n множеств:

$$\prod_{j=1}^{n} X_j \stackrel{\text{def}}{=} X_1 \times \cdots \times X_n = \left(\prod_{j=1}^{n-1} X_j \right) \times X_n \,,$$

элементами которого являются все возможные упорядоченные наборы $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_j \in X_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Если $X = \prod_{j=1}^n X_j$ есть декартово произведение n множеств, то через X_{-i} мы будем обозначать декартово произведение

$$X_1 \times \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n.$$

Набор $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in X_{-i}$ мы будем обозначать через x_{-i}. Для $y \in X_i$ и $x_{-i} \in X_{-i}$ набор $(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in X$ будем обозначать как пару (y, x_{-i}). Если $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ и $y \in X_i$, то можно говорить, что набор (y, x_{-i}) получен из набора x заменой компонетны x_i элементом y. Сам набор x можно также записать как пару (x_i, x_{-i}).

А.2. Векторы и линейные пространства

Декартово произведение $\prod_{j=1}^n X$ обозначают через X^n и называют n-й *степенью множества* X. Если $X = \mathbb{R}$ есть множество всех действительных чисел, то $\mathbb{R}^n$ есть множество действительных *векторов* (или *точек*)размерности n. В дальнейшем мы будем рассматривать n-мерные вектора как матрицы размера $n\times 1$, т. е. столбики, а чтобы представить вектор как строчку, будем использовать знак транспонирования:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Общепринято обозначать через e_i i*-й единичный вектор* $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T$, который состоит из $n-1$-го нуля и одной единицы в позиции i. Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо представление:

$$x = x_1\mathrm{e}_1 + x_2\mathrm{e}_2 + \cdots + x_n\mathrm{e}_n = \sum_{j=1}^n x_j\mathrm{e}_j\,.$$

Скалярное произведение векторов x и y из $\mathbb{R}^n$ определяется по правилу:

$$x^T y = y^T x = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

Норма(или *длина* вектора $x \in \mathbb{R}^n$ — это число $\|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^T x}$. Расстояние между векторами $x, y \in \mathbb{R}^n$ определяется как длина вектора $x - y$, т. е. это число $\|x - y\|$.

Множество $\mathbb{R}^n$ с введенным на нем скалярным произведением называется *линейным* (или *евклидовым*) *пространством* $\mathbb{R}^n$.

Множество действительных функций $f : A \to \mathbb{R}$, заданных на конечном множестве $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, принято обозначать через $\mathbb{R}^A$. Можно говорить, что $\mathbb{R}^A$ — это тоже линейное пространство, если рассматривать каждую функцию f как вектор $(f(a_1), \ldots, f(a_n))^T$ ее значений. Через $\mathbb{R}^A$ также обозначают множество n-мерных действительных векторов $(x_{a_1}, \ldots, x_{a_n})^T$, компоненты которых индексированы элементами множества A.

А.3. Элементы топологии

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Элемент $x \in X$ называется *внутренней точкой* множества X, если существует такое $\epsilon > 0$, что $B(x, \epsilon) \subset X$. Здесь $B(x, \epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \le \epsilon\}$ есть *шар* радиуса ϵ с центром x. Множество внутренних точек из X называется *внутренностью* множества X и обозначается $\text{int}X$. Если $X = \text{int}X$, то X — *открытое множество. Окрестностью* точки $x \in \text{int}X$ называется любое открытое множество, которое содержит точку x.

Говорят, что $x \in \mathbb{R}^n$ есть *точка касания* множества $X \subset \mathbb{R}^n$, если $B(x, \epsilon) \cap X \neq \emptyset$ для любого $\epsilon > 0$. Множество всех точек касания множества X называется *замыканием множества* X и обозначается через $\text{cl}X$. Множество X называется *замкнутым*, если $X = \text{cl}X$. Множество $\text{bd}X \stackrel{\text{def}}{=} \text{cl}X \setminus \text{int}X$ называется *границей* множества X, а точки из $\text{bd}X$ называются *граничными*.

Множество X называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре.

А.3.1. Теорема Вейерштрасса

Бесконечную последовательность

$$x^1, x^2, \ldots, x^k, \ldots$$

векторов из $\mathbb{R}^n$ будем абозначать через $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ или просто $\{x^k\}$. Говорят, что последовательность $\{x^k\}$ *сходится к точке* $x \in \mathbb{R}^n$ (или x есть *предел последовательности* $\{x^k\}$, пишут $x^k \to x$), если

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - x\| = 0.$$

Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *компактным*, если из любой последовательности $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов из X можно выбрать подпоследовательность $\{x^{k^i}\}_{i=1}^{\infty}$, которая сходится к некоторому элементу из X. Здесь $\{k^i\}$ есть неубывающая последовательность натуральных чисел. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ множество X компактное тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Следующая теорема является фундаментальной и касается существования оптимального решения в задачах оптимизации.

Теорема А.1 (Вейерштрасса). *Если f есть непрерывная функция на компактном множестве $X \in \mathbb{R}^n$, то задача*

$$\min_{x\in X} f(x)$$

имеет оптимальное решение $x^* \in X$ $(f(x^*) \le f(x)$ для всех $x \in X)$.

Для примера, обе следующие задачи $\min_{x\in\mathbb{R}} x$ и $\min_{x\in(0,1)} x$ не имеют оптимальнных решений, поскольку в первой из них множество $X = \mathbb{R}$ не ограничено, а во второй множество $X = (0, 1)$ не замкнуто.

А.4. Выпуклые множества

Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *связное*, если для любых $x, y \in X$ существует непрерывная векторная функция $\phi : [0, 1] \to X$, такая, что $\phi(0) = x$ и $\phi(1) = y$. Неформально можно сказать, что в связном множестве мы можем «добраться» из заданной точки в любую другую точку вдоль непрерывной кривой, не выходя за пределы данного множества. Выпуклые множества — это в некотором смысле «идеальные» связные множества, в которых из заданной точки можно «перейти» в любую другую точку по прямой линии, все время оставаясь в пределах данного множества.

Формально, множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми своими двумя точками $x, y \in X$ оно содержит и отрезок

$$[x, y] \stackrel{\text{def}}{=} \{z(\lambda) = (1-\lambda)x + \lambda y \,:\, 0 \le \lambda \le 1\},$$

соединяющий эти точки. Простейшими примерами выпуклых множеств являются:

- *линейное пространство* $\mathbb{R}^n$ и *положительный ортант*

$$\mathbb{R}^n_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x_i \ge 0,\ i = 1, \dots, n\};$$

- евклидов *шар* $B(x^0, r)$, где $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}_{++} \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in \mathbb{R} :\alpha > 0\}$;
- *гиперплоскость*

$$H(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}$$

  и *полупространство*

$$H^{\le}(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \le b\}.$$

Нетрудно убедиться, что пересечение $X \cap Y$ двух выпуклых множеств $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ — также выпуклое множество. Отсюда следует, что и *полиэдр*, который определяется как множество решений системы линейных неравенств $Ax \le b$, — также выпуклое множество, поскольку оно является пересечение конечного числа полупространств. В частности, n-мерный *симплекс*

$$\Sigma_n \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n_+ :\ \sum_{j=1}^n x_j = 1\}$$

также является выпуклым множеством.

А.5. Выпуклые функции

Функция $f : X \to \mathbb{R}$, определенная на выпуклом множестве X, называется *выпуклой*, если для всех $x, y \in X$ и любого $\lambda \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \le (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y). \qquad \text{(A.1)}$$

Функция f называется *вогнутой*, если функция $-f$ выпукла. В дальнейшем мы будем в основном рассматривать свойства выпуклых функций. Заменяя в этих свойствах знаки неравенств на противоположные и минимум на максимум, вы получите соответствующие свойства вогнутых функций.

