Cyfrowe przetwarzanie sygnałów

D. Robert Iskander & Cezary Sielużycki

Katedra Inżynierii Biomedycznej PWr

Wykład 3

Dodawanie sygnałów sinusoidalnych

Niech

$$x_1(t) = 2\cos(\omega t + \pi/4)$$

oraz

$$x_2(t) = 3\cos(\omega t + \pi/2)$$

Czy poniższa nierówność nas dziwi?

$$x_1(t) + x_2(t) \neq 5\cos(\omega t + 3\pi/4)$$

Dodawanie sygnałów sinusoidalnych

Niech

$$x_1(t) = 2\cos(\omega t + \pi/4)$$

oraz

$$x_2(t) = 3\cos(\omega t + \pi/2)$$

Czy poniższa nierówność nas dziwi?

$$x_1(t) + x_2(t) \neq 5\cos(\omega t + 3\pi/4)$$

A czy poniższe równanie jest prawdziwe?

$$\sum_{k=1}^{K} A_k \cos(\omega t + \varphi_k) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Dodawanie sygnałów sinusoidalnych

Niech

$$x_1(t) = 2\cos(\omega t + \pi/4)$$

oraz

$$x_2(t) = 3\cos(\omega t + \pi/2)$$

Czy poniższa nierówność nas dziwi?

$$x_1(t) + x_2(t) \neq 5\cos(\omega t + 3\pi/4)$$

A czy poniższe równanie jest prawdziwe?

$$\sum_{k=1}^{K} A_k \cos(\omega t + \varphi_k) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Tak. Sprawdźmy ...

Dodawanie wskazów

Dla zbioru amplitud zespolonych $\{X_k = A_k e^{j\varphi_k} \in \mathbb{C}\}$ zachodzi:

$$\sum_{k=1}^{K} X_k = \sum_{k=1}^{K} A_k e^{j\varphi_k} = A e^{j\varphi}$$

Dodawanie wskazów

Dla zbioru amplitud zespolonych $\{X_k = A_k e^{j\varphi_k} \in \mathbb{C}\}$ zachodzi:

$$\sum_{k=1}^{K} X_k = \sum_{k=1}^{K} A_k e^{j\varphi_k} = A e^{j\varphi}$$

oraz

$$\sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}(X_k) = \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{K} X_k \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}(A_k e^{j\varphi_k}) = \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{K} A_k e^{j\varphi_k}$$

Dodawanie wskazów

Dla zbioru amplitud zespolonych $\{X_k = A_k e^{j\varphi_k} \in \mathbb{C}\}$ zachodzi:

$$\sum_{k=1}^{K} X_k = \sum_{k=1}^{K} A_k e^{j\varphi_k} = A e^{j\varphi}$$

oraz

$$\sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}(X_k) = \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{K} X_k \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}(A_k e^{j\varphi_k}) = \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{K} A_k e^{j\varphi_k}$$

Zatem

$$\sum_{k=1}^{K} A_k \cos(\omega t + \varphi_k) = \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}\left(A_k e^{j(\omega t + \varphi_k)}\right)$$

Dodawanie wskazów

Dla zbioru amplitud zespolonych $\{X_k = A_k e^{j\varphi_k} \in \mathbb{C}\}$ zachodzi:

$$\sum_{k=1}^{K} X_k = \sum_{k=1}^{K} A_k e^{j\varphi_k} = A e^{j\varphi}$$

oraz

$$\sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}(X_k) = \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{K} X_k \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}(A_k e^{j\varphi_k}) = \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{K} A_k e^{j\varphi_k}$$

Zatem

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{K} A_k \cos(\omega t + \varphi_k) &= \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}\left(A_k e^{j(\omega t + \varphi_k)}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{K} A_k e^{j\varphi_k} e^{j\omega t}\right)\end{aligned}$$

Dodawanie wskazów

Dla zbioru amplitud zespolonych $\{X_k = A_k e^{j\varphi_k} \in \mathbb{C}\}$ zachodzi:

$$\sum_{k=1}^{K} X_k = \sum_{k=1}^{K} A_k e^{j\varphi_k} = A e^{j\varphi}$$

oraz

$$\sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}(X_k) = \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{K} X_k \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}(A_k e^{j\varphi_k}) = \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{K} A_k e^{j\varphi_k}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{K} A_k \cos(\omega t + \varphi_k) &= \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}\left(A_k e^{j(\omega t + \varphi_k)}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{K} A_k e^{j\varphi_k} e^{j\omega t}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(A e^{j\varphi} e^{j\omega t}\right) \end{aligned}$$

