# Дифференциальные уравнения второго порядка

## §1. Основные понятия. Уравнения с разделяющимися переменными

(1.1) связывает независимую переменную , искомую функцию и её производную — ДУ 1-го порядка.

Если (1.1) можно записать в виде , то оно разрешимо относительно производной, . Общая форма: .

Решение (интеграл) ДУ 1-го порядка — любая , которая при подстановке не обращает его в тождество. Процесс нахождения решений — интегрирование уравнения.

Задача Коши — отыскание решения ДУ 1-го порядка, удовлетворяющее н. у. .

Геом. смысл: поиск интегральной кривой уравнения 1.1, проходящей через точку .

Общее решение уравнения 1.1: (1.2.), где — произвольная постоянная, что 1) при любом она является решением, 2) для допустимого н. у. найдётся такое , что .

В некоторых случаях общее решение ДУ приходится записывать в неявном виде — это общий интеграл уравнения.

Геом. смысл: общее решение — семейство интегральных кривых на плоскости .

Частное решение ДУ 1-го порядка: , получаемое из (1.2) при .

Частный интеграл уравнения 1.1 .

Теорема 2.1. ] в функция и её частная производная непрерывны в области D плоскости . Тогда для любой т. и притом единственное решение этого уравнения, удовлетворяющего н. у. .

(1.3) — ДУ с разделяющимися переменными → (1.4) — с разделёнными примерами → общим интегрированием .

2.1.1. а) — решение ДУ.

б)

в)

2.1.4. Решить задачу Коши: а) .

б) .

2.1.6. а) .

б) семейство парабол определяется . Исключив , получим

2.1.15. .

2.1.22. .

## §2. Однородные дифференциальные уравнения

— однородная функция степени , где — целое, — любое.

В частности, — однородная нулевой степени, если .

ДУ (2.1) однородное, если — однородные функции одинаковой степени.

2.1 может быть приведено к виду (2.2), которое преобразуется при помощи замены переменной , где — новая неизвестная функция (можно ).

2.2.1. а) имеет вид 2.1; — однородные функции одной степени; — общий интеграл; (см. б)).

б) — частное решение.

в)

2.2.5. — однородное

## §3. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли

ДУ вида (3.1), где — непрерывные функции (в частности — постоянные), называются линейным уравнением 1-го порядка. — уравнение, линейное относительно .

Если , то 3.1 — линейное однородное уравнение.

Решение 3.1 ищется в виде , где и — неизвестные функции от . Одну из этих функций можно выбрать произвольно, тогда 2-ая определится из уравнения 3.1.

Также 3.1 можно решить методом Лагранжа.

, где где — непрерывные функции, называется уравнением Бернулли.

Оно приводится к однородному с помощью подстановки .

2.3.1. а) имеет вид 3.1 → линейное.

Метод Бернулли.

(3.3), подберём — общее решение.

## §4. Уравнения в полных дифференциалах

ДУ (4.1) называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции , т. е. (4.2).

4.1 с учётом 4.2 можно записать в виде , поэтому его общий интеграл имеет вид .

Чтобы 4.1 было УПД, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (4.3).

может быть найдена из системы уравнений , либо по формуле (4.4), где — некоторая фиксированная точка из области непрерывности из частных производных.

2.4.1. — общее решение; — частный интеграл.

2.4.5. — общее решение.