Важно отметить, что *локальный* минимум выпуклой функции на выпуклом множестве является *глобальным*. Действительно, пусть $x^1, x^2 \in X$ есть локальные минимумы функции f на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$, причем $f(x^1) > f(x^2)$. Пусть $f(x^1) \le f(x)$ для всех $x \in B(x_1, \epsilon) \cap X$ для некоторого $\epsilon > 0$. Так как $x^2 \notin B(x_1, \epsilon)$, то $\lambda = \epsilon / \|x^2 - x^1\| < 1$ и в силу выпуклости функции f выполняется неравенство

$$f((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2) \le (1-\lambda) * f(x^1) + \lambda f(x^2) < f(x^1).$$

В силу выбора λ, точка $(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2$ принадлежит шару $B(x_1, \epsilon)$ и, следовательно, $x^1 \in X$ не является точкой локального минимума.

Если (A.1) всегда выполняется как строгое неравенство, то функция f называется *строго выпуклой*. Нетрудно убедиться, что строго выпуклая функция f на любом выпуклом множестве X имеет единственный минимум, т.е. существует точка $x^* \in X$, что $f(x^*) < f(x)$ для всех $x \in X$.

Используя формулу Тейлора, можно получить следующие критерии выпуклости гладкой функции.

Теорема А.2. *а) Непрерывно дифференцируемая функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выпукла тогда и только тогда, когда*

$$f(y) - f(x) \ge (\nabla f(x))^T (y - x) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad \text{(A.2)}$$

где

$$\nabla f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)^T$$

есть градиент*функции* f *в точке* x.

б) Дважды непрерывно дифференцируемая функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *выпукла (строго выпукла) тогда и только тогда, когда в любой точке* $x \in \mathbb{R}^n$ *матрица вторых производных (Гессиан)*

$$\nabla^2 f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n}(x) \end{bmatrix}$$

неотрицательно определена (положительно определена).

В частности, из теоремы A.2 следует, что квадратичная функция $f(x) = c^T x + x^T Q x$ выпукла на $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда матрица Q неотрицательно определена.

A.5.1. Как доказать выпуклость функции

Выпуклость или вогнутость конкретной функции можно доказать разными способами.

1. По определению, проверив выполнимость неравенства (A.1). Функция $f(x) = \max\{x_1, \dots, x_n\}$ является выпуклой на $\mathbb{R}^n$, поскольку для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ и всех $\lambda \in [0, 1]$ справедливо

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x + \lambda y) &= \max_{1 \le i \le n} ((1-\lambda)x_i + \lambda y_i) \\ &\le (1-\lambda) \max_{1 \le i \le n} x_i + \lambda \max_{1 \le i \le n} y_i \\ &= (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y). \end{aligned}$$

2. Показать, что Гессиан является неотрицательно определенной матрицей. Функция $f(x, y) = x^2/y$ выпукла на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++}$, потому что матрица

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{2}{y^3} \begin{bmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{bmatrix} = \frac{2}{y^3} \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & -x \end{bmatrix}$$

неотрицательно определена[35].

[35] Матрица A размера $n \times n$ неотрицательно определена тогда и только тогда, когда существует $m \times n$ матрицы B, что $A = B^T B$.

Чуть труднее доказать, что функция $f(x) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}$, значения которой равны среднему геометрическому ее аргументов, является вогнутой на $\mathbb{R}_{++}$. Компоненты ее Гессиана $\nabla^2 f(x)$ вычисляются по правилу:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_k}(x) = -(n-1)\frac{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}}{n^2 x_k^2}, \quad k = 1, \ldots, n,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(x) = \frac{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}}{n^2 x_k x_l}, \quad k, l = 1, \ldots, n,\ k \neq l.$$

Поскольку для произвольного вектора $y \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$y^T \nabla^2 f(x) y = -\frac{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}}{n^2}\left(n\sum_{i=1}^{n}(y_i/x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i/x_i\right)^2\right) \leq 0,$$

то матрица $\nabla^2 f(x)$ неположительно определена. Здесь мы использовали неравенство Коши-Шварца $|u^T v| \leq \|u\|\,\|v\|$ с $u_i = 1$ и $v_i = y_i/x_i$, $i = 1, \ldots, n$.

3. Доказать, что ограничение многомерной функции на произвольный отрезок является одномерной выпуклой функцией.

А.5.2. Преобразования, сохраняющие выпуклость функций

Еще один общий способ доказать выпуклость (вогнутость) некоторой функции состоит в том, чтобы показать, что рассматриваемая функция получается из одной или нескольких известных выпуклых (вогнутых) функций применением преобразований, которые сохраняют выпуклость функций.

1. Неотрицательная взвешенная сумма. Если f — выпуклая функция и $\alpha \geq 0$, то, очевидно, и функция αf — также выпуклая функция. Далее, если $f, g : X \to \mathbb{R}$ есть выпуклые функции, определенные на выпуклом множестве X, то их сумма $h(x) = f(x) + g(x)$ также будет выпуклой на X.

Комбинируя эти две операции, мы получим, что взвешенная сумма $f = \sum_{i=1}^{m} f_i$ выпуклых функций $f_1, \ldots, f_m$ с неотрицательными весами $w_1, \ldots, w_n$ также является выпуклой функцией.

Эти свойства распространяются на бесконечные суммы и интегралы. Например, если $f(x, y)$ — выпуклая функция аргумента $x \in X$ для всех $y \in Y$ и $w(y) \geq 0$ для всех $y \in Y$, то функция g, определенная по правилу

$$g(x) = \int_Y w(y) f(x, y) dy$$

является выпуклой на X, при условии, что интеграл существует.

2. Аффинные преобразования. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A — $m \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Определим функцию $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ по правилу $g(x) = f(Ax + b)$. Тогда, если функция f выпуклая (вогнутая), то и g — также выпуклая (вогнутая) функция.

3. Поточечный максимум. Если f и g есть выпуклые функции на X, то выпуклой функцией является и их поточечный максимум $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Действительно, для $x, y \in X$ и $\lambda \in [0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} h((1-\lambda)x + \lambda y) &= \max\{f((1-\lambda)x + \lambda y), g((1-\lambda)x + \lambda y)\} \\ &\leq \max\{(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y), (1-\lambda)g(x) + \lambda g(y)\} \\ &\leq (1-\lambda)\max\{f(x), g(x)\} + \lambda \max\{f(y), g(y)\} \\ &= (1-\lambda)h(x) + \lambda h(y), \end{aligned}$$

что доказывает выпуклость функции h.

Если $f_1, \ldots, f_m$ — выпуклые на X функции, то и их поточечный максимум

$$f(x) = \max\{f_1(x), \ldots, f_m(x)\}$$

является выпуклой на X функцией.

В частности, кусочно-линейная функция $f(x) = \max_{1 \leq i \leq m} (c^i)^T x$, где $c^i \in \mathbb{R}^n$ для $i = 1, \ldots, m$, является выпуклой на $\mathbb{R}^n$. Заметим, что в общем случае такие выпуклые функции не являются дифференцируемыми.

4. Композиция. *Композиция* функций $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ есть функция $h = g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определяемая по правилу: $h(x) = g(f(x))$. Справедливы следующие утверждения:

- h выпуклая, если f выпуклая, а g неубывающая и выпуклая;
- h выпуклая, если f вогнутая, а g невозрастающая выпуклая;
- h вогнутая, если f вогнутая, а g неубывающая вогнутая;
- h вогнутая, если f выпуклая, а g невозрастающая вогнутая.