Dodawanie wskazów

Dla zbioru amplitud zespolonych $\{X_k = A_k e^{j\varphi_k} \in \mathbb{C}\}$ zachodzi:

$$\sum_{k=1}^{K} X_k = \sum_{k=1}^{K} A_k e^{j\varphi_k} = A e^{j\varphi}$$

oraz

$$\sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}(X_k) = \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{K} X_k \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}(A_k e^{j\varphi_k}) = \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{K} A_k e^{j\varphi_k}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{K} A_k \cos(\omega t + \varphi_k) &= \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}\left(A_k e^{j(\omega t + \varphi_k)}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{K} A_k e^{j\varphi_k} e^{j\omega t}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(A e^{j\varphi} e^{j\omega t}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(A e^{j(\omega t + \varphi)}\right)
\end{aligned}$$

Dodawanie wskazów

Dla zbioru amplitud zespolonych $\{X_k = A_k e^{j\varphi_k} \in \mathbb{C}\}$ zachodzi:

$$\sum_{k=1}^{K} X_k = \sum_{k=1}^{K} A_k e^{j\varphi_k} = A e^{j\varphi}$$

oraz

$$\sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}(X_k) = \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{K} X_k \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}(A_k e^{j\varphi_k}) = \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{K} A_k e^{j\varphi_k}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{K} A_k \cos(\omega t + \varphi_k) &= \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}\left(A_k e^{j(\omega t + \varphi_k)}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{K} A_k e^{j\varphi_k} e^{j\omega t}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(A e^{j\varphi} e^{j\omega t}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(A e^{j(\omega t + \varphi)}\right) = A \cos(\omega t + \varphi)
\end{aligned}$$

Dodawanie wskazów

$$x_1(t) = 2\cos(\omega t + \pi/4) = \mathrm{Re}\left(2e^{j\pi/4}e^{j\omega t}\right)$$

oraz

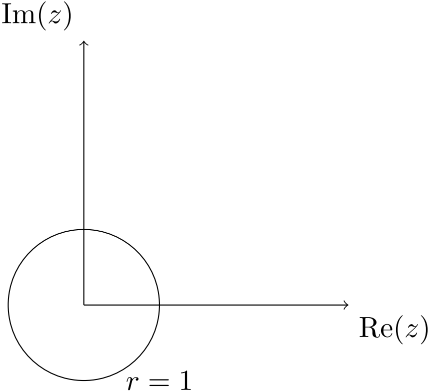
$$x_2(t) = 3\cos(\omega t + \pi/2) = \mathrm{Re}\left(3e^{j\pi/2}e^{j\omega t}\right)$$

Dodawanie wskazów

$$x_1(t) = 2\cos(\omega t + \pi/4) = \mathrm{Re}\left(2e^{j\pi/4}e^{j\omega t}\right)$$

oraz

$$x_2(t) = 3\cos(\omega t + \pi/2) = \mathrm{Re}\left(3e^{j\pi/2}e^{j\omega t}\right)$$

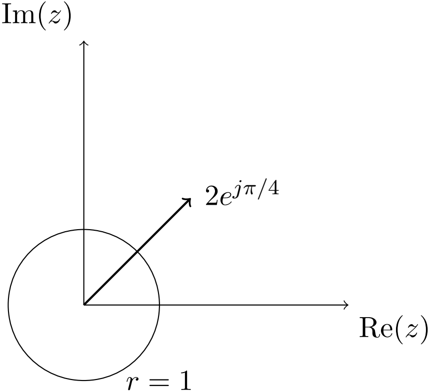


Dodawanie wskazów

$$x_1(t) = 2\cos(\omega t + \pi/4) = \mathrm{Re}\left(2e^{j\pi/4}e^{j\omega t}\right)$$

oraz

$$x_2(t) = 3\cos(\omega t + \pi/2) = \mathrm{Re}\left(3e^{j\pi/2}e^{j\omega t}\right)$$

