(а) Всякое вхождение переменной в элементарную формулу или терм свободно.

(б) Всякое вхождение переменной в или , где звёздочка – любая связка свободно (соответственно связано в точности тогда, когда свободно (соответственно связано соответствующее вхождение в .

(в) Всякое вхождение переменой в xi в cвязано вхождение остальных переменных таких же переменных в F.

Формула *F* называется областью действия кванторов для таких форм: .

Всякое вхождение xi в пределов области действия кванторов называется связанным действием в противном случае называется свободным.

1. (\*)

Определения замкнутой формулы и замыкания

Формула называется замкнутой, если она не содержит свободных вхождений переменных (это формула истина или ложна). Пример:

Пусть дана формула *F* исчисления предикатов .

Высказывание – это пропозициональная буква , где A1, A2.

Тавтология – это тождественно истинная пропозициональная формул.

при любых A1, A2 выражение истинно.

┐, ⊃

┐, ∧

┐, ∨

Т. 1. Всякая истинностная функция порождается некоторой пропозициональной формулой, содержащей связки ┐(не) ∧(и) ∨(или).

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **x** | **y** | **z** |  |  | **A1 A2 A3** |  |
| 1 | И | И | И | Л |  |  |  |
| 2 | И | И | Л | И |  | (A1 ∧ A2 ∧ ┐A3) | ∨ |
| 3 | И | Л | И | И |  | (A1 ∧ ┐A2 ∧ A3) | ∨ |
| 4 | И | Л | Л | Л |  |  |  |
| 5 | Л | И | И | И |  | (┐A1 ∧ A2 ∧ A3) |  |
| 6 | Л | И | Л | Л |  |  |  |
| 7 | Л | Л | И | Л |  |  |  |
| 8 | Л | Л | Л | Л |  |  |  |

(A1 ∧ A2 ∧ ┐A3) ∨ (A1 ∧ ┐A2 ∧ A3) ∨ (┐A1 ∧ A2 ∧ A3)

Какова бы не была таблица с n-входами, существует пропозициональная формула от n-переменных, которая принимает требуемые значения.

Доказательство. Рассмотрим для 3. Для каждого i из x, y, z строим

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| A1, A2, … An | f(A1, A2, … An) |  |  |  |
|  | И | } |  | ∨ |
| A1 Л… | И |  |  | ∨ |
|  | И |  |  | ∨ |

Т. 2. Если *A* и *A* ⊃ *B* тавтологии, то и *B* тавтология.

Доказательство.

Пусть A1, A2, … An пропозициональные буквы *A* и *B* входящие <…> и *A* ⊃ *B* тоже принимает значение истина <…> т. к. если предположить, что *A* принимает значение истины <…>

Т. 3. Пусть пропозициональная форма *A* – тавтология, пусть A1, A2, … Ak – некоторые входящие в неё пропозициональные буквы. *B*1, *B*2, … *B*k – пропозициональные формы. Пусть A1 из *A* заменой всех вхождений Ai на *B*i, где i = 1..k. <…> (подстановка в тавтологию приводит к тавтологии A1 ∧ A2 ∨ A3 ⊃ A4).

Доказательство.

Пусть *A*=A1⊃(A2⊃A1). Теперь вместо А1 подставим *B*1, то получим *A*1 = (A3 ∨ A4) ⊃ (A2 ⊃ (A3 ∨ A4))

Т. 4. Пусть дана формула *A*. *A*1 – подформула формулы *A*. Формула *B* получается заменой *A*1 на *B*1, где *B*1 – формула.

Тогда (*A*1≡*B*1)⊃(*A*≡*B*) является тавтологией.

Доказательство. Рассмотрим различные наборы пропозициональных букв, входящих в \* и будем вычислять

1. A и *B* – различны. Тогда *A*1 и *B*1 – различны, т. к. <…>, следовательно ложь влечет ложь, т. е. имеем истину.
2. A и B – совпадают. Тогда *A*1 и *B*1 – совпадают, т. е. имеем истину.

Следствие. Если условия Т. 4 справедливы и *А*1 и *В*1 – тавтология, то *А* ≡ *В* – тавтология.

Определение. Формула В называется логическим следствием формулы А, если А⊃В – тавтология.

Определение. Формула В называется логически эквивалентной, если А≡В – тавтология.

Следствие. Свойство эквивалентной логически – транзитивно, то С – л. э. А.

Формальная теория (исчисления высказываний) считается определённой, если:

1. Задано множество символов (счётное). Конечная последовательность символов называется выражением.
2. Задано множество формул, которое является подмножеством выражений (задано конструктивно).
3. Задано множество аксиом формул, о всякое формуле можно сказать аксиома она или не аксиома, тогда это называется L-аксиоматическая теория.
4. Задана некоторая конечная аксиоматическая <> правил вывода. Пусть есть В, В1, … Вn. Если В связано данным отношением В1, … Вn, то говорят, что В, В1, … Вn выводимо по данному правилу, и В называется непосредственным следствием данных формул по данному правилу.

Формальная теория исчисления высказываний по данному правилу (классическая).

1. Символы: А1, А2, … , ┐, ~~∧~~, ~~∨~~, ⊃, ~~≡~~, ( )
2. Формулы:
   1. А) А1, А2… - формулы.
   2. Б) если А – формула, то (┐А) – формула.
   3. В) если А и В – формулы, то (А⊃В) – формулы.
3. Множество аксиом задаются схемами. Пусть А, В, С – произвольные формулы.

А(1) А⊃(В⊃С)

А(2) (А⊃(В⊃С))⊃((А⊃В)⊃(А⊃С)

А(3) (┐В⊃┐А)⊃((┐В⊃А)⊃В)

А(1) (А1⊃(А2⊃А1)

А(2) *А*=(А3⊃А2); В=А2⊃А1; С=А2 (А3⊃А2)⊃((А2⊃А1)⊃А2))⊃<...>

1. Modus ponens (MP). Из формул А и А⊃В непосредственно выводима формула В.

Вывод в данной формальной теории – это всякая последовательность формул В1, В2, … , Вn, обладающая свойством: каждая формула Bi либо аксиома, либо непосредственно выводима по одному из правил вывода из предыдущих формул.