Если $n = 1$ и обе функции f и g являются дважды дифференцируемыми, то сформулированные выше утверждения следуют из равенства

$$h''(x) = g''(f(x))f'(x)^2 + g'(f(x))f''(x).$$

А.6. Квазивыпуклые функции

Для выпуклой функции $f : X \to \mathbb{R}$, определенной на выпуклом множестве X, и любого $\alpha \in \mathbb{R}$, если множество

$$S_\alpha^f \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X :\ f(x) \le \alpha\}$$

не пустое, то оно выпукло. В частности, выпукло множество

$$\arg\min_{x \in X} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X :\ f(x) \le \min\{f(x) :\ x \in X\}\}$$

всех минимумов функции f. Класс функций, которые обладают этим важным свойством существенно шире класса выпуклых функций.

Функция f называется *квазивыпуклой* на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$, если для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ множество S_α^f или выпуклое или пустое. Функция f называется *квазивогнутой*, если $-f$ квазивыпуклая функция.

Пример квазивыпуклой функции на $\mathbb{R}$ приведен на рис. А.1, а. Для любого α, если $S_\alpha^f \ne \emptyset$, то S_α^f является интервалом. В частности, $S_{\alpha_1}^f = [a, b]$, а $S_{\alpha_2}^f = (-\infty, c]$.

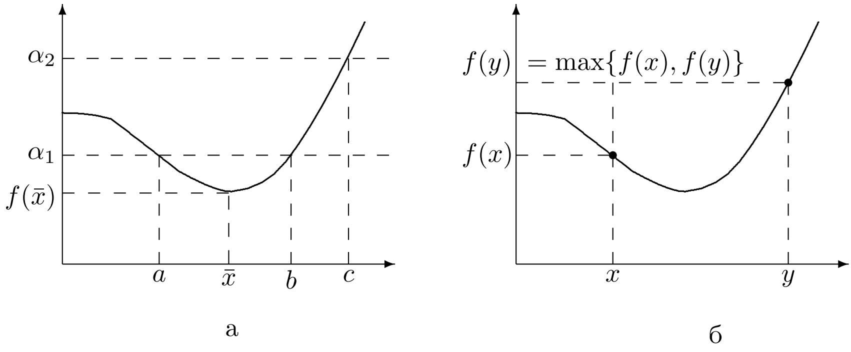


Рис. А.1. Квазивыпуклая функция на $\mathbb{R}$

Непрерывная функция на $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является квазивыпуклой тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

- f монотонная (неубывающая или невозрастающая) функция;
- для любой точки $\bar{x}$ своего глобального минимума, функции f невозрастает на интервале $(-\infty, \bar{x}]$ и неубывает на интервале $[\bar{x}, \infty)$.

Если $f : X \to \mathbb{R}_+$ и $g : X \to \mathbb{R}_{++}$ соответственно выпуклая и вогнутая функции, определенные на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$, то их отношение $f(x) = g(x)/h(x)$ является квазивыпуклой функцией. Действительно, для произвольного $\alpha \in \mathbb{R}$ множество

$$S_\alpha^f = \{x \in X : g(x)/h(x) \leq \alpha\} = \{x \in X : g(x) - \alpha h(x) \leq 0\}$$

выпукло. Этот пример еще раз доказывает, что класс квазивыпуклых функций существенно шире класса выпуклых функций,

А.6.1. Критерии квазивыпуклости функций

Теорема А.3. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$, определенная на выпуклом множестве X, квазивыпукла, тогда и только тогда,* *когда для всех* $x, y \in X$ *и* $0 \leq \lambda \leq 0$

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq \max\{f(x), f(y)\}. \tag{A.3}$$

Неравенство (A.3) означает, что значение функции в любой точке отрезка не превышает максимального значение функции на концах этого отрезка (см. рис. A.1, б).

Для дифференцируемых функций справедливы следующие критерии.

Теорема A.4. *Непрерывно дифференцируемая функция* $f : X \to \mathbb{R}$, *определенная на выпуклом множестве* X, *квазивыкла, тогда и только тогда, когда для всех* $x, y \in X$

$$f(y) \leq f(x) \Rightarrow (\nabla f(x))^T (y - x) \leq 0. \tag{A.4}$$

Если $\nabla f(x) \neq 0$, то неравенство (A.4) означает, что вектор $\nabla f(x)$ является нормалью к касательной гиперплоскости в точке x к множеству $\{y : \ f(y) \leq f(x)\}$. Понятно, что неравенство (A.4) верно и для выпуклых функций. Но между выпуклыми и квазивыпуклыми функциями имеется существенное различие: если f — выпуклая функция и $\nabla f(x) = 0$, то x есть точка глобального минимума функции f; но для квазивыпуклой функции f из $\nabla f(x) = 0$ не следует, что x есть ее точка глобального минимума.

Теорема A.5. *Дважды непрерывно дифференцируемая функция* $f : X \to \mathbb{R}$, *определенная на выпуклом множестве* X, *квазивыкла, тогда и только тогда, когда для всех* $x \in X$ *и всех* $y \in \mathbb{R}^n$

$$y^T \nabla f(x) = 0 \Rightarrow y^T \nabla^2 f(x) y \geq 0. \tag{A.5}$$

Например, функция $f(x) = x_1 \cdot x_2$ является квазивогнутой (но не вогнутой) на открытом выпуклом множестве $\mathbb{R}^2_{++}$ и квазивыпуклой (но не выпуклой) на открытом выпуклом множестве $\mathbb{R}^2_{--}$, где $\mathbb{R}_{--} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : \ x < 0\}$. Действительно, поскольку для $x \in \mathbb{R}^2_{++}$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

то для любого $y \in \mathbb{R}^2$, такого, что $y^T \nabla f(x) = y_1 x_2 + y_2 x_1 = 0$, имеем $y_1 = -(x_1/x_2) y_2$ и

$$y^T \nabla^2 f(x) y = (y_1, y_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2 y_1 y_2 = -(x_1/x_2) y_2^2 < 0.$$

Поэтому $f(x) = x_1 \cdot x_2$ является квазивогнутой на $\mathbb{R}^2_{++}$.

A.6.2. Преобразования, сохраняющие квазивыпуклость функций

1. Неотрицательный взвешенный поточный максимум. Для неотрицательных весовых множителей $w_1, \ldots, w_m \geq 0$ и квазивыпуклых функций $f_1, \ldots, f_m$ функция f с

$$f(x) = \max\{f_1(x), \ldots, f_m(x)\}$$

является квазивыпуклой.

Верен и более общий результат. Пусть Y — произвольное множество, X — выпуклое множество из $\mathbb{R}^n$, $w(y) \geq 0$ для всех $y \in Y$, а $g(x, y)$ есть выпуклая на X функция аргумента x при всех фиксированных значениях $y \in Y$. Тогда функция

$$f(x) = \sup_{y \in Y} (w(y) g(x, y))$$

является квазивыпуклой на X. Этот факт проверяется просто: для заданного $\alpha \in \mathbb{R}$ множество S_α^f выпукло, поскольку оно совпадает с пересечением выпуклых множеств $S_\alpha^{f_y}$ для всех $y \in Y$, где $f_y(x) = w(y) g(x, y)$.

2. Композиция. Если $f : \mathbb{R}^n$ — квазивыпуклая функция, а $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неубывающая функция, то и композиция $g \circ f$ является квазивыпуклой функцией.

Композиция $f((Ax + b)/(c^T x + d))$ квазивыпуклой функции f, определенной на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$, и дробно-линейной функции $(Ax + b)/(c^T x + d)$ является квазивыпуклой функцией на множестве

$$\{x \in \mathbb{R}^n : | : c^T x + d > 0,\ (Ax + b)/(c^T x + d) \in X\}.$$

3. Минимизация. Если функция g является квазивыпуклой на $X \times Y$, где $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ — выпуклые множества, то и функция

$$f(x) = \inf_{y \in Y} g(x, y)$$

является квазивыпуклой.

A.7. Оптимизация с ограничениями

Будем рассматривать задачу

$$\begin{aligned} f(x) &\to \min, \\ g_i(x) &\leq 0, \quad i \in I = \{1, \ldots, m\}, \\ x &\in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{A.6}$$

где функции f и g_i $(i \in I)$ непрерывны и дифференцируемы. Обозначим через X множество решений задачи (A.6), т. е.