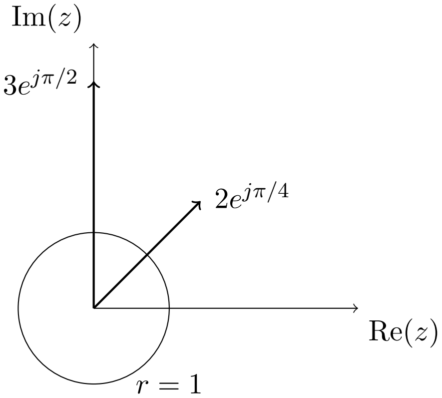


Dodawanie wskazów

$$x_1(t) = 2\cos(\omega t + \pi/4) = \mathrm{Re}\left(2e^{j\pi/4}e^{j\omega t}\right)$$

oraz

$$x_2(t) = 3\cos(\omega t + \pi/2) = \mathrm{Re}\left(3e^{j\pi/2}e^{j\omega t}\right)$$



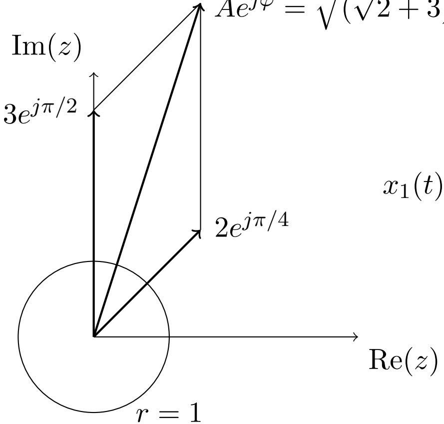
Dodawanie wskazów

$$x_1(t) = 2\cos(\omega t + \pi/4) = \mathrm{Re}\left(2e^{j\pi/4}e^{j\omega t}\right)$$

oraz

$$x_2(t) = 3\cos(\omega t + \pi/2) = \mathrm{Re}\left(3e^{j\pi/2}e^{j\omega t}\right)$$

$$Ae^{j\varphi} = \sqrt{(\sqrt{2}+3)^2 + 2}\; e^{j\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}} = 4.635e^{j1.261}$$



$$x_1(t) + x_2(t) = \mathrm{Re}\left(4.635e^{j1.261}e^{j\omega t}\right)$$

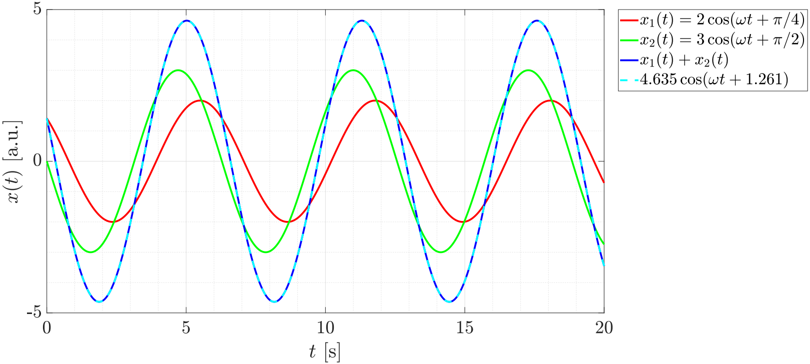
$$= 4.635\cos(\omega t + 1.261)$$

Dodawanie ...

Czy na pewno dobrze policzyliśmy? Sprawdźmy w MATLABie.

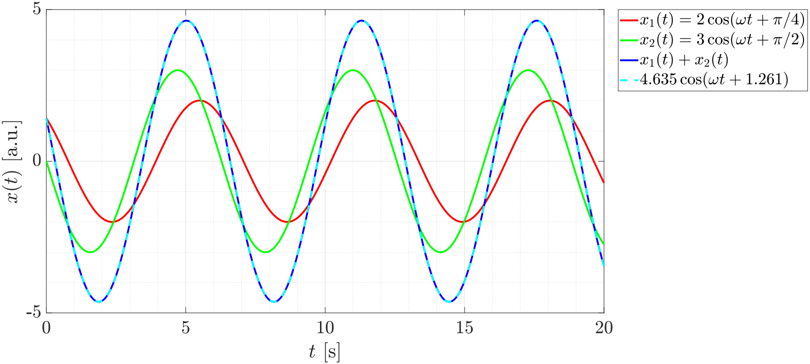
Dodawanie . . .

Czy na pewno dobrze policzyliśmy? Sprawdźmy w MATLABie.

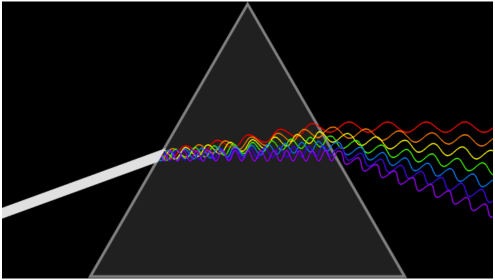


Dodawanie . . .

Czy na pewno dobrze policzyliśmy? Sprawdźmy w MATLABie.



Zadanie domowe: Pokontempluj tę animację dodawania wskazów.



Źródło: Lucas Vieira, Wikipedia

Nasz dzisiejszy bohater

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) — francuski matematyk i fizyk. Warto się z nim zaprzyjaźnić.

Transformacja Fouriera: czas czy częstotliwość?

Transformata Fouriera $X(\omega)$ to wynik *transformacji* Fouriera sygnału $x(t)$:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t$$

Transformacja Fouriera: czas czy częstotliwość?

Transformata Fouriera $X(\omega)$ to wynik *transformacji* Fouriera sygnału $x(t)$:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

Dla $f = \frac{\omega}{2\pi}$:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}\mathrm{d}t$$

Transformacja Fouriera: czas czy częstotliwość?

Transformata Fouriera $X(\omega)$ to wynik *transformacji* Fouriera sygnału $x(t)$:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

Dla $f = \frac{\omega}{2\pi}$:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t$$

$X(f)$ to współczynniki *zespolone* (amplitudy zespolone), zatem zawierają informację o amplitudzie rzeczywistej (tj. o module) oraz o fazie.

Transformacja Fouriera: czas czy częstotliwość?

Transformata Fouriera $X(\omega)$ to wynik *transformacji* Fouriera sygnału $x(t)$:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

Dla $f = \frac{\omega}{2\pi}$:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}\mathrm{d}t$$

$X(f)$ to współczynniki *zespolone* (amplitudy zespolone), zatem zawierają informację o amplitudzie rzeczywistej (tj. o module) oraz o fazie.

Czy $X(f)$ rozróżnia różne chwile czasu?

Transformacja Fouriera: czas czy częstotliwość?

Transformata Fouriera $X(\omega)$ to wynik *transformacji* Fouriera sygnału $x(t)$:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t$$

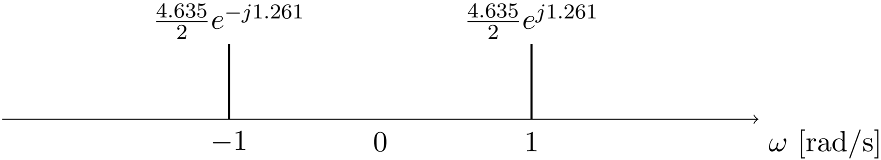
Dla $f = \frac{\omega}{2\pi}$:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} \mathrm{d}t$$

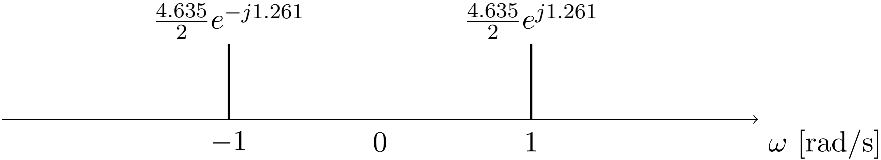
$X(f)$ to współczynniki *zespolone* (amplitudy zespolone), zatem zawierają informację o amplitudzie rzeczywistej (tj. o module) oraz o fazie.

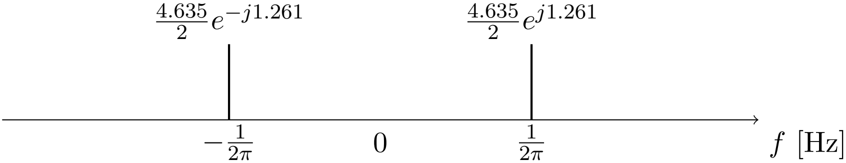
Czy $X(f)$ rozróżnia różne chwile czasu? Nie.