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \; g_i(x) \leq 0, \; i \in I\}.$$

A.7.1. Допустимые направления и выделение ограничений

Будем предполагать, что множество X непусто; однако допускаем, что оно может иметь пустую внутренность.

Точка $x^0 \in X$ есть *локальный оптимум* (*минимум*) задачи (A.6), если для некоторого числа $\epsilon > 0$ выполняется условие

$$f(x^0) \leq f(x) \quad \forall \, x \in X, \; \|x - x^0\| \leq \epsilon.$$

Если $x^0 \in X$ есть локальный оптимум задачи (A.6), то функция $f(x)$ не может убывать, когда x описывает дугу кривой (достаточно регулярной), выходящую из x^0 и содержащуюся в множестве решений X. Такую дугу кривой будем называть допустимой и будем определять посредством непрерывно дифференцируемой функции $\varphi : \; \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ параметра $\theta \geq 0$:

$$\varphi(\theta) = [\varphi_1(\theta), \ldots, \varphi_n(\theta)],$$

которая удовлетворяет условиям

a) $\varphi(0) = x^0$;

b) $\varphi(\theta) \in X$ для достаточно малого $\theta > 0$.

Допустимым направлением в точке x^0 назовем вектор

$$y = \frac{d\varphi}{d\theta}(0) = \left[\frac{d\varphi_1}{d\theta}(0), \frac{d\varphi_2}{d\theta}(0), \ldots, \frac{d\varphi_n}{d\theta}(0)\right]^T,$$

касающийся некоторой дуги кривой $\varphi(\theta)$, допустимой в x^0.

В дальнейшем будем обозначать через $C_{\mathrm{ad}}(x^0)$ конус, образованный множеством допустимых направлений в точке x^0. Отыщем условие, необходимое для того, чтобы вектор $y \in \mathbb{R}^n$ принадлежал конусу $C_{\mathrm{ad}}(x^0)$.

Обозначим через $I(x^0)$ множество индексов *насыщенных* ограничений в x^0, т. е. ограничений, выполняющихся в x^0 в форме равенства:

$$I(x^0) = \{i \in I : \; g_i(x^0) = 0\}.$$

Касательный конус в точке x^0 определяется следующим образом:

$$T(x^0) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n : \; \nabla g_i^T(x^0) y \le 0 \quad \forall\, i \in I(x^0)\}.$$

Лемма А.1. *Справедливо включение* $C_{\mathrm{ad}}(x^0) \subseteq T(x^0)$.

К сожалению, обратное включение $T(x^0) \subseteq C_{\mathrm{ad}}(x^0)$ в общем случае неверно. Говорят, что в точке $x^0 \in X$ выполняется *условие выделения ограничений*, если касательный конус в этой точке является замыканием конуса допустимых направлений:

$$\mathrm{cl}(C_{\mathrm{ad}}(x^0)) = T(x^0). \tag{A.7}$$

Выполнение условия выделения ограничений в точке x^0 означает, что конус допустимых направлений в точке x^0 совпадает с множеством решений y системы неравенств

$$\nabla g_i^T(x^0) y \le 0 \quad \forall\, i \in I(x^0).$$

На практике проверка выполнения условия (A.7) может оказаться трудной задачей. Поэтому были получены несколько достаточных условий, при выполнении которых равенство

(A.7) имеет место. Наиболее важные результаты сформулированы в следующей лемме.

Лемма А.2. *Условие выделения ограничений выполняется в каждой точке множества X в следующих случаях:*

а) все функции g_i линейны;

б) все функции g_i выпуклы и множество X имеет непустую внутренность.

Условие выделения ограничений выполняется в точке $x^0 \in X$, если градиенты $\nabla g_i(x^0)$ ограничений, которые в точке x^0 выполняются как равенства, линейно независимы.

А.7.2. Необходимые условия Куна — Таккера

Теорема А.6 (Куна — Таккера). *Предположим, что все функции f и g_i $(i = 1, \ldots, m)$ непрерывно дифференцируемы и в точке $x^0 \in X$ выполняется условие выделения ограничений. Если x^0 есть точка локального минимума, то существуют такие числа $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, что*

$$\nabla f(x^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^0) = 0, \tag{A.8}$$

$$\lambda_i g_i(x^0) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{A.9}$$

(*Числа λ_i называются множителями Куна-Таккера.*)

Замечание. Если какое-либо ограничение i в задаче (A.6) должно выполняться как равенство, то соответствующий ему множитель λ_i может быть любого знака, т. е. $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Этот факт следует из того, что уравнение $g_i(x) = 0$ можно заменить двумя неравенствами $g_i(x) \leq 0$ и $-g_i(x) \leq 0$, которым ставятся в соответствие два неотрицательных множителя Куна — Таккера λ_i^+ и λ_i^-. Тогда в векторном равенстве (A.8) будут присутствовать два слагаемых $\lambda_i^+ \nabla g_i(x^0)$ и $-\lambda_i^- \nabla g_i(x^0)$, которые можно заменить их суммой $(\lambda_i^+ - \lambda_i^-)\nabla g_i(x^0)$. Вводя новый множитель $\lambda_i = \lambda_i^+ - \lambda_i^-$, мы вернемся к представлению (A.8), где ограничение $g_i(x) = 0$ представлено одним слагаемым $\lambda_i \nabla g_i(x^0)$, но со множителем λ_i произвольного знака.

Если в решаемой задаче присутствует ограничение вида $g_i(x) \geq 0$, то у нас имеется две альтернативы: представить это ограничение в «стандартном» виде $-g_i(x) \leq 0$, или при записи условий Куна — Таккера потребовать, чтобы множитель λ_i был неположителен ($\lambda_i \leq 0$).

Точка $x^0 \in X$, которая удовлетворяет системе (A.8) и (A.9) называется *стационарной точкой*. Другими словами, теорема A.6 утверждает, что при выполнении условия выделения ограничений локальные минимумы следует искать среди стационарных точек.

Важно также отметить, что в *задаче выпуклого программирования*, когда все функции f и g_i ($i = 1, \ldots, m$) выпуклы, все стационарные точки являются глобальными минимумами.

A.7.3. Геометрическая и физическая интерпретация условий Куна — Таккера

Геометрически условия Куна — Таккера проиллюстрированы на рис. A.2, где в точке x^0 локального минимума обращаются в равенство два неравенства $g_1(x) \leq 0$ и $g_3(x) \leq 0$; поэтому $I(x^0) = \{1, 3\}$. Вектор $-\nabla f(x^0)$ составляет тупой угол с любым вектором y из конуса допустимых направлений $C_{\text{ad}}(x^0)$, который совпадает с касательным конусом $T(x^0)$. Это геометрическое условие алгебраически выражается так: вектор $-\nabla f(x^0)$ выражается в виде линейной комбинации векторов $\nabla g_i(x^0)$ ($i \in I(x^0)$) с положительными коэффициентами λ_i.

Условия Куна — Таккера допускают также следующую физическую интерпретацию. *Материальная точка* движется внутри множества X под действием переменной силы, вектор которой в точке x равен $-\nabla f(x)$. Грани (границы) множества X являются абсолютно упругими и, когда материальная точка досгагает грани $g_i(x) = 0$ в точке x^0, на материальную точку дествует сила реакции $\lambda_i \nabla g_1(x^0)$, где множитель $\lambda_i \geq 0$ выбирается из условия, что сила $\lambda_i \nabla g_i(x^0)$ должна уравновешивать силу, с которой материальная точка давит на данную грань. Нужно найти *точку покоя* x^0, в которой движение материальной точки прекратиться. В такой интерпретации условия Куна — Таккера выражают тот факт, что в точке покоя силы реакции $\lambda_i \nabla g_i(x^0)$ граней уравновешивают силу $-\nabla f(x^0)$, действующую на материальную точку.

А.8. Теорема о неподвижной точке

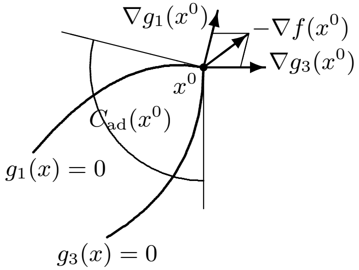


Рис. А.2. Иллюстрация условий Куна — Таккера

Неподвижной точкой отображения $f : X \to X$ называется точка $x^0 \in X$, такая, что $x^0 = f(x^0)$. Из курса математического анализа мы знаем, что любая непрерывная функция $f : [0, 1] \to [0, 1]$ имеет неподвижную точку. Этот факт проиллюстрирован на рис. А.3, где неподвижные точки функции $f(x)$ представлены как точки пересечения графиков функций $y = f(x)$ и $y = x$.

Нетрудно представить разрывную функцию, которая не имеет неподвижной точки. Также было бы удивительно, если бы любая непрерывная функция имела неподвижную точку на произвольном множестве. Например, отображение $f(x) = -x$ множества $X = \{x \in \mathbb{R} : 1 \le |x| \le 2\}$ в себя отображает отрезки $[1, 2]$ и $[-2, -1]$ друг на друга. Очевидно, что такое отображение не имеет неподвижной точки. Существенным в данном примере является то, что множество X не является выпуклым.

Многозначное отображение $F : X \to Y$ множества X в множество Y каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие подмножество $F(x)$ множества Y. Например, $X = Y = [0, 1]$ и $f(x) = \{y : \ x \le y \le 1\}$. Мы можем рассматривать многозначное отображение F как обычное однозначное отображение множества X в множество 2^Y (множество степень 2^Y множества Y — это множество всех подмножеств множества Y).

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Многозначное отображение $F : X \to Y$ называется *ограниченным*, если существует константа D, такая, что

$$\|y\| \le D \quad \text{для всех} \quad x \in X,\ y \in F(x).$$

Многозначное отображение $F : X \to Y$ называется *полунепрерывным сверху* в точке $x \in X$, если из условия $x_n \to x, y_n \to y$, $y_n \in F(x_n)$ слудует, что $y \in F(x)$. Отображение называется *полунепрерывным сверху*, если оно полунепрерывно сверху в каждой точке $x \in X$.

Многозначное отображение $F : X \to Y$ называют K-*отображением*, если оно удовлетворяет условиям:

а) для всех $x \in X$ множество $F(x)$ непустое и выпуклое;

б) F — ограничено и полунепрерывно сверху.

Приведем пример важного K-отображения.

Теорема А.7. *Пусть X и Y — выпуклые компакты и $f(x, y)$ — непрерывная функция, определенная на $X \times Y$, такая, что при каждом $y \in Y$ множество*

$$Z(y) \stackrel{\text{def}}{=} \arg\max_{x \in X} f(x, y) \tag{A.10}$$

выпукло. Тогда отображение $Z : Y \to X$, определенное по правилу (A.10), является K-отображением.

Доказательство. Действительно, так как X — компакт, то множество $Z(y)$ непустое. Покажем, что z полунепрерывно сверху. Пусть $y_n \to y$, $x_n \to x$, $x_n \in Z(y_n)$. Тогда

$$f(x_n, y_n) \ge f(\bar{x}, y_n) \quad \text{для всех} \quad \bar{x} \in X,\ n = 1, 2, \ldots .$$

Если в этих соотношениях перейти к пределу при $n \to \infty$, то в силу непрерывности f получаем

$$f(x, y) \ge f(\bar{x}, y) \quad \text{для всех} \quad \bar{x} \in X,$$

т. е. $x \in Z(y)$. $\square$

Следствие А.1. *Если* X, Y *— выпуклые компакты, а* $f(x, y)$ *— непрерывная квазивогнутая по* x *функция, определенная на* $X \times Y$*, то отображение* Z *является* K*-отображением. В этом случае* $Z(y) = \{x \in X : f(x, y) \geq \max_{\bar{x} \in X} f(\bar{x}, y)\}$.

Точка $x \in X$ называется *неподвижной точкой* многозначного отображения $F : X \to X$, если $x \in F(x)$.

Теорема А.8 (Какутани). [36] *Пусть на непустом выпуклом компакте* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *задано многозначное отображение* $F : X \to X$*. Если* F *является* K*-отображением, то оно имеет неподвижную точку.*

Доказательство этой фундаментальной теоремы нелинейного анализа можно найти в книге [3].

А.9. Седловые точки

Седловой точкой функции $f(x, y)$, определенной на множестве $X \times Y$, называется точка (x^0, y^0), которая удовлетворяет условию:

$$f(x, y^0) \leq f(x^0, y^0) \leq f(x^0, y), \quad x \in X,\ y \in Y. \tag{А.11}$$

Лемма А.3. *Пусть* $f(x, y)$ *— действительная функция двух переменных* $x \in X$, $y \in Y$ *и существуют*

$$\alpha = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y),$$
$$\beta = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y).$$

Тогда $\alpha \leq \beta$.

[36] S. Kakutani. A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem. *Duke Mathematical Journal* **8** (1941) 457–459.

Доказательство. Очевидно, что для любых $\bar{x} \in X$ и $\bar{y} \in Y$ справедливы неравенства

$$\min_{y \in Y} f(\bar{x}, y) \leq f(\bar{x}, \bar{y}) \leq \max_{x \in X} f(x, \bar{y}).$$

Так как в левой части точка $\bar{x}$ произвольная, то

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \leq \max_{x \in X} f(x, \bar{y}).$$

Так как в правой части точка $\bar{y}$ произвольная, то

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \leq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y).$$

□

Теорема А.9 (О совпадении максимина и минимакса). *Пусть для действительной функции $f(x, y), x \in X, y \in Y$ существуют*

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \quad \text{и} \quad \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y).$$

Тогда

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) \tag{A.12}$$

тогда и только тогда, когда функция $f(x, y)$ имеет седловую точку. Если (x^0, y^0) — седловая точка функции $f(x, y)$, то

$$f(x^0, y^0) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y). \tag{A.13}$$

Доказательство. **Достаточность**. Пусть существует седловая точка (x^0, y^0) функции f. Тогда выполняются неравенства

$$f(x, y^0) \leq f(x^0, y^0) \leq f(x^0, y), \quad x \in X, \ y \in Y.$$

Отсюда

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) \leq \max_{x \in X} f(x, y^0) \leq f(x^0, y^0) \leq$$
$$\leq \min_{y \in Y} f(x^0, y) \leq \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y).$$

По лемме А.3 наоборот

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) \le \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y).$$

Поэтому

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y).$$

Необходимость. Пусть выполняется равенство (А.12). Тогда существуют $x^0 \in X$, $y^0 \in Y$, такие, что

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = \min_{y\in Y} f(x^0,y),$$
$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y) = \max_{x\in X} f(x,y^0).$$

Покажем, что (x^0,y^0) — седловая точка функции $f(x,y)$. Из (А.12) следует, что

$$\min_{u\in Y} f(x^0,u) = \max_{v\in X} f(v,y^0).$$

Отсюда для всех $x \in X$ и $y \in Y$ имеем

$$f(x,y^0) \le \max_{v\in X} f(v,y^0) = \min_{u\in Y} f(x^0,u) \le f(x^0,y^0) \le$$
$$\le \max_{v\in X} f(v,y^0) = \min_{u\in Y} f(x^0,u) \le f(x^0,y).$$

Кроме того, из этой цепочки неравенств также следует равенство (А.13). □

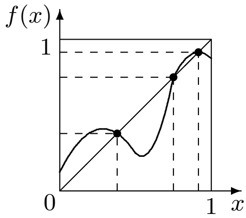


Рис. А.3.

Приложение B
Элементы теории вероятностностей

В этом приложении в сжатой форме представлены те понятия теории вероятностей, которые необходимы для понимания материала данной книги. Предполагается, что вы уже прослушали начальный курс теории вероятностей. Это приложение поможет вам систематизировать свои знания.

B.1. Вероятностные пространства

Вероятностным пространством называется тройка $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, где

- Ω — это некоторое множество, которое называется *пространством элементарных событий* или *выборочным пространством*;
- $\mathcal{A}$ — семейство подмножеств множества Ω, которое является *сигма-алгеброй*, т. е. семейство $\mathcal{A}$ должно обладать следующими свойствами:
  (а) если $A \in \mathcal{A}$, то и $\bar{A} \overset{\text{def}}{=} \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$;
  (б) если каждое из счетного числа множеств $A_1, A_2, \ldots$ принадлежит $\mathcal{A}$, то и их объединение $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ также принадлежит $\mathcal{A}$;
- $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ — *вероятностная мера*, которая должна удовлетворять следующим условиям:

(i) для любого счетного семейства попарно непересекающихся подмножеств $A_1, A_2, \ldots$ ($A_i \cap A_j = \emptyset$, если $i \neq j$) справедливо равенство

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i);$$

(ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Из закона Де Моргана ($A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$ для любых $A, B \in \Omega$) следует, что в (б) знак объединения можно заменить на знак пересечения и получить условие

(в) если каждое из счетного числа множеств $A_1, A_2, \ldots$ принадлежит $\mathcal{A}$, то и их пересечение $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ также принадлежит $\mathcal{A}$.

Поэтому *сигма-алгебру* можно также определить как такое семейство подмножеств, которое замкнуто относительно объединения и пересечения счетного числа подмножеств, а также перехода от множества к его дополнению.

Подмножества из $\mathcal{A}$ называются *событиями*, а $\mathbb{P}(A)$ есть вероятность того, что произойдет событие $A \in \mathcal{A}$, точнее произойдет такое элементарное событие $\omega \in \Omega$, что $\omega \in A$. Поэтому вероятностную меру $\mathbb{P}$ также называют *распределением вероятностей* на множестве Ω. Множества не из $\mathcal{A}$ не являются событиями.

Понятно, что нам хотелось бы определить вероятностное пространство с как можно большим числом событий. Поэтому очевидным кандидатом на роль «наилучшей» сигма-алгебры $\mathcal{A}$ является множество 2^{Ω} всех подмножеств множества Ω. Но для несчетных подмножеств (таких, как числовая прямая $\mathbb{R}$ или отрезок $[0, 1]$) на такой большой сигма-алгебре незозможно определить вероятностную меру $\mathbb{P}$.

Обозначим через $\Delta(\Omega)$ семейство всех вероятностных мер на множестве Ω. Любая вероятностная мера $\mathbb{P} \in \Delta(\Omega)$ определяет вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, где $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$ есть область определения функции $\mathbb{P}$. Подмножества $A \subseteq \Omega$, на которых определена мера $\mathbb{P}$ ($A \in \mathcal{A}$), называются *измеримыми множествами*.

Если множество Ω счетное или конечное, то в качестве сигма-алгебры выбирают множество всех подмножеств множества Ω, т. е. $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$. Обозначим через p_ω вероятность $\mathbb{P}(\{\omega\})$ наступления элементарного события $\omega \in \Omega$. Тогда из условия (i) получаем, что $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ для всех $A \subseteq \Omega$. Такое вероятностное пространство называется *дискретным* и сокращенно задается парой $(\Omega, \{p_\omega\}_{\omega\in\Omega})$, где все вероятности p_ω неотрицательны и $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$.

Событие $A \cap B$ принято обозначать через $A \cdot B$ и называть произведением событий A и B. События A и B называются независимыми, если $\mathbb{P}(A \cdot B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.

Вероятность наступления события A при условии, что произошло событие B обозначают через $\mathbb{P}(A|B)$ и называют *условной вероятностью события A относительно события B*. Имеет место *формула Байеса*:

$$\mathbb{P}(A \cdot B) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(A|B).$$

Если A и B — независимые события, то $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

B.2. Случайные величины

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*, если

$$\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \le x\} \in \mathcal{A} \quad \text{для любого } x \in \mathbb{R}. \tag{B.1}$$

Следовательно, мы можем вычислить вероятность

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\xi \le x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \le x\}) \tag{B.2}$$

того, что случайная величина ξ примет значение, не превосходящее x. Определенная по формуле (B.2) функция $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ называется *функцией распределения* случайной величины ξ.

Поскольку сигма-алгебра $\mathcal{A}$ замкнута относительно разности, то для $a < b$ множество

$$\{\omega \in \Omega : a < \xi(\omega) \le b\} = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \le b\} \setminus \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \le a\}$$

также принадлежит $\mathcal{A}$, и поэтому мы можем вычислить вероятность того, что значение случайной величины ξ принадлежит отрезку $(a, b]$:

$$\mathbb{P}(a < \xi \le b) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : a < \xi(\omega) \le b\}) = F(b) - F(a).$$

Замечание. На практике встречаются случайные величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, область определения Ω которых нам точно неизвестна. Все что мы знаем про такие случайные — это их функции распределения. Например, цена акций фирмы XYZ зависит от многих факторов, о некоторых из которых мы даже не догадываемся. Но считается, что изменение цены этих акций за фиксированный период (месяц или год) есть случайная величина, распределенная по нормальному закону (см. ниже).

Знания функции распределения как раз достаточно, чтобы определить *математическое ожидание* ограниченной случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ (существует константа $D \in \mathbb{R}$, что $\xi(\omega) < D$ для всех $\omega \in \Omega$) по формуле

$$E(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\delta \to 0_+} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\delta\, \mathbb{P}(\{k\delta < \xi \le (k+1)\delta\}). \tag{B.3}$$

Существование предела в формуле (B.3) обосновывается в рамкам *теории интегрирования Лебега*,[37] знание которой читателем этой книги не предполагается. Отметим также, что в данном учебном пособии рассматриваются только такие случайные величины, вычисление математического ожидания которых сводится к вычислению интеграла Римана, изучаемого в математическом анализе, или к вычислению суммы конечного числа слагаемых.

Для дискретного вероятностного пространства, когда множество Ω счетное или конечное, условие (B.1) выполняется для любой функции $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$. Это значит, что любая функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ является (*дискретной*) случайной величиной и ее *математическое ожидание* вычисляется по формуле:

$$E(\xi) = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)\, p_\omega,$$

[37] Анри Лебег (1875–1941) — основоположник современной теории интегрирования.

при условии, что ряд в правой части формулы сходится абсолютно, т. е.

$$\sum_{\omega\in\Omega} |\xi(\omega)|\, p_\omega < \infty.$$

Если рассматриваемый ряд не сходится абсолютно, то говорят, что математического ожидания не существует[38]. Понятно, что математическое ожидание всегда существует, если множество Ω конечное.

Если функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ является непрерывно дифференцируемой[39], то говорят, что случайная величина имеет *плотность* $f(x) = F'(x)$ и тогда

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du, \tag{B.4}$$

$$\mathbb{P}(a \le \xi \le b) = \int_{a}^{b} f(u)\, du, \tag{B.5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, du = 1, \tag{B.6}$$

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u f(u)\, du. \tag{B.7}$$

Говорят, что *математическое ожидание* $E(\xi)$ существует, если интеграл в определении $E(\xi)$ сходится абсолютно, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u| f(u)\, du < \infty.$$

Если для функции $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функция $\phi(\xi(\omega))$ также является случайной величиной, то

$$E(\phi(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) f(u)\, du \tag{B.8}$$

при условии, что интеграл сходится абсолютно.

[38] Требование абсолютной сходимости связано с тем, что математическое ожидание не должно зависеть от порядка суммирования. По теореме Римана можно переставить слагаемые неабсолютно сходящегося ряда таким образом, чтобы преобразованный ряд имел своей суммой любое заданное число, конечное или равное $\pm\infty$.

[39] На самом деле нам достаточно предположить, что $F(x)$ непрерывно дифференцируема почти всюду (например, за исключением конечного числа точек).

Когда для случайной величины ξ^k существует математическое ожидание $E(\xi^k)$, то говорят, что случайная величина ξ обладает k-м *моментом*, где $k \in \mathbb{Z}_{++}$. Понятно, что первый момент — это математическое ожидание. Особый интерес представляет второй момент $\sigma^2(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} E((\xi - E(\xi))^2)$ *центрированной* случайной величины $\xi - E(\xi)$, который называется *дисперсией* случайной величины ξ. Положительный квадратный корень $\sigma(\xi)$ из дисперсии $\sigma^2(\xi)$ называется *стандартным отклонением* случайной величины ξ.

Функция $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *совместного распределения* случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n : \Omega \to \mathbb{R}$ определяется следующим образом:

$$F(x) = F(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega) \leq x_1, \ldots, \xi_n(\omega) \leq x_n\})$$

Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называются *независимыми*, если

$$F(x) = F_1(x_1) \times \cdots \times F_n(x_n) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^n,$$

где F_j — функция распределения случайной величины x_j, $j = 1, \ldots, n$. Если независимые случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ имеют матожидания, то $E(\xi_1 \times \xi_2 \times \cdots \times \xi_n) = E(\xi_1) \times E(\xi_2) \times \cdots \times E(\xi_n)$.

Количественно степень зависимости двух случайных величин ξ_1 и ξ_2, выражается *коэффициентом корреляции*

$$\rho(\xi_1, \xi_2) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sigma(\xi_1)\, \sigma(\xi_2)},$$

где величина

$$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) \stackrel{\text{def}}{=} E((\xi_1 - E(\xi_1))(\xi_2 - E(\xi_2))) = E(\xi_1 \xi_2) - E(\xi_1) E(\xi_2)$$

называется *ковариацией* между ξ_1 и ξ_2. Заметим, что коэффициент корреляции можно вычислить только в том случае, когда $\sigma(\xi_1) \neq 0$ и $\sigma(\xi_2) \neq 0$. Важно также отметить, что всегда $-1 \leq \rho(\xi_1, \xi_2) \leq 1$. Как знак, так и абсолютная величина коэффициента корреляции характеризуют зависимость между случайными величинами. Если коэффициент корреляции $\rho(\xi_1, \xi_2)$ равен нулю, то говорят, что случайные величины ξ_1 и ξ_2 *некоррелированы*. Независимые случайные величины некоррелированы, но некоррелированные случайные величины не обязательно являются независимыми.

В.3. Некоторые часто используемые распределения

Распределение Пуассона

Дискретная случайная величина ξ, принимающая неотрицательные целые значения, имеет *распределение Пуассона* π_α со средним α, если $\mathbb{P}(\xi = k) = \pi_\alpha(k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{k!}\alpha^k$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$.

Например, ξ — это количество событий (таких, как количество элементарных частиц, зарегистрированных счетчиком Гейгера, или количество дорожных проишествий в заданном регионе) некоторого Пуассоновского процесса, произошедших за фиксированный период времени.

Равномерное распределение

Равномерно распределенная на отрезке $[a, b]$ случайная величина ξ, принимает значение из отрезка $[x, y]$, где $a \leq x \leq y \leq b$, с вероятностью $(y - x)/(b - a)$. Поэтому функции распределения и плотности такой случайной величины следующие:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 1, & x > b, \end{cases} \quad \text{и} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$ случайной величины ξ следующие:

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{a+b}{2}, \\ \sigma^2(\sigma) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^2}{24}. \end{aligned}$$

Нормальное распределение

Функция плотности нормального распределенения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Когда мы пишем $\xi \sim N(\mu, \sigma)$, то понимаем, что случайная величина ξ «имеет нормальное распределение со средним μ и стандартным отклонением σ». Это объясняется тем, что $E(\xi) = \mu$ и $\sigma^2(\xi) = \sigma^2$.

Если $\xi \sim N(\mu, \sigma)$, то случайная величина $(\xi - \mu)/\sigma$ имеет *стандартное нормальное распределение* $N(0, 1)$.

Некоторые свойства стандартного нормального распределения приведены на рис. В.1. Помните, что общая площадь фигуры под графиком функции плотности любого имеющего плотность распределения равна 1. На каждой из трех диаграмм рис. В.1 указана площадь криволинейной трапеции, которая сверху ограничена графиком функции плотности стандартного нормального распределения, и основанием которой является указанный на данной диаграмме отрезок.

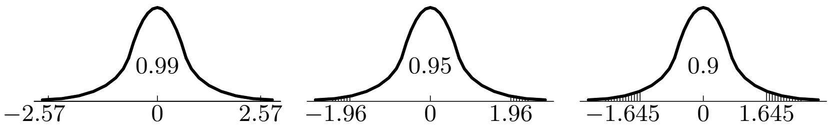


Рис. В.1. Свойства стандартного нормального распределения $N(0, 1)$

Приложение C
Графы

Графом называется пара $G = (V, E)$, где V — конечное множество, элементы которого называются *вершинами*, а E — это множество *ребер*, каждое из которых представляется парой (v, w) вершин из V. Порядок следования вершин не имеет значения: пары (v, w) и (w, v) задают одно и то же ребро. Если $e = (v, w) \in E$, то говорят, что вершины v и w *смежны*, и что ребро e *инцидентно* вершинам v и w. *Степенью* вершины v, обозначается $\deg(v)$, в графе G называется количество инцидентных ей ребер. В качестве упражнения докажите, что сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер: $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$[40].

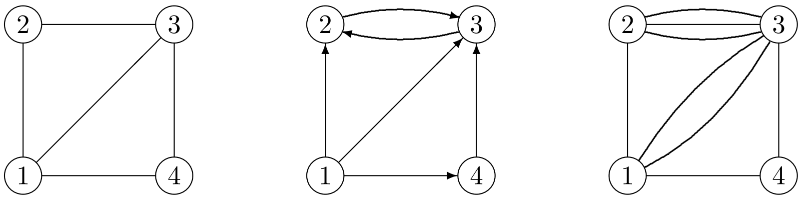
Графы небольшого размера удобно представлять рисунком на плоскости. Например, граф $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = \{1, 2, 3, 4\}$ и множеством ребер $E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (3, 4)\}$ изображен на рис. C.1, а. Здесь степень вершин 1 и 3 равна 3, а степень вершин 2 и 4 равна 2.

Ориентированным графом (*орграфом*) называется пара $G = (V, E)$, где V — конечное множество вершин, а E — это множество упорядоченных пар вершин. Теперь элементы $e = (v, w)$ множества E называются *дугами*. Также говорят, что дуга $e = (v, w)$ выходит из вершины v и входит в вершину w. *Степенью исхода* вершины v, обозначается $\mathrm{outdeg}(v)$, называется количество дуг, выходящих из v. *Степенью за-*

[40] Это равенство известно как *лемма о рукопожатиях* из за следующей задачи. На приеме каждый гость подсчитывает, сколько кукопожатий он сделал. По окончании приема вычисляется сумма рукопожатий каждого из гостей. Нужно доказать, что полученная сумма *четна*.

хода вершины v, обозначается $\mathrm{indeg}(v)$, называется количество дуг, входящих в v. На рис. С.1, б изображен орграф $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = \{1, 2, 3, 4\}$ и множеством дуг $E = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$.

Иногда полезно рассматривать *мультиграфы*, т. е. графы (орграфы) с кратными (или параллельными) ребрами (дугами). Пример мультиграфа изображен на рис. С.1, в.



а — граф б — орграф в — мультиграф

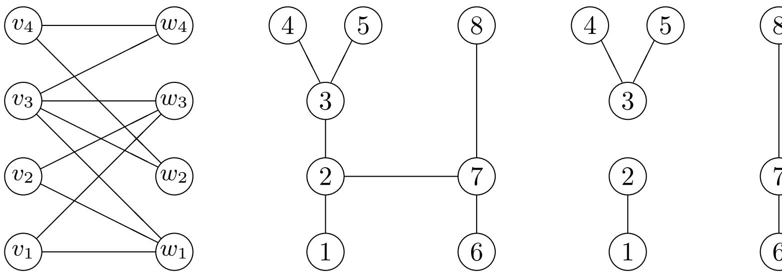
Рис. С.1. Примеры графов

Последовательность вершин $P = (s = v_0, v_1, \ldots, v_k = t)$ называется *путем* из вершины s в вершину t *длины* k в графе (орграфе) $G = (V, E)$, если $(v_{i-1}, v_i) \in E$ для $i = 1, \ldots, k$. Путь называется *простым*, если в нем нет повторяющихся вершин. Замкнутый (когда $s = t$) путь называют *циклом. Простой цикл* не имеет повторяющихся вершин.

С.1. Специальные типы графов

Граф $G = (V, E)$ называется *двудольным*, если его множество вершин V можно разбить на два подмножества (доли) V_1 и V_2 ($V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V$) так, что каждое ребро из E инцидентно одной вершине из V_1 и одной вершине из V_2, т. е., если $(v, w) \in E$, то $v \in V_1$, а $w \in V_2$. Пример двудольного графа изображен на рис. С.2, а. Нетрудно доказать, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.

Граф (орграф) G называется *полным*, если любая (упорядоченная) пара его вершин соединена ребром (дугой). Полный



а — двудольный граф б — дерево в — лес (из 3-х деревьев)

Рис. C.2. Примеры специальных графов

граф с $V = \{1, \ldots, n\}$ принято обозначать через K_n. Двудольный граф $G = (V_1 \cup V_2, E)$ называется *полным*, если любая вершина из V_1 соединена ребром с любой вершиной из V_2. Полный двудольный граф с $V_1 = \{1, \ldots, m\}$ и $V_2 = \{1, \ldots, n\}$ принято обозначать через $K_{m,n}$.

Еще одним известным классом графов являются *деревья*. Граф называется *связным*, если между любыми его двумя вершинами имеется путь. *Дерево* — это связный граф без циклов. Пример дерева изображен на рис. C.2, б. *Лес* — это граф без циклов (или ациклический граф). Можно также сказать, что лес — это множество вершинно не пересекающихся деревьев. Пример леса изображен на рис. C.2, в.

Теорема C.1. *Для графа $G = (V, E)$ следующие условия эквивалентны:*

1) *G является деревом;*
2) *G — связный граф с $|V| - 1$ ребрами;*
3) *G не содержит циклов, но при добавлении любого нового ребра к G в нем появится единственный цикл.*

Орграф $G = (V, E)$ называется *ориентированным деревом* (или *ордеревом*), если $|E| = |V| - 1$ и в каждую вершину входит не более одной дуги. Единственная вершина в ордереве, в которую не входят дуги, называется *корнем*. Вершины, из которых не выходят дуги, называются *листьями*.

Покрывающим (или *остовным*) *деревом* (соотв., *ордеревом*) графа (соотв., орграфа) $G = (V, E)$ называется такой его подграф $T = (V, E')$, который является деревом (соотв., ордеревом).

Список обозначений

$\mathbb{R}$ — поле действительных чисел

$\mathbb{R}_+$ — множество неотрицательных действительных чисел

$\mathbb{R}_{++}$ — множество положительных действительных чисел

2^N — множество всех подмножеств множества N

$X \pm Y \overset{\text{def}}{=} \{x \pm y : x \in X,\ y \in Y\}$

$X \times Y \overset{\text{def}}{=} \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}$

$\prod_{i=1}^n X_i \overset{\text{def}}{=} X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n\}$

$X^n \overset{\text{def}}{=} \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in X\}$

$X^A \overset{\text{def}}{=} \{(x_{a_1}, \ldots, x_{a_n}) : x_{a_1}, \ldots, x_{a_n} \in X\}$ для $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

$X_{-i} \overset{\text{def}}{=} X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n$, если $X = \prod_{j=1}^n X_j$

$x_{-i} \overset{\text{def}}{=} (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in X_{-i}$

$(y, x_{-i}) \overset{\text{def}}{=} (x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in X$ для $y \in X_i$ и $x_{-i} \in X_{-i}$

$\{a_i\}_{i=1}^n \overset{\text{def}}{=} \{a_1, \ldots, a_n\}$

$\{a_i\}_{i \in N} \overset{\text{def}}{=} \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}\}$ для $N = \{i_1, \ldots, i_n\}$

$\mathrm{conv} X$ — выпуклая оболочка множества векторов $X \subseteq \mathbb{R}^n$

I — единичная матрица

A^T — транспонированная матрица для матрицы A

0 — нулевой вектор, нулевая матрица

e_i — i-й единичный орт $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 1)^T$ с единицей на i-м месте

e — вектор $(1, 1 \ldots, 1)^T$

A_I^J — подматрица матрицы A, образованная элементами, которые лежат в строках множества I и столбцах множества J

A_I — подматрица матрицы A, образованная элементами, которые лежат в строках множества I

A^J — подматрица матрицы A, образованная элементами, которые лежат в столбцах множества J

$\|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^T x}$ — (евклидова) норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$

$G = (V, E)$ — граф (орграф) с множеством вершин V и множеством ребер (дуг) E

$E(S, T)$ — множество ребер неориентированно графа $G = (V, E)$ с одним концом в S, а другим концом в T; или множество дуг ориентированного графа $G = (V, E)$, которые выходят из S и входят в T

$f(n) = O(g(n))$, если существует такая константа $c > 0$, что $f(n) \le cg(n)$ для достаточно больших целых n (например, $5n^2 + 7n + 100 = O(n^2)$)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, где множество Ω называется пространством элементарных событий или выборочным пространством, $\mathcal{A}$ — алгебра или σ-алгебра подмножеств из Ω (элементы множества $\mathcal{A}$ называются событиями), $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ — вероятностная мера (для $\omega \in \Omega$ и $S \in \mathcal{A}$ значение $\mathbb{P}(S)$ есть вероятность того, что $\omega \in S$)

$\Delta(\Omega)$ — семейство всех вероятностных мер на множестве Ω

$E(\xi)$ — математическое ожидание случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, $E(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$

Литература

1. Г. Н. Дюбин, В. Г. Суздаль. Введение в прикладную теорию игр. -М.: Наука, 1981.
2. Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн. Теория игр и экономическое поведение. -М.: Наука, 1970.
3. Х. Никайдо. Выпуклые структуры и математическая экономика. -М.: Мир, 1972.
4. Г. Оуэн. Теория игр. -М.: Мир, 1971.
5. R. A. Aumann. Lectures on Game Theory. Westview Press, Inc., Boulder, Colorado, 1989.
6. D. Fudenberg, J. Tirole. Game Theory, MIT Press, 1991.
7. R. Gibbons. Game theory for applied economists. Princeton University Press, 1992.
8. A. Mas-Colell, M. D. Whinston, J. R. Green. Microeconomic Theory. Oxford University Press, 1995.
9. N. Nizan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. V. Vazirany. Algorithmic Game Theory. Cambridge University Press, 2007.
10. M. Osborn, R. Rubinstein. A Course in Game Theory. MIT Press, 1994.

Предметный указатель

Оглавление