Widmo, czyli *transformata* Fouriera



Widmo, czyli *transformata* Fouriera





Widmo, czyli *transformata* Fouriera

Skąd ta „dziwna” *ujemna* często(tliwo)ść?

Widmo, czyli *transformata* Fouriera

Skąd ta „dziwna" *ujemna* często(tliwo)ść? Z Wykładu 2 pamiętamy, że:

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

Widmo, czyli *transformata* Fouriera

Skąd ta „dziwna" *ujemna* często(tliwo)ść? Z Wykładu 2 pamiętamy, że:

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

Zauważmy, iż:

$$e^{-j\omega t} = \cos(-\omega t) + j\sin(-\omega t) = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$$

Widmo, czyli *transformata* Fouriera

Skąd ta „dziwna" *ujemna* często(tliwo)ść? Z Wykładu 2 pamiętamy, że:

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

Zauważmy, iż:

$$e^{-j\omega t} = \cos(-\omega t) + j\sin(-\omega t) = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$$

Stąd otrzymujemy *wzory odwrotne Eulera*:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$$

Widmo, czyli *transformata* Fouriera

Skąd ta „dziwna" *ujemna* często(tliwo)ść? Z Wykładu 2 pamiętamy, że:

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

Zauważmy, iż:

$$e^{-j\omega t} = \cos(-\omega t) + j\sin(-\omega t) = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$$

Stąd otrzymujemy *wzory odwrotne Eulera*:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$$

oraz

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)$$

Widmo, czyli *transformata* Fouriera

Skąd ta „dziwna" *ujemna* często(tliwo)ść? Z Wykładu 2 pamiętamy, że:

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

Zauważmy, iż:

$$e^{-j\omega t} = \cos(-\omega t) + j\sin(-\omega t) = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$$

Stąd otrzymujemy *wzory odwrotne Eulera*:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$$

oraz

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)$$

A jak by to wyglądało na rysunku?

Widmo, czyli *transformata* Fouriera

Skąd ta „dziwna" *ujemna* często(tliwo)ść? Z Wykładu 2 pamiętamy, że:

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

Zauważmy, iż:

$$e^{-j\omega t} = \cos(-\omega t) + j\sin(-\omega t) = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$$

Stąd otrzymujemy *wzory odwrotne Eulera*:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$$

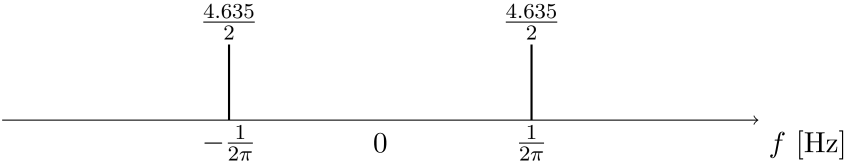
oraz

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)$$

A jak by to wyglądało na rysunku? Tak. Oczywiście x na tym rysunku to nasze ωt.

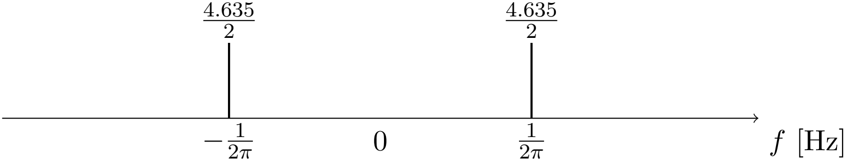
Widmo amplitudowe i widmo fazowe

Widmo amplitudowe $A(f)$ $[\mathrm{a.u.}]$, czyli rzeczywisty *moduł* zespolonych współczynników transformaty Fouriera:

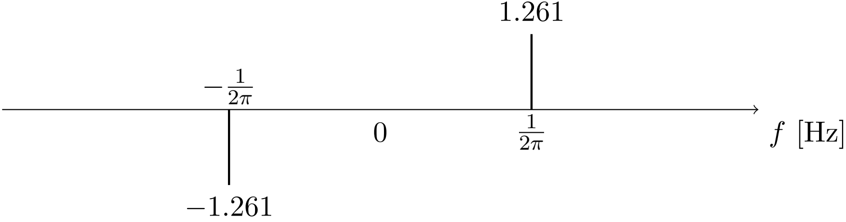


Widmo amplitudowe i widmo fazowe

Widmo amplitudowe $A(f)$ $[\mathrm{a.u.}]$, czyli rzeczywisty *moduł* zespolonych współczynników transformaty Fouriera:



Widmo fazowe $\varphi(f)$ $[\mathrm{rad}]$, czyli rzeczywiste *kąty* (fazy) zespolonych współczynników transformaty Fouriera:



Postać ogólna sygnału rzeczywistego

Sygnał $x(t)$ możemy przedstawić w postaci *liniowej kombinacji*:[1]

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{K} A_k \cos\left(\omega_k t + \varphi_k\right) = A_0 + \sum_{k=1}^{K} A_k \cos\left(2\pi f_k t + \varphi_k\right)$$

gdzie A_0 to przesunięcie o stałą.[2]

[1] Alternatywny termin to *rozwinięcie liniowe*.

[2] Zauważmy, że stała nie oscyluje, zatem jej częstotliwość wynosi $0\ \mathrm{Hz}$.

Postać ogólna sygnału rzeczywistego

Sygnał $x(t)$ możemy przedstawić w postaci *liniowej kombinacji*:[1]

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{K} A_k \cos\left(\omega_k t + \varphi_k\right) = A_0 + \sum_{k=1}^{K} A_k \cos\left(2\pi f_k t + \varphi_k\right)$$

gdzie A_0 to przesunięcie o stałą.[2]

W konwencji zespolonej mamy zatem:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}\left(A_k e^{j\varphi_k} e^{j\omega_k t}\right) = A_0 + \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}\left(A_k e^{j\varphi_k} e^{j2\pi f_k t}\right)$$

[1] Alternatywny termin to *rozwinięcie liniowe*.

[2] Zauważmy, że stała nie oscyluje, zatem jej częstotliwość wynosi 0 Hz.

Postać ogólna sygnału rzeczywistego

Korzystając ze wzorów odwrotnych Eulera, otrzymujemy:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}\left(\frac{A_k e^{j\varphi_k}}{2} e^{j\omega_k t} + \frac{A_k e^{-j\varphi_k}}{2} e^{-j\omega_k t}\right)$$

Postać ogólna sygnału rzeczywistego

Korzystając ze wzorów odwrotnych Eulera, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}\left(\frac{A_k e^{j\varphi_k}}{2} e^{j\omega_k t} + \frac{A_k e^{-j\varphi_k}}{2} e^{-j\omega_k t} \right) \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}\left(\frac{A_k e^{j\varphi_k}}{2} e^{j2\pi f_k t} + \frac{A_k e^{-j\varphi_k}}{2} e^{-j2\pi f_k t} \right) \end{aligned}$$

Postać ogólna sygnału rzeczywistego

Korzystając ze wzorów odwrotnych Eulera, otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}\left(\frac{A_k e^{j\varphi_k}}{2} e^{j\omega_k t} + \frac{A_k e^{-j\varphi_k}}{2} e^{-j\omega_k t}\right) \\
&= A_0 + \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}\left(\frac{A_k e^{j\varphi_k}}{2} e^{j2\pi f_k t} + \frac{A_k e^{-j\varphi_k}}{2} e^{-j2\pi f_k t}\right)
\end{aligned}
$$

I stąd właśnie ów charakterystyczny wygląd widma.

Postać ogólna sygnału rzeczywistego

Korzystając ze wzorów odwrotnych Eulera, otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}\left(\frac{A_k e^{j\varphi_k}}{2} e^{j\omega_k t} + \frac{A_k e^{-j\varphi_k}}{2} e^{-j\omega_k t} \right) \\
&= A_0 + \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}\left(\frac{A_k e^{j\varphi_k}}{2} e^{j2\pi f_k t} + \frac{A_k e^{-j\varphi_k}}{2} e^{-j2\pi f_k t} \right)
\end{aligned}
$$

I stąd właśnie ów charakterystyczny wygląd widma. Przykładowo, dla $K = 2$ oraz $A_0 > A_2 > A_1$ i $f_1 < f_